Atas
Encontro de Investigação em Educação Matemática

EIEM 2024

Matemática para todos no século XXI

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática

EIEM 2024: Matemática para todos no século XXI

Proceedings of the Conference on Research in Mathematics Education

EIEM 2024: Mathematics for all in the 21st century

Editores / Editors:

Maria Helena Martinho, Universidade do Minho, Portugal
Rosa Antónia Ferreira, Universidade do Porto, Portugal
Hélia Jacinto, Universidade de Lisboa, Portugal
António Domingos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

ISSN: 2182-0023

Local e datas / Venue and dates:

Escola Básica e Secundária do Cerco do Porto, Porto, Portugal
22-23 de novembro de 2024

Basic and Secondary School of Cerco do Porto, Porto, Portugal
November 22-23, 2024

Editora / Publisher:

SPIEM

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

Comissão Científica / Scientific Committee:

Alexandra Rodrigues, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Ana Santiago, Instituto Politécnico de Coimbra, Portugal
António Domingos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Ariana Cosme, Universidade do Porto, Portugal
Cristina Martins, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal
Elvira Santos, Instituto Politécnico da Lusofonia, Portugal
Helena Rocha, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Hélia Jacinto, Universidade de Lisboa, Portugal
João Pedro da Ponte, Universidade de Lisboa, Portugal
José Manuel Matos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Jose Maria Marban Prieto, Universidad de Valladolid, Espanha
Maria Helena Martinho, Universidade do Minho, Portugal
Margarida Rodrigues, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal
Neusa Branco, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal
Ole Skovsmose, UNESP Rio Claro, Brasil
Rosa Antónia Ferreira, Universidade do Porto, Portugal
Sónia Dias, Escola Secundária Ruy Luís Gomes, Almada, Portugal
Susana Carreira, Universidade do Algarve, Portugal
Vanda Santos, Universidade de Aveiro, Portugal
Zaira Ortiz-Lazo, Universidad de Cantabria, Espanha

Corpo de Revisores / Reviewers:

Alexandra Gomes, Ana Caballero-Carrasco, Ana Caseiro, Ana Isabel Silvestre, Ana Lúcia Miguens, Andrei Hartmann, Andreia Rodrigues, António Domingos, António Guerreiro, António Moreno Verdejo, António Ruano-Cano, Arminda Pereira, Carla Silva, Catarina Vasconcelos Gonçalves, Célia Mestre, Conceição Costa, Corália Pimenta, Cristina Costa, Cristina Martins, Danielle Silva, Débora Rodrigues Caputo, Edivaldo Lubavem Pereira, Elvira Santos, Filipa Faria, Francisco A. Silva, Francisco Alexandre Sales, Frederico da Silva Reis, Gláucia Rama, Gregorio Arjona-Aranda, Guilherme Silva, Maria Helena Martinho, Hélia Jacinto, Iera Arrieta, Israel Alonso, Izaskun Baro, Jaime Carvalho e Silva, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Louise Lima, Lurdes Serrazina, Manuel Vara Pires, Manuela Subtil, Maria Teresa Fernández, Maria Teresa Sánchez-Compaña, Marisa Quaresma, Neusa Branco, Paula Barros, Paula Teixeira, Patrícia Damas Beites, Patrícia Teixeira, Raquel Santos, Regina Célia Grando, Reullyanne Aguiar, Rodolfo Chaves, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Sandra Gaspar Martins, Sandra Menezes, Sónia Martins, Susana Carreira, Tânia Coelho, Teresa Neto, Thiago Pinto, Thiago Rodrigues, Vanda Santos, Vânia Couto, Virgílio Chivinda.

Apoios / Sponsors

Porto.

VILAR OPORTO HOTEL

Agrupamento de Escolas do Cerco do Porto, Porto

amcc academia de música de costa cabral

FCUP DM

CENTRO DE MATEMÁTICA UNIVERSIDADE DO PORTO

carimbrinde

CERCIVAR

Índice

TEMA DO ENCONTRO

MATEMÁTICA PARA TODOS NO SÉCULO XXI

MATHEMATICS FOR ALL IN THE 21ST CENTURY

Maria Helena Martinho

Instituto de Educação, Universidade do Minho, Portugal

mhm@ie.uminho.pt

Rosa Antónia Tomás Ferreira

CMUP & Departamento de Matemática e Unidade de Ensino das Ciências, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal

rferreir@fc.up.pt

O *Encontro de Investigação em Educação Matemática 2024* (EIEM2024) centrou-se no tema "Matemática para Todos no Século XXI", um tópico amplo e profundamente relevante que convida à reflexão sobre o papel da matemática como instrumento de inclusão, democratização e transformação social. Tradicionalmente vista como uma disciplina abstrata e acessível apenas a alguns, a matemática pode, na verdade, constituir uma poderosa ferramenta de promoção da equidade e da justiça social. Abordá-la de forma inclusiva significa garantir que todos os indivíduos, independentemente da sua origem, tenham oportunidade de desenvolver competências essenciais para a vida moderna.

Desde a sua criação, os Encontros de Investigação em Educação Matemática têm procurado fomentar a reflexão sobre questões fundamentais da educação matemática. Em 2024, ao assinalarem-se os 50 anos do 25 de Abril, o evento assumiu um significado particular. A *revolução dos cravos* transformou profundamente o panorama político e social português, legando valores inestimáveis de liberdade, democracia e igualdade – princípios que devem continuar a inspirar a educação. Revisitar esses valores é essencial, pois eles sustentam a luta por uma escola verdadeiramente inclusiva e para todos.

Neste enquadramento, a educação matemática desempenha um papel decisivo. Quando orientada por uma perspetiva inclusiva, ajuda a eliminar barreiras e preconceitos, promovendo ambientes de aprendizagem onde todos os alunos se sintam valorizados e capazes de participar ativamente. A matemática deve ser encarada não apenas como um conjunto de técnicas e uma ferramenta de resolução de problemas, mas como um meio para compreender e questionar o mundo, capacitando os alunos a tornarem-se cidadãos críticos e interventivos. Uma educação matemática inclusiva reconhece as diferenças como um valor educativo e social, acolhendo a diversidade de experiências, raciocínios e modos de aprender. Assim, a matemática afirma-se como uma linguagem de pensamento e expressão, acessível a todos, capaz de empoderar os cidadãos na leitura crítica da realidade.

O quadro conceptual de avaliação da matemática do PISA 2018 realça a *literacia matemática* como competência essencial para a cidadania ativa no século XXI. Literacia matemática é entendida como a

> capacidade de um indivíduo formular, aplicar e interpretar a matemática em contextos diversos. Inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, processos, factos e ferramentas da matemática para descrever, explicar e prever fenómenos. Permite ao indivíduo reconhecer o papel da matemática no mundo e formular juízos e decisões, fundamentadamente, como se espera de cidadãos participativos, empenhados e reflexivos. (IAVE, 2019, p. 39)

Promover uma educação matemática inclusiva é, portanto, preparar os alunos não apenas para resolver problemas, mas para participar de forma crítica e informada na sociedade, em consonância com os valores de liberdade, democracia e igualdade que sustentam uma escola para todos. A literacia matemática revela-se, assim, uma ferramenta poderosa na construção de uma sociedade mais justa e equitativa.

Neste sentido, Burkhardt et al. (2024) sublinham que muitas pessoas têm dificuldade em reconhecer quando e como aplicar a matemática aprendida na escola, apesar do seu potencial para compreender o mundo. Os autores defendem a necessidade de estratégias práticas que ampliem a visão da literacia matemática e reforcem a importância de manter e aplicar estas competências ao longo da vida. O foco nas aplicações práticas e no desenvolvimento de competências é fundamental para que os alunos compreendam a utilidade da matemática e a integrem na sua experiência quotidiana. De forma complementar, Bolstad (2023), num estudo com alunos do 9.º ano na Noruega, mostra que o desenvolvimento da literacia matemática está associado à perceção, pelos alunos, sobre a relevância da matemática nas suas vidas pessoais e profissionais. Estas conclusões convergem na ideia de que a inclusão também passa por tornar a matemática significativa e próxima da realidade de cada aluno.

A investigação de Martins e Fernandes (2021) reforça esta perspetiva ao destacar o papel da formação inicial de professores no desenvolvimento da literacia matemática. Ao conceber cenários de aprendizagem que estimulem a construção de conhecimento e o pensamento crítico, os futuros professores promovem uma educação mais relevante, criativa e participativa. Assim, a formação de professores deve integrar abordagens que valorizem a literacia matemática e assegurem que todos os alunos tenham acesso a uma educação que os prepare para os desafios do mundo contemporâneo.

O desenvolvimento da literacia matemática constitui também uma prioridade nas políticas educacionais e um campo de investigação em crescimento. Haara et al. (2017) apontam desafios persistentes, como a incerteza de professores e investigadores sobre as melhores formas de promover a literacia matemática. Os autores defendem a necessidade de mais investigação qualitativa centrada em práticas de sala de aula ancoradas na colaboração entre docentes e investigadores, um caminho essencial para concretizar a visão de *Matemática para Todos*, segundo a qual a matemática deve ser acessível e significativa para todos os alunos e não apenas para aqueles que seguem carreiras científicas ou tecnológicas.

A articulação entre a noção de *literacia matemática* e o princípio de uma *Matemática para Todos* destaca a importância de um ensino que vá além da transmissão de conteúdos, preparando os alunos para utilizar a matemática como ferramenta de compreensão do mundo e de tomada de decisões informadas. Promover uma educação matemática inclusiva é, assim, investir na formação de cidadãos críticos, participativos e conscientes, condição essencial para concretizar os ideais de uma sociedade livre, democrática e equitativa.

Ao longo do encontro, os participantes tiveram oportunidade de refletir sobre como a matemática pode ser utilizada para promover a inclusão e a igualdade, de explorar formas de tornar o ensino da matemática mais acessível e relevante, garantindo que todos possam beneficiar das oportunidades que a educação oferece. O encontro incluiu duas conferências. A primeira, intitulada "Critical Philosophy of Mathematics", proferida por Ole Skovsmose (Skovsmose, 2024), desafiou os participantes a repensar a matemática, abordando a relação entre matemática, educação e sociedade. Skovsmose critica a maneira como a matemática é frequentemente apresentada – como uma verdade absoluta e neutra, argumentando que isso ignora as suas implicações sociais, políticas e éticas. Ele propõe uma reflexão crítica sobre como a matemática pode ser utilizada tanto para emancipar quanto para oprimir, enfatizando a importância de uma educação matemática que envolva a consciencialização crítica dos alunos sobre o papel da matemática nas suas vidas e na sociedade. A obra desafia educadores e alunos a reconsiderarem a forma como a matemática é ensinada e aplicada, promovendo uma abordagem mais inclusiva e reflexiva.

A segunda conferência, intitulada "Percursos de Investigação em Torno de uma Matemática para Todos" foi apresentada por José Manuel Matos, sócio honorário da SPIEM. José Manuel Matos faz uma leitura histórica da investigação em educação matemática e de como a ambição de uma matemática para todos marcou profundamente a construção do currículo de Matemática em Portugal, realçando como essa ambição evoluiu desde o século XIX. Para José Manuel Matos, apesar disso, as dimensões sociais e culturais da matemática escolar foram pouco exploradas nos encontros de investigação nacionais. Sublinha, ainda, que garantir uma matemática verdadeiramente para todos consiste num desafio político, cultural e pedagógico contínuo, que exige investigação aprofundada, compromisso social e práticas inclusivas nas escolas.

O EIEM2024 contou, ainda, com um painel plenário intitulado "Inclusão e Democratização no Ensino", moderado por João Pedro da Ponte e com a participação de professores e investigadores: Ariana Cosme, José María Marbán Prieto, Sónia Dias e Susana Carreira. O painel fomentou uma discussão rica sobre diversos temas, incluindo os desafios da massificação do ensino no pós 25 de abril e o significado que a escola tem, e o que deve ter, para as crianças e jovens dos dias de hoje; estratégias para promover um ensino assente em práticas inclusivas, respeitando a diversidade crescente que se encontra nos espaços escolares e tirando partido dessa mesma diversidade para promover a inclusão e os valores democráticos; o desenho universal e as oportunidades que traz para uma educação matemática para todos; e modos de concretização do princípio da *Matemática para Todos* nas atuais orientações curriculares portuguesas de matemática para o ensino da matemática, nomeadamente ao nível do ensino secundário, à luz da investigação em educação matemática.

Como habitualmente, o EIEM, para além das sessões plenárias, contou com diversos grupos paralelos de discussão. Os textos submetidos foram organizados em cinco grupos de discussão, refletindo a variedade de temas abordados durante o encontro.

O primeiro grupo de discussão do EIEM 2024, coordenado por Margarida Rodrigues e Vanda Santos e intitulado "O professor e a matemática para todos no século XXI", centra-se no papel essencial do professor de matemática na promoção de uma educação inclusiva, crítica e adaptada aos desafios da era digital. Realça-se que o ensino da matemática deve ir além da mera transmissão de conteúdos, valorizando o desenvolvimento do pensamento lógico, da análise crítica e da capacidade de resolução de problemas. A integração de tecnologias, metodologias ativas e abordagens contextualizadas é destacada como meio de tornar a aprendizagem mais significativa e acessível a todos os alunos. As comunicações do grupo abordam diferentes dimensões da prática docente – desde a inovação pedagógica e o uso das tecnologias de informação e comunicação até à formação e desenvolvimento profissional – refletindo a importância do professor como mediador curricular e agente de mudança para que a matemática seja verdadeiramente para todos.

O segundo grupo de discussão do EIEM 2024, coordenado por Elvira Santos e intitulado "A formação de professores e a matemática para todos no século XXI", aborda a importância da formação docente como elemento central para concretizar o ideal de uma educação matemática inclusiva e crítica. Reconhece que ensinar no século XXI exige mais do que domínio técnico: implica aprendizagem contínua, reflexão sobre a prática e capacidade de adaptação a contextos em mudança. As comunicações apresentadas exploram diferentes dimensões da formação inicial e contínua, analisando valores e crenças de futuros professores, práticas inovadoras como cenários de investigação e tarefas criativas, bem como comparações internacionais de modelos formativos. Em conjunto, estes trabalhos evidenciam que o desenvolvimento profissional docente, apoiado em abordagens colaborativas e investigativas, é essencial para promover uma matemática para todos, articulada com a realidade social, cultural e educativa contemporânea.

O terceiro grupo de discussão do EIEM 2024, coordenado por António Domingos, Neusa Branco e Núria Planas, intitulado "A aprendizagem de uma matemática para todos no século XXI", destaca a importância de garantir aprendizagens matemáticas significativas, equitativas e desafiantes para todos os alunos. As comunicações apresentadas analisam o papel das tarefas e das práticas docentes no desenvolvimento do raciocínio, da comunicação e do pensamento crítico, sublinhando a relevância de estratégias ativas e do uso pedagógico da tecnologia, da robótica e do pensamento computacional. Os estudos partilhados evidenciam como o envolvimento dos alunos em tarefas cognitivamente ricas e em ambientes colaborativos e exploratórios potencia a compreensão matemática e contribui para uma educação mais inclusiva. Este grupo reforça, assim, que a aprendizagem da matemática no século XXI deve promover a equidade, a participação e a integração de ferramentas digitais e metodologias inovadoras como meios para concretizar o ideal de uma matemática verdadeiramente para todos.

O quarto grupo de discussão do EIEM 2024, coordenado por Ana Santiago e Alexandra Rodrigues e intitulado "A inclusão e a diversidade na promoção de uma matemática para todos no século XXI", centra-se na importância de construir uma educação matemática verdadeiramente inclusiva, que valorize a diversidade cultural, social e étnica presente nas escolas contemporâneas. As comunicações analisam temas como a formação matemática para a cidadania, o impacto do regime jurídico da educação inclusiva, as relações éticas e multiculturais e o trabalho colaborativo entre professores e investigadores. Os estudos apresentados destacam o papel da matemática na promoção da equidade e da participação, evidenciando práticas que articulam conteúdos curriculares com valores de sustentabilidade, justiça social e respeito pelas diferenças. Este grupo sublinha que a concretização de uma matemática para todos requer práticas pedagógicas diferenciadas, políticas educativas inclusivas e uma cultura escolar que reconheça a diversidade como fonte de enriquecimento e aprendizagem.

O último grupo de discussão, intitulado "O conhecimento profissional do professor e a matemática para todos no século XXI" e coordenado por Helena Rocha e Zaira Ortiz-Lazo, aborda o ensino da matemática no século XXI, enfatizando o conhecimento profissional docente e a integração da tecnologia. Destaca-se a importância de preparar os professores para interpretar currículos, planear tarefas, utilizar tecnologias digitais e promover o pensamento computacional, considerando a construção social do conhecimento e a colaboração entre pares. São analisados programas de formação inicial e contínua no sentido de reforçar o trabalho em torno do aprofundamento do conhecimento matemático e didático dos professores, assim como desafios na implementação de práticas interdisciplinares e na resolução de problemas, envolvendo abordagens STEM/STEAM. A discussão reforça a necessidade de desenvolver competências para enfrentar problemas complexos da sociedade contemporânea, integrando tecnologia, colaboração e formação contínua para melhorar a prática docente.

Este encontro não só proporcionou um espaço para o intercâmbio de ideias e experiências, mas também reforçou a necessidade de um compromisso contínuo com a inclusão e a democratização do ensino da matemática. Com isso, esperamos que as discussões e os resultados aqui documentados sirvam de base para novas investigações e práticas educativas que visem um futuro mais justo e acessível para todos.

Referências

Bolstad, O. H. (2023). Lower secondary students' encounters with mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, *35*(1), 237-253. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00386-7

Burkhardt, H., Pead, D., & Stacey, K. (2024). *Learning and teaching for mathematical literacy: Making mathematics useful for everyone*. Routledge.

Haara, F. O., Bolstad, O. H., & Jenssen, E. S. (2017). Research on mathematical literacy in schools: Aim, approach and attention. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(3), 285-313.

Lourenço, V. (Coord.), Duarte, A., Nunes, A., Amaral, A., Gonçalves, C., Mota, M., & Mendes, R. (2019). *PISA 2018 – Portugal: Relatório nacional.* Instituto de Avaliação Educativa, I.P.

Martins, S., & Fernandes, E. (2021). Literacia matemática: Contributos do design de cenários de aprendizagem na formação inicial de professores. In H. Spínola & S. M. Carreira (Eds.), *Literacia científica: ensino, aprendizagem e quotidiano* (pp. 73-87). Centro de Investigação em Educação (CIE-UMa).

Skovsmose, O. (2024). *Critical philosophy of mathematics*. Springer.

CONFERÊNCIA PLENÁRIA

PERCURSOS DE INVESTIGAÇÃO EM TORNO DE UMA "MATEMÁTICA PARA TODOS"

RESEARCH PATHS AROUND "MATHEMATICS FOR ALL"

José Manuel Matos

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

josemlmatos@icloud.com

Desejo, antes de mais, agradecer a confiança que a Direção da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM) e a Comissão Organizadora deste Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM) em mim depositaram para falar sobre o tema matemática para todos. A esperança de proporcionar a todos os jovens o acesso a uma experiência matemática escolar significante esteve presente desde a década de 1980, quando a comunidade de educação matemática portuguesa estava a dar os primeiros passos. O documento Renovação do currículo de Matemática (APM, 1988) testemunha essa aspiração. Preparado durante um seminário realizado em Vila Nova de Milfontes e elaborado por uma equipa numerosa envolvendo docentes de vários graus de ensino, constitui o primeiro texto programático da Associação de Professores de Matemática (APM), e que a dota, logo após a fundação, de uma matriz intelectual humanista e democrática. A visão sobre a matemática escolar e o seu ensino, vertida no documento, vai permanecer até aos dias de hoje no ideário de muitos professores, marcando as posições da APM e da SPIEM e influenciando os programas dos finais da década de 1980, os do final da de 2000 e os atuais.

No terceiro capítulo do texto de Milfontes, que apresenta o que devem ser os grandes objetivos para o ensino da Matemática, encontramos a referência à matemática para todos:

> Alguns dos objetivos gerais que devem presidir ao Ensino da Matemática para todos resultam da sua aplicabilidade a inúmeros problemas políticos e a um número crescente de áreas do conhecimento, traduzindo-se em argumentos de utilidade; outros derivam das características próprias da Matemática enquanto ciência e disciplina que lhe conferem um valor formativo importante. (APM, 1988, p. 27, itálicos no original[1])

A disciplina permite

> [o] desenvolvimento de capacidades e hábitos intelectuais, formas de raciocínio e comunicação, e estratégias de resolução de problemas. Além destes, outros argumentos são por vezes apontados como razões da importância da Matemática enquanto disciplina escolar: por exemplo, aqueles que derivam dos aspectos estéticos da Matemática ou do facto de ela poder constituir uma fonte de prazer intelectual. (APM, 1988, p. 27)

Depois, após uma descrição das características da experiência matemática que deve ser disponibilizada em todos os níveis de ensino, e portanto, para todos os alunos, são

[1] A grafia original de todas as citações foi atualizada.

destacadas três áreas: a resolução de problemas, as aplicações da matemática e o uso da tecnologia (pp. 28-30).

Esta visão de um ensino da matemática[2] estendido a todos os jovens, acompanha as tendências internacionais. Em 1979 já a Commission Internationale de l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement Mathématique (CIEAEM) tinha organizado um congresso com o tema "Mathematics for all and for everyone" e, poucos antes de Milfontes, em 1984, o quinto International Congress of Mathematics Education (ICME) tinha incluído um grupo temático sobre o mesmo assunto, cujas contribuições (Damerow, 1984) foram publicadas pela United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO). O tema teve sequência e no ICME seguinte foi-lhe dedicado um "Dia Especial" (Keitel et al., 1989). Em 1990, numa conferência mundial, a UNESCO adotou por unanimidade a Declaração mundial sobre educação para todos (1990) que estabelece que:

> **Cada pessoa - criança, jovem e adulto - deve poder beneficiar de oportunidades educativas concebidas para satisfazer as suas necessidades básicas de aprendizagem**. Estas necessidades incluem tanto ferramentas essenciais de aprendizagem (como literacia, expressão oral, numeracia e resolução de problemas), como o conteúdo básico de aprendizagem (como conhecimentos, competências, valores e atitudes) necessários aos seres humanos para serem capazes de sobreviver, desenvolver integralmente as suas capacidades, viver e trabalhar com dignidade, participar plenamente no desenvolvimento, melhorar a qualidade das suas vidas, tomar decisões informadas e continuar a aprender. (UNESCO, 1990, p. 3, negrito no original[3])

Mais de três décadas depois de Milfontes exprimir a aspiração de um ensino de matemática para todos, e no propósito de responder ao repto dos organizadores deste congresso, importa procurar a reflexão feita em Portugal sobre os modos de concretizar essa aspiração em programas de ação. Assim, procurei as ocasiões em que o tema tivesse sido abordado enquanto tópico de pesquisa em congressos nacionais de educação matemática, muito provavelmente quando as dimensões sociais e culturais tivessem sido objeto de análise, quer como assunto central do evento, quer em algum grupo de trabalho. Restringi essa busca aos EIEMs, que todos os anos são dedicados a um tema e para os quais a informação está mais facilmente acessível.

Para minha surpresa, praticamente não encontrei nada. Encontra-se frequentemente o debate sobre o ensino e a aprendizagem de tópicos matemáticos, como a aritmética, a álgebra, a geometria, entre outros, ou a análise de processos de intervenção na aula mas assuntos relacionados com dimensões sociais e culturais, nomeadamente sobre a matemática para todos, o insucesso escolar, ou outros similares, quase não aparecem nos temas a que os congressos são dedicados. Imagino que uma inquirição aos Seminários de Investigação em Educação Matemática, organizados pela APM, resulte numa constatação semelhante.

A ausência destas problemáticas nos temas escolhidos para os EIEMs não significa que não existam trabalhos de investigação na área, pois conheço alguns que estudaram como a diversidade cultural e cognitiva dos nossos alunos se tem refletido na qualidade das

[2] Utilizarei a denominação "Matemática" em maiúscula para designar a disciplina escolar e "matemática" em minúscula para referir a ciência ou a área de conhecimento.
[3] Todas as traduções foram realizadas pelo autor.

aprendizagens ou no sucesso (ou insucesso) de métodos de ensino preconizados. Outros farão um balanço detalhado dos temas privilegiados pela pesquisa em educação matemática em Portugal, mas, é surpreendente que em congressos de investigação sobre uma disciplina escolar, em grande media, responsável pelo caráter elitista que o nosso ensino assumiu até um passado recente, não se tenham dissecado significativamente as dimensões sociais e culturais associadas ao ensino e à aprendizagem da matemática. A decisão de abordar agora o tema neste congresso, incluindo nos grupos de discussão, é, pois, merecedora de apreciação.

Nesta conferência procuro mapear os modos como o conceito de ensino para todos[4], e consequentemente, de uma matemática para todos, foi fazendo o seu caminho desde o século XIX em Portugal. Após referir a instituição de uma escola pública e independente do poder religioso, o texto continua descrevendo o confronto entre a visão de educação básica republicana e a do regime salazarista, prolonga-se numa apreciação sobre a matemática moderna, e revê momentos posteriores de reflexão nacional e internacional debatendo que matemática pode e deve ser incluída nos anos pós-primários, terminando com sugestões de investigação.

Desde há alguns anos, que o meu interesse está centrado nas dimensões sociais, culturais e históricas do ensino da matemática e será a partir daí que intervirei, procurando dotar de historicidade (Matos, 2020) o campo da educação matemática. No estudo do passado, este olhar é guiado pelo paradigma da história cultural (Bonnell & Hunt, 2023; Burke, 2016), e, no do currículo, por uma visão abrangente não limitada ao "programa" e que o entende como resultante das forças de múltiplos atores curriculares (Goodson 2012; Pacheco, 2001; Sacristan et al., 2012; Tyack & Cuban, 1997).

A escola do ler, escrever e contar

Comecemos pela época em que se começou a pensar a escola enquanto sistema que deveria estar na esfera pública e ter um âmbito nacional. Foi em 1772 que, enquadrado na visão iluminista da época, se instituiu em Portugal um sistema público de escolas de primeiras letras (Carvalho, 1996). Após as convulsões políticas da primeira metade do século XIX, envolvendo as invasões francesas e a mudança para uma monarquia constitucional e depois da guerra civil da década de 1830, o sistema pombalino foi reestruturado, em 1836 com Passos Manuel que estabeleceu o ensino primário como gratuito e obrigatório, e em 1844 com Costa Cabral que distinguiu entre escolas primárias com o primeiro grau, as mais comuns, e outras, frequentemente apenas acessíveis nos meios urbanos mais importantes, que disponibilizavam também o 2.º grau, ou ensino complementar. No entanto, os poderes públicos pouco promoveram o crescimento deste incipiente ensino primário.

O currículo de matemática destas escolas era, em geral, baseado no ler, escrever e contar (Almeida e Candeias, 2014) comum desde o século XVI (Fernandes, 1994). Conseguimos ter um vislumbre de programas e métodos observando o Regulamento para o Ensino Primário de 1850 que explicita um currículo intencionado dos temas matemáticos para o 1.º grau do ensino primário (atuais 1.º a 4.º anos de escolaridade):

> Quando os meninos se acharem suficientemente versados na leitura, e escrita, o Professor os ensinará a escrever os algarismos, fazendo-lhes aprender o artifício da numeração. Passará em seguida a instrui-los e exercitá-los praticamente nas operações ordinárias – de somar – diminuir – multiplicar –

[4] Utilizarei indistintamente os termos ensino para todos, ensino elementar ensino obrigatório e ensino básico.

> e repartir – primeiro os números inteiros; depois os quebrados; conduzindo-os até à regra de três, e sua aplicação à regra de juros compostos e companhia. (Regulamento para o Ensino Primário, 1850, art.º 26º)

O leitor deve abordar esta peça legislativa com alguma cautela, pois não era comum o legislador ser tão detalhado nas especificações curriculares e é pouco provável que, quer antes, quer depois de 1850, a maioria das escolas primárias abordasse todos estes conteúdos, em particular quebrados (isto é, frações), proporcionalidade e juros, usualmente integrados no programa dos liceus.

Apesar das declarações de princípio dos textos constitucionais da primeira metade do século XIX, nem as transformações económicas e sociais trazidas por um capitalismo nascente requereram um aumento da rede escolar, nem os poderes públicos sentiram urgência em concretizar um verdadeiro sistema nacional de ensino básico. Apenas já na década de 1850, com a consolidação do novo regime económico, se vai prestar mais atenção à qualidade do ensino elementar trazendo gradualmente a escola para o centro do debate político. Mesmo assim, a medida mais importante deste período é, já na década de 1860, a institucionalização de uma formação específica para professores através de escolas normais (Pintassilgo et al., 2010).

A escola no centro do debate político e pedagógico

A partir de meados do século XIX, em particular após o fontismo da década de 1860, os problemas da educação tornam-se gradualmente tema de debate público com a corrente republicana nascente verberando a incapacidade do regime monárquico em conseguir diminuir o analfabetismo e melhorar a qualidade do ensino. A publicação das primeiras estatísticas educativas sobre alfabetização no final da década de 1870 vem confirmar um panorama desastroso. Rómulo de Carvalho (1996) resume a situação através dos primeiros dados publicados, que datam de 1878 (tabela 1).

Tabela 1. Alfabetização da população do Continente e das Ilhas Adjacentes, 1878.

	Total		**Sexo masculino**		**Sexo feminino**	
Sabem ler e escrever	652 669	14,3%	458 066	21,1%	194 603	8,2%
Só sabem ler	146 256	3,2%	86 490	4,0%	59 766	2,5%
Não sabem ler nem escrever	3 751 774	82,4%	1 631 273	75,0%	2 120 501	89,3%
Total	4 550 699	100,0%	2 175 829	100,0%	2 374 870	100,0%

Fonte: elaboração própria a partir da Repartição de Estatística Geral do Ministério das Obras Públicas (1886, p. 26), seguindo a sistematização de Carvalho (1996, p. 614).

Nove em cada dez mulheres e três em cada quatro homens do Continente e das Ilhas não sabiam ler nem escrever! Dados referentes à escolarização da população revelam números semelhantes e as comparações internacionais, que começam a estar disponíveis no último quartel do século, pintam um quadro igualmente negro. Por exemplo, uma estatística do início do século XX, indica que por volta de 1900 Portugal ocupa a 31ª posição entre 37 países ou regiões de todo o mundo quanto à percentagem da população matriculada em escolas (Clements et al., 2013, p. 11). Este falhanço do regime monárquico é explorado pela oposição republicana que transforma a política educativa numa das suas armas principais: para eles, a escola tem potencialidades regeneradoras e a instrução do povo é fundamental para a sua consciencialização cívica e a sua elevação moral e espiritual que apenas a República poderá concretizar (Fernandes, 1981; Mogarro, 2006; Nóvoa, 1989; Proença, 1995)[5].

Não foi apenas devido à luta política que o problema da qualidade da educação ganhou visibilidade espaço público. Nos finais do século XIX cresce, nos meios educativos em Portugal e noutros países, o movimento Escola Nova, espelho das mudanças fundamentais no modo como o ato educativo passa a ser entendido pelos educadores e cujas ideias ainda hoje estão no centro dos debates sobre educação. Em Portugal, os escritos mais emblemáticos foram publicados durante as primeiras décadas do novo século (Pintassilgo, 2018). Embora tendo múltiplas raízes e sendo mais uma constelação de ideias do que uma doutrina monolítica, podem destacar-se dois pontos fundamentais (Pintassilgo, 2018). Em primeiro lugar, a Escola Nova adota uma cientificação do discurso pedagógico. Acompanhando o nascimento de novas ciências (por exemplo, a psicologia e a sociologia), procura-se desenvolver um saber científico educacional, isto é, uma ciência da educação, dinâmica indissociável da expansão das escolas de formação de professores para o ensino primário que, como vimos, se tinha iniciado na década de 1860 e que conduz à constituição de novas disciplinas que vão reformular o saber docente. Em segundo lugar, a criança é colocada no centro do ato educativo, reconhecendo-se a infância como uma fase vital com características próprias distintas das da vida adulta, procurando-se respeitar o seu desenvolvimento natural, tomar como ponto de partida os seus interesses espontâneos, respeitar a sua liberdade e contribuir para a sua felicidade. Consequentemente, ocorre uma reformulação do entendimento sobre as operações mentais envolvidas na aprendizagem, rejeitando-se a memorização como processo privilegiado. Ao mesmo tempo, procuram-se aprofundar métodos ativos de ensino que colocam a criança em situação de interação com o mundo que a rodeia.

O ideal republicano de um ensino básico universal, gratuito e obrigatório

Após a implantação da República em 1910, e tendo em pano de fundo o combate ao analfabetismo, o novo governo tem a ambição de intervir no ensino primário no sentido de proporcionar um conjunto de conhecimentos e aptidões básicos a todas as crianças. Como se afirma no correspondente decreto sobre o ensino primário, veiculando um ideário que ainda hoje é subscrito por muitos,

> O homem vale, sobretudo, pela educação que possui, porque só ela é capaz de desenvolver harmoniosamente as suas faculdades, de maneira a elevarem-se-lhe ao máximo em proveito dele e dos outros. (…) Educar uma sociedade é fazê-la progredir, torná-la um conjunto harmónico e conjugado das forças individuais, por seu turno desenvolvidas em toda a plenitude. (Decreto com força de Lei de 29 de Março, 1911, p. 1341)

Nesse decreto, os poderes públicos nacionais propõem-se estabelecer um verdadeiro ensino básico e universal. Consonante com os ideais republicanos da época, os grandes propósitos desse ensino são:

> Ao terminar o seu curso obrigatório, o jovem português amará, de um amor consciente e raciocinado, a região onde nasceu, a pátria em que vive, a

[5] Em rigor, alguns monárquicos também reclamavam uma maior dedicação dos governantes à causa da educação (Proença, 1997).

> humanidade a que pertence. (Decreto com força de Lei de 29 de Março, 1911, p. 1342)

Para concretizar este ideal, adota-se uma estrutura compreendendo três graus: o elementar (3 anos), o complementar (2 anos) e o superior (3 anos) e em 1919, com o ministro Leonardo Coimbra, os dois primeiros passam a ser obrigatórios (Fernandes, 1981). Quanto à matemática, os dois primeiros graus são baseados na aritmética e na geometria elementares, cujos conteúdos não diferem significativamente dos do anterior regime. Já no caso das escolas primárias superiores (3.º grau), os conteúdos matemáticos distribuem-se por três disciplinas, a Aritmética, a Geometria que engloba cosmografia, trigonometria e noções topográficas e a Álgebra que inclui o estudo de juros compostos e anuidades (Almeida & Candeias, 2014). As escolas primárias superiores são extintas logo após o golpe militar de 1926 que depõe o regime republicano.

Mesmo com boas intenções, e apesar da ampliação do número de anos de ensino obrigatório, o regime republicano não vai conseguir concretizar a almejada redução do analfabetismo nem a frequência escolar vai aumentar significativamente (Nóvoa, 1989). No entanto, é indubitável que se explicita pela primeira vez a ambição de um ensino básico – universal, gratuito e obrigatório –, entendendo-o como um direito dos povos e como fundamental para a criação de um homem novo[6]. No plano das realizações educativas, é também o regime republicano que dignifica a formação profissional dos docentes e, quanto aos métodos pedagógicos, é ele que concretiza o ideário da Escola Nova, explicitando nas suas produções legislativas a ideia de que o ensino deve progredir do concreto para o abstrato, do simples para o complexo, do empírico para o racional e do indefinido para o definido.

As primeiras três décadas do Estado Novo e suas visões de uma educação básica

O regime ditatorial implantado após o golpe militar de 1926, no início idêntico a outros da época republicana, transforma-se gradualmente num outro de índole corporativista, ideologicamente próximo dos regimes fascistas da época, concretizando uma visão de escola e das finalidades da educação distinta da da República. No caso do ensino primário, serão concretizadas diversas medidas das quais podemos destacar a abolição da coeducação (1927), a diminuição para 3 anos da obrigatoriedade escolar (1930), a extinção do ensino primário superior (1932) e uma redução drástica do programa limitando-o ao ler, escrever e contar (1936)7. A visão republicana de uma sociedade de letrados conscientes é substituída por uma outra que limita a formação escolar ao mínimo indispensável, considerando o excesso de saber como uma ameaça à estrutura social. Ao explicitar as razões para a redução dos programas do ensino primário, o ministro Carneiro Pacheco é bem elucidativo:

> É a razão do presente decreto-lei, assente na ideia de que o ensino primário elementar trairia a sua missão se continuasse a sobrepor um estéril enciclopedismo racionalista, fatal para a saúde moral e física da criança, ao ideal prático e cristão de ensinar bem a ler, escrever e contar, e a exercer as

[6] Como era tácito em todas as nações coloniais da época, a aplicação deste ideário era problemática nas colónias sob administração portuguesa.

[7] Análises mais finas destas medidas, assim como das suas consequências, podem ser encontradas em Mónica (1978), Nóvoa (1992) e Sampaio (1975).

> virtudes morais e um vivo amor a Portugal. (Decreto-lei n.º 27.278, 1936, p. 1510)

Para os três anos do ensino primário, abrem-se "postos de ensino" lecionados por regentes escolares (1931) habilitados apenas com os 4 anos do ensino primário, cujos méritos, comparativamente às escolas primárias já existentes, Carneiro Pacheco exalta:

> Instalado (…) em edifício próprio, devidamente apetrechado, regido por quem possua idoneidade comprovada na falta de um diploma tantas vezes só decorativo, ministrando o ensino por todo o ano letivo, e fiscalizada a sua ação, o posto escolar será a escola aconchegada da terra pequenina, onde outra maior se tornaria desproporcionada, ao mesmo tempo que, pelo desperdício, inimiga da restante terra portuguesa. (Decreto-lei n.º 27.278, 1936, p. 1510)

Estes postos estariam assim bem adaptados à terra pequenina aconchegada de ambiente rural onde, para o regime, residia o ideal da alma nacional e que se encontrava ameaçada em concentrações urbanas prenhes de vícios e onde proliferavam ideias subversivas.

Quanto à formação de professores, transformam-se as escolas normais em escolas do magistério (1930) simplificando o seu currículo e onde podiam ingressar candidatos apenas com o ensino primário. Mesmo assim, estas escolas são suspensas entre 1936 e 1942. Quanto ao ensino secundário, o curso liceal é encurtado em 1926, medida revertida em 1927, os respetivos programas simplificados e o acesso dificultado. O encerramento em 1930 das Escolar Normais Superiores criadas pelo regime republicano estende ao ensino secundário a política de desvalorização da formação de professores. Estas medidas são acompanhadas por um reforço do controle sobre alunos e professores, ameaçando e punindo o que se entendia serem desvios a um pensamento correto.

Há alguns anos (Matos, 2002), comparei o saber matemático básico dos tempos do Estado Novo com o esperado no início deste milénio, quando a escolaridade básica era de nove anos. Aqui apenas recordo o currículo avaliado em Lisboa em 1951 no exame escrito correspondente ao 3.º ano do ensino primário elementar. O Exame compõe-se de cinco problemas matemáticos contextualizados em situações da vida real: compras de tecido, volumes de recipientes ou dinheiro. Todos envolvem apenas uma operação aritmética que, em dois casos (o 3.º e o 5.º), é uma adição de três parcelas. O primeiro exige uma conversão entre unidades de volume e apenas o 4.º problema poderia ser considerado mais difícil, tendo o aluno necessidade de relacionar o volume de um prisma com a área da base, conhecendo a sua altura. Usando uma terminologia atual, os objetivos deste exemplo de currículo matemático avaliado do início dos anos 50 podem ser sintetizados em: saber aplicar as quatro operações em contextos da vida diária e saber usar uma versão aritmetizada da geometria, isto é, saber medir comprimentos e calcular perímetros, áreas e volumes, realizando conversões entre unidades de medida. Descobre-se que, afinal, o antigamente não era bom como isso e, que, pelo contrário, era bem mau…

As medidas tomadas pelo Estado Novo ao longo das suas primeiras três décadas e as múltiplas afirmações de responsáveis e ideólogos do regime vendo na expansão do saber uma ameaça e chegando mesmo a interrogar-se se o analfabetismo deveria mesmo ser extinto e se não se deveria antes manter o povo na ignorância (Mónica, 1978) não permitem dúvidas sobre o caráter elitista do sistema escolar português da época. Entre as diversas pérolas discursivas sobre o tema coligidas por Rómulo de Carvalho destaco uma de Alfredo Pimenta, apresentado como "erudito investigador da História Nacional":

> Ensinar o povo português a ler e a escrever para tomar conhecimento das doutrinas facécias e malcheirosas que no seu beco escuro vomita todos os dias qualquer garoto da vida airada, ou das mentiras criminosas dos foliculários políticos, é inadmissível, Logo, concluo eu: para a péssima educação que possui, e para a natureza da instrução que lhe vão dar, o povo português já sabe demais. (Alfredo Pimenta, citado em Carvalho, 1996, p. 727)

Onde a República via a justeza de um aumento da educação geral do povo como forma de formar um homem consciente, o Estado Novo via na ignorância um seguro de vida para a sua manutenção no poder.

O papel da escola como local fundamental de formatação das mentes e legitimação do regime não é, no entanto, ignorado e vai ser composto um aparato ideológico envolvendo professores, livros de texto, materiais de ensino e mesmo elementos decorativos da sala de aula ou incorporados em edifícios escolares numa glorificação do regime e da trilogia Deus-Pátria-Família própria dos regimes fascistas da época (Nóvoa, 1992).

O final da Segunda Guerra Mundial vai impor mudanças. Acompanhando o crescimento económico e a recomposição das forças internacionais dominantes, o Estado Novo necessita atualizar o seu modelo económico favorecendo o desenvolvimento da indústria e promovendo a abertura da economia ao exterior (Teodoro, 1999). Em paralelo, assiste-se em Portugal e em muitos países a um grande aumento da população escolar. As famílias, mesmo as mais pobres, passaram a acreditar nas possibilidades de melhoria das suas condições de vida através da escola.

Como resposta a estes dois fenómenos, no final dos anos 40 desaparece o discurso centrado nas virtudes das terras rurais aconchegadas e o regime realiza um forte investimento no ensino técnico procurando canalizar para aí o aumento da procura em educação. Para garantir que o ensino liceal continuasse destinado a um grupo restrito, estabelece uma bifurcação marcada dos percursos educativos após o ensino primário obrigatório. Assim, filtrados por exames de acesso, os alunos com melhores classificações entravam nos liceus enquanto que os outros ingressavam numa escola técnica. Encontramos uma versão mais polida desta segregação num texto produzido por Manuel Sousa Ventura para o seu estágio docente e publicado na revista Labor (1959) onde, depois de fazer a apologia das propostas de Piaget, distingue entre homo faber e homo sapiens. O primeiro ficaria na fase das operações concretas piagetianas enquanto que o segundo disporia de um intelecto mais avançado. Encontrava-se assim uma fundamentação científica para determinar o futuro escolar dos jovens:

> Para o [ramo do] Ensino Técnico seguiriam os estudantes que tivessem revelado (…] aptidões psicológicas e mentais características do Homo Faber.
>
> O segundo ramo, o Ensino Liceal, seria trilhado pelos estudantes reveladores das qualidades potenciais do Homo Sapiens. (Ventura, 1959, pp. 315-316)

As diferenças entre os dois ramos não resultariam pois de qualquer determinação do tipo económico ou social, mas antes estariam como que gravadas nas competências intelectuais destas duas espécies humanas, pese embora o facto de a biologia não reconhecer esta distinção. Neste artigo de Ventura não podemos deixar de notar a distinção entre diferentes tipos de homos quando, pouco tempo antes, a superioridade de umas raças sobre outras ecoava em discursos de ditadores europeus.

Esta política, conduzida pelo ministro Pires de Lima, o mesmo que nesse final dos anos 1940 expulsou dezenas de professores das universidades forçando ao exílio muitos matemáticos, reforça as distinções sociais entre os que se ficam pela instrução primária, remetidos a profissões de baixo rendimento, os que acedem às escolas técnicas, destinados a profissões mais especializadas na indústria, nos serviços ou na agricultura, ou os que entram nos liceus e poderão aceder à universidade e tornar-se técnicos superiores.

A política desenvolvimentista do Estado Novo e os perigos da educação básica

Somente a partir de finais da década de 1950, através da ação do ministro Leite Pinto, se começará a considerar a hipótese de um aumento da escolaridade básica e, apesar de o estudo do seu alargamento em dois anos estar pronto em 1960 (Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, 1960), a legislação correspondente apenas foi aprovada em 1964 já por outro ministro, Galvão Telles. Leite Pinto, matemático e professor de Matemática, era próximo da ala “desenvolvimentista” do regime e foi demitido em 1961 na sequência de um movimento para afastar Salazar do poder, enquanto que Galvão Telles tinha uma matriz mais conservadora que aceitava, mas suspeitava das opções de política educativa do primeiro, nomeadamente dos laços estabelecidos com organizações internacionais que transportavam para Portugal correntes de inovação (Teodoro, 1999). O alargamento da escolaridade é paradigmático desta dualidade de Galvão Telles. A medida, apesar de legislada em 1964, só produzirá efeitos no ano letivo de 1968/69 e, para que não restassem dúvidas, logo na sessão de apresentação do alargamento, o ministro explicita claramente os medos suscitados por uma escolarização excessiva da população portuguesa e adiantava algumas medidas que se impunham:

> A ascensão cultural das massas, que constitui em si um fenómeno e um desígnio altamente louváveis, pode fazer correr o sério risco de estrangulamento ou abafamento do escol intelectual. Tem por isso de ser acompanhada e vigiada com as necessárias cautelas, para evitar, quanto possível, esse resultado[8]. (Telles, 1966, pp. 178-179)

O mero aumento de dois anos na escolaridade obrigatória podia ter, para o ministro, poder suficiente para por em causa o tecido social. Assim, tal como o cidadão comum era vigiado e podia ser punido pelos seus “desvios ideológicos” ou as suas “ações subversivas”, Galvão Telles entendia que a própria “ascensão cultural das massas” tinha que ser “vigiada” e, quanto ao “escol intelectual” (o escol por ele reconhecido com tal), parece que o imaginava tão fraco que podia ser “estrangulado ou abafado” por essa ascensão.

Na época, o aumento súbito das populações escolares em países com sistemas mais ou menos elitistas provocavam o temor de um abaixamento da qualidade. Em simultâneo, a competição internacional, económica e militar, tornava clara a necessidade de cuidar da formação de quadros técnicos superiores. Assim, o desenvolvimento de políticas de formação de quadros científicos e tecnológicos (matemáticos, físicos, engenheiros, economistas, biólogos, etc.) era uma das vertentes em que incidia o trabalho da OCDE (Cruzeiro, 1967; OECE, 1961; Teodoro, 1999). Enquadrado nessa vertente, a organização co-financia um dos principais projetos de desenvolvimento curricular nacionais em matemática, a experiência Sebastião e Silva, que decorre entre 1963 e 1969, precisamente dedicada ao desenvolvimento de um currículo visando a preparação de alunos destinados aos cursos universitários (Matos, 2025a). Não surpreendem pois as considerações feitas

[8] Este discurso é comentado por Rogério Fernandes (1981) e Rui Grácio (1986).

por Sebastião e Silva, um humanista insuspeito de comungar dos ideais do regime, justificando a seleção de alunos participantes na experiência do seguinte modo:

> Os alunos das turmas-piloto devem, em princípio, ser escolhidos entre os melhores, não só como prémio concedido a esses, mas também para evitar problemas embaraçosos aos que tenham de ser transferidos para turmas clássicas. Aliás, é preciso não esquecer a necessidade urgente de formar elites! (Sebastião e Silva, citado em Alves, 1968, p. 5, itálico no original)

Não é apenas nesta passagem que o professor aborda o tema. No Guia para o 7.º ano, destinado a professores da experiência, comenta:

> Nos tempos atuais o já referido fenómeno da explosão escolar, aumentando rapidamente a quantidade dos alunos, tende a degradar a qualidade do ensino.
>
> A instituição de turmas-piloto, como está a ser feita em vários países, tem exatamente por fim salvar da avalanche a qualidade do ensino. (Silva, 1977, p. 72, itálicos no original).

Recorde-se que, no Guia para o 6.º ano, o professor tinha produzido uma sistematização de normas didáticas para o ensino da matemática (Silva, 1975) radicadas na visão da Escola Nova e que antecipam boa parte da visão de Milfontes. Assim, embora preocupado com a contradição entre a qualidade do ensino e a sua crescente massificação, em lugar algum se encontra, quer nos escritos de Sebastião e Silva, quer nas prioridades da OCDE, o receio manifestado por Galvão Telles quanto ao “estrangulamento do escol intelectual” devido ao aumento da educação da população e muito menos se procura limitar ou vigiar esse crescimento.

A OCDE vai, já em meados da década, alterar a sua política, compreendendo que o problema não pode abordado apenas através de intervenções focadas na formação de quadros (Matos, 2025a). Num relatório posto à discussão do seu Comité para o Pessoal Científico e Técnico em 16/9/1966, a organização recomenda novas prioridades baseadas nos seguintes princípios:

> a) o desenvolvimento curricular deve ser visto como parte integrante das políticas de desenvolvimento educacional e intimamente relacionado com o planeamento educacional;
>
> b) já não é adequada uma abordagem fragmentada das várias disciplinas do currículo, sendo necessária uma abordagem global do problema do desenvolvimento curricular;
>
> c) que, em consequência, os países membros devem agora considerar o desenvolvimento de um esforço continuado nesta área, que se aplica ao estabelecimento de mecanismos permanentes nos países membro. (OECD, 1966, p. 1)

Deixa assim de ser prioritário investir no desenvolvimento de programas “fragmentados” visando a formação de excelência de quadros técnicos em disciplinas específicas, nos quais se incluía a experiência Sebastião e Silva, mas antes a reforçar a intervenção global nos sistemas educativos visando o seu desenvolvimento integrado, como estava a ser feito pelo mesmo Comité no Projeto Regional do Mediterrâneo no qual Portugal desempenhava um papel importante (Matos, 2025a; Teodoro, 1999).

Nessa época não encontrei reflexões em Portugal sobre os modos como adaptar métodos e conteúdos de ensino ao aumento da frequência escolar e consequente acesso de alunos de grupos sociais desfavorecidos a níveis mais elevados. Apenas detetámos a voz isolada de Francisco Maria Gonçalves, professor do Liceu Camões e autor de livros de texto, que, em 1961 nas páginas da revista Labor e depois de concordar com a necessidade de cuidar da formação de técnicos superiores, alerta para que também "precisamos duma Matemática para multidões e não para elites e, para o conseguir, nós, professores, temos de encarar a nossa realidade bem de frente" (1961, p. 548). Pouco mais à frente, e, apesar de encarar positivamente as novas tendências no ensino da matemática, premonitoriamente, alerta para os excessos que poderiam ocorrer se não existir um sentido crítico em relação a "todas as novidades que venham de Paris, mesmo que tragam a garantia do nome fascinante de Nicoles (sic) Bourbaki" (p. 548).

Regressemos às políticas educativas nacionais dos anos 60. Como Rogério Fernandes chama a atenção (1981), o alargamento da escolaridade para seis anos não vai corresponder ao estabelecimento de uma via única para o conseguir, como se poderia supor. Assim, no final da década de 60, e provavelmente concretizando as cautelas para não abafar o escol intelectual, os dois últimos anos da escolaridade obrigatória (atuais 5.º e 6.º anos de escolaridade) podiam ser frequentados por várias vias: através do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (CPES), do Ciclo Complementar do Ensino Primário ou da Telescola, sistemas que possuíam diferenças curriculares significativas quanto às oportunidades de aprendizagem e progressão dos estudos. No caso da Matemática, os conteúdos curriculares do Ciclo Complementar do Ensino Primário divergiam consideravelmente dos das outras duas opções, tornando muito difícil a transição dos alunos deste Ciclo para o ensino liceal. O primeiro, que permitia diretamente o prosseguimento dos estudos, estava disponibilizado sobretudo em meios urbanos e os dois últimos estavam destinados à populações rurais e suburbanas.

A ênfase na linguagem, a nova matemática do CPES

Até aqui, este texto discutiu os modos como os poderes públicos entenderam a escolaridade básica aplicável a toda a população escolar. A partir de 1968, com a entrada em funcionamento do CPES e a decisão de ensinar matemática moderna a todos os alunos a partir do 5.º ano de escolaridade, coloca-se o problema de saber em que medida as novas opções curriculares foram adequadas, em particular, se contribuíram como um fator de exclusão ou de integração. Acredito que à distância de quatro décadas já é possível responder a esta questão.

O CPES inicia-se logo após Salazar ser substituído em 1968. O novo governo, liderado por Marcelo Caetano, vai permitir uma fugaz experiência de liberdade limitada, que termina após as eleições fantoche de outubro de 1969, na sequência das quais, a natureza ditatorial do governo foi reafirmada.

Num país politicamente estagnado, o CPES, dispondo de professores organizados num ciclo constituído de raiz, que muitas vezes, é lecionado em edifícios escolares recentes, parecia proporcionar uma via adequada a intervenções educativas de novo tipo. É neste ambiente contraditório de um país em ditadura, mas contendo espaços onde alguns docentes esperavam concretizar ideais de um ensino intuitivo e ativo, centrado na criança, que congregou muitas das aspirações de inovação docente, favorecendo abordagens educacionais abrangentes (interdisciplinaridade, por exemplo), e enfatizando novas técnicas de pedagógicas (trabalhos de projetos e em grupo) e o uso de tecnologia (retroprojetor, ou filme didáticos, por exemplo).

Enquanto se assiste a um entusiasmo por novos métodos pedagógicos concretizados em escolas de tipo novo, a matemática escolar é percorrida pela onda de mudança trazida pelo movimento da matemática moderna. Existia então um grande optimismo, especialmente entre os académicos e os funcionários do Ministério da Educação, de que a matemática escolar poderia incorporar os desenvolvimentos modernos propostos por Bourbaki. Essa crença era suportada pelas teorias de Jean Piaget propondo que as estruturas mais básicas da cognição coincidiam com as estruturas elementares abstratas da matemática bourbakista (Matos & Almeida, 2023; Piaget, 1955).

No caso do currículo de matemática, o novo programa, escrito por Sebastião e Silva, enquadra-se nestas tendências de inovação, atualizando os conteúdos e procurando trazer mudanças profundas ao ato pedagógico (Matos & Almeida, 2023). Logo no início do programa reafirma-se a convicção de que a mudança deve abordar tanto os métodos como o conteúdo. Consistente com a preocupação do professor com a necessidade de métodos de ensino "ativos", o texto estava repleto de recomendações metodológicas sobre a importância da intuição e o respeito pelas experiências anteriores das crianças.

As novas propostas curriculares contrastam com as anteriores (Matos & Almeida, 2023). O programa dos liceus e o das escolas técnicas para os mesmos anos de escolaridade agora extintos eram fundamentados em ideias e situações do mundo concreto iniciando-se com geometria. O novo programa, pelo contrário, baseava-se em noções relacionadas com conjuntos e as suas operações, a partir das quais eram desenvolvidas as operações aritméticas. A adição deixou de estar associada a experiências concretas de agregação de objetos e passou a ser o número cardinal da união de dois conjuntos disjuntos. A subtração já não está associada a experiências concretas de "tirar" ou determinar "quantos faltam" e transformou-se no cardinal de um conjunto complementar. Apenas a multiplicação e a divisão mantiveram as suas definições anteriores, embora atualizadas com a linguagem de conjuntos. O texto muito detalhado do programa ocupa 11 páginas, espaço muito superior ao dos das demais disciplinas e quatro vezes mais extenso do que o de 1954.

A preocupação com a precisão da linguagem é uma das imagens de marca da nova matemática. O programa de Sebastião e Silva vai acompanhar essa opção, mas, seguindo a sua afinidade com a lógica e as propostas de linguistas nacionais (Lopes, 1970), coloca a ligação com a linguagem no centro. Para além da distinção entre "numeral" e "número", semelhante à distinção entre "designação" e "designado", comum à de muitos programas estrangeiros, o programa do CPES sugere múltiplas formas de conectar os conceitos matemáticos com a linguagem: os substantivos podem ser associados a categorias lógicas de elemento e de conjunto, os adjetivos à definição de propriedades e a formação de conjuntos, o verbo ser pode ser utilizado para indicar as relações de pertença, inclusão e igualdade, e os advérbios associados a noções de probabilidade. O significado (do ponto de vista estritamente lógico) dos termos e, ou, e não, também se tornou objeto de ensino. Apesar das declarações preambulares sobre a importância da experiências de vida dos alunos, as recomendações e sugestões do programa para a ligação entre matemática e linguagem não têm qualquer referência ao seu uso quotidiano nem quanto à sua aplicabilidade ao real. É possível conjecturar (Matos & Monteiro, 2020; A. Oliveira, s/d; Silva, 1959) que esta originalidade, que vai marcar decisivamente os programas portugueses de diversos ciclos, se deva ao particular interesse de Sebastião e Silva pela lógica e pela linguagem, formatando a sua visão da matemática.

Podemos compreender melhor o novo currículo observando como um livro de texto para o 5.º ano (d'Eça et al., 1974) concretizava alguns tópicos do programa. O manual começava por introduzir os conceitos básicos da teoria dos conjuntos, o que ocupava um quarto da totalidade das páginas. Nota-se que se trata sobretudo de um empreendimento linguístico e, embora os autores tenham feito um grande esforço para utilizar palavras comuns – essencialmente nomes geográficos, nomes de objetos do quotidiano ou situações sociais comuns – falar sobre conjuntos e as suas operações necessitava de uma terminologia nova e considerável, como conjuntos, elementos, pertença, conjunto disjunto, único e vazio, inclusão, identidade, correspondências unívocas (um para um) e biunívocas e a cardinalidade de um conjunto. A maioria destas palavras não era familiar nem a alunos nem a professores e, mesmo as da linguagem corrente, assumiam um significado especial nas aulas de Matemática. Assim, como o programa exigia que cada novo termo tivesse um significado preciso, o manual explicava minuciosamente cada um deles. Por exemplo, o livro esclareceu cuidadosamente a diferença entre está contido em e é um elemento de. Símbolos relacionados também foram introduzidos e explicados. O mesmo aconteceu com o conteúdo aritmético. Por exemplo, na página 31 o livro do 5.º ano (d'Eça et al., 1974) fazia uma distinção entre número (uma entidade abstrata) e numeral (um sinal referente a essa entidade abstrata). Algumas palavras mudaram de significado. Por exemplo, o termo igual, que os alunos utilizavam desde a escola primária em problemas aritméticos, era agora literalmente proibido e substituído por idêntico.

Percorrendo os capítulos iniciais dos manuais para o 5º ano (d'Eça et al. 1974) e o 6º ano (d'Eça et al. 1971), ficamos com a sensação de que o objetivo essencial é a aprendizagem de uma nova língua. Tacitamente, os livros presumiam que a linguagem dos conjuntos e as suas relações podem ser utilizadas para expressar qualidades de palavras comuns, desde que estas fossem cuidadosamente escolhidas e aplicadas em contextos controlados, tal como sugerido pelo programa.

Não resisto a reproduzir aqui as palavras do professor João Ilharco (2020) que, numa crítica publicada no jornal diário República de 18 de janeiro de 1969, enumera a nova terminologia contida noutro manual para o CPES:

- conjunto determinado (ou definido em extensão);
- conjunto de referência, também designado pelos nomes de universo lógico ou simplesmente universo;
- definir em compreensão as propriedades dos entes que formam um conjunto;
- a representação de um conjunto definido em extensão, que é feito pelo seguinte processo; A = {x: x é uma maçã}, representação que significa: A é o conjunto dos elementos x tais que x é uma maçã;
- conjuntos singulares;
- conjuntos vazios;
- relação de pertença e não pertença;
- propriedades reflexiva, simétrica e transitiva de conjuntos;
- correspondência biúnivica e unívica (sic) de conjuntos. (Ilharco, 2020, p. 249)

João Ilharco cita ainda algumas das frases que encontrou:

> Na página 26 encontramos uma noção que é dada pelas seguintes palavras: «Diz-se que um conjunto é uma parte ou um subconjunto de outro conjunto, quando qualquer elemento do primeiro também é elemento do segundo». O título de um capítulo (página 60) reza assim:

> «A interceção de conjuntos finitos por meio de propriedades e a conjunção copulativa E.» (Ilharco, 2020, p. 250)

E termina com uma pergunta retórica: “no meio de tantas abstrações, não teria sido esquecido que as crianças a quem devem ser ministrados tais conhecimentos têm, unicamente, dez anos de idade?” (Ilharco, 2020, p. 250).

A partir de 1974, a deriva da associação da matemática à linguagem agrava-se nos novos programas[9] e a disciplina, que pertencia à área da iniciação científica juntamente com as Ciências da Natureza, foi transferida para a área da comunicação agregada às disciplinas de línguas (Ensino Preparatório. Programas para o ano lectivo de 1974-1975, 1974) aprofundando o foco na terminologia e distanciando-a ainda mais da realidade material. O entusiasmo evidenciado pelos responsáveis educativos estava agora claramente nas dimensões linguísticas passando para segundo plano a importância da ligação da disciplina às experiências do mundo real. A esta opção correspondeu naturalmente uma segunda série de novos termos, sobretudo nas frações e o seu ensino como operadores passou a recorrer a termos, certamente rigorosos do ponto de vista matemático, mas muito afastados da linguagem comum: operadores do tipo partitivo, numerais partitivos, operadores do tipo partitivo-multiplicativo e numerais partitivo-multiplicativos. Esta opção manteve-se até ao final da década de 1980.

Diversos documentos revelam-nos como foi difícil transformar estes currículos prescritos em currículos em ação (Matos & Almeida, 2023). Logo em outubro de 1968, quando se iniciou o novo ciclo, foram desenvolvidas ações de formação centradas sobretudo no novo conhecimento matemático. No entanto, cedo os professores se queixaram da extensão do programa. Caberá a Joaquim Redinha, o inspetor encarregado do acompanhamento da sua execução, elaborar diversas circulares oficiais, algumas com a chancela de Sebastião e Silva, fazendo recomendações sobre o modo como as aulas deveriam ser conduzidas (Wielewski & Matos, 2009). Na minha interpretação, a visão que transparece destas circulares e, em particular do documento programático que as acompanhava, *Algumas notas de pedagogia da Matemática* (Redinha, 1968), é contraditória. Por um lado, defende de forma sustentada a importância da ligação ao real e ao concreto e o primado da intuição. Mas, por outro, as suas sugestões para a concretização dos conteúdos detalham essencialmente a terminologia e o mundo abstrato da teoria dos conjuntos, não compreendendo como a terminologia usada era de difícil aplicação pelos professores e de compreensão pelos alunos. As recomendações de algumas das suas circulares são de tal modo incisivas que podem corresponder a uma frustração com a incapacidade docente em concretizar o programa (Matos, 2009). E, efetivamente, por um lado, os professores eram de opinião que o programa era grande, mas os decisores (incluindo Sebastião e Silva) contrapunham que tal não era verdade, lamentando antes a falta de preparação docente. Uma alteração mínima ao programa publicada logo 1969 não resolveu o problema e as mudanças de 1974 ainda a pioraram.

Investigando a relação entre linguagem e matemática escolar

Nos finais da década de 1960, colocar a linguagem no centro parecia ser uma boa alternativa curricular para a matemática. Além de acompanhar as tendências educativas estruturalistas da época que influenciavam o ensino da gramática, essa opção parecia também ter sustentação na hipótese piagetiana de que a cognição humana se baseava em estruturas elementares idênticas às que os matemáticos bourbakistas, também eles estruturalistas, propunham como fundamento para a construção do edifício matemático.

[9] Da autoria de Maria Leonor Filipe, Maria José Nunes e Natália Vaz (Matos, 1989).

Se o ensino se focasse no desenvolvimento cognitivo dessas estruturas elementares, simultaneamente cognitivas e matemáticas, podiam ser conseguidos ganhos consideráveis nos tempos de aprendizagem. Como se escreve no subtítulo de uma notícia do Diário Popular de 1963 sobre uma experiência de matemática moderna num colégio para o ensino primário, "Avanço de dois anos nos programas pelos métodos modernos na Instrução Primária" (Fonseca, 2020, p. 138).

Mas seria efetivamente assim? A opção de destacar a matemática como uma linguagem foi produtiva? Deteta-se no discurso dos responsáveis as dificuldades docentes para a concretização das novas propostas em aula. Como lidaram os professores com essa situação? E quanto aos alunos?

Duas pesquisas quantitativas de grande dimensão incidindo sobre o ensino e a aprendizagem no CPES (Matos & Almeida, 2021) permitem-nos formular algumas respostas sobre o modo como os novos currículos foram recebidos por alunos e professores. A primeira, concretizada por Paulo Crato no âmbito da Inspeção do Ciclo Preparatório e cuja publicação não foi autorizada, recorreu ao computador do Instituto Nacional de Estatística para análise dos dados, estudando detalhadamente os milhares de respostas dos alunos nos exames nacionais de 1972 (Matos, 2005). A sua análise confirmou que apenas a terminologia mais elementar da nova matemática era retida (conjuntos, as suas operações básicas e terminologia associada) e que os alunos manifestavam graves insuficiências em cálculos aritméticos. A segunda investigação data de 1986, quase vinte anos depois da introdução do CPES, e foi conduzida no âmbito da Inspeção Geral do Ensino. Recorrendo a inquéritos a professores (Monteiro et al., 1986), o trabalho mostrou que a maior parte do tempo letivo do primeiro ano era dedicado ao estudo dos conjuntos, o que, como referem, naturalmente diminuiu o tempo disponível para outros temas, nomeadamente geometria e aperfeiçoamento das competências de cálculo. Ambos os estudos mostraram que nem os alunos nem os professores tinham lidado bem com outras noções da matemática moderna. No exame de 1972, por exemplo, o desempenho dos alunos numa tarefa aritmética muito simples teria sido prejudicado pela utilização da linguagem moderna (Matos, 2005), e o inquérito de 1986 mostrou que os professores evitavam utilizar as abordagens modernas mais complexas para ensinar a subtracção e as fracções.

Em simultâneo, nos finais da década de 1960, a educação matemática está a dar os primeiros passos de afirmação como campo académico, procurando constituir um saber próprio assente essencialmente na pesquisa empírica. É nesta época que Hans Freudenthal, então presidente da International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), lança a revista *Educational Studies in Mathematics* e estabelece a tradição dos ICMEs (Furinghetti et al., 2013). Recorrendo à terminologia de Alan Bishop (1997), o novo campo procurava afastar-se de uma "tradição pedagógica", que legitimava o seu conhecimento através de experiências de ensino conduzidas por professores de excelência, e aproximar-se de uma "tradição do cientista empírico", onde o conhecimento é baseado na análise de dados e no confronto de interpretações. Os poucos trabalhos inseridos nesta tradição recorriam a paradigmas psicológicos, então dominados pelas propostas de Piaget.

É neste contexto que a publicação em 1967 do livro *The New Mathematics and an Old Culture* (Gay & Cole, 1967) vai estimular muito debate. O livro começa com a descrição de uma situação em que se pede para estimar quantas medidas de arroz cru estão num recipiente. Comparando as estimativas de um grupo de grupo de voluntários do Peace Corps dos Estados Unidos (EUA) em formação docente na Libéria e de outro grupo de adultos iletrados da etnia kpelle, uma tribo liberiana, foram encontradas diferenças relevantes. Por exemplo, enquanto os voluntários sobre-estimavam o volume de arroz em média em 35%, os liberianos sub-estimavam apenas em 8%. Em sentido contrário, os voluntários facilmente resolveram uma tarefa de classificação de cartões com figuras geométricas, enquanto que os adultos kpelle tiveram muitas dificuldades.

Não era fácil explicar estes resultados recorrendo ao quadro piagetiano. Muito provavelmente, algo do domínio cultural estava na base desta diferença, mas na época nada nos escritos de Piaget faria supor que as suas estruturas operatórias elementares, que eram, recordo, similares às estruturas matemáticas básicas, podiam variar consoante a cultura. Nem era sequer imaginável no mundo ocidental que a linguagem fosse algo mais do que a expressão de uma "linguagem interior". Estando os dois autores envolvidos com a formação de professores quando a nova matemática "ocidental" se constituía como protótipo da modernidade, o livro de 1967 é motivado pela sua perplexidade perante as dificuldades sentidas pelos alunos kpelle com os conceitos e processos da matemática moderna. Recorrendo a situações e entrevistas, os investigadores procuraram compreender mais sobre como jovens estudantes e adultos iletrados kpelle se relacionavam com a nova matemática, nomeadamente com as classificações, os números, as operações, a geometria, as medidas, a linguagem espacial e a lógica.

Sistematicamente os autores descobriram que diferenças linguísticas entre o inglês, a língua de ensino, e a sua língua materna tornavam muito complicadas as tarefas de classificação abstrata e frequentemente produziam resultados não esperados porque a língua inglesa não conseguia acompanhar as subtilezas da língua materna, ou vice-versa. Por exemplo, os termos associados aos sistemas de contagem eram distintos e toda a atividade aritmética estava ligada a situações concretas, raramente ultrapassando 30 ou 40. A sua língua possuía um negativo, várias expressões conjuntivas, expressões disjuntivas (inclusivas e exclusivas) e várias expressões para implicação. Só era possível expressar a equivalência de uma forma complicada.

O livro detalha ainda diversas diferenças culturais que tornavam a experiência escolar muito distinta do que se poderia esperar:

> O resultado final deste padrão de dificuldades na escola é que a matemática, e mesmo quase todo o currículo, não é útil fora da aula. A criança não tem qualquer oportunidade de usar na vida da aldeia as capacidades matemáticas aprendidas de cor na escola, e não sabe como usar essas capacidades, sem ser para satisfazer o professor. A disciplina [de matemática] é isolada e irrelevante, um curioso exercício de memória e palpite de "esperto" (Cole & Gay, 1967, p. 35)

Ao reler o livro, não pude deixar de notar as semelhanças com aulas do CPES que observei em meados dos anos 1980. Tal como os kpelle, os alunos portugueses quando confrontados com as minudências da terminologia das frações como operadores, na melhor das hipóteses, respondiam à professora por palpites e, na pior, adotavam comportamentos desviantes. A professora fazia o que podia, e, já em desespero, usava a inquirição dos alunos como forma de os controlar. Por exemplo, vendo que o aluno X estava distraído interpelava-o ameaçadoramente "X, como se designa o operador que está no quadro?"

O estudo pioneiro de Gay e Cole precede de quase 20 anos a virada cultural que ocorreu na educação matemática no final da década de 1980 (Furinghetti et al., 2013) e naturalmente não recorre ao equipamento conceptual de que hoje dispomos para estudar as dimensões sociais e culturais do ensino e da aprendizagem. Decidi referi-lo aqui porque é dos primeiros que ilustra, em detalhe, como as dimensões linguísticas e a sociais e culturais que lhes estão associadas influenciam o ensino e a aprendizagem. O estudo é simultaneamente relevante porque constitui das primeiras indicações que a teoria piagetiana subestimava a importância das dimensões sociais e culturais. A virada cultural do final da década de 1980 vai sugerir caminhos de investigação, mostrando como podemos reconhecer as origens do conhecimento matemático atual em culturas muito diferentes da nossa (Bishop, 1988), ou como o insucesso escolar em matemática de alguns alunos não se deve a qualquer falha cognitiva, mas sim à desadequação da escola aos seus interesses e cultura (Carraher et al., 1985; Mellin-Olson, 1987). Desde que, especialmente a partir de 2001, o trabalho de Vygotsky e a teoria da atividade começaram a ser conhecidos no mundo ocidental (Bussi, 1991), foi possível dispor de um paradigma que considera o saber matemático como produto de práticas sociais. A linguagem, em particular, não é entendida como a expressão de uma linguagem interna como propõe Piaget, mas antes o veículo a partir do qual elaboramos a nossa cognição (Oliveira, 1993).

A matemática moderna no Unificado

O CPES vai determinar alterações nos ciclos escolares seguintes. Assim, a partir do ano letivo 1970/71, entram em funcionamento os Cursos Gerais dos liceus e das escolas técnicas e, em 1973/74 os correspondentes Ciclos Complementares. No caso da Matemática, isso implicou a entrada da matemática moderna nos novos programas que, no das técnicas, foram ensaiados a partir de 1968. Estes novos cursos, no entanto, não são obrigatórios e apenas prolongam a bifurcação já existente no sistema escolar português.

O propósito do alargamento do ensino universal, gratuito e obrigatório regressa ainda em tempos de ditadura pela mão do ministro Veiga Simão que, no início dos anos 1970. Refletindo simultaneamente as mudanças económicas que a sociedade portuguesa estava a atravessar (Fernandes, 1981, Grácio, 1981), e uma nova visão de sociedade assente em valores humanistas (Stoer, 1983), a "Batalha para a Educação" do ministro, procurando uma "democratização do ensino", despertou muito entusiasmo na época, embora, como Rogério Fernandes interroga "até que ponto a prática poderia corresponder às declarações de intenção no quadro de um regime de que tinham sido proscritas as liberdades?" (Fernandes, 1981, p. 171).

A reforma de Veiga Simão propunha uma escolaridade obrigatória de oito anos mantendo um ensino primário de quatro e criando um novo ensino preparatório de outros quatro. A Revolução de 1974 vai ditar a sua revogação e a revisão de todos os programas adaptando-os ao novo regime democrático. Como modo de eliminar as duas vias paralelas de percurso escolar, gradualmente, a partir de 1975, vai ser casuisticamente construído um novo ciclo de três anos, o Curso Secundário Unificado que se tornará obrigatório a partir de 1986.

Num balanço da política educativa dos primeiros anos do novo regime, Rui Grácio, que foi um ator principal das mudanças, destaca, entre outros pontos, a alteração, em todos os graus e ramos do ensino, dos conteúdos da aprendizagem:

> Desembaraçados dos valores típicos da ideologia fascista e colonial, da anquilose de uma cultura esclerosada, renovam-se os planos de estudo e programas de ensino, conformados por valores de modernidade científica e

> cultural, de pluralismo ideológico, de inspiração democrática. (Grácio, 1981, p. 670)

Existiram dois programas de Matemática destinados a expandir a escolaridade básica após o CPES, os da experiência Veiga Simão para o 7.º, 8.º[10] (Pedro & Matos, 2018) e os gradualmente desenvolvidos para o ensino unificado (Matos & Almeida, 2023)[11]. Os dois seguem de perto o programa do Curso Geral dos liceus de 1970, quer na estrutura, quer nos conteúdos propostos (Matos & Almeida, 2023), e ignoram a experiência, também de matemática moderna, que tinha decorrido nas escolas técnicas desde 1968 (Almeida & Rodrigues, 2025; Rodrigues, 2014).

A matemática destes programas revela-se no uso de símbolos, e na aritmética enquadrada gradualmente nos conjuntos N, Z, Q e R mas não assenta, como no CPES, na ligação entre linguagem e matemática. No centro dos novos programas está o estudo das aplicações que se inicia com as relações binárias e as suas propriedades. As aplicações são apresentadas como casos especiais de relações binárias e os termos injetivo, sobrejetivo, bijetivo, domínio, contradomínio, inverso e composição de aplicações são introduzidos através de diagramas de Venn. Estes conceitos são depois aplicados a funções numéricas, incluindo representações gráficas da proporcionalidade direta e da inversa no 7.º ano, e gráficos cartesianos de funções da forma y = ax2, seguidos de operações com radicais quadráticos no 8.º. A geometria recorre ao conceito de vetor após o que aborda as isometrias (7.º ano), as homotetias (8.º ano) e as semelhanças (8.º ou 9.º ano) discutidas como aplicações.

A lógica faz a sua aparição no 9.º ano através de uma discussão linguística, distinguindo designações e proposições, fazendo eco da forma como temas semelhantes tinham sido tratados no CPES. A terminologia incluía ainda expressões proposicionais e equivalência de condições, esta última utilizada para formalizar princípios de equivalência para equações. A conjunção de condições foi aplicada a sistemas de equações.

Em síntese, os novos programas abordavam essencialmente tópicos “clássicos” de aritmética e álgebra, alterando ligeiramente a terminologia habitual e incorporando a discussão na hierarquia de conjuntos numéricos N, Z, Q e R e das suas operações. O estudo das aplicações, que atravessa a aritmética, a álgebra e a geometria, inicia-se com o tópico das relações binárias e suas propriedades a que mais tarde se associa o conceito de vetor que conduziu ao estudo de transformações geométricas (isometrias, homotetias e semelhanças) hierarquicamente organizadas.

Avaliando a matemática moderna do Unificado

Tal como aconteceu com o CPES, dispomos de estudos sobre os resultados do ensino e da aprendizagem da Matemática neste ciclo efetuados entre 1977 a 1979 pela equipa de um grande projecto do Ministério da Educação dirigida por educadores suecos que avaliou o ensino e a aprendizagem do 7.º ao 9.º ano unificados, publicando um total de 16 relatórios (Lundgren et al., 1977; Matos & Almeida, 2021). Cinco destes relatórios referiam-se especificamente à disciplina de Matemática, estudando programas, manuais e qualidade das aprendizagens entre 1975 e 1979.

Os relatórios, trazendo um olhar externo experiente, são muito críticos dos programas. Por exemplo, um deles afirma:

[10] Da autoria de Alfredo Osório dos Anjos e Vítor Pereira (Pedro & Matos, 2018).
[11] Da autoria de Alfredo Osório dos Anjos, Francelino Gomes e Maria Leonor Filipe (Catela, 1980).

> Ao analisar os currículos para o 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade, verifica-se que são currículos típicos da primeira geração da Matemática Moderna12; revelam, além disso, o interesse em ensinar matemática pura que venha a fazer dos alunos bons matemáticos. (Catela & Kilborn, 1979, p. 41)

São comentários muito violentos, sobre propostas curriculares que se pretendiam destinadas a uma escolaridade básica, isto é, para todos.

Os manuais escolares foram avaliados pelo projeto. Na época, embora já não vigorasse o regime de livro único instituído para os liceus e as escolas técnicas no tempo de Pires de Lima, permanecia uma coleção dominante de manuais escolares da autoria de António de Almeida Costa e Alfredo Osório dos Anjos e os livros alternativos tinham uma utilização residual. Foram relatadas carências na utilização e no acesso aos livros escolares e o seu conteúdo suscitou fortes críticas por parte dos avaliadores (Catela & Kilborn, 1979). Em primeiro lugar, argumentaram que os livros eram quase réplicas dos programas e que o modo de apresentar os conceitos e as sequências de ensino estavam muito longe do quotidiano escolar. Por outro lado, o estilo próximo da lógica "pura" dos livros não facilitava a sua compreensão por parte dos professores que não se sentiam confortáveis com conceitos, significados e pressupostos. Em segundo lugar, questionaram a estrutura dos livros. Muitas vezes, os alunos eram obrigados a ler cinco ou mais páginas de texto antes de terem a oportunidade de resolver problemas ou de se envolver em tarefas. Havia poucos exercícios, quando os havia, e quase todas as situações eram abstratas. Os livros apresentavam a "matéria" e não tinham sido concebidos como ferramenta de estudo discente. Embora os investigadores não o explicitem, suspeito que estes manuais eram ignorados e substituídos por livros de exercícios conduzindo a práticas de repetição alienadas de uma compreensão dos conteúdos.

A qualidade das aprendizagens no 7.º, 8.º e 9.º anos foi estudada através de testes aplicados em doze escolas da região Norte e da região de Lisboa (Catela, 1980). Os desempenhos ficaram muito aquém do esperado: a média dos alunos de 7.º ano foi de 13% e os do 8.º 25%. Mesmo nos conteúdos do 7.º ano testados no 8.º, a média foi de 24%, embora os testes tivessem sido construídos com uma expectativa de resultados médios de 50%[13]. Como os materiais de avaliação tinham sido desenvolvidos em cooperação com os autores do programa, os investigadores concluíram que estes não deviam estar em contacto com a realidade da maioria das escolas, provavelmente porque, como conjecturaram, a maioria deles apenas tinha experiência de ensino em escolas urbanas" privilegiadas".

> Estes testes experimentais foram construídos pelos autores dos programas que são também professores. O nível dos testes (…) revela, por isso, a noção que os professores têm do nível das suas turmas, e que afinal mostrou ser um grau de exigência superior àquele que corresponde aos conhecimentos dos alunos. (Catela, 1980, p. 24)

Note-se ainda que uma versão preliminar dos testes tinha já dado resultados muito fracos, mas os autores dos programas optaram por não fazer qualquer alteração dos mesmos.

As respostas dadas às questões que envolviam matemática moderna foram particularmente dececionantes (Catela, 1980). Por exemplo, o desempenho numa questão sobre relações binárias foi muito fraco: dezasseis turmas do 7.º ano (64% do total de

[12] É provável que a menção da "primeira geração da Matemática Moderna" se refira à terminologia utilizada no texto crítico de Krygowska (1979) que discutiremos na secção seguinte.
[13] Uma discussão mais detalhada destas pesquisas pode ser encontrada em Matos e Almeida (2021).

turmas do 7.º ano) e doze turmas do 8.º ano (55% do total) tiveram uma percentagem média de respostas correctas inferior a 10%. Quanto ao total dos alunos, os resultados corretos a esta questão foram de 8,8% no 7.º ano e de 9,7% no 8.º ano, o que correspondeu, simultaneamente, às percentagens mais baixas de respostas correctas da prova.

O estudo das percentagens de respostas correctas de Catela (1980) contou apenas parte da história. Num aprofundamento dos seus dados (Matos & Almeida, 2021), detetámos muitas turmas em que poucos ou nenhuns alunos acertaram na resposta. Embora algumas turmas tenham tido resultados ligeiramente melhores, estes ainda ficaram muito longe dos esperados pelos autores dos programas. Na região Norte, em particular, os dados revelaram um elevado número de respostas nulas (33 em 57 turmas, enquanto na região de Lisboa houve 28 turmas com respostas nulas em 84). Os melhores resultados (mais de 30% de respostas correctas, mas ainda assim abaixo do limite de 50%) foram obtidos em três escolas da cidade de Lisboa que tinham professores bem familiarizados com a reforma.

O fracasso dos alunos nos itens de relações binárias parece dever-se a dois factores: a falta de estabilidade do sistema escolar da época e dificuldades intrínsecas aos conteúdos. Por um lado, os anos estudados foram particularmente difíceis para o ambiente escolar devido à falta de espaços, de professores e mesmo de manuais. É provável que muitos professores, não tendo aprendido relações binárias durante a sua formação, tendessem ou a ensiná-las de forma inadequada, ou a não as ensinar de todo, como vimos acontecer com outros temas "modernos" no CPES. Mas, por outro, até turmas de professores familiarizados com as novas ideias tiveram um fraco desempenho. Mesmo estes professores pareciam não ser capazes de ensinar relações binárias, o que aponta para um desajustamento do tema em relação às capacidades dos alunos. As insuficiências encontradas no ensino e na aprendizagem da Matemática após a aplicação da matemática moderna aos anos terminais do Unificado prolongam as encontradas no CPES.

Refletindo sobre a matemática moderna

Em Portugal, foram publicados em 1966 artigos de jornal testemunhando polémicas em França e nos EUA sobre a reforma (Almeida et al., 2022), mas, se omitirmos dois artigos de opinião em diários do final da década de 1960, apenas já na década de 1980 o descontentamento com a situação nacional do ensino e da aprendizagem da matemática escolar ganhou expressão pública tendo as primeiras críticas surgido em comunicações no primeiro encontro nacional da SPM de março de 1980. Mais tarde, entre Abril e Julho de 1981, a SPM promoveu em Lisboa um conjunto de debates sobre os programas de Matemática nos quais participaram muitos matemáticos, os autores dos programas e muitos professores de diversos graus de ensino (Os programas em debate, 1982). O documento final critica os programas por, por um lado, terem sido inicialmente elaborados com base nos antigos programas liceais, virados especialmente para a formação pré-universitária e por, por outro, terem sofrido muitas alterações no sentido de "tornar a disciplina mais hermética, mais formalizada, com maior carga de simbolismo, com uma linguagem mais complicada e mais desligada da realidade e das aplicações" (p. 20). Novas críticas e, sobretudo, novas direções curriculares são propostas no encontro de homenagem a Sebastião e Silva em 1982. Não conheço, neste início dos anos 1980, posições críticas sobre o currículo do CPES e, aparentemente, a insatisfação com a matemática moderna é expressa apenas por professores e formadores para o então designado ensino secundário (anos 7 a 12), e matemáticos que, apesar de abordarem, implícita ou explicitamente, o insucesso dos programas, nunca se referem ao ideal de uma matemática para todos.

De qualquer modo, os problemas são muito semelhantes aos encontrados noutros sistemas educativos. Em muitos países europeus, a explosão escolar após a Segunda Guerra Mundial conduziu a um aumento da escolaridade obrigatória. No entanto, não se cuidou de saber se esse alargamento, que fazia entrar nas escolas após o ensino primário camadas da população que delas sempre tinham estado afastadas, exigia alguma adaptação (Gates & Vistro, 2003).

Correspondendo a uma solicitação da UNESCO, o processo de reflexão para a produção do quarto volume das *New Trends in Mathematics Teaching* conduzido por H. G. Steiner e Bent Christiansen (1979), propôs-se como uma contribuição prospetiva sobre temas amplos e fundamentais relacionados com o ensino e a aprendizagem da matemática, resultando numa obra em que a densidade da discussão vai muito além da mera descrição de experiências de sucesso. Coletivamente preparado durante muitos meses, o texto inicial contou com uma discussão no ICME 3 de Karlsruhe em 1976 e foi publicado em 1979, constituindo uma etapa importante na legitimação da educação matemática como campo académico (Furinghetti et al., 2013).

A alteração da qualidade destes debates sobre temas de ensino de aprendizagem da matemática, substituindo a visão tecnicista de matemáticos profissionais e aproximando-se de uma apreciação mais ampla dos problemas educativos, explica como a avaliação dos efeitos da matemática moderna, bem como a construção de alternativas curriculares posteriores, vai ocorrer num ambiente científico bem mais poderoso do que o que presidiu à sua implementação. Isso pode ser encontrado no capítulo escrito por Anna Zofia Krygowska (1979) que leva a cabo uma apreciação da reforma da matemática moderna ao discutir a possibilidade de uma matemática adequada à integração na escola um grande número de jovens após o ensino primário.

Para efetuar o balanço do que designa como “a primeira onda” da matemática moderna[14], Krygowska sintetiza as opiniões de educadores matemáticos mais ativos, uns com uma apreciação positiva, outros, negativa. Quanto aos defensores da reforma, destaca a visão de Jean Dieudonné que defende que o ensino da matemática deve ter um sólido fundamento matemático. De uma segunda voz, a de Edward Begle, primeiro responsável pelo projeto do School Mathematics Study Group nos EUA, a educadora polaca destaca, não a defesa do seu projeto, mas antes a opinião que consistentemente defendeu em diversas ocasiões, pedindo que as posições críticas sejam fundamentadas em pesquisas sólidas e não em opiniões casuísticas.

Quando às opiniões críticas, escolhe três intervenientes: Hans Freudenthal, Morris Kline e René Thom, cujas posições agrega em sete pontos:

> Os principais alvos da crítica relativa à chamada orientação “bourbakista” de certas reformas, [são] nomeadamente: (a) o fetichismo do modo de pensamento teórico estabelecido, (b)[15] as abstracções que são improdutivas porque as suas aplicações são injustificadas e muitas vezes erradamente incorporadas em situações concretas, (c) a linguagem pseudo-erudita carregada de símbolos e terminologia, (d) o fetichismo do método axiomático, (e) o fetichismo do rigor, que na realidade da aula se tornou um pedantismo inútil, (f) a desvalorização da realidade física como fonte de ideias matemáticas e, em particular, a desvalorização do espaço físico como fonte de geometria, (g) a desvalorização de uma visão global baseada na

[14] O termo também é usado no trabalho de Catela e Kilborn (1979) que citámos atrás.

[15] O texto original é: “(b) the abstractions which are unproductive because they are unjustified in their applications and often wrongly embodied in concrete situations”.

> consciência espacial, em benefício do pensamento algorítmico da álgebra formal. (Krygowska, 1979, p. 33)

Krygowska sintetiza seguidamente críticas que surgiram da aplicação prática da reforma bourbakista:

> A chamada "nova" matemática não se revelou fácil nem interessante para muitos alunos e continuou a ser o meio de selecção que favorece as crianças mais desenvolvidas conceptualmente devido à sua origem familiar (…). Os novos métodos, frequentemente especiosos, incluem na prática equívocos e expressões concretas erradas de abstracções matemáticas (…). O desempenho dos alunos provoca-lhes ansiedade. A aplicação de métodos que ativam o pensamento dos alunos em situações abertas é dificultada pela estrutura dedutiva da lição. O nível de abstração elimina da experiência dos alunos muitos problemas simples, [que poderiam ser-lhes] acessíveis através de [se lhes permitir] uma investigação aberta. A chamada "nova" matemática está isolada das outras disciplinas escolares. (Krygowska, 1979, p. 33)

Os pontos assinalados por Krygowska ajustam-se aos programas nacionais da época. Poder-se-ia pensar que as alterações efetuadas desde 1991 viraram a página naquele estilo de programa. No entanto, o currículo é mais amplo que o programa e talvez valha a pena indagar se esse estilo permaneceu na cultura da matemática escolar quase como um "currículo escondido". Refiro-me até que ponto podemos encontrar ainda hoje em livros de texto ou no discurso docente a "linguagem pseudo-erudita carregada de símbolos e terminologia" que não acrescenta compreensão, mas impede a matematização criadora de que fala Poincaré (1996). O mesmo podemos afirmar acerca do "fetichismo do rigor", esquecendo que não existe rigor matemático absoluto como nos mostra o passado da matemática e o rigor na aula, que prefiro denominar de "coerência", é sempre contextualizado e deve ser um meio de facilitar a compreensão.

As novas ideias não foram seguidas em todo o lado. Destacam-se em particular os Países Baixos que, ignorando a nova matemática, desenvolveram o que ficou conhecido como a matemática realista (Treffers & Goffree, 1985). Iniciada na década de 1970, e seguindo a influência de Hans Freudenthal, ele próprio acompanhando a visão fenomenológica construtivista de Luitzen Brouwer, considerava a matemática como uma atividade humana. O seu ensino devia, pois, radicar-se em experiências do mundo significativas a partir das quais os alunos construiriam os significados matemáticos. Tomemos um exemplo da perspetiva de Freudenthal sobre o que deve ser a relação entre geometria e espaço na matemática escolar básica, implicitamente negando as estruturas bourbakistas envolvendo espaços euclidianos, afins e outros:

> A geometria é a compreensão do espaço. E, como se trata da educação de infância, é a compreensão do espaço em que a criança vive, respira e se move. [É] o espaço que a criança precisa de aprender a conhecer, explorar e conquistar para nele viver, respirar e se movimentar melhor. (1973, p. 403)

Vários autores têm estudado a evolução do movimento curricular matemática moderna (Christiansen, 1976; Fey, 1978; Guimarães, 2003; Moon, 1986). Embora a sequência de eventos difira de país para país, podem distinguir-se três fases, uma primeira de inovação optimista centrou-se numa mudança do conteúdo matemático dos programas, estabelecendo os novos currículos e elaborados os novos livros de texto e materiais de ensino. Numa segunda fase os reformadores tomaram de consciência das dificuldades relacionadas com o processo de implementação, em particular no facto de que os conteúdos mudaram, mas os métodos permaneceram. Por último, surge uma reação pública face ao declínio da qualidade das aprendizagens. Esta fase coincide com uma consolidação do campo educação matemática.

Procurando uma matemática para todos

Longe já dos tempos em que predominantemente se procuravam modos de formação em matemática para quadros superiores e, face ao descontentamento com a reforma, o problema da integração escolar de todos os alunos nos níveis pós-primários transcendeu, na segunda metade dos anos 1970, os limites dos gabinetes e da academia. Nos EUA, em particular, desenvolve-se uma reação pública que ganha o nome de Back to Basics propondo um regresso à escola tradicional, com um currículo centrado em destrezas matemáticas básicas e em competências manipulativas de papel e lápis (Guimarães, 2003). O movimento ocorreu também noutros países e, em Portugal, as suas ideias são trazidas, embora com pouco sucesso, por Wiggo Kilborn, um dos investigadores suecos que colaborou na avaliação do ensino unificado (Leal & Kilborn, 1981). Nos EUA, este movimento de base vai ser contrariado pela posição de diversas organizações profissionais argumentando que um ensino de matemática de qualidade não se pode limitar às competências mais básicas. O documento *Agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s* publicado pelo National Council of Mathematics Teachers (NCTM, 1980) propõe, acompanhando as recomendações de outros organismos, que o currículo de matemática incorpore um conjunto de competências, nomeadamente, a resolução de problemas e as aplicações da matemática, a estimação e a sensibilidade à plausibilidade dos resultados, a geometria e a medida, a leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos, a capacidade de usar a matemática para fazer previsões, e a literacia com computadores (Guimarães, 2003; NCTM, 1980).

A segunda metade da década de 1980 é caracterizada por um aprofundamento das ferramentas intelectuais disponíveis para estudar os processos educativos, possibilitando, nomeadamente, uma diferente apreciação da importância do saber reflexivo docente ou a consideração dos fatores culturais e sociais no estudo e na intervenção curricular (Furinghetti et al., 2013) e é neste pano de fundo que se destacam três soluções para um currículo de matemática pós- primário. A primeira é apresentada durante o ICME 6. Trata-se de o estudo School Mathematics in the 1990s (Howson & Wilson,1986), baseado nas contribuições de mais de vinte especialistas de todo o mundo e elaborado a pedido da ICMI. O documento propõe três percursos curriculares distintos: o universitário, o profissionalizante e o não formal. Num claro reconhecimento de que não existe uma matemática universal. Optava-se por oferecer a matemática numa variedade de formatos para se adequar a vários grupos de alunos.

Uma solução distinta é apresentada pelo NCTM que, após um debate público iniciado em 1986, publica em 1989 os *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Guimarães, 2003; NCTM, 1989). Os Standards, ou as Normas, como ficaram conhecidos em Portugal, apresentam um guião para orientar a reforma da matemática escolar desenvolvendo novas direções tanto no conteúdo como nos métodos. São propostas quatro grandes metas educativas, correspondendo a quatro grandes necessidades sociais: a de trabalhadores matematicamente alfabetizados, a de poder aprender durante toda a vida, a de proporcionar uma igualdade de oportunidades e a de um eleitorado informado. O NCTM toma como princípio que todos os alunos podem e irão aprender matemática se o conteúdo for apresentado de uma forma que seja significativa e consistente com as suas necessidades, intelecto e estilos de aprendizagem. Sem advogar um currículo universal, propõe um conhecimento matemático básico adquirido a partir de experiências relevantes de matematização em torno de cinco objetivos importantes: aprender a dar valor à Matemática, adquirir confiança na capacidade de fazer Matemática, tornar-se apto a resolver problemas matemáticos, aprender a comunicar matematicamente e aprender a raciocinar matematicamente (NCTM, 1991).

Uma terceira opção, a educação matemática crítica (Skovsmose, 1994), desenvolve-se já nos anos 1990 e visa utilizar a matemática como ferramenta para analisar e transformar a realidade social, questionando a neutralidade da matemática e abordando seus usos em contextos políticos, económicos e culturais. Procura desenvolver nos estudantes uma leitura crítica do mundo, a partir de temas que incluem justiça social, equidade e inclusão. O objetivo é formar cidadãos que compreendam a matemática, a usem para questionar e agir sobre problemas sociais.

Paralelamente a estas propostas curriculares, a aspiração de uma matemática para todos tinha vindo a ser aprofundada em diversos fóruns internacionais, buscando clarificar conceitos e identificar problemas relacionados com a sua concretização. No centro estava a procura de equidade num mundo atravessado por desigualdades económicas, sociais e culturais e para a consolidação (ou a eliminação) das quais a matemática escolar tem responsabilidades consideráveis. As publicações resultantes de um grupo de discussão no ICME 5 (Damerow, 1984) e do dia especial no ICME 6 (Keitel et al., 1989) espelham os debates sobre o tema. A busca de enquadramentos para a investigação abrangentes pode igualmente ser encontrada na primeira publicação do grupo BACOMET (Christiansen et al.,1986). Uma excelente revisão destas problemáticas pode ser encontrada no texto de Peter Gates e Catherine Vistro (2003) que debate ainda as dificuldades do projeto de uma matemática para todos em contextos pós-coloniais, ou na intervenção em comunidades desfavorecidas.

Novas perspectivas curriculares

Como referi no início deste texto, em Portugal, as linhas de um currículo alternativo à matemática moderna começaram a ser desenhadas no seminário de Milfontes (APM, 1988) que, ecoando as preocupações expressas pela CIEAEM e nos ICMEs, e reagindo a declarações de responsáveis educativos que pareciam ecoar visões limitadas da matemática escolar (Matos, 2025b), claramente estabeleceu a aspiração de uma matemática para todos. Inspirado nas suas propostas, entre 1988 e 1992 desenvolve-se o projeto MAT789 (Abrantes et al., 1997; Ponte et al., 1998) que procurava que a aprendizagem da matemática constituísse uma experiência rica e estimulante processada essencialmente por construção. Propondo objetivos para todos os alunos, o projeto pretendia que:

> (i) que nenhum aluno se sinta com frequência excluído das atividades matemáticas, (ii) que qualquer aluno, face a cada proposta, seja sempre capaz de, em maior ou menor grau, realizar algum trabalho matemático, e (iii) que cada aluno encontre, ao longo do currículo, e por diversas ocasiões, prazer nas atividades que desenvolve na aula de Matemática, em particular porque sente crescer, por pouco que seja, a sua autoconfiança perante a Matemática. (Abrantes et al., 1997, p. 33)

Procurava-se, pois, dar a cada aluno a possibilidade de desenvolver uma maneira pessoal de encarar a matemática e realizar actividades matemáticas, o que implicava uma valorização de objectivos afectivos e sociais e não apenas do domínio cognitivo.

O primeiro estudo de literacia realizado em Portugal (Benavente et al., 1996), que, na senda de trabalhos realizados nos Estados Unidos e no Canadá, aprofunda o conceito de alfabetismo, investiga o desempenho num conjunto de capacidades que adultos usam na resolução de tarefas associadas com o trabalho, a vida pessoal e os contextos sociais. O estudo incluiu uma avaliação da literacia quantitativa relatada por Paulo Abrantes (1996) revelando a herança pesada de uma desvalorização da educação durante décadas e que ainda hoje afeta o contexto de muitos dos nossos jovens.

Os novos programas do 1.º ao 9.º anos de escolaridade aprovados em 1991, centrados na resolução de problemas e na qualidades do ensino e da aprendizagem, e os de 1997 destinados ao anos seguintes acertam o passo com as tendências internacionais (Ponte, 2003) e os de 2008 (Ponte et al., 2007) aceleram esta tendência.

Não se pense, no entanto, que a aspiração de uma matemática para todo ficou estabelecida para sempre. Como Goodson recorda (2012), os debates curriculares não são processos através dos quais os participantes procuram o desenvolvimento de consensos buscando soluções mais eficazes, mas antes disputas entre grupos sociais que procuram fazer avançar as suas ideias, por vezes contraditórias. Embora a experiência recente portuguesa mostre que o debate, por exemplo entre matemáticos profissionais e educadores matemáticos, pode levar a bom porto melhorias educacionais significativas, é bom recordar que nem sempre isso acontece. A busca de uma matemática para todos, em particular, extravasa as meras disputas profissionais e envolve a intervenção em campos económicos, sociais e culturais relacionados com a arquitetura de toda a sociedade. Este programa é, pois, antes de tudo, uma opção política, no sentido grego do termo, pois ela se relaciona com a polis, isto é, com a administração da cidade, e esse ideal não é necessariamente partilhado por todos os atores sociais. Recordemos o recente consulado do ministro Nuno Crato, durante o qual, as medidas tomadas a pretexto de uma melhoria da qualidade do sistema educativo se centraram em ressuscitar procedimentos de exclusão, limitando o acesso de alunos aos níveis mais elevados da escolaridade obrigatória, com o pretexto de acabar com o "facilitismo", ao mesmo tempo que omite procedimentos de inclusão, rotulados de "românticos", que procurassem melhorar as condições de ensino e de aprendizagem. Galvão Telles aceitava contrafeito o acesso à escola de grupos sociais que dela tinha estado arredados, embora temendo o efeito que isso produziria nas elites. A estratégia populista de Nuno Crato é diferente pois sob a capa de uma preocupação com a qualidade do ensino, identifica os educadores como inimigos, ao mesmo tempo que coloca barreiras no acesso e limita procedimentos de integração ativa dos mais desfavorecidos. Crato não está preocupado com o saber matemático, mas sim com o favorecimento de uma ordem social alternativa.

Concluindo

A realidade das escolas de hoje é naturalmente diferente da de há 40 anos que os participantes de Milfontes confrontaram. No entanto, a aspiração de uma equidade no acesso ao saber matemático permanece igual e, contrariamente a essa época, existem hoje orientações curriculares que ativamente procuram permitir a todos os alunos o acesso a experiências matemáticas significantes e relevantes. No entanto, essa é uma opção de política educativa que pode, em qualquer momento, ser ameaçada por populismos aos quais a comunidade dos educadores apenas pode opor os seus argumentos baseados no saber produzido pela investigação. E hoje a nossa compreensão dos fenómenos educativos é mais ampla e temos ao dispor paradigmas de compreensão e metodologias que nos permitem ser mais ambiciosos e ativamente dotar as escolas de ferramentas que permitam proporcionar a equidade entre todos os alunos. Temas como a concepção e aplicação de projetos de desenvolvimento curricular dirigidos ao sucesso escolar, o estudo de diferentes variedades de flexibilidade escolar, a intervenção nas culturas de escola e de aula de matemática, ou mesmo investigações procurando caracterizar aprendizagens ou outros, são fundamentais para sustentar intervenções de grande dimensão. Termino desejando que surjam investigações na área permitindo que o tema tenha continuidade nestes eventos.

Referências

Abrantes, P. (1996). Interpretação dos níveis de literacia: O domínio quantitativo. In A. Benavente, A. Rosa, A. F. Costa, & P. Ávila (Eds.), *A literacia em Portugal. Resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica* (pp. 94-102). Fundação Calouste Gulbenkian, Conselho Nacional de Educação.

Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). *MAT 789 inovação curricular em Matemática.* Fundação Calouste Gulbenkian.

Almeida, M. C., & Candeias, R. (2014). Os programas de matemática do ensino primário, da Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. In A. J. Almeida & J. M. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)* (pp. 39-68). UIED e Associação de Professores de Matemática.

Almeida, M. C., Matos, J. M., & Almeida, A. J. (2022). *Transcrição das notícias sobre matemática moderna publicadas nos jornais diários de Lisboa*. APM, UIED.

Almeida, M. C., & Rodrigues, A. S. (2025). Distinct approaches to integers in technical schools and in liceus, during modern mathematics in Portugal. In E. Barbin, M. N. Fried, M. Menghini & F. S. Tortoriello (Eds). *History and epistemology in mathematics. education. Trends, practices, future developments* (pp. 513-526). Springer.

Alves, A. D. (1968). Às portas de um mundo novo. Amanhã a Matemática "comanda" a humanidade. *Diário de Notícias*, 1, 5.

APM. (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. APM.

Benavente, A., Rosa, A., Costa, A. F., & Ávila, P. (1996). *A literacia em Portugal. Resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica.* Fundação Calouste Gulbenkian, Conselho Nacional de Educação.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer.

Bishop, A. J. (1997). Research, effectiveness, and the practitioners' world. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (Vol. 1, pp. 33-45). Kluwer.

Bonnell, V. E., & Hunt, L. (Eds.). (2023). *Beyond the cultural turn: New directions in the study of society and culture.* University of California Press.

Burke, P. (2016). *What is the history of knowledge?* Polity Press.

Bussi, M. B. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furringhetti (Ed.), *PME 15, Assisi* (Vol. 1, pp. 1-16). University de Genova.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., &Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21-29.

Carvalho, R. (1996). *História do ensino em Portugal desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano* (2.ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian.

Catela, M. E. (1980). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em perspectiva: 9º ano de 1978/79 e sua relação com os 7º e 8º anos de 1977/78.* GEP.

Catela, M. E., & Kilborn, W. (1979). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da matemática em 1977–78. 7° e 8° anos*. GEP.

Christiansen, B. (1976). *European mathematics education: The past and present.* Comunicação apresentada na 6th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, Perth, Austrália.

Christiansen, B., Howson, A. G., & Otte, M. (Eds.). (1986). *Perspectives on Mathematics Education. Papers submitted by members of the Bacomet Group*. D. Reidel.

Clements, M., Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (2013). From the few to the many: Historical perspectives on who should learn mathematics In M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 7-40). Springer.

Cruzeiro, J. (1967). Formação e utilização do pessoal científico e técnico: A acção da OCDE. *Análise Social*, *17*, 107-114.

d'Eça, M. N., Cássio, M. G., Costa, M. A., & Gomes, M. V. (1971). *Vamos estudar matemática. Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. 2.° ano* (6.ª edição). Livraria Avis.

d'Eça, M. N., Cássio, M. G., Costa, M. A., & Gomes, M. V. (1974). *Vamos estudar matemática. Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. 1.° ano* (9.ª edição). Livraria Avis.

DGE. (1960). *Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*. Direcção-Geral do Ensino Primário.

Damerow, P., Dunkley, M. E., Nebres, B. F., & Werry, B. (Eds.). (1984). *Mathematics for all. Problems of cultural selectivity and unequal distribution of mathematical education and future perspectives on mathematics teaching for the majority*. UNESCO.

Decreto com força de Lei de 29 de Março. (1911). Diário do Governo, 7, pp. 1341-1347.

Decreto-lei n.º 27.278. (1936). *Diário do Governo*, 276, pp. 1510-1511.

Ensino Preparatório. *Programas para o ano lectivo de 1974-1975* ([1974]). Ministério da Educação e Cultura.

Fernandes, R. (1981). Ensino básico. In M. Silva & M. I. Tamen (Eds.), *Sistema de ensino em Portugal* (pp. 167-190). Fundação Calouste Gulbenkian.

Fernandes, R. (1994). *Os caminhos do ABC. Sociedade portuguesa e ensino das primeiras letras. Do pombalismo a 1820*. Porto Editora.

Fey, J. T. (1978). Change in mathematics education since the late 1950's: Ideas and realization in USA. *Educational Studies in Mathematics, 9*, 339-353.

Fonseca, C. (2020). Revolução no ensino (conclusão): É preciso que atinjam a escola primária os novos métodos didáticos da matemática. In A. J. Almeida, J. M. Matos, M. C. Almeida, & R. Candeias (Eds.), *A matemática moderna nos jornais diários de Lisboa* (pp. 136-140). Livraria da Física.

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. In A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 273-302). Springer.

Gates, P., & Vistro-Yu, C. P. (2003). Is Mathematics for All? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 31-73). Kluwer.

Gay, J., & Cole, M. (1967). *The new mathematics and an old culture. A study of learning among the Kpelle of Liberia*. Holt, Rinehart and Winston.

Gonçalves, F. M. (1961). O ensino das matemáticas no momento presente. *Labor, Revista de Ensino Liceal*, *25*(202), 546-554.

Goodson, I. F. (2012). *Currículo: teoria e história*. Vozes.

Grácio, R. (1981). Perspectivas futuras. In M. Silva & M. I. Tamen (Eds.), *Sistema de ensino em Portugal* (pp. 649-696). Fundação Calouste Gulbenkian.

Grácio, R. (1986). A educação, dez anos depois: Que transformações, que rupturas, que continuidades? *Revista Crítica de Ciências Sociais, 18/19/20*(Fevereiro), 153-182.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática - Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* [Tese de doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]. Lisboa.

Howson, G., & Wilson, B. (1986). *School mathematics in the 1990s.* Cambridge University Press.

Ilharco, J. (2020). Acerca do ensino da Matemática no Ciclo Preparatório. In A. J. Almeida, J. M. Matos, M. C. Almeida & R. Candeias (Eds.), *A matemática moderna nos jornais diários de Lisboa* (pp. 249-250). Livraria da Física.

Keitel, C., Damerow, P., Bishop, A., & Gerdes, P. (Eds.). (1989). *Mathematics, education, and society*. UNESCO.

Krygowska, A. Z. (1979). Mathematics education at the first level in post-elementary and secondary schools. In H. G. Steiner & B. Christiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. 4, pp. 31–46). UNESCO.

Leal, L. C., & Kilborn, W. (1981). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — A capacidade em cálculo básico matemático*. GEP.

Lopes, Ó. (1970). Para coordenação entre o português e a matemática. *Boletim Bibliográfico e Informativo do Centro de Investigação Pedagógica*, *11*, 130-139.

Lundgren, U., Oliveira, M. A. M., & Pedro, E. R. (1977). *Breve introdução à avaliação em educação*. GEP.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. APM.

Matos, J. M. (2002). Saber matemático básico: Uma comparação com outros tempos. *Educação e Matemática*, *69*(4), 2-8.

Matos, J. M. (2005). Aprendizagens no Ciclo Preparatório de 1972: um estudo sobre o sucesso da Matemática Moderna. *Educação e Matemática*, *85*, 7-12.

Matos, J. M. (2009). Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. In K. Bjarnadóttir, F. Furinguetti & G. Schubring (Eds.), *"Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Educatio*n, Garđabær, Iceland, June 20-24 2009 (pp. 123-137). University of Iceland.

Matos, J. M. (2020). História da Educação Matemática e Educação Matemática. In M. C. L. Silva & T. P. Pinto (Eds.), *História da Educação Matemática e formação de professores: Aproximações possíveis* (pp. 19-51). Livraria da Física.

Matos, J. M. (2025a). A matemática moderna em ação: A experiência curricular Sebastião e Silva nos liceus portugueses (1963–1969). In J. C. Domingues, F. B. Figueiredo & L. Saraiva (Eds.), *Actas/Anais do 9.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática* (pp. 43-82). Sociedade Portuguesa de Matemática.

Matos, J. M. (2025b). E, ... entre pregos, martelos e microcomputadores, ... há 40 anos nasceu o PROFMAT. *Educação e Matemática, 176,* 3-6.

Matos, J. M., & Almeida, M. C. (2021). Evaluating modern mathematics curricula. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 4*(1), 57-72.

Matos, J. M., & Almeida, M. C. (2023). The distinct facets of modern mathematics in Portugal. In D. D. Bock (Ed.), *Modern mathematics: An international movement?* (pp. 169-197). Springer.

Matos, J. M., & Monteiro, T. M. (2020). Construindo o conhecimento pedagógico do conteúdo em tempos da matemática moderna: As múltiplas facetas da lógica. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática, 6*(2), 8-25

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. D. Reidel.

Mogarro, M. J. (2006). História da Educação e formação de professores em Portugal (1862-1930). In *Anais do VI Congresso Luso-brasileiro de História da Educação. Percursos e desafios da pesquisa e do ensino de História da Educação* (pp. 320-333). EDUFU / Núcleo de Estudos e Pesquisas em História e Historiografia da Educação.

Monteiro, J., Sá, L., & Loureiro, G. (1986). *Relatório. Cumprimento dos programas de Matemática do Ensino Preparatório*. Inspeção Geral do Ensino. Ministério da Educação e Cultura.

Mónica, M. F. (1978). *Educação e Sociedade no Portugal de Salazar*. Editora Presença.

Moon, B. (1986). *The "New Maths" curriculum controversy*. *An international story*. Falmer Press.

NCTM. (1980). *Agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. NCTM.

NCTM. (1989*). Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. APM/IIE.

Nóvoa, A. (1989). A República e a escola: Das intenções generosas ao desengano das realidades. In *Reformas do ensino em Portugal 1911* (Tomo II - Vol. I) (pp. IX-XXXIV). Instituto de Inovação Educacional.

Nóvoa, A. (1992). A "Educação Nacional". In F. Rosas (Ed.), *Nova História de Portugal, Vol. XII: Portugal e o Estado Novo (1930-1960)* (pp. 455-519). Ed. Presença.

OECD. (1966). *STP(66)15. Committee for Scientific and Technical Personnel. Report of curriculum improvement and educational development*. Arquivo OCDE.

OECE. (1961*). Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*. OECE.

Oliveira, A. F. (s/d). *José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática* — pioneirismo e actualidade. Obtido de http://jss100.campus.ciencias.ulisboa.pt/Testemunhos/Outros/Augusto_J_Franco_de_Oliveira.pdf.

Oliveira, M. K. (1993). *Vygotsky. Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico*. Ed. Scipione.

Os programas em debate. (1982). *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, *5*, 18-22.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: Teoria e práxis*. Porto Editora.

Pedro, M. S., & Matos, J. M. (2018). A Matemática na reforma Veiga Simão (1972-1975). In A. C. Canas, J. C. Domingues & L. Saraiva (Eds.), *Actas/Anais do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática* (Vol. I, pp. 351–364). Sociedade Portuguesa de Matemática.

Piaget, J. (1955). Les structures mathématique et les structures opératoires de l'intelligence. In J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet, & C. Gattegno (Eds.), *L'enseignement des mathématiques* (pp. 11-33). Delachaux et Niestlé.

Pintassilgo, J. (2018). A Educação Nova em Portugal: Construção de uma "tradição de inovação". *Historia Caribe, XIII*(33), 49-82.

Pintassilgo, J., Mogarro, M. J., & Henriques, R. P. (2010). *A formação de professores em Portugal*. Edições Colibri.

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). APM.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspetivas* (pp. 21-56). Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática*. Implicações curriculares. IIE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Meneses, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação.

Proença, M. C. (1997). *A Reforma Jaime Moniz. Antecedentes e destino histórico.* Colibri.

Redinha, J. S. (1968). *Algumas notas de pedagogia da matemática*. [Anexo ao Ofício-circular nº 191, 2ª Secção da Inspeção do CPES, 14/1/1969].

Regulamento para o Ensino Primário (1850). Diário do Governo, 1850(307), 1485-1486.

Repartição de Estatística Geral do Ministério das Obras Públicas (1886). *Anuário estatístico de Portugal: 1884*. Imprensa Nacional.

Rodrigues, A. S. (2014). Os programas de matemática no ensino profissional. In A. J. Almeida & J. M. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior* (1835-1974) (pp. 95-113). UIED e APM.

Sacristan, J. G., Alonso, R. F., Perrenoud, P., & Linuesa, M. C. (2012). *Diseño, desarrollo e innovación del currículum*. Morata Nacional.

Sampaio, J. S. (1975). *O Ensino Primário 1911-1969. Contribuição monográfica*. Volume I, 1º período, 1911-1926. Instituto Gulbenkian de Ciências.

Silva, J. S. (1959). Introdução à lógica simbólica e aos fundamentos da matemática (Lições proferidas no Liceu Normal de Pedro Nunes). *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 6*, 3-65.

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (1º volume). GEP.

Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (2º e 3º volumes). GEP.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Kluwer.

Steiner, H. G., & Christiansen, B. (Eds.). (1979). *New trends in mathematics teaching*, Volume IV. UNESCO.

Stoer, S. (1983). A reforma de Veiga Simão no ensino: Projecto de desenvolvimento social ou "disfarce humanista"? *Análise Social*, XIX(77-78-79)(3º, 4º, 5º), 793-822.

Telles, I. G. (1966). Extensão da escolaridade obrigatória. In I. G. Telles, *Temas de educação* (pp. 175-202). Ministério da Educação Nacional.

Teodoro, A. N. D. (1999). *A construção social das políticas educativas. Estado, educação e mudança social no Portugal contemporâneo* [Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa].

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education: The Wiskobas Program. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 97-121). State University of Utrecht.

Tyack, D., & Cuban, L. (1997). *Tinkering toward utopia: A century of public school reform*. Harvard University Press.

UNESCO. (1990). *World declaration on education for all and framework for action to meet basic learning needs*. UNESCO

Ventura, M. J. S. (1959). Didáctica da Matemática. *Labor, Revista de Ensino Liceal, 23*(182), 305-318.

Wielewski, G. D., & Matos, J. M. (2009). O currículo de Matemática prescrito no início no Ciclo Preparatório do Ensino Secundário português. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho e F. Viseu (Eds.), *XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 239-248). APM.

GRUPO DE DISCUSSÃO 1

O PROFESSOR E A MATEMÁTICA PARA TODOS NO SÉCULO XXI
THE TEACHER AND MATHEMATICS FOR ALL IN THE 21ST CENTURY

Margarida Rodrigues

CI&DEI, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

margaridar@eselx.ipl.pt

Vanda Santos

Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro, Portugal

vandasantos@ua.pt

O papel do professor de Matemática é cada vez mais importante para formar uma sociedade preparada para os desafios e oportunidades trazidos pela era digital. Com o avanço das tecnologias e a crescente quantidade de informações acessíveis, a Matemática posiciona-se como uma disciplina central, não apenas no desenvolvimento de competências técnicas, mas também na construção de capacidades de pensamento lógico, análise crítica e resolução de problemas. A missão do professor de Matemática transcende o ensino de fórmulas e cálculos: ele torna-se um facilitador do conhecimento, um guia para uma aprendizagem ativa e contextualizada (Guncaga et al., 2019; Hetmanenko, 2024; Vale & Barbosa, 2023).

No contexto atual, a Matemática é uma linguagem universal, essencial para áreas diversas como ciências da computação, economia, biologia e engenharias. A capacidade de compreender e aplicar conceitos matemáticos é uma competência fundamental em praticamente todas as profissões modernas (Waller & Flood, 2016). Para promover o acesso equitativo ao conhecimento, os professores têm a responsabilidade de tornar a Matemática acessível a todos, incluindo alunos com diferentes estilos e ritmos de aprendizagem. Essa democratização do ensino de Matemática requer que o professor adote metodologias inclusivas e diversificadas (Schipper et al., 2020), como o uso de tecnologia, metodologias ativas e a contextualização de problemas matemáticos com situações reais (Skovsmose, 2015).

A tecnologia oferece ao professor recursos que tornam a Matemática mais envolvente e significativa para os alunos. Ferramentas como software de simulação, plataformas de aprendizagem adaptativa e aplicativos de gamificação facilitam a compreensão de conceitos complexos de maneira prática e interativa (Trgalová et al, 2018). Também programas de geometria dinâmica, como o GeoGebra (que permite explorar Geometria, Álgebra e Estatística), potenciam o desenvolvimento, nos alunos, do processo de conjeturar, pela observação no ecrã, dos invariantes associados às propriedades matemáticas. Além disso, o uso de plataformas online permite a personalização da aprendizagem, onde cada aluno pode avançar no seu próprio ritmo, revisitando conteúdos conforme necessário. Dessa forma, o professor assume um papel orientador e mediador, que incentiva o aluno a explorar e experimentar, ao invés de se restringir a uma simples transmissão de conteúdo (Zheng, et al, 2022).

Para garantir que a Matemática seja de fato para todos, o professor do século XXI precisa estar atento às questões de inclusão e equidade. Isso envolve reconhecer as diferentes realidades e dificuldades dos alunos, promovendo um ambiente acolhedor e encorajador (Allexsaht-Snider & Hart, 2001). A abordagem deve valorizar as diferenças e criar estratégias para apoiar alunos com dificuldades de aprendizagem, garantindo que todos tenham acesso às mesmas oportunidades de sucesso.

Mais do que preparar alunos para o mercado de trabalho, o ensino de Matemática deve preparar cidadãos críticos e bem-informados. Numa época marcada pela sobrecarga de informações, a capacidade de interpretar dados, analisar probabilidades e pensar criticamente são essenciais. O professor de Matemática tem a oportunidade de despertar nos alunos o interesse por problemas sociais e globais, levando-os a compreender as relações da matemática com a sociedade e o modo como a matemática pode ajudar a entender questões como mudanças climáticas, economia sustentável e avanços tecnológicos (Vieira & Moreira, 2018). Isso implica, da parte do professor, não apenas um conhecimento técnico, mas também uma adaptação constante às mudanças sociais e culturais que impactam o modo como os alunos aprendem. Assim, é essencial que o professor tenha um conhecimento aprofundado do conteúdo matemático, bem como desenvolva o conhecimento pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986), consistindo, neste caso, no conhecimento específico para ensinar Matemática. Analisar como é que estes dois tipos de conhecimento se relacionam constitui uma área pertinente de investigação.

O professor de Matemática tem um papel fundamental na formação de indivíduos capazes de pensar de forma lógica e crítica. Ao fazer da Matemática uma ferramenta acessível e aplicável ao mundo real, o professor não apenas promove o conhecimento matemático, mas também contribui para o desenvolvimento de uma sociedade mais equitativa, inovadora e preparada para os desafios atuais e do futuro (Ponte, 1992; Serrazina, 2012). Tal como referido por Salmon (2016), a educação no século XXI terá necessariamente que responder à evolução dos desafios societais, num quadro de um futuro incerto e desconhecido, em que o desenvolvimento, nos alunos, da sua capacidade de resolução de problemas e de colaboração é crucial.

No âmbito deste grupo de discussão existem três comunicações orais e cinco comunicações em poster que apresentam múltiplas dimensões com foco na investigação e no professor. Dado o reduzido número de comunicações e a diversidade de temáticas apresentadas, não nos foi possível estabelecer uma organização por temas. Serão discutidas diversas problemáticas associadas a temas como as ações e perceções dos professores de Matemática em torno do currículo, nomeadamente focando inovações pedagógicas, capacidades matemáticas transversais e dificuldades relativas à integração com outras áreas; e a prática docente, numa perspetiva de desenvolvimento profissional.

Na comunicação oral, intitulada "O ensino de geometria no primário e a democratização educacional brasileira: Estudo a partir do Laboratório de currículos do Rio de Janeiro", Débora Rodrigues Caputo, Alexandra Sofia Rodrigues, e Denise Medina França analisam a reformulação curricular de geometria no ensino primário pelo Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro (1975-1983) e concluem que a Lei de Diretrizes e Bases de 1971 pouco contribuiu para a democratização do ensino. A comunicação oral de Filipa Faria, João Pedro da Ponte, Margarida Rodrigues, e Marisa Quaresma, intitulada "Preparar uma discussão matemática para todos: O percurso de uma professora", analisa como uma professora de Matemática melhorou a sua compreensão e prática de discussões coletivas ao longo de três estudos de aula, destacando mudanças no planeamento colaborativo e na condução dessas discussões. Na comunicação oral "O papel do facilitador na condução do estudo de aula", Arminda Pereira, João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma procuram caracterizar o papel do facilitador na condução de um estudo de aula. Os resultados indicam a relevância do papel do facilitador na preparação das sessões do estudo de aula, ao selecionar recursos, e ao antecipar questões a colocar aos professores, bem como na condução das sessões, sendo evidenciada a sua ação de orientar, apoiar e desafiar os professores, facilitando o desenvolvimento das discussões.

Na comunicação em poster, intitulada "Perceção dos professores sobre a abordagem STE(A)M", Patrícia Teixeira, Helena Rocha, e Cristina Martins apresentam as perceções dos professores de 1.º e 2.º ciclos do ensino básico sobre as dificuldades encontradas nas suas práticas quando envolvidos numa abordagem STE(A)M, tendo por base uma revisão sistemática de literatura, sendo que essas perceções se centram na escassez de recursos e na falta de formação. Na comunicação em poster, intitulada "As TIC no ensino da Matemática: Um olhar sobre as suas vantagens e desafios", e enquadrada num estudo que visa compreender os benefícios e os obstáculos associados à integração das Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino da Matemática, Virgílio César Chivinda e Vanda Santos apresentam a fundamentação teórica realizada no âmbito do referido estudo. Na comunicação em poster "Uso adecuado de la contextualización para desarrollar el pensamiento computacional en matemáticas de educación primaria", Gregorio Arjona-Aranda, Cristina Sánchez-Cruzado, e Teresa Sánchez-Compaña apresentam a intervenção realizada em dois centros escolares públicos, em Espanha, enquadrando-a curricularmente, já que a lei educativa espanhola promove no currículo de matemática o desenvolvimento socio afetivo e o pensamento computacional, mostrando, neste trabalho, como atividades contextualizadas fortalecem essas competências.

A comunicação em poster, intitulada "Desenvolvimento profissional docente em práticas letivas de professores em educação estatística", apresentada por Edivaldo Lubavem Pereira, Regina Célia Grando e Hélia Oliveira, visa aprofundar o conceito de práticas letivas de professores que lecionam na Educação Básica em contextos de Educação Estatística. Este estudo enquadra-se no trabalho desenvolvido pelo Grupo de Estudos e de Pesquisa sobre Insubordinação Criativa em Educação Matemática (ICEM). Os resultados preliminares apontam para a preocupação dos professores em explorarem os conteúdos de forma contextualizada. O estudo de Francisco Silva e Rosa Ferreira, apresentado na comunicação em poster, intitulada "Avaliação pedagógica: Como os referenciais de avaliação se estão a refletir na sala de aula de matemática", mostra que, embora o referencial de avaliação do Projeto MAIA (Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação) seja adotado, as práticas de avaliação dos professores de matemática ainda são limitadas e influenciadas pelas suas próprias perceções sobre o referencial.

Complementarmente às ideias apresentadas nas comunicações, propomos um conjunto de questões associadas à temática do grupo, o professor e a Matemática para todos no século XXI, tais como:

- Como é que o professor que ensina Matemática relaciona o conhecimento de conteúdo com o conhecimento pedagógico de conteúdo? Que impacto tem o estabelecimento dessas relações no seu desenvolvimento profissional, em particular, no que respeita à sua atividade de ensino de uma Matemática para todos?
- Como é que o professor relaciona a sua atividade de ensino de Matemática com a avaliação que promove e desenvolve na sala de aula?

- Como é que o professor que ensina Matemática lida com a diversidade na sala de aula, de modo a garantir que todos os alunos tenham acesso às mesmas oportunidades de sucesso?
- Como apoiar as dificuldades sentidas pelo professor no desenvolvimento de práticas docentes inovadoras em Matemática e também em atividades integradas com outras áreas disciplinares?
- Como é que o professor focaliza nas aulas de Matemática o desenvolvimento de capacidades matemáticas simultaneamente a uma abordagem transversal aos vários temas matemáticos? Como promove o estabelecimento de relações entre várias capacidades matemáticas transversais?
- Que contextos poderão suportar o desenvolvimento de processos reflexivos acerca da prática e de que modo esses processos contribuem para a melhoria das práticas do professor que ensina Matemática?

Referências

Allexsaht-Snider, M., & Hart, L. E. (2001). "Mathematics for all": How do we get there? *Theory into practice*, *40*(2), 93-101.

Guncaga, J., Korenova, L., & Hvorecky, J. (2019). Calculators as facilitators of understanding computational and mathematical contexts. *Open Education Studies*, *1*(1), 177-183.

Hetmanenko, L. (2024). The role of interactive learning in mathematics education: Fostering student engagement and interest. *Multidisciplinary Science Journal*, *6*, e2024ss0733.

Ponte, J.P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Instituto de Inovação Educacional.

Salmon, G. (2016). The realm of learning innovation: A map for Emanators. *British Journal of Educational Technology*, *47*(5), 829–842. http://dx.doi.org/10.1111/bjet.12487

Schipper, T. M., van der Lans, R. M., Vries, S. d., Goei, S. L., & Veen, K. v. (2020). Becoming a more adaptive teacher through collaborating in Lesson Study? Examining the influence of Lesson Study on teachers' adaptive teaching practices in mainstream secondary education. *Teaching and Teacher Education*, *88*. https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.102961

Serrazina, M. D. L. M. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: Papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*, *6*(1), 266-283.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Skovsmose, O. (2015). *Um convite à educação matemática crítica*. Papirus Editora.

Trgalová, J., Clark-Wilson, A., & Weigand, H. G. (2018). Technology and resources in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education* (pp. 142-161). Routledge.

Vale, I., & Barbosa, A. (2023). Active learning strategies for an effective mathematics teaching and learning. *European Journal of Science and Mathematics Education, 11*(3), 573-588. https://doi.org/10.30935/scimath/13135

Vieira, L. B., & Moreira, G. E. (2018). Direitos humanos e educação: O professor de Matemática como agente sociocultural e político. *Revista de Educação Matemática*, *15*(20), 548-564.

Waller, P. P., & Flood, C. T. (2016). Mathematics as a universal language: Transcending cultural lines. *Journal for Multicultural Education*, *10*(3), 294–306. https://doi.org/10.1108/jme-01-2016-0004

Zheng, L., Long, M., Zhong, L. & Gyasi, J. F. (2022) The effectiveness of technology-facilitated personalized learning on learning achievements and learning perceptions: A meta-analysis. *Education and Information Technology*, 27, 11807–11830. https://doi.org/10.1007/s10639-022-11092-7

Comunicações

O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO PRIMÁRIO: ESTUDO A PARTIR DO LABORATÓRIO DE CURRÍCULOS DO RIO DE JANEIRO

THE TEACHING GEOMETRY IN ELEMENTARY EDUCATION: A STUDY BASED ON THE CURRICULA LABORATORY OF RIO DE JANEIRO

Débora Rodrigues Caputo

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

dercaputo2015@gmail.com

Alexandra Sofia Cunha Rodrigues

Universidade Nova de Lisboa, Portugal

alexsofiarod@gmail.com

Denise Medina França

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

denisemedinafranca@gmail.com

Resumo: O artigo, que está vinculado à pesquisa de doutorado no âmbito da História da Educação Matemática e que analisa o ensino de geometria no ensino primário, toma como fonte de pesquisa as produções elaboradas pelo Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro (LC), entre o período de 1975 a 1983, objetivando-se investigar historicamente a reformulação curricular proposta pelo LC diante da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1971 tendo em vista o alargamento da escolaridade obrigatória. Utilizando referenciais teórico-metodológicos para a escrita da história e pesquisa em educação, buscamos responder a seguinte questão: Como o LC elaborou a reformulação curricular do novo sistema de ensino diante da LDB de 1971? Quais as prescrições sistematizadas para o ensino de geometria no ensino primário nesse contexto? Foi possível perceber que o ensino de geometria foca no estudo da topologia a partir da metodologia proposta pelo educador Dienes sob a influência das ideias de Jean Piaget. Aferimos que a LDB de 1971, apesar de disseminar a ideologia de uma educação para todos, continuou a atender os interesses econômicos da elite brasileira.

Palavras-chave: lei de diretrizes e bases, geometria, laboratório de currículos do Rio de Janeiro, ditadura, movimento da matemática moderna.

Abstract: The article, linked to doctoral research within the scope of the History of Mathematics Education and focused on the teaching of geometry in primary education, uses as its research source the materials produced by the Curriculum Laboratory of the State of Rio de Janeiro (LC) between 1975 and 1983. The aim is to investigate, historically, the curriculum reform proposed by the LC in response to the 1971 Guidelines and Bases Law (LDB), in light of the expansion of mandatory schooling. Using theoretical and methodological frameworks for historical writing and research in education, we seek to answer the following questions: How did the LC developed the curriculum reform of the new education system in the light of the 1971 LDB? What systematic guidelines were prescribed for the teaching of geometry in primary education in this context? It was observed that the teaching of geometry focused on the study of topology proposed by the educator Dienes under the influence of Jean Piaget's ideas. We concluded that the LDB of 1971, despite promoting the ideology of education for all, continued to serve the economic interests of the Brazilian elite.

Keywords: guidelines and bases law, geometry, Rio de Janeiro curriculum laboratory, dictatorship, modern mathematics movement.

Introdução

O presente texto resulta de análises parciais realizadas no âmbito da pesquisa de doutorado numa perspectiva histórica, que investiga o ensino de geometria no ensino primário e busca identificar como foram sistematizados os saberes profissionais docentes relativos a este saber, a partir do arquivo documental do Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro (LC)[16], entre os anos de 1975 a 1983, intervalo de tempo em que ele esteve ativo. Tal período corresponde também à incidência da ditadura militar no Brasil (1964 - 1985) e, especificamente em relação ao ensino de matemática, uma reforma internacional que ficou conhecida como o Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Esclarece-se que o LC foi um órgão criado após a fusão dos Estados da Guanabara e Rio de Janeiro[17] com as atribuições de:

> [...] elaboração e execução [...] dos Planos Gerais de Educação; [...] coordenar a execução [...] do diagnóstico do Estado [...]; estabelecer bases e diretrizes metodológicas para o estudo de reformulação de currículos, [...] trabalhos de implementação, acompanhamento e avaliação [...] seguindo objetivos curriculares. (Rio de Janeiro, 1976, p. 16)

O Laboratório (LC) traçou então, as diretrizes político-administrativas educacionais do governo do novo Estado, estabelecendo um novo sistema de ensino que exigia uma reformulação curricular que atendesse a normativa recém aprovada, a Lei de Diretrizes e Bases de 1971 (LDB de 1971), que tornava a escolaridade obrigatória e gratuita dos 7 aos 14 anos, rumo a democratização18 do ensino que começara em 1961 com a primeira lei que fixou diretrizes gerais para educação brasileira, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB de 1961).

Neste artigo, através da análise documental, de natureza sócio-histórica, dos documentos existentes do LC, pretendemos problematizar as seguintes questões: Como o LC elaborou a reformulação curricular do novo sistema de ensino diante da LDB de 1971? Quais as prescrições sistematizadas para o ensino de geometria no ensino primário nesse contexto?

[16] As produções do LC identificadas e digitalizadas por pesquisadores da área, encontram-se no Repositório de Conteúdo Digital (RCD) gerenciado pelo Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da educação matemática (GHEMAT-Brasil) - do qual as autoras participam - que conta com apoio da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769.

[17] A área territorial hoje denominada cidade Rio de Janeiro (RJ) correspondia ao Estado da Guanabara e o território que atualmente corresponde ao Estado do Rio de Janeiro (excluindo-se a cidade RJ) era o antigo Estado do Rio de Janeiro, que tinha como capital a cidade de Niterói. Em março de 1975 estabeleceu-se a fusão dos dois antigos Estados formando-se o que conhecemos hoje como Estado do RJ. Para maiores esclarecimentos consultar Pereira (2016).

18 A palavra democratização, ao longo do texto é usada no sentido de alargar o período da escolaridade obrigatória gratuita.

O contexto de criação do Laboratório de Currículos do Rio de Janeiro

No ano de 1964 se instaura no Brasil o Estado tecnocrático-civil-militar. Antes, na educação brasileira, era travada uma das mais longas discussões acerca do ensino a nível nacional. Iniciado em 1948, o debate em torno da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) passava pela polarização entre o privado e o público. A Educação Católica, a favor da iniciativa privada, ganha força no Congresso Nacional frente aos educadores defensores do ensino público, gratuito e laico. A LDB é aprovada em dezembro de 1961 (LDB de 1961), conciliando os interesses privados e as reivindicações dos apoiantes da escola pública, alarga o ensino obrigatório e gratuito, transmitindo um avanço positivo, com a falsa impressão de igualdade, que omitia a realidade social. Após o golpe, a educação brasileira configurou-se como um modelo de "educação pela repressão" prevalecendo o discurso dos defensores da hegemonia da escola particular subsidiada pelo Estado fazendo da educação um grande negócio (Cunha & Góes, 2002).

Podemos afirmar, em grande medida, que o governo ditatorial implementa as reformas educacionais visando a produtividade laboral e a aceleração modernizadora do capitalismo brasileiro tomando a educação como "instrumento a serviço da racionalidade tecnocrática, com o objetivo de se viabilizar o slogan "Brasil Grande Potência"' (Ferreira & Bittar, 2008, p. 336). Esta ideia é secundada por autores como Germano (2008), França (2012) e Cunha (2014).

Avançando aos anos de 1970, agora sob a presidência do general Emílio Médici (1969-1974), com a intenção de incutir na população a crença de que a educação seria a solução para alcançar a igualdade social, o governo implementou diversas medidas para garantir a melhoria do sistema educacional, destacando-se entre elas a LDB de 1971 (Lei 5.692/71). A normativa extinguiu o exame de admissão ao ginásio, consolidou o ensino primário e ginasial criando o ensino fundamental, tornou a escolaridade obrigatória dos 7 aos 14 anos, dobrando o tempo de quatro para oito anos. Com isso, o Brasil passa a possuir uma das mais alargadas escolaridades obrigatórias do mundo. "Era o tempo do 'Brasil Grande'; 'ame-o ou deixe-o'; os incomodados que se mudassem - se não a polícia cuidaria deles" (Cunha & Góes, 2002, p. 55).

Uma das grandes mudanças propostas pela LDB de 1971 foi a extinção do Exame de Admissão ao Ginásio. Este exame era constituído, entre outras, por provas de Aritmética, e perdeu o sentido ao serem fundidos o antigo ensino Primário e o Ginásio no ensino fundamental. Com esta unificação do ensino do 1.º grau procurou-se eliminar a seleção de alunos para acesso à 5ª série, que era feita através desse exame.

Acreditamos que as normativas provenientes da LDB de 1971, estavam em consonância com o modelo econômico adotado e foi usada como estratégia para propagar a ideia de um país em desenvolvimento, propondo educação obrigatória para todos. Assim, a educação assumiu um caráter tecnocrático, objetivando-se a formação de mão de obra minimamente qualificada e barata que foi a base da reforma da educação básica que instituiu o sistema nacional de 1.° e 2.° graus que foi implementada seguindo a lógica dos interesses econômicos.

Em grande medida, Franca e Sepúlveda (2023) consideram que os discursos que defendiam a promulgação da Lei n° 5.692/71 durante a ditadura eram justificados pela ideia de que a nova sociedade brasileira exigia uma legislação educacional que coadunasse com a construção de um "projeto nacional" que serviria como alavanca para o desenvolvimento do "Brasil-Potência".

Alguns autores como Cunha (2014), Jacomeli (2010), Queirós (2013), entre outros, acreditam que a Lei n° 5.692/71 se alinhou com os ideais conservadores da ditadura. A escola foi usada para divulgar valores desejáveis e manter a sociedade “pacífica”. O facto foi analisado pela Comissão da Verdade do Estado de São Paulo “Rubens Paiva”, em parceria com a Comissão Nacional da Verdade (CNV), que produziu um relatório sobre o legado da ditadura na estrutura da educação brasileira. Entre as conclusões, destacamos as políticas educacionais que possibilitaram a imposição das diretrizes ideológicas conservadoras, aprovando a formatação do conteúdo a ser ensinado nas escolas e o caminho para privatização do acesso à educação, cujas consequências o país vive até a atualidade.

Além disso, a fusão dos estados da Guanabara e Rio de Janeiro que, segundo Pereira (2016), se concretizou em 1974 de modo autoritário com poder político centralizador por parte do governo militar agravava a emergência de ações governamentais. Para o governador Faria Lima ficou a tarefa de organizar o novo estado que incluía as demandas do campo educacional. Os sistemas de ensino dos dois antigos estados se distanciavam e precisavam ser resolvidos, tal como referem Faria e Lobo (2001)

> [...] altos índices de evasão escolar (81%), repetência nas séries iniciais (30%), déficit de 8 mil professores, 320.000 crianças sem escola, inadequação da formação do professor, inadaptação de métodos e programas de ensino para atender ao novo público escolar. (pp. 1-2)

O novo Estado do Rio de Janeiro necessitava então reestruturar o sistema de ensino para comportar as altas taxas de matrículas decorrentes da obrigatoriedade determinada pela LDB de 1971, atendendo aos alunos provenientes das várias camadas sociais considerando ainda as desigualdades entre os dois sistemas. Para manter a qualidade já existente dos diferentes sistemas o governo do novo estado se propôs a formar um novo sistema estadual de ensino com características comuns aos antigos sistemas, tendo, porém, como parâmetro o sistema de ensino do Estado da Guanabara, como podemos observar na figura 1.

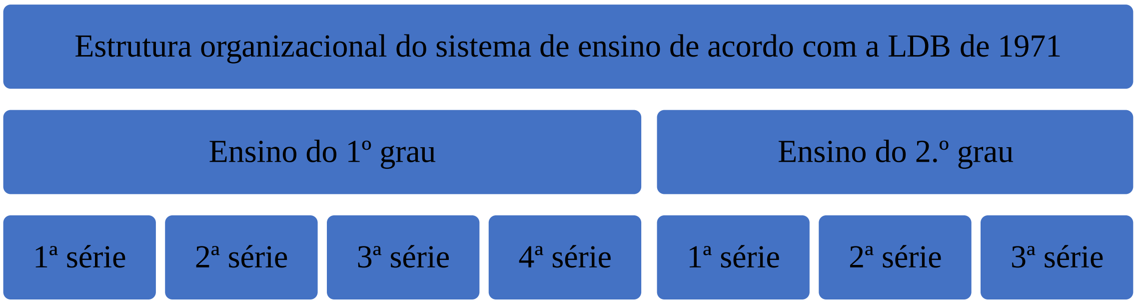


Figura 1. Sistema Nacional de ensino (LDB de 1971).

Nesse contexto é criado o Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro (LC)

> [...] convidando professores atuantes na rede do estado e reconhecidos por seus pares pelo trabalho que vinham realizando na educação básica. Nesta nova estrutura o LC, órgão com atribuição de pesquisar e traçar as diretrizes para elaborar os currículos do Estado, tinha também a responsabilidade de unificar orientações. (França, 2021, p. 5)

A partir desse cenário infere-se que “foi permitida a contratação de especialistas em educação que dessem conta de criar instrumentos para implementar e elaborar o novo currículo." (França, 2021, pp.5-6). Durante os seus 8 anos de funcionamento passou por duas gestões da SEEC/RJ: de 1975 a 1979 foi dirigido por Myrthes de Luca Wentzel e de 1979 a 1983 por Arnaldo Niskier, tendo sido extinto em 1983.

Metodologia

Buscando analisar nossa fonte de pesquisa, tomamos um referencial teórico-metodológico de natureza sócio-histórica ancorando-nos nas ideias de Michel de Certeau (1982), Roger Chartier (1990, 2002) e Hoffstetter e Valente (2017). Cabe aqui destacar que a pesquisa nessa perspectiva, no que diz respeito à prática docente, não é imediatista. Ela não tem caráter pragmático em relação aos problemas do ensino e aprendizagem. Entretanto, o estudo histórico pode auxiliar na formação de professores visto que a História da educação matemática (Hem)[19] pode subsidiar as discussões sobre as práticas atuais. Acreditamos que, com este aporte teórico, o professor que ensina matemática se envolve com o núcleo do trabalho do historiador: o conhecimento do prognóstico a partir das fontes. Nesse movimento, em grande medida, o docente se apropria das produções históricas criando as suas próprias.

O referencial utilizado é simultaneamente teórico e metodológico. Assim, utilizamos o termo "referencial teórico-metodológico" cunhado por Valente (2007) que destaca que a base teórica já indica o percurso do trabalho a ser realizado, ou seja, sua metodologia. O autor refere que "o método histórico envolve a formulação de questões aos traços deixados pelo passado, que são conduzidos à posição de fontes de pesquisa por essas questões, com o fim da construção de fatos históricos, representados pelas respostas a elas" (p. 32).

Na perspetiva de Certeau (1982) o primeiro ponto a ser considerado é a perspectiva da história como uma prática e um discurso. Com essa reflexão, o autor destaca que a prática histórica tem sua própria historicidade. Ao mesmo tempo que se produz a história, se é influenciado por ela, uma vez que o modo como interpretamos e escrevemos a história está sempre influenciado pelo contexto social e cultural que estamos inseridos, o qual, por sua vez, carrega traços de práticas históricas anteriores. Essa dinâmica denuncia o caráter evolutivo das práticas históricas que estão em constante transformação além de nos permitir compreender as tensões presentes no ofício do historiador que tem papel ativo na produção do conhecimento.

Nos ancoramos também em Chartier (2002), que considera a história como um modo de representar o passado. Segundo o autor, a realidade social é construída através de representações presentes nas fontes, nos vestígios, nos testemunhos. Uma determinada sociedade ou grupo constrói uma realidade contraditória que através da prática exibe uma maneira de estar no mundo. Nas práticas podemos identificar as apropriações que, segundo Chartier (2002), demonstram como os sujeitos interpretam as representações e o modo como operam a realidade.

As fontes são então representações que podem ter sido construídas individual ou coletivamente a partir de apropriações que se revelam na prática dos sujeitos. Dessa maneira o conceito de representação pode nos auxiliar na compreensão de como os autores das publicações do LC pensavam o ensino primário de geometria, assim como o

[19] Entendemos a História da educação matemática (Hem) -grafia em minúscula- como o estudo dos processos de ensino e aprendizagem da matemática ao longo do tempo, diferente da grafia em maiúscula- Educação Matemática, que remete ao campo científico que emerge em meados da década de 80.

conceito de apropriação vai nos auxiliar a inferir as influências nas publicações do LC pela LDB de 1971, pelos modelos pedagógicos e metodologias emergentes da época.

Para análise das apropriações trazemos novamente Michel de Certeau que traz o conceito de práticas ordinárias. No entendimento dos modos de estar no mundo e como os sujeitos exercem suas práticas, Certeau (2012), conceitua "estratégias e táticas" presentes no movimento das relações sociais, com suas formas de resistência. As estratégias estão sempre ligadas a um lugar (instituição, grupo epistemológico, lugar físico, lugar enunciativo, a escrita), e as táticas correspondem ao modo como os sujeitos interagem com as estratégias, suas artimanhas na ausência do olhar vigilante. A tática é uma subversão à estratégia.

Para tentar compreender as representações sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, especificamente, quais as prescrições sistematizadas para o ensino de geometria no ensino primário, buscaremos identificar os saberes profissionais docentes referentes ao ensino desse saber considerado como aqueles saberes profissionais dos professores que ensinam matemática sob a perspectiva de Valente e Hoffstteter (2017), que entende tais saberes como a articulação entre *saberes para ensinar* e *saberes a ensinar*. O primeiro são aqueles necessários à prática de ensino do professor; já os *saberes a ensinar* podem ser interpretados como os saberes advindos da disciplina de referência. Segundo Valente (2018), as pesquisas mostram que o movimento de constituição dos saberes docentes de nível primário e secundário estão ligados ao entendimento de como se articulam os dois tipos de saberes: o *saber para ensinar* e o *saber a ensinar*. A posse dos *saberes para* ensinar caracteriza a profissão de professor, entretanto esses saberes se articulam aos *saberes a ensinar*.

Seguindo as ideias de Chartier (2002) e Certeau (1982), as fontes devem ser analisadas levando-se em consideração o contexto em que estão inseridas, já que é a partir da articulação entre as práticas sociais, políticas e culturais que elas são produzidas. Assim procura-se aqui apresentar o cenário de criação do LC (1975-1983) e seus contextos de sustentação abordando as mudanças do campo educacional brasileiro, em decorrência da aprovação das Leis de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) 4.024/1961 e 5.672/1971, o período da ditadura militar, a fusão dos Estados da Guanabara e Rio de Janeiro e o Movimento da Matemática Moderna.

O contributo do LC na organização de um sistema público de ensino

França (2019) afirma que as Leis Nacionais de Educação exigiram dos estados responsabilidades de expansão e organização do sistema público de ensino. O ensino primário necessitava de mudanças para receber e preparar a nova clientela heterogênea, oriunda de estados tão diferentes, logo, a emergência da criação do LC a fim de organizar o novo sistema de ensino.

Considerando as publicações do LC como materiais voltados para a formação de professores, concordamos com França (2012) ao afirmar que essas produções possuem um valor significativo, especialmente no contexto de reconhecimento de sua importância durante um período de expansão e consolidação dos sistemas de ensino no Brasil, em pleno período de ditadura. Esse período também foi marcado por mudanças substanciais na estrutura, no funcionamento, nos programas e no currículo de Matemática. Ao LC, coube a responsabilidade de unificar o ensino no novo Estado, promovendo transformações na organização e metodologia de ensino, dialogando com as discussões internacionais sobre ensino e aprendizagem.

Essas discussões, tanto no campo do ensino quanto no da aprendizagem, foram permeadas pelas mudanças propostas pelo LC, alinhando-se às ideias defendidas pelos modernistas, que se orientavam pelas propostas de ensino de matemática discutidas desde a década de 1950, conhecidas como o Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Com o intuito de compreender melhor as articulações entre as práticas que originaram essas publicações do LC, tornou-se necessário aprofundar o estudo do MMM, abordando sua implementação e as diferentes formas de apropriação, conforme a perspetiva de Chartier (2002). O movimento, de repercussão internacional, foi impulsionado "pelo descompasso entre o desenvolvimento da disciplina Matemática e o ensino" (França, 2012, p. 60). Seus idealizadores defendiam um ensino formal, prezando-se pelo rigor matemático, utilizando-se no ensino básico a matemática produzida por matemáticos acadêmicos, baseada no estruturalismo[20], usando a teoria de conjuntos como unificadora dos conteúdos matemáticos.

Adentrando ao período ditatorial iniciado em 1964, o MMM ganha força ao se enquadrar no projeto de nação defendido pelos militares, em que se advogava pela regeneração da sociedade, supostamente corrompida (ou em risco de ser) pelo comunismo (França & Sepúlveda, 2020). Infere-se tal enquadramento e apoio dos governos ditatoriais à Matemática Moderna, a partir da ausência de "registros de objeções dos militares quanto à circulação das ideias modernistas" (França, 2022, p. 10). É também na década de 1970, que o MMM se intensifica no Brasil e se adapta à nova normativa de 1971 tomando uma nova perspectiva pedagógica. O primeiro estado a dar passos a caminho da oficialização, foi São Paulo. Outros estados também a fizeram, Paraná, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Bahia e Rio de Janeiro. Em certa medida, a institucionalização não aconteceu por meio da legislação nacional, porém a Matemática Moderna foi sendo incorporada nos programas e nos exames de maneira regional.

Quanto ao Estado do RJ, as produções do LC fornecem elementos para a investigação da institucionalização da Matemática Moderna, ainda pouco analisada pelas pesquisas da área em relação ao ensino primário. Criado após a LDB de 1971, cabe questionar como o LC se apropriou das ideias modernistas para esse segmento de ensino.

As LDBs nas produções do LC

Durante a primeira gestão (1975-1979), através da Imprensa Oficial do Estado, foram publicadas um conjunto de obras sob um título geral Currículos, dirigidos aos professores. Constituindo possivelmente umas das primeiras publicações do LC os cadernos de 1976 intitulados "Currículo 1- Reformulação de Currículos: síntese" e "Currículos 2: Reformulação de Currículos: 1.º Volume, Pré Escolar e 1.º Grau, subsídios para a organização curricular do ensino de 1.º grau no estado do Rio de Janeiro", apresentam os pressupostos para organização curricular do novo Estado que impulsionaram a atuação do LC. Primeiramente oferecem indicações gerais para elaboração e reelaboração de um currículo tratando de suas etapas, objetivos, fundamentação, organização e seleção de conteúdos e dispositivos legais. Posteriormente apresentam as etapas de elaboração do currículo do Estado do Rio de Janeiro.

O caderno de 1976 "Currículos 1" apresenta de maneira sintetizada a elaboração do Currículo e orientações e roteiros para realização de um diagnóstico socioeconômico, educacional e cultural que serviria como ponto de partida para a reelaboração do currículo do Novo Estado. Já o caderno "Currículos 2" apresenta, além da elaboração e dos roteiros,

[20] Consultar Novaes, Pinto e França (2008).

os objetivos e metodologia específica para o pré-escolar e 1.º grau juntamente com sugestões de atividades para o pré-escolar.

A proposta de reformulação curricular do LC baseou-se na premissa de que o currículo deve estar alinhado ao desenvolvimento da sociedade, integrando elementos que orientem a sua elaboração. Em outras palavras, a realidade dos educandos serve de base para a formulação das finalidades e objetivos do currículo escolar. Ao problematizar o significado filosófico da integração entre Educação e Currículo, o LC, em consonância com o desenvolvimento de ciências como psicologia e pedagogia que estabeleciam finalidades educativas em uma estrutura integradora dos aspectos indivíduo-pessoas-sociedade, defende que o currículo, para atender a tais finalidades, deve adotar um posicionamento filosófico-científico, sustentado por uma proposta metodológica e um diagnóstico geo-sócio-econômico, educacional e cultural das diferentes realidades. Somente com essa abordagem, o currículo se configura como um instrumento capaz de alcançar objetivos coerentes com as finalidades propostas, por meio de atividades adequadas (Rio de Janeiro, 1976a, 1976b).

No que se refere aos dispositivos legais, os cadernos seguem as normativas estabelecidas pela LDB de 1971 e pelo Parecer nº 853/71, juntamente com o anexo da Resolução n.º 8/1971, do Conselho Federal de Educação (CFE). Essas diretrizes orientam a elaboração curricular ao determinar: a definição de um objetivo geral, a fixação de matérias, diretrizes para cada nível de ensino, a organização de um núcleo comum e diversificado, e a integração entre educação geral e especial.

Nesse sentido, o objetivo principal das duas publicações de 1976 era fornecer às escolas e aos professores princípios norteadores para a elaboração de seus currículos. Com base nas ideias de Certeau (1994), podemos inferir que, diante da autoridade imposta pelo período ditatorial, o LC, utilizando a Lei 5.692/71 como tática, "ofereceu [...] amplas oportunidades de renovação [...], mediante novas aberturas para a organização de currículos" (Rio de Janeiro, 1976, p. 11), e usou a regionalização como uma das estratégias de ação do governo do Estado, que buscava garantir uma maior autonomia para as escolas.

Observamos que em todos os cadernos consta o objetivo geral do currículo, tomado da LDB de 1971: "Proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização qualificação para o trabalho e preparo para o exercício consciente da Cidadania" (Rio de Janeiro, 1976a, p. 17). Eles acrescentam que este objetivo deve levar em consideração as finalidades da educação nacional. Especificamente no sentido das potencialidades apontam que as matérias fixadas devem inculcar no aluno o desenvolvimento "das capacidades de observação, reflexão, criação, discriminação de valores, julgamento, comunicação, convívio, cooperação, decisão e ação, encaradas como objetivo geral do processo educativo" (Rio de Janeiro, 1976a, p. 18). Em síntese, quanto aos dispositivos legais, os dois cadernos apresentam as normativas vigentes à época para embasar a elaboração do currículo explicando os artigos e parágrafos principais necessários para tal embasamento.

O ensino de geometria no primário a partir do Laboratório de Currículos do Rio de Janeiro

Ao buscar identificar elementos dos saberes profissionais docentes para o ensino de geometria no ensino primário presentes nas publicações do LC, assim como as apropriações do ideário do MMM nessas produções, observamos que a teoria cognitiva de Jean Piaget é explicitamente destacada como a principal fundamentação teórica das reformulações curriculares elaboradas pelo Laboratório (LC). Essa influência é evidenciada logo na apresentação de uma das publicações do LC, intitulada “Currículos 4. Proposta metodológica. 1.º grau – 1.ª e 2.ª séries” (1978), que aborda o estudo das estruturas e a psicologia do desenvolvimento cognitivo, defendidas por Piaget, como a base teórica da proposta. Acreditamos que, além de legitimar a proposta como moderna, uma vez que o MMM preconizava o formalismo e o ensino das estruturas, o objetivo é fornecer ao professor formação teórica para possibilitar o entendimento da proposta.

A adoção do referencial teórico de Piaget revela uma orientação estruturalista na abordagem curricular, que também reflete a influência do MMM. Essa influência se manifesta na forma como o desenvolvimento das estruturas cognitivas é entendido como central para a aprendizagem — privilegiando o estudo das estruturas em si, ao invés de se focar diretamente no aprendiz. Em outras palavras, o objetivo não é apenas ensinar conteúdos específicos, mas sim estimular a construção e ativação de estruturas cognitivas que suportem o raciocínio lógico e matemático de maneira mais ampla, em paralelo com o MMM que idealiza o ensino a partir de estruturas matemáticas.

Dessa forma, novos saberes profissionais para o ensino são forjados sob a influência da perspectiva estruturalista de Piaget, com um foco não apenas na transmissão de conteúdos, mas no desenvolvimento de habilidades cognitivas complexas. Isso é reforçado pelos objetivos gerais da proposta, que incluem o uso de jogos e atividades que busquem ativar diferentes estruturas cognitivas—como as estruturas infralógicas, lógicas, linguísticas e afetivas. A ênfase na ativação dessas estruturas demonstra como a proposta curricular visa promover um aprendizado que se apoia na inter-relação entre aspectos cognitivos e afetivos do desenvolvimento.

No que diz respeito à organização do currículo, o caderno “Curriculos 4” contempla propostas para as matérias: Artes Plásticas e Teatro, Música, Língua Portuguesa, Estudos Sociais, Ciências e Matemática. Antes de detalhar as atividades específicas para cada matéria, as publicações iniciam com uma explanação teórica, fundamentada, em grande medida, na teoria da psicologia genética de Piaget. Esse enfoque teórico evidencia a tentativa de construir um currículo interdisciplinar coerente, no qual as diferentes áreas do conhecimento compartilham uma base conceitual comum voltada para o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos alunos.

Em Estudos Sociais a proposta relaciona as operações infralógicas com a teoria de Piaget. Estas operações compreendem as noções de tempo e espaço. Esta última compreende as relações espaciais que, segundo os autores do caderno “Currículos 4”, na geometria eram de três tipos: topológicas projetivas e euclidianas. “O desenvolvimento da noção de espaço na criança apresenta geneticamente essas três etapas e o espaço topológico é o primeiro e o fundamental” (Rio de Janeiro, 1978, p. 165). Destaca-se que a definição dada a topologia assim como a explicação do desenvolvimento do pensamento topológico na criança se faz presente na matéria de Estudos Sociais e não em Matemática, que se limita apenas em justificá-la como um tema a ser ensinado no primário.

A topologia é um ramo não quantitativo da Matemática que trata das relações espaciais que podem ser estabelecidas em termos de parte e todo. Corresponde a uma Geometria não métrica a qual representa as relações de parte e todo, conexão, região, posição, sem levar em conta as noções de tamanho ou de direção. Quando representamos esquematicamente o sistema rodoviário de um país estamos procedendo topologicamente. Os detalhes e as distâncias não são levados em consideração, apenas as características estruturais do sistema. O espaço topológico é como se fosse um "espaço de borracha"; as deformações que se impõem a tal espaço não o deformam no sentido métrico. Desde que não se corte ou fure um pedaço de borracha, este poderá assumir várias formas, todas elas topologicamente isomórficas.

O espaço topológico, dominante durante a etapa pré-operacional, compreende a percepção e manipulação ativa das relações de vizinhança, de separação, de ordem e de fechamento. A relação espacial mais elementar é a de *vizinhança* e consiste em que os elementos são percebidos no mesmo campo quando próximos uns de outros. A relação de *separação* está vinculada à percepção sincrética da criança. Na medida em que a percepção vai se tornando mais analítica, a relação espacial se faz mais nítida. A separação envolve dissociação de dois elementos.

Figura 2. Estudos Sociais-Fundamentação-Teoria do desenvolvimento cognitivo: As estruturas espácio-temporais, Currículos 4. Proposta metodológica. 1.º Grau - 1ª e 2ª séries, 1978, p. 165

Por sua vez, na disciplina de Matemática, a Geometria centra-se no conhecimento do espaço euclidiano, mantendo-se a importância do ensino de questões topológicas, cuja valorização está assente nos estudos de Jean Piaget, como podemos observar na Figura 3.

A educação tradicional, quando se preocupa em ajudar a criança a construir seu espaço, por intermédio de geometria, limita-se ao espaço euclidiano, isto é, ao espaço das distâncias e das medidas. Ora, o espaço euclidiano é apenas um dos três aspectos do que podemos chamar de "espaço-total": o topológico, o projetivo e o euclidiano.

Os estudos pioneiros de Jean Piaget e outros psicólogos mostram que as relações topológicas são apreendidas pelas crianças antes mesmo das relações projetivas (direita, esquerda, na frente, atrás, etc) e, sobretudo, antes das relações euclidianas. Por relações topológicas entendemos as relações ligadas ao espaço, que evidenciam as noções de *contínuo*, *descontínuo*, *vizinho*, *domínio*, *fronteira*, *aberto*, *fechado*, *interior*, *exterior*, *disjuntos*.

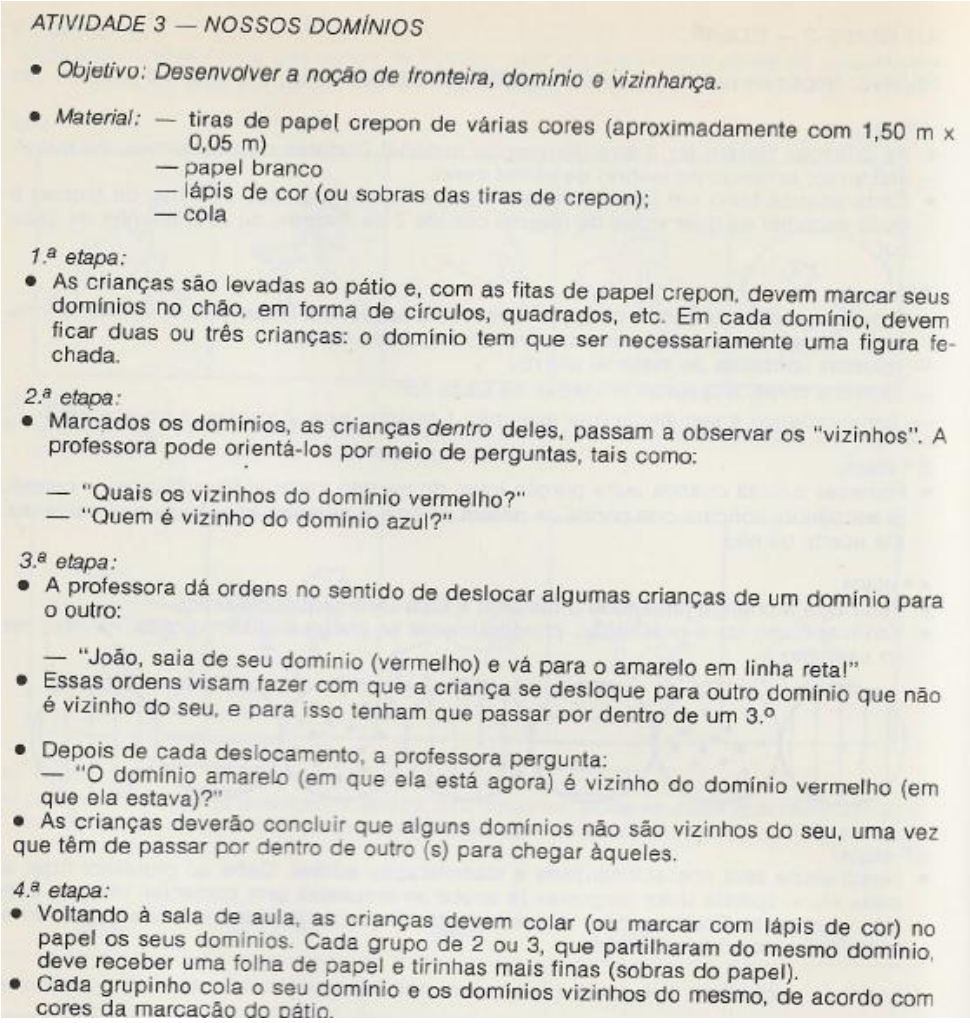
Se o ensino tradicional quase não se ocupa das relações topológicas é por considerar que essas relações são suficientemente bem adquiridas pelas crianças, através de suas experiências espontâneas e seus jogos. É evidente que a criança percebe, por exemplo, que seu quarto tem paredes, portas e janelas e que para entrar ou sair tem que utilizar a porta. Mas essas vivências são empíricas e assistemáticas, ou seja, feitas quando se apresentam ocasiões favoráveis.

A introdução ao espaço topológico não necessita nem dos recursos da linha reta nem dos recursos da medida e desde muito cedo é acessível às crianças. Neste sentido, criando situações de aprendizagem sob a forma de jogos, algumas escolas de vários países vêm introduzindo relações topológicas nas atividades das primeiras séries. O trabalho ora apresentado propõe essa diretriz metodológica.

Figura 3. Matemática-Fundamentação-Considerações preliminares - Topologia, Currículos 4. Proposta metodológica. 1º Grau - 1ª e 2ª séries, 1978, p. 320

Dentre as atividades propostas na matéria Estudos Sociais destacamos a proposta intitulada "Nossos domínios", cujo objetivo é trabalhar com os estudantes a compreensão de conceitos como fronteira, domínio e vizinhança. Para isso, a atividade faz uso de materiais concretos, conforme sugerido por Jean Piaget e por Dienes[21] para explorar as noções topológicas, ou seja, aquelas que lidam com propriedades espaciais, como proximidade, separação e continuidade.

[21] Zoltán Pál Dienes (1916-2014) foi um educador húngaro, doutor em matemática e psicologia que desenvolveu uma metodologia para o ensino de matemática fundamentada na psicologia baseada na teoria cognitiva de Piaget.



ATIVIDADE 3 — NOSSOS DOMÍNIOS

- *Objetivo: Desenvolver a noção de fronteira, domínio e vizinhança.*
- *Material:* — tiras de papel crepon de várias cores (aproximadamente com 1,50 m x 0,05 m)
  — papel branco
  — lápis de cor (ou sobras das tiras de crepon);
  — cola

1.ª etapa:

- As crianças são levadas ao pátio e, com as fitas de papel crepon, devem marcar seus domínios no chão, em forma de círculos, quadrados, etc. Em cada domínio, devem ficar duas ou três crianças: o domínio tem que ser necessariamente uma figura fechada.

2.ª etapa:

- Marcados os domínios, as crianças *dentro* deles, passam a observar os "vizinhos". A professora pode orientá-los por meio de perguntas, tais como:

  — "Quais os vizinhos do domínio vermelho?"
  — "Quem é vizinho do domínio azul?"

3.ª etapa:

- A professora dá ordens no sentido de deslocar algumas crianças de um domínio para o outro:

  — "João, saia de seu domínio (vermelho) e vá para o amarelo em linha reta!"
- Essas ordens visam fazer com que a criança se desloque para outro domínio que não é vizinho do seu, e para isso tenham que passar por dentro de um 3.º
- Depois de cada deslocamento, a professora pergunta:
  — "O domínio amarelo (em que ela está agora) é vizinho do domínio vermelho (em que ela estava)?"
- As crianças deverão concluir que alguns domínios não são vizinhos do seu, uma vez que têm de passar por dentro de outro (s) para chegar àqueles.

4.ª etapa:

- Voltando à sala de aula, as crianças devem colar (ou marcar com lápis de cor) no papel os seus domínios. Cada grupo de 2 ou 3, que partilharam do mesmo domínio, deve receber uma folha de papel e tirinhas mais finas (sobras do papel).
- Cada grupinho cola o seu domínio e os domínios vizinhos do mesmo, de acordo com cores da marcação do pátio.

Figura 4. Atividade de Estudos Sociais para a 1ª série envolvendo relações topológicas - Currículos 4. Proposta metodológica. 1º Grau - 1ª e 2ª séries, 1978, p. 174

Esse foco na topologia também revela a apropriação do MMM nas propostas do LC. Durante a época em que o MMM foi introduzido no Brasil, houve um esforço significativo para reformular o ensino de Matemática, incorporando elementos que antes eram considerados avançados ou pertencentes a níveis superiores de escolaridade, como o estudo de estruturas e relações espaciais.

Em resumo, ao priorizar as operações infralógicas e as noções topológicas como ponto de partida para o ensino da Matemática no ensino primário, o caderno "Currículos 4" reforça tanto apropriações das ideias de Dienes e teoria de Piaget quanto as diretrizes do MMM, buscando promover uma aprendizagem significativa e estruturada para o desenvolvimento do raciocínio espacial nas crianças.

Na parte do caderno "Currículos 4" dedicada a matéria matemática encontramos uma citação do educador Dienes a respeito de Piaget, usada para fundamentar que as crianças das primeiras séries aprendem pela ação através das operações concretas. É necessário estabelecer condições que estimulem o pensamento que se desenvolve no contato natural com o meio ambiente. Para isto deve-se ampliar o meio ambiente natural da criança através de jogos que criam um tipo determinado de pensamento, como no caso da Matemática (Rio de Janeiro, 1978).

Dienes defendia, assim como Piaget, a utilização de jogos e materiais estruturados e seus livros constam na referência bibliográfica da proposta da matéria Matemática. A indicação da utilização de jogos e a citação revelam apropriações das ideias piagetianas de Dienes que poderão ser confirmadas (ou não) a partir da análise das atividades propostas.

Os elaboradores do caderno consideram que as relações topológicas, entendidas como aquelas "ligadas ao espaço, que evidenciam as noções de contínuo, descontínuo, vizinho, domínio, fronteira, aberto, fechado, interior, exterior, disjuntos" (Currículos 4, Proposta metodológica, 1.º Grau, 1.ª e 2.ª séries, 1978, p.3 20), são evidenciadas nas vivências das crianças, porém de maneira não sistematizada e ocasional. Sendo assim, afirmam que tomam como diretriz metodológica a criação de situações favoráveis ao aprendizado das mesmas, através de jogos, assim como "escolas de vários países que vinham introduzindo as relações topológicas nas atividades das primeiras séries" (Currículos 4, Proposta metodológica, 1.º Grau, 1.ª e 2.ª séries, 1978, p. 320). Aqui a presença dos jogos nos faz inferir mais uma vez as influências de Dienes.

É apresentado na proposta para a matemática um quadro com um esquema dos conteúdos a serem desenvolvidos nas 1.ª e 2.ª séries, no qual uma ordem deve ser respeitada. Quanto à topologia, é indicada a seguinte sequência: fronteira, região, interior/exterior e contínuo. Tal indicação pode ser interpretada como *saberes para ensinar* topologia.

Com as análises iniciais das atividades propostas, percebemos na matéria Matemática, quanto as relações espaciais, a ênfase dada ao ensino de topologia à medida em que as atividades priorizam a problematização dos conceitos de contínuo, descontínuo, vizinho, domínio, fronteira, aberto, fechado, interior, exterior, etc.

Algumas conclusões

A partir das análises iniciais, é possível inferir que toda a proposta curricular elaborada pelo LC é amplamente fundamentada no estruturalismo piagetiano, alinhando-se tanto aos princípios do MMM quanto à perspectiva de formação de um sujeito autônomo e ativo em seu processo de aprendizagem.

A escolha por iniciar o estudo das relações espaciais pela topologia não é aleatória: baseia-se em um entendimento piagetiano de que, antes de dominar conceitos geométricos mais complexos (como formas e medidas), as crianças precisam compreender relações topológicas mais simples, que são mais intuitivas e, portanto, acessíveis nessa faixa etária.

A inclusão da topologia no currículo brasileiro reflete, portanto, essa tentativa de alinhar o ensino nacional às tendências internacionais em educação matemática. Assim, ao adotar esse enfoque em suas propostas, o "Currículos 4" demonstra como o LC se apropriou do ideário do MMM, integrando-as às suas produções pedagógicas.

Quanto a LDB de 1971, o LC se apropriou dela usando-a como tática para conceder autonomia às escolas na medida em que sugeria à escola que na construção de seu currículo levasse em conta a realidade econômica, social e cultural de sua comunidade escolar. Além disso se baseou na normativa para dar legitimidade a sua proposta metodológica.

Podemos aferir que para a democratização do ensino a Lei em pouco contribuiu visto que, apesar de disseminar a ideologia de uma educação para todos, ela foi uma estratégia utilizada para continuar a atender os interesses econômicos da elite brasileira através da legitimação do apoio do Governo à privatização do ensino, deixando de lado o verdadeiro problema do acesso de todos à educação, institucionalizando assim a desigualdade social.

Referências

Brasil. (1971). *Lei nº 5692, de 11 de agosto de 1971*. Senado Federal, (agosto, s/p). https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html

Chartier, R. (2002). *A história cultural: Entre práticas e representações*. Bertrand Brasil, S. A.

Cunha, L. A. (2014). O legado da ditadura para educação brasileira. *Educação & Sociedade*, *35*(127), 357-377.

Cunha, L. A., & Góes, M. (2002). *O golpe na educação*. Jorge Zahar Ed.

Crespo, R. M. G. (2016). *Educação pública fluminense pós-fusão dos estados do Rio de Janeiro e da Guanabara: Uma análise da política educacional do governo Faria Lima, 1975-1979*. [Tese de Doutoramento – Programa de Pós-Graduação em Sociologia Política], Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, RJ.

Certeau, M. (1982) *A escrita da História*. Universitária.

Certeau, M. (1994). *A invenção do cotidiano: Artes do fazer*. Vozes.

Faria, L. C. M., & Lobo, Y. L. (2005). Memórias e discursos: A escola fluminense pós-fusão (1975-1983). *Cadernos de História da Educação (UFU)*, *1*, 103-116.

Faria, L. C. M., & Lobo, Y. L. (2005). Identidade e campo de produção: O laboratório de currículos da Secretaria de Estado de Educação e Cultura do Rio de Janeiro (1975-1979). In *XXVIII Reunião Anual da ANPED*, (pp. 1-14). Caxambú. XXVIII Reunião da ANPED.

Ferreira Jr., A., & Bittar, M. (2008). Educação e ideologia tecnocrática na ditadura militar. *Cadernos Cedes*, *76*(28), 333-355.

França, D. M. A. (2012). *Do primário ao primeiro grau: As transformações da matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961-1979)*. [Tese de Doutoramento]. Universidade de São Paulo, São Paulo.

Germano, J. W. (2008). O discurso político sobre a educação no Brasil autoritário. *Cadernos Cedes*, *28*(76), 313-332.

Hofstetter, R., & Valente, W. R. (org.). (2017). *Saberes em (trans)formação: Tema central da formação de professores*. Editora Livraria da Física.

Leme da Silva, M. C. L., & Valente, W. R. (2013). Uma breve história do ensinar e aprender matemática nos anos iniciais: Uma contribuição para a formação professores. *Educ. Matem. Pesquisa, São Paulo, 15*(n. especial), 857-871.

Oliveira, M. C. A., Silva, M. C. L., & Valente, W. R. (Orgs.). (2011). *O Movimento da Matemática Moderna: História de uma revolução curricular*. Editora UFJF.

Pereira, V. M. (2016). *Fusão da Guanabara com o Rio de Janeiro: Convergência política nos anos da ditadura militar (1970-1974)*. [Dissertação de Mestrado em História Social do Território]. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Valente, W. R., Bertini, L. F., & Morais, R. S. (2017). Novos aportes teórico-metodológicos sobre os saberes profissionais na formação de professores que ensinam Matemática. *Revista Acta Scientiae*, *19*, 224-235.

Valente, W. R. (2018). Processos de investigação histórica da constituição do saber profissional do professor que ensina matemática. *Revista Acta Scientiae*, *20*, 377-385.

PREPARAR UMA DISCUSSÃO MATEMÁTICA PARA TODOS: O PERCURSO DE UMA PROFESSORA

PREPARING A MATHEMATICS DISCUSSION FOR ALL: A TEACHER'S JOURNEY

Filipa Faria

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

filipa.faria@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Margarida Rodrigues

CI&DEI, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

margaridar@eselx.ipl.pt

Marisa Quaresma

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

mq@campus.ul.pt

Resumo: As discussões coletivas constituem um desafio significativo para os professores de Matemática. O estudo de aula é reconhecido como um processo de desenvolvimento profissional que pode contribuir para mudanças graduais, mas significativas, na prática dos professores e que valoriza a socioconstrução do conhecimento por parte dos alunos, nomeadamente através da preparação detalhada de discussões coletivas. Assim, procuramos compreender como se desenvolve o entendimento de uma professora sobre a discussão coletiva no decurso da sua participação em três estudos de aula ao longo de dois anos letivos, através da identificação de mudanças no seu discurso sobre as discussões coletivas ao preparar e refletir sobre esse momento de aula no contexto do estudo de aula. Este estudo de caso é interpretativo, qualitativo e recorre à análise do discurso. A participante é uma professora em serviço do 2.º ciclo com 20 anos de experiência. A recolha de dados incluiu a gravação áudio de uma entrevista inicial, bem como do planeamento e da reflexão sobre os estudos de aula. Os resultados mostram que: i) depois de liderar a primeira discussão, a professora já considerava importantes as atividades realizadas colaborativamente durante a planificação; e que ii) ao longo dos estudos de aula, o seu discurso ancorou-se em experiências anteriores de estudo de aula, observando mudanças na sua prática, na participação dos alunos e sugerindo novas ações para o planeamento e condução de discussões coletivas.

Palavras-chave: educação matemática, discussão coletiva, planificação, reflexão, estudo de aula

Abstract: Whole-class discussions are a significant challenge for mathematics teachers. Lesson study is recognized as a process of professional development that can contribute to gradual but significant changes in teachers' practice and that values students' socio-construction of knowledge, namely through the detailed preparation of whole-class discussions. Thus, we seek to understand how a teacher's understanding of whole-class discussion develops in the course of her participation in three lesson studies over two school years, by identifying changes in her discourse on whole-class discussion as she prepares and reflects on this lesson moment in the context of the lesson study. This case study is interpretive, qualitative and uses discourse analysis. The participant is an in-service teacher (grades 5 and 6) with 20 years of experience. Data collection included audio recording of an initial interview, as well as planning and reflection on lesson studies. The results show that: i) after leading the first discussion, the teacher already considered the activities carried out collaboratively during the planning to be important; and that ii) throughout the lesson studies, her discourse was anchored in previous lesson study experiences, identifying changes in her practice, in students' participation and suggesting new actions for planning and leading whole-class discussions.

Keywords: mathematics education, whole-class discussion, planning, reflection, lesson study.

Introdução

A investigação em Educação Matemática tem contribuído com evidências sobre os aspetos que apoiam as discussões coletivas, tais como dispositivos eletrónicos, simulações prévias da discussão e, ainda, com aspetos relacionados às ações dos professores e dos alunos durante este momento da aula (Ponte, 2017; Mosvold, 2024). Embora sejam significativos os contributos da investigação, Mosvold (2024) alerta para a necessidade de serem identificadas as exigências de preparar e conduzir discussões coletivas para, desta forma, fortalecer os processos de desenvolvimento profissional no que diz respeito a esta dimensão da prática letiva. Para o autor, os processos de desenvolvimento profissional devem considerar as competências e o conhecimento necessário à preparação e condução de discussões coletivas em Matemática para apoiarem melhor os professores.

O estudo de aula, por sua vez, tem sido identificado como um processo de desenvolvimento profissional que fomenta, de forma gradual, mas significativa, mudanças na prática dos professores, nomeadamente de Matemática (Fujii, 2018). Neste processo de desenvolvimento profissional, os professores reúnem-se para trabalhar voluntariamente para, de forma colaborativa, planificar uma aula detalhadamente de forma a promover a aprendizagem dos seus alunos. Nessa aula planificada, as discussões coletivas são consideradas uma dimensão fulcral de ser preparada e de ser conduzida, observada e discutida pelos professores participantes (Takahashi, 2021). Algumas atividades promovidas pelo estudo de aula têm sido identificadas como promotoras do desenvolvimento de uma condução mais eficaz por parte do professor, nomeadamente antecipar estratégias e dificuldades dos alunos, prevendo a sequenciação de resoluções a discutir (Gomes et al., 2023, Duarte et al., 2024); preparar a organização do quadro (Clivaz & Takahashi, 2020); e refletir após a lecionação da aula (Duarte et al., 2024; Martins et al., 2022).

Embora o desenvolvimento do conhecimento do professor ao participar no estudo de aula seja amplamente enaltecido na investigação, nomeadamente acerca das discussões coletivas, "não é claro se existe um impacto a longo prazo no ensino e na aprendizagem" dos alunos (Ding et al., 2023, p. 95). Assim, procuramos compreender como se desenvolve o entendimento de uma professora sobre a discussão coletiva no decurso da sua participação em três estudos de aula ao longo de dois anos letivos, respondendo à seguinte questão: que mudanças ocorrem no discurso da professora sobre as discussões coletivas ao preparar e refletir sobre esse momento de aula?

A discussão matemática: Um momento coletivo de aprendizagem

Para que o pensamento seja comunicado é necessário que o orador, nomeadamente um professor ou um aluno, passe de um discurso egocêntrico para um discurso social e, desta forma, é necessário que um professor de Matemática crie ambientes dialógicos de aprendizagem. Neste sentido, Sierpinska (1998) afirma que o objetivo de aprender Matemática na escola "não é para se tornar melhor a fazer adições ou divisões, mas sim para compreender como é que [estas operações] são feitas" (p. 46). Desta forma, o conhecimento não pode ser transmitido pois emerge de práticas discursivas partilhadas:

> Assim sendo, a Matemática […] É uma forma de ver o mundo e pensar sobre ele. É um universo que é estabelecido através da comunicação, onde as pessoas se comprometem a determinadas convenções, constroem uma compreensão partilhada do contexto. (Sierpinska, 1998, p. 51)

Assim, quando o professor encara o ensino-aprendizagem numa perspetiva socioconstrutivista não está a excluir a existência de momentos de exposição por parte do professor e vai bastante além da realização pontual de tarefas mais desafiantes. Neste tipo de abordagem, como indica Canavarro (2011), os professores devem criar ambientes para que os alunos aprendam a partir de tarefas valiosas que abarcam ideias Matemáticas a sistematizar em discussão coletiva. Desta forma, este momento coletivo não se cinge à correção de uma tarefa, constituindo um desafio para os professores, pois representa "muito mais do que um desfile de resoluções distintas apresentadas à vez por diferentes alunos" (Canavarro, 2011, p. 17).

Em Portugal surge, pelo menos desde 2007, a consideração de que a comunicação é uma competência transversal a ser desenvolvida pelos alunos durante o ensino-aprendizagem da Matemática (Ministério da Educação, 2007). Atualmente, os documentos orientadores da prática letiva reafirmam a importância de promover um ambiente de aprendizagem dialógico, nomeadamente na disciplina de Matemática. No que diz respeito à prática do professor, as Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021) elencam ações estratégicas de ensino que, no caso da comunicação Matemática, incluem o reconhecimento e valorização dos alunos como agentes de comunicação, a criação de oportunidades para o aperfeiçoamento da comunicação escrita, o questionamento com diferentes propósitos e a necessidade de o professor incentivar a partilha e discussão de ideias e processos matemáticos. Considera-se, assim, que estas ações promovem a criação de momentos de discussão coletiva, previamente preparados e cuidadosamente conduzidos.

Ainda que falar de discussões coletivas em Matemática não seja novo, e falar da importância destas para a aprendizagens dos alunos tampouco, a investigação continua a evidenciar que os ambientes de aprendizagem em Matemática são, maioritariamente, de abordagem tradicionalista (Mosvold, 2024). Tal como afirmam Franke et al. (2007) "pouco é sabido acerca do que os professores precisam de fazer para apoiarem esse discurso em sala de aula de uma forma que convide à participação [dos alunos] e que apoie o desenvolvimento do conhecimento e identidades dos alunos" (p. 230). Na mesma linha de pensamento, Rodrigues et al. (2020) referem que a forma como o professor estrutura e regula a comunicação durante a discussão coletiva dita a criação de oportunidades para que os alunos se envolvam. Ainda assim, os autores reconhecem que "são pouco conhecidos os modos como o professor pode conduzir estes momentos de trabalho e como pode lidar com as situações imprevistas que neles ocorrem" (p. 26). Neste sentido, os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicação matemática se tiverem possibilidade de intervir também no diálogo com o professor, sendo necessário para tal que os professores criem oportunidades para que os alunos participem no discurso matemático (Planas et al., 2023).

Também numa perspetiva socioconstrutivista, Kooloos (2022) considera a distinção entre discurso coletivo e discussão coletiva: o primeiro diz respeito ao diálogo sobre as diferentes ideias dos alunos, enquanto o segundo ocorre quando os alunos se envolvem ativamente com as ideias Matemáticas dos seus colegas. Assim, independentemente da estrutura (Takahashi, 2021), uma discussão produtiva com toda a turma baseia-se necessariamente numa prática discursiva que envolve os alunos, um aspeto necessário a um ensino-aprendizagem da Matemática que se almeja para todos. Para isso, devem ocorrer interações aluno-aluno e professor-alunos.

Assim, caracterizamos uma discussão coletiva em Matemática como uma discussão dinâmica e colaborativa, facilitada pelo professor e com alicerce no pensamento matemático dos alunos. Consideramos, ainda, que a discussão coletiva é um processo que procura apoiar a exploração e negociação de conceitos e procedimentos matemáticos, potenciando desta forma o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Neste sentido, além de frisar a relevância desta atividade através de documentos orientadores da prática, é necessário apoiar os professores a desenvolverem prática de preparação e condução deste momento da aula.

O estudo de aula e a discussão coletiva

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores baseado na prática, orientado para o professor, centrado no aluno e colaborativo (Ding et al., 2024). Os professores colaboram num ambiente reflexivo e dialógico com o objetivo comum de melhorar a aprendizagem dos alunos, seguindo um ciclo composto por cinco fases: definição de objetivos, planeamento de aulas, execução e observação de aulas de investigação, discussão pós-aula e reflexão (Fujii, 2018). Considerando o ensino como uma prática social, observamos que o discurso dos professores durante todas as fases do estudo da aula é mais do que um enunciado oral, trata-se de uma forma de (re)construção de significados, identidades profissionais e relações sociais. Este entendimento inspira-se na definição de discurso de Fairclough (1992).

Sendo este processo centrado no aluno, a aula planeada deve ter uma estrutura e um fluxo que permitam o acesso ao pensamento matemático dos alunos (Fujii, 2018; Takahashi, 2021). Para que isso aconteça, é importante antecipar como promover as intervenções dos alunos, nomeadamente através do planeamento de discussões coletivas como parte da prática letiva. Durante a fase de planeamento, os professores trabalham em colaboração com várias tarefas Matemáticas para escolher cuidadosamente uma com um foco de aprendizagem claro e que promova a partilha de ideias Matemáticas importantes na discussão (Fujii, 2018). Neste processo de desenvolvimento profissional, a organização do quadro é uma dimensão que precisa de ser também planeada "para melhor comparar e contrastar as soluções dos alunos" e "para organizar tanto os processos de pensamento como os resultados" (Fujii, 2018, p. 7). Além disso, segundo Takahashi (2021), também é importante que os planos de aula tenham flexibilidade e abertura, e, ainda, que os professores monitorizem a atividade Matemática durante o trabalho autónomo para que "possam usar a informação que recolhem durante este tempo para planear quem querem chamar durante a discussão coletiva, e em que sequência" (p. 26).

A partir da análise de entrevistas a professoras com vários anos de experiência, e que posteriormente participaram no estudo de aula, Faria et al. (2024) identificaram a existência de tensões entre a prática de condução de discussões coletivas e os objetivos dessas discussões. Desta forma, embora as professoras tivessem um entendimento consensual dos objetivos de uma discussão, as suas práticas de preparação e condução deste momento, tais como encurtar o tempo de discussão ou não monitorizar o trabalho dos alunos, evidenciaram originar ou tornar mais complexos desafios associados às discussões coletivas, nomeadamente a promoção da participação ativa dos alunos, a gestão de um desafio cognitivo adequado e a gestão do tempo, diversidade e imprevisibilidade. Embora pequenas mudanças, mas significativas, tenham ocorrido nas práticas das professoras aquando da sua participação num ciclo de estudo de aula, o momento de condução da discussão coletiva continuou a apresentar alguns desafios.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem interpretativa e qualitativa. Analisamos o caso de Marta, professora do Ensino Básico que leciona no 5.º e 6.º anos há cerca de 20 anos. Antes de participar no primeiro estudo de aula, realizado com um grupo de 9 professores em 2021/22, Marta foi entrevistada. Posteriormente, Marta participou em mais dois estudos de aula, em 2022/23, num grupo de professoras composto inicialmente por 3 participantes.

Os dados analisados neste artigo foram recolhidos i) na entrevista individual inicial de Marta (2021); e ii) nas fases de planeamento e reflexão da sua primeira, segunda e terceira participação no estudo de aula (2021-2023). Após a transcrição da entrevista e das sessões de estudo de aula, foram selecionados excertos em que o foco do seu discurso são as discussões coletivas.

Os dados são analisados através da análise crítica do discurso de Fairclough (1992), que considera que o discurso deve ser entendido como uma prática social mediada por interações. Para o autor, o conceito de intertextualidade atesta que todos os discursos que surgem estão ancorados em discursos anteriores. Atendendo a este conceito, a alteração do discurso individual de uma professora pode ser considerada: a) uma consequência das suas interações em práticas discursivas ao longo das sessões do estudo de aula; e b) uma evidência de uma mudança pretendida na sua prática de ensino. Para estudar essa intertextualidade é necessário identificar mudanças discursivas decorrentes de uma nova combinação de diferentes discursos ou perceber a ausência de novos elementos no discurso (Fairclough, 1992).

A intertextualidade permitiu analisar longitudinalmente o caso de Marta. Considerando aspetos enaltecidos na sua entrevista, selecionámos excertos onde esses aspetos se mantinham ou, por outro lado, excertos onde novos discursos foram produzidos por Marta ao longo da participação em três estudos de aula. Assim, através da análise crítica do discurso (Fairclough, 1992), analisamos a prática discursiva de Marta – o conteúdo das suas intervenções, em que contexto dialógico surgem e em que momento da sua participação no estudo de aula – relacionando-a com a sua prática social – o contributo do estudo de aula para o seu entendimento das discussões coletivas.

Resultados

Entrevista inicial

Quando questionada acerca da comunicação Matemática dos alunos durante a discussão coletiva, Marta respondeu:

> Marta: A comunicação, como assim? Para resolver uma atividade às vezes falam mesmo em grande grupo porque eu lanço uma atividade e eles têm a oportunidade de explicar cada um ou explicam no lugar, não é? Tentando por palavras explicar que estratégia é que utilizaram ou como é que chegaram a um determinado resultado ou escrevem no quadro … Pronto, é assim, eu acho que eles conversam. Eu tento trabalhar isso, mas às vezes não é fácil. Eles têm sempre um bocadinho de dificuldade a comunicar.

Na resposta de Marta, identifica-se uma forte associação da comunicação dos alunos a estratégias como falar ou explicar. Embora considere que os alunos falam, ela identifica que essa é uma competência em que têm algumas dificuldades. Sobre essa dificuldade, considera:

> Marta: Eu acho que é mais uma questão de linguagem e conceitos matemáticos. Às vezes eles estão a pensar e até pensam bem ou porque dizem a resposta, e quando nós vamos perguntar como pensaram, eles respondem: "Ai, não sei". Aí eu digo: "Mas tu tens que saber como é que tu pensaste, explica lá, como é que tu pensaste?"… E depois eu vou também fazendo correções e pedindo outra vez para eles explicarem.

Assim, Marta relaciona a dificuldade dos alunos em comunicar com sua falta de compreensão conceptual. Na rua resposta, não é claro como a professora apoia os alunos a desenvolver a comunicação enquanto competência, particularmente durante a discussão, já aos alunos é atribuída a responsabilidade de saber como pensaram e de verbalizar esse pensamento. No que diz respeito à comunicação dos alunos em situações de desacordo, Marta afirmou:

> Marta: Às vezes até ainda é melhor do que sermos nós a explicar. Nem sempre conseguimos fazer isso, mas, uma ou outra vez, pedimos, e eu acho que os alunos também gostam disso. Pedimos àqueles alunos que terminaram primeiro ou que já têm uma ideia mais formada para ajudar os outros, para se levantarem e irem ajudar. Eles aceitam essa ajuda. Às vezes a linguagem é mais próxima.

Nestes excertos da entrevista inicial, Marta considera que os alunos têm dificuldade em comunicar as suas ideias Matemáticas, particularmente durante as discussões. Neste sentido, corrige-os ou pede-lhes que repitam a explicação e, embora considere positivo que os alunos comuniquem entre si em situações de desacordo, Marta entende que este é um momento em que alguns alunos ajudam, enquanto outros estão disponíveis para aceitar essa ajuda.

Primeiro estudo de aula

Durante a fase de planificação do primeiro estudo de aula no qual Marta participou, as professoras iniciaram um diálogo sobre como agir quando surgissem dúvidas sobre a tarefa. Acerca do domínio Geometria e Medidas, que fora selecionado para a aula de investigação pelas professoras, Marta diz:

> Marta: A minha tendência é quando os alunos começaram a medir, e se não for necessário, por exemplo, eu digo: "Bem, isso não é para medir!". E então não deixo que continuem a tarefa sozinhos.

Deste modo, Marta pode estar a limitar a sua atividade Matemática e autoria dos alunos, aspetos importantes para enriquecer uma discussão coletiva. Neste primeiro estudo de aula, ao refletir sobre a aula conduzida, Marta focou-se bastante na discussão coletiva que conduziu, especificamente em como planear e conduzir este momento foi sentido como uma inovação da sua prática docente:

> Marta: Quando dinamizei a aula observada, a própria condução da aula e a discussão coletiva foi o que mais mereceu o meu empenho e a minha atenção por serem os fatores mais inovadores à minha prática letiva. Conduzir os alunos nas discussões coletivas de forma a salientar e a interligar o seu contributo no objetivo da aula é sair da minha zona de conforto …. Vão sempre existir fatores que não consigo antecipar, mas que terei de saber orientar de forma a dinamizar uma discussão coletiva produtiva.

Ao refletir, Marta prestou especial atenção também às tarefas utilizadas:

> Marta: As tarefas devem ter um carácter mais exploratório para serem mais interessantes e desafiantes, encorajar uma maior participação dos alunos... Nas sessões, analisámos várias respostas dos alunos a uma tarefa e esta análise permitiu ver as diferentes formas de comunicar. O aluno deve ser capaz de explicar o seu raciocínio e ser valorizado por isso.

Comparativamente à fase de planeamento da aula neste primeiro estudo de aula em que participou, ao invés de referir que realiza a tarefa com os alunos caso surjam dúvidas, Marta passou a refletir sobre a necessidade de realizar tarefas exploratórias e como isso está relacionado com a participação e comunicação dos alunos numa discussão.

Segundo estudo de aula

Durante a fase de planeamento, em resposta a uma pergunta da facilitadora, Marta começou por analisar uma tarefa de diagnóstico, mas transformou-a numa reflexão mais ampla, centrando-se na dificuldade dos alunos em explicar e registar as suas ideias matemáticas para que pudessem ser posteriormente mobilizadas na discussão coletiva:

> Marta: Já estão a começar a fazer perguntas uns aos outros e acho que isso é bom. Mas também estou um pouco mais alerta, por causa do estudo de aula e da aula de investigação do ano passado.... Estamos mais atentos a certas coisas. Agora, ando de um lado para o outro, vejo diferentes estratégias e peço-lhes para irem ao quadro. Quando vão ao quadro, peço-lhes que expliquem aos colegas.

Marta identificou mudanças na interação entre os alunos durante a discussão e associou este aspeto a mudanças na sua prática, influenciadas pela sua participação numa aula de investigação anterior. Marta especificou ainda alguns aspetos associados à atividade dos alunos durante a discussão:

> Marta: Uma dificuldade que têm é pôr as ideias no papel e organizá-las por escrito, porque podem transmitir as ideias oralmente ou, por vezes, algumas delas ficam na cabeça... Temos de incentivar a que aquilo de que falam no

seu pequeno grupo seja efetivamente discutido depois e que seja explicado da melhor forma possível.

Marta referiu que, em relação à discussão na turma, os alunos tendem a verbalizar outros aspetos ou apenas a parte inicial do que exploraram durante o trabalho autónomo em pequenos grupos. Esta dificuldade em comunicar durante a discussão coletiva já tinha sido por si mencionada durante a entrevista. No entanto, durante esta fase de planeamento, Marta estabeleceu uma ligação entre as ações do professor durante o trabalho autónomo e a comunicação dos alunos durante a discussão.

Terceiro estudo de aula

Durante a fase de planeamento da aula do terceiro estudo de aula no qual participou, Marta esquematizou, num papel, a forma como o quadro poderia ser organizado durante a discussão coletiva (Figura 1). Nos estudos de aula anteriores, embora a organização do quadro tenha sido considerada, Marta e as restantes professoras que participaram não tiveram iniciativa de esquematizar previamente uma possível organização do quadro.

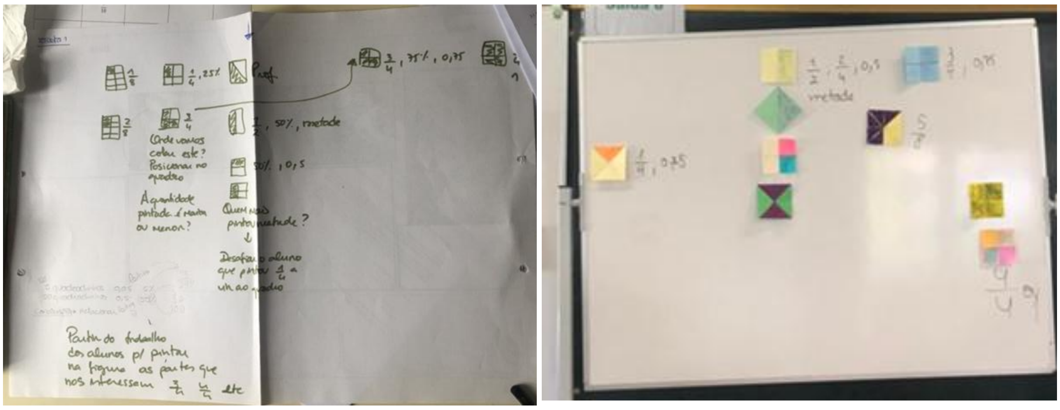


Figura 1. Esquema do quadro (planeamento) e posterior organização (aula conduzida)

Ao refletir sobre a aula, Marta centrou-se na organização do quadro como um aspeto principal da preparação da discussão coletiva e como apoio à aprendizagem dos alunos.

> Marta: Exato, essa foi uma das coisas que também anotei. E foi bastante curioso, porque a Filipa focava sempre, em grande parte das sessões, na organização do quadro e aqui tive mesmo a sensação de que ter pensado e organizado o quadro, como é que ia ficar quando colássemos as coisas no quadro, era muito importante porque o facto de já o termos feito e pensado, ajudava. Fez a diferença, porque se calhar eu ia colar as coisas ao acaso e a organização das ideias para os alunos não seria tão boa. Por isso, o facto de já termos ensaiado e pensado sobre o assunto foi bom, porque colei a minha no meio e depois perguntei aos alunos onde a deviam colar. A forma como chamei os alunos foi também ainda mais intencional.

Para além da aula de investigação que foi observada por todos os participantes, Marta teve a oportunidade conduzir a aula planificada colaborativamente numa outra turma, tendo surgido a seguinte partilha por parte da professora durante um momento de reflexão:

> Marta: Bem, eu também me estava a lembrar disso. Já me estava a lembrar de 1/4, quando disse que era 0,25... Porque se é o quadrado inteiro, e depois dividimos, e metade de 100 é 50, e metade disso é 25... Eu também estava a pensar que podia ter sido explorado um bocadinho e isso não aconteceu. E já foi algo discutido hoje, portanto, já há diferenças de uma discussão para a outra.

De uma aula para a outra, Marta ajustou as suas intervenções durante a discussão coletiva, de modo a promover a conexão entre diferentes representações. Para além de refletir sobre a discussão coletiva que foi observada, a professora alargou a sua reflexão à possibilidade de melhorar a condução deste momento noutras aulas.

Discussão

Ao longo da sua participação em três estudos de aula, entre 2021 e 2023, o discurso de Marta sobre aspetos da discussão modificou-se, o que apoia a ideia de que os discursos são dinâmicos e não são neutros, transportando ideologias que podem ser moldadas através de relações sociais (Fairclough, 1992), como acontece em contextos de desenvolvimento profissional colaborativos, tal como o estudo de aula.

Na entrevista inicial, Marta associou a comunicação durante a discussão coletiva a um momento em que os alunos falam ou explicam os seus resultados matemáticos. Considerou ainda que os alunos têm dificuldade em comunicar durante as discussões por terem dificuldade em compreender alguns conceitos. A par desta dificuldade, afirmou na entrevista que corrige os alunos quando isso acontece, reforça o pedido de explicação e, ainda, que atribui ao aluno a responsabilidade de saber como pensou e de o saber explicar durante a discussão. Relativamente aos desacordos matemáticos numa discussão coletiva, Marta afirmou que os alunos que terminaram ou que têm ideias Matemáticas mais claras podem ajudar outros colegas. Contudo, esta interajuda não significa necessariamente que esteja a ser desencadeada uma negociação de ideias Matemáticas. Assim, podemos considerar que o seu entendimento inicial sobre a discussão coletiva estava, ao momento da entrevista inicial e antes da sua participação no estudo de aula, mais alinhado com um discurso coletivo do que com uma discussão coletiva, atendendo às distinções realizadas por Kooloos (2022).

Ao longo da planificação e reflexão que decorreu no primeiro estudo de aula, o discurso de Marta continuou a associar as intervenções do professor a um esclarecimento imediato de dúvidas, ou seja, se há uma incompreensão da tarefa, os alunos resolvem-na em conjunto com o professor. Esta prática pode contrariar a promoção da autoria matemática dos alunos e empobrecer a discussão, uma vez que restringe o trabalho de interpretação da tarefa, limita a diversidade de ideias e condiciona a participação dos alunos no diálogo (Faria et al., 2024). No entanto, durante a reflexão após a primeira aula de investigação e a discussão coletiva que se seguiu, o discurso de Marta passou a considerar elementos importantes do estudo da aula, como antecipar estratégias, selecionar tarefas desafiantes, gerir imprevistos e conduzir discussões coletivas produtivas, incentivando a participação dos alunos e valorizando diferentes formas de comunicação (Fujii, 2018; Takahashi, 2021).

No segundo estudo de aula, Marta afirmou, enquanto preparava a discussão coletiva, que os alunos começavam a fazer questões, um tipo de intervenção que pode enriquecer a discussão coletiva (Kooloos, 2022; Planas et al. 2023; Takahashi, 2021). Quanto à sua prática, considera-se mais atenta ao momento discussão, justificando que, agora, circula durante o trabalho autónomo, identifica diferentes estratégias, seleciona-as e pede aos alunos que expliquem (Takahashi, 2021). Também neste segundo estudo de aula em que participou, a professora deu sugestões de ações dos professores que têm implicações na qualidade das discussões coletivas como, por exemplo, incentivar a que as ideias discutidas no pequeno grupo fossem trazidas para a discussão pelos alunos e explicadas da melhor forma possível.

Ao participar no terceiro estudo de aula, Marta planeou o quadro para a discussão coletiva com algum detalhe. Ao refletir sobre este aspeto e o seu impacto na discussão, relacionou o objetivo do professor relativamente à organização do quadro e à sequência das intervenções dos alunos com a qualidade da compreensão matemática dos alunos (Takahashi, 2021). Acrescentou ainda à sua reflexão o modo como as intervenções do professor durante a discussão coletiva podem apoiar, ou não, o sucesso do objetivo de aprendizagem matemático definido para a aula, nomeadamente o estabelecimento de conexões.

De um modo geral, ao longo das sessões dos estudos de aula, é possível identificar que o seu discurso sobre a discussão coletiva se altera. Quando começa a refletir sobre a discussão que conduziu na primeira aula de estudo, o seu discurso passa a estar ancorado em momentos e atividades desenvolvidas ao longo das sessões do estudo da aula. Nos dois estudos de aula seguintes, o seu discurso, quando prepara e reflete sobre discussão coletiva, está também ancorado na sua experiência prévia no contexto do estudo de aulas.

Conclusão

Os resultados ilustram dois aspetos principais quanto às mudanças que ocorreram no discurso de Marta sobre a discussão coletiva ao longo da sua participação em três estudos de aula: i) depois de liderar a primeira discussão, o seu discurso começou já a considerar atividades realizadas em colaboração durante a fase de planeamento do estudo da aula, tal como a seleção de tarefas; e ii) enquanto planeava e refletia ao longo do tempo, o seu discurso estava ancorado nas suas experiências anteriores de estudo da aula. Este segundo aspeto torna-se evidente quando Marta identifica mudanças na participação dos seus alunos, como colocarem questões, e mudanças também na sua prática, como monitorizar a atividade matemática durante o trabalho autónomo dos alunos. A participação contínua no estudo de aulas permitiu a Marta planear e refletir gradualmente sobre diferentes aspetos relacionados com as discussões coletivas: as tarefas, as diferentes estratégias dos alunos, a sua participação ativa, e, finalmente, a organização do quadro e a sua relação com a qualidade da aprendizagem dos alunos. Assim, embora o contributo do estudo de aula possa ser identificado aquando da primeira participação de Marta neste processo, verificamos que este se reforçou substancialmente com a participação nos estudos de aula seguintes. Os aspetos do estudo de aula evidenciados pela professora como promotores da sua prática de discussões coletivas, incluem o papel da facilitadora e a exploração de tarefas e antecipação da atividade matemática dos alunos, destacando-se ainda a possibilidade de participar de forma contínua em três ciclos de estudos de aula.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, IP, no âmbito da UIDEF - Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, https://doi.org/10.54499/UIDB/04107/2020 e, ainda, por uma bolsa atribuída a Filipa Faria com referência 2023.01962.BD.

Referências

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens essenciais de Matemática no ensino básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Clivaz, S., & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(1), 53-70.

Ding, M., Huang, R., Pressimone Beckowski, C., Li, X., & Li, Y. (2024). A review of lesson study in mathematics education from 2015 to 2022: Implementation and impact. *ZDM Mathematics Education, 56*(1), 87–99. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01538-8

Duarte, N., Faria, F., & Ponte, J. P. (2024). Preparar e conduzir a discussão coletiva em Matemática. *Educação e Matemática, 171*, 11-14.

Fairclough, N. (1992). *Discurso e mudança social*. Editora Universidade de Brasília.

Faria, F., Ponte, J. P., & Rodrigues, M. (2024). Teachers' leading whole-class discussions in a mathematics lesson study: From initial understanding to orchestration in practice. *European Journal of Science and Mathematics Education, 12*(1), 1–18. https://doi.org/10.30935/scimath/xxxx

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Information Age.

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. N. Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1

Gomes, P., Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2022). Leading whole-class discussion: From participating in a lesson study to teaching practice. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 12*(2), 139-151. https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2022-0022

Martins, M., Gomes, P., Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2022). Refletir sobre discussões coletivas: Contributos de estudos de aula com professores e futuros professores de Matemática. In A. Richit, A., J. P. Ponte, & E. S. Gómez (Eds.), *Estudos de aula na formação inicial e continuada de professores*, (pp. 169-195). Livraria da Física.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Kooloos, C. C. (2022). *Eye on variety: The teacher's work in developing mathematical whole-class discussions*. PhD thesis, Radboud Universiteit Nijmegen.

Mosvold, R. (2024). Research on discussion in mathematics teaching: A review of literature from 2000 to 2020. In J. Wang (Ed.), *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education* (ICME14, vol. 2, pp. 473–488). https://doi.org/10.1142/9789811287183_0032

Planas, N., Adler, J., & Mwadzaangati, L. (2023). What is mathematics teaching talk for? A response based on three sites of practice in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 55*(3), 521-534.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33-56). APM.

Rodrigues, C., Ponte, J. P., & Menezes, L. (2020). Práticas discursivas de professores de Matemática na condução de discussões coletivas. *Quadrante*, *29*(2), 24-46. https://doi.org/10.48489/quadrante.22575

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). NCTM.

Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving: A pedagogical approach from Japan*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003015475

O PAPEL DO FACILITADOR NA CONDUÇÃO DO ESTUDO DE AULA
THE ROLE OF THE FACILITATOR IN CONDUCTING LESSON STUDY

Arminda Pereira
Escola Básica de Alfornelos e
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal
armindapereira@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

Marisa Quaresma
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal
maquaresma@ie.ulisboa.pt

Resumo: O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional, com foco na aprendizagem dos alunos que potencia a reflexão e o trabalho colaborativo entre professores. O facilitador é uma das chaves para o sucesso do estudo de aula e desempenha inúmeras funções, mas tem recebido pouca atenção. Esta investigação procura caracterizar o papel do facilitador na condução de um estudo de aula. A investigação é qualitativa e interpretativa com design de observação participante e autoestudo. A recolha de dados incluiu um diário de bordo, gravações áudio e recolha de documentos. Os resultados evidenciam a importância de uma preparação minuciosa das sessões de estudo de aula pelo facilitador, aproveitando as experiências dos professores, selecionando recursos adequados, antecipando as contribuições dos professores sobre aspetos da sua prática, elaborando questões a colocar aos professores e definindo os diferentes contributos a prestar aos professores. Durante as sessões de estudo de aula o facilitador orienta, apoia, desafia os participantes e facilita as discussões.

Palavras-chave: estudo de aula, facilitador, autoestudo, prática docente, ensino de Matemática.

Abstract: Lesson study is a professional development process, focusing on student learning that enhances reflection and collaborative work among teachers. The facilitator is one of the keys to the success of lesson study and performs numerous functions but has received little attention. This research seeks to characterize the role of the facilitator at leading of lesson study sessions. The investigation is qualitative and interpretive with a participant observation design and self-study. Data collection included a logbook, audio recordings and document collection. The results highlight the importance of a thorough preparation of the lesson study sessions by the facilitator, taking advantage of the teachers' experiences, selecting appropriate resources, anticipating the teachers' contributions on aspects of their practice, elaborating questions to be asked to the teachers and defining the different contributions to be provided to teachers. During the lesson study sessions, the facilitator guides, supports, challenges the participants and facilitates the discussions.

Keywords: lesson study, facilitator, self-study, teaching practice, mathematics teaching.

Introdução

Os sistemas educativos em todo o mundo estão em constante evolução procurando responder às necessidades de uma sociedade em constante transformação. O professor desempenha um papel fundamental na concretização de tais mudanças (Lewis & Perry, 2017). Para tal, são necessários modelos de desenvolvimento profissional que potenciem o desenvolvimento de uma cultura profissional mais reflexiva e colaborativa, centrada na prática e que apoie de modo efetivo a mudança de práticas (Dudley et al., 2019; Gutierez, 2016; Murata et al., 2012). O estudo de aula cumpre esses critérios ao incorporar a aprendizagem dos professores no seu trabalho quotidiano, permitindo que essa aprendizagem seja significativa (Fernandez et al., 2003). Esta comunicação decorre de um projeto de investigação de doutoramento em curso que tem por objetivo compreender, no estudo de aula, o papel do facilitador e a perspetiva dos participantes, professores de Matemática do 3.º ciclo, bem como saber de que modo este processo formativo contribui para o desenvolvimento da sua prática. Nesta comunicação procuramos responder à seguinte questão: Qual o papel do facilitador na condução do estudo de aula?

Enquadramento teórico

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional usado há mais de um século no Japão e é reconhecido por professores e educadores por apoiar mudanças profundas no ensino (Takahashi & McDougal, 2018). Para os educadores japoneses, o estudo de aula é como o ar que respiram, é tão natural que têm dificuldade em identificar as suas características mais importantes (Fujii, 2015).

O estudo de aula envolve quatro momentos principais: definição do problema, estudo curricular e planificação, observação e reflexão (Ponte et al., 2016). Neste processo, um grupo de professores, trabalha de forma colaborativa, começando por identificar as dificuldades usuais dos alunos num tema específico ou numa questão relacionada com um objetivo curricular. Após essa identificação, os professores estudam as orientações curriculares, analisam as estratégias e materiais pedagógicos disponíveis sobre o problema escolhido e estudam os materiais procedentes da investigação educacional para perspetivar as dificuldades dos alunos e possíveis formas de as ultrapassar. De seguida, os professores procedem ao planeamento detalhado de uma aula, a aula de investigação, que é lecionada por um dos professores e observada pelos restantes. Durante a observação, o foco recai sobre o trabalho dos alunos, as suas estratégias e dificuldades, e não sobre a atuação do professor. Após a aula, o grupo reúne-se para uma reflexão conjunta, analisando os acontecimentos ocorridos e procurando saber em que medida as aprendizagens pretendidas foram ou não conseguidas (Ponte et al., 2016).

O estudo de aula representa um afastamento significativo dos processos tradicionais de desenvolvimento profissional que posicionam os professores como recetores do conhecimento especializado transmitido pelos formadores de professores e, como tal, apresenta desafios para os facilitadores que nunca experimentaram este tipo de processo formativo (Lewis, 2016).

A realização de um estudo de aula de alta qualidade requer facilitação competente. Em países como Portugal, onde esta abordagem de desenvolvimento profissional é relativamente nova, poucos formadores de professores tiveram a oportunidade de vivenciar o estudo de aula como participantes. Ao assumirem o papel de facilitadores, estão a iniciar uma nova prática complexa sem experiência anterior.

Embora existam muitas investigações a respeito do estudo de aula, tem sido dada pouca atenção à figura do facilitador. Apesar de estudos recentes captarem aspetos da facilitação

(Amador & Carter, 2016; Clivaz & Clerc-Georgy, 2020; Coles, 2013; De Vries & Uffen, 2020; Grigioni Baur & Hoznour, 2019; Lewis, 2016; Morago & Grigioni Baur, 2020), é necessário explorar e definir como são conduzidas as sessões de estudo de aula.

Dotger (2015), Hauge (2022) e Mynott (2018) analisaram o papel do facilitador no estudo de aula, a partir de diferentes perspetivas. As diferenças existentes decorrem da ênfase que cada um coloca no processo de facilitação. Dotger (2015) refere os desafios que o facilitador enfrenta desde o recrutamento dos professores participantes até à produção de conhecimento partilhado no final do estudo de aula. Descreve o facilitador como o responsável pela coordenação e organização de todas as etapas do estudo de aula, desde o planeamento até a realização e reflexão, salientando a importância de competências de gestão e organização para assegurar que o processo seja bem estruturado e conduzido de forma eficiente. Hauge (2022), por seu lado, destaca a capacidade do facilitador para comunicar de forma clara, redefinir o seu papel, colaborar com os participantes para promover a aprendizagem conjunta e incentivar novas abordagens ao ensino-aprendizagem. Neste contexto, o facilitador atua como suporte e motor dos processos de desenvolvimento. Mynott (2018), por outro lado, sugere que resumir, fornecer descrições detalhadas e partilhar conhecimentos são técnicas essenciais para orientar os participantes ao longo do estudo.

Num outro estudo, Clivaz e Clerc-Georgy (2020) apresentam um modelo de facilitação com dois especialistas, onde um facilitador está presente para o conhecimento do conteúdo e outro para conduzir o estudo de aula. Nesse modelo, os autores categorizam os papéis dos facilitadores em quatro dimensões: organizador, formador de professores, investigador e membro do grupo. Pelo seu lado, Mynott e Zimmatore (2022) sublinham a importância de uma preparação minuciosa das sessões de estudo de aula por parte dos facilitadores para assegurar que as informações relevantes sejam disponibilizadas aos participantes.

Metodologia

Neste estudo foi utilizada uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, com base num paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). A investigação foi realizada na escola, o local habitual de trabalho dos professores, onde foram observados os fenómenos e o ambiente onde ocorrem, procurando compreender o significado das suas ações, e foram recolhidos os documentos produzidos nas sessões de trabalho e na aula de investigação (Bogdan & Biklen, 1994; Erickson, 1986; Patton, 2002). Os dados são, essencialmente, descritivos tendo em vista compreender o papel do facilitador antes e durante a condução do estudo de aula.

Esta investigação segue um design de observação participante pois pretende-se compreender como os participantes constroem e negoceiam significados no ambiente em que estão inseridos, como se relacionam e como essas interações contribuem para as suas experiências. Ao posicionar-se socialmente no contexto dos participantes, o investigador procura obter uma compreensão mais profunda e contextualizada das vivências dos participantes, observando em tempo real as interações, comportamentos, processos, contextos sociais, linguagem utilizada e outros elementos que influenciam essas vivências (Jorgensen, 1989).

Para compreender o papel do facilitador antes e durante a condução do estudo de aula a primeira autora investigou a sua prática. Através do autoestudo refletiu sobre a sua prática, explorou e analisou o papel do facilitador, bem como identificou oportunidades de melhoria. Para estudar a sua prática como facilitadora, a primeira autora escreveu um diário de bordo que contém o objetivo de cada sessão, os assuntos tratados, os episódios relevantes, o balanço de cada sessão e os pensamentos, desafios, constrangimentos que enfrentou ao longo do estudo. Antes de cada sessão de estudo de aula, escutou com atenção a gravação áudio da sessão anterior, analisou os documentos produzidos pelos professores e refletiu sobre os aspetos a melhorar.

Neste estudo, a equipa de trabalho foi constituída por cinco professores de Matemática que lecionam o 3.º ciclo de uma escola do distrito de Lisboa (Ana, Ema, Maria, Paula e Sofia), e a primeira autora no papel de facilitadora.

Antes de iniciar as sessões de estudo de aula a primeira autora solicitou por escrito, à Diretora da Escola, um pedido de autorização para a realização do estudo; negociou com as autoridades escolares a sua participação (elaboração dos horários de cada participante com a atribuição de tempos para trabalho colaborativo); providenciou as condições para que este processo de formação pudesse ocorrer; constituiu o grupo que participou no estudo de aula (em reunião de grupo de recrutamento apresentou o estudo aos professores e convidou os professores a participar num estudo de aula); realizou os trâmites administrativos junto do Centro de Formação para que a formação fosse validada na modalidade de Oficina de Formação, correspondente a 50 horas (com entrega de um certificado de formação a cada participante no final do estudo de aula); informou os participantes do propósito da investigação, dos dados a serem recolhidos e divulgados, das modalidades e tempos requeridos no envolvimento dos participantes; solicitou o consentimento escrito dos participantes, assegurando que todos os participantes compreenderam os termos acordados, que a participação é voluntária, que têm a possibilidade de desistirem e de solicitarem alterações aos termos acordados ao longo da investigação; definiu o foco do estudo de aula e planeou as sessões.

O estudo de aula decorreu no ano letivo de 2023/2024, foi constituído por catorze sessões e envolveu quatro momentos principais: definição do problema, estudo curricular e planificação, observação e reflexão (Ponte et al., 2016). Cada sessão teve a duração aproximada de 120 minutos. A tabela 1 apresenta a organização das etapas do estudo de aula, bem como os objetivos e uma descrição para cada uma das sessões.

Tabela1. Organização das etapas do estudo de aula

Fases	Sessões	Objetivos	Descrição
Definição do Problema	1	*Apresentar e planear o Estudo de aula.* *Discutir o tópico matemático a abordar*	• *Apresentar o estudo de aula aos professores participantes.* • *Apresentar o planeame/nto geral e calendarização das sessões.* • Decidir sobre o problema a abordar na aula de investigação.
Estudo Curricular e Planificação	2	*Estudo sobre o tópico*	• Analisar o enquadramento curricular do tópico específico, assim como os subtópicos a abordar na aula de investigação. Esta análise deve considerar os desafios e eventuais dificuldades que se colocam aos alunos. • Analisar artigos e outros documentos referentes a processos de raciocínio, estratégias e dificuldades dos alunos no tópico selecionado.
	3	*Estudo sobre tarefas*	• Analisar a distinção entre diferentes tipos de tarefa: exercício, problema, exploração, investigação. • Analisar tarefas a propor que levem os alunos a construir/ compreender conceitos, procedimentos, propriedades, representações e a desenvolver o raciocínio matemático. • Considerar o papel de sequências de tarefas que levam a um objetivo de aprendizagem. • Resolver e analisar tarefas sobre o tópico.
	4	*Elaboração/seleção de tarefas*	• Elaborar/selecionar, analisar e refletir sobre as tarefas que possam ser usadas na aula de investigação. • Selecionar a tarefa a aplicar na aula de investigação e justificar a sua escolha. • Resolver a tarefa selecionada para a aula de investigação e discutir possíveis alterações. • Antecipar as dificuldades, estratégias e as possíveis dúvidas dos alunos na resolução da tarefa.
	5	*Estudo sobre dinâmica da aula*	• Discutir e definir as questões relacionadas com a organização da aula e a comunicação. • Considerar a organização da aula em três fases: introdução, trabalho autónomo e discussão coletiva (incluindo síntese final).
	6 e 7	*Planeamento da aula de investigação*	• Elaborar o plano de aula tendo em conta os aspetos gerais da aula e o desenvolvimento da aula • *Definir o modo de trabalho dos alunos e de apresentar a tarefa.*

			• *Definir as estratégias para a discussão coletiva e pontos da síntese final.* • Definir com os participantes o papel do observador durante a aula de investigação e preparar o processo de observação de aula.
Observação	8, 9, 10, 11 e 12	*Observação da aula de investigação*	• *Realização da aula de investigação.*
Reflexão	13	*Reflexão sobre a aula de investigação*	• Partilhar os dados que foram recolhidos pelos observadores na aula de investigação. • Analisar excertos dos áudios e vídeo da aula de investigação. • Refletir sobre a concretização da planificação, a aprendizagem dos alunos, as tarefas selecionadas, as estratégias implementadas • Reformular aspetos para eventuais novas aulas de investigação.
Divulgação	14	*Balanço final e divulgação*	• Balanço do trabalho desenvolvido. • Preparação e divulgação da experiência na escola e no Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM).

Na primeira sessão de trabalho foi apresentado o estudo de aula aos professores participantes, o planeamento geral e a calendarização das sessões. Durante esta sessão foi ainda definido em conjunto que o tópico a trabalhar seria as expressões algébricas e equações.

No estudo curricular, os participantes analisaram as orientações curriculares, os materiais didáticos, as investigações anteriores e partilharam as suas experiências sobre o tópico escolhido. De seguida, planificaram detalhadamente a aula, tendo em conta, a seleção e análise de tarefas matemáticas, a definição das estratégias de ensino a utilizar, a antecipação de dificuldades e estratégias dos alunos, a preparação da discussão coletiva e a organização da observação da aula de investigação.

Durante a planificação da aula de investigação a facilitadora esteve atenta à elaboração minuciosa do plano de aula e solicitou aos professores esclarecimentos adicionais. Além disso, incentivou o grupo a tomar decisões, a fazer escolhas e a argumentar as suas propostas. A facilitadora foi constantemente colocando questões, com diferentes propósitos: (i) questões de inquirição, quando a facilitadora procurava saber o que os participantes pensam, admitindo que podia haver uma variedade de respostas legítimas;

(ii) questão de focalização, utilizadas para direcionar a atenção dos participantes a um determinado dado ou condição; (iii) questões de confirmação, quando a facilitadora esperava obter uma resposta já conhecida, para reforçar ou validar um conceito discutido (Menezes et al., 2013, Ponte & Serrazina, 2000) e (iv) questões de provocação, quando o objetivo era desafiar os participantes a refletirem mais profundamente, estimulando-os a pensar de forma crítica e explorar novas perspetivas (Brodie, 2010).

Os debates entre os professores ocorreram livremente, garantindo que fossem discutidas as aprendizagens visadas, os preconceitos, obstáculos e dificuldades de aprendizagem relacionadas com o objeto ensinado e a redação precisa das instruções, o que seria escrito no quadro, os documentos que seriam preparados e distribuídos aos alunos e, por fim, os registos escritos que seriam produzidos pelos alunos. Foram ainda mencionados os recursos que poderiam ser mobilizados, a definição do ambiente (em particular, a organização espacial da aula), o esboço detalhado de cada momento da aula e o tempo a definir para cada um desses momentos.

Cada professor do 8.º ano lecionou a aula planeada na sua turma, seguindo o plano tanto quanto possível. Os observadores centraram a sua atenção no trabalho alunos.

A reflexão foi realizada em dois momentos: uma sessão imediatamente após cada aula de investigação e a segunda sessão alguns dias depois. Após a aula de investigação, os participantes do estudo reuniram-se e partilharam as suas observações e reflexões. O foco da discussão esteve na aprendizagem dos alunos, no conteúdo matemático e no design da aula. Estas reflexões e discussões formaram a base para uma revisão do plano de aula. A facilitadora procurou garantir um espaço para troca de ideias e promover reflexões relevantes relativas ao impacto da aula na aprendizagem dos alunos. O percurso da discussão foi articulado em torno de três momentos principais: o retorno do professor que lecionou a aula de investigação, dos observadores e do facilitador. Em primeiro lugar, foi dada a palavra ao professor que conduziu a aula de investigação, com o objetivo de recolher a sua opinião sobre o que correu bem e o que pode ser melhorado, com base no que observou. De seguida, a discussão foi aberta a todo o grupo. Cada observador partilhou com o grupo as notas que registou durante a aula de investigação. A facilitadora limitou as suas intervenções, de forma a incentivar a participação na discussão dos restantes professores. Sempre que foi necessário foi reorientado o debate para os objetivos definidos na aula de investigação e formuladas questões reflexivas ou observações necessárias para alimentar e enriquecer a discussão sem impedir a autonomia de reflexão dos professores. As questões abordadas centravam-se na aprendizagem dos alunos, nas dificuldades que encontraram ou nos elementos pedagógicos observados durante a aula. A discussão foi um momento privilegiado de aprendizagem coletiva. Depois de ouvir atentamente todos os observadores a facilitadora encerrou a discussão sintetizando os elementos discutidos nestes momentos de partilha.

Resultados

Preparação e planeamento das sessões de estudo de aula

A facilitadora preparou pormenorizadamente as sessões de estudo de aula da mesma forma que um professor planeia as suas aulas. Para tal, selecionou artigos, tarefas, vídeos com excertos de aulas e excertos de resoluções de alunos para analisar e refletir com os professores. Essa seleção foi importante pois fomentou o envolvimento e a aprendizagem dos professores, como consta no relatório final de Maria:

> Considero que um dos artigos mais interessantes que analisámos foi o "Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios" (Canavarro, 2011). Este artigo ajudou-me a perceber o que é o ensino exploratório, quais as vantagens, como devo apresentar a tarefa, como devo acompanhar os alunos durante o trabalho autónomo e como devo orientar de forma eficaz a discussão coletiva. (Relatório Final, Maria)

Foi ainda importante para a facilitadora antecipar as contribuições dos professores sobre aspetos da sua prática, nomeadamente, na seleção de tarefas e na condução da discussão coletiva. A figura 1 apresenta um excerto do planeamento da sessão 1 em que são dadas as possíveis respostas que os professores poderiam referir quando se pretende criar um ambiente promotor do trabalho colaborativo dos participantes.

Tempo (min)	Descrição
	• Definir um conjunto de elementos que permitam criar um ambiente promotor do trabalho colaborativo dos participantes:
5 minutos	Reflexão individual silenciosa, na qual cada membro do grupo anota uma lista de aspetos importantes que apoiam a sua aprendizagem.
5 minutos	Partilhar e discutir as ideias geradas por cada membro.
5 minutos	Sintetizar as ideias dos membros numa lista contendo cinco aspetos que todos apoiam
	Possíveis respostas: Ser curioso. Explicar e justificar soluções. Desafiar o pensamento uns dos outros. Proporcionar momentos de trabalho tranquilo. Ouvir com atenção, com a mente aberta. Dar 100%. Manter-se concentrado na tarefa. Ser pontual. Ter uma visão positiva em relação a si mesmo e aos outros. Estar sempre focado(a) no aluno(a). Mostrar respeito pelas ideias dos outros ..., mas desafiá-las!
	Para criar um ambiente que promova um trabalho colaborativo eficaz, incentivando a participação ativa, o respeito mútuo e a procura por resultados partilhados será necessário: ▪ **Comunicação aberta e respeitosa:** Estabelecer um ambiente onde todos se sintam à vontade para partilhar ideias, opiniões e preocupações sem medo de críticas negativas. ▪ **Metas e objetivos claros:** Garantir que todos compreendam os objetivos comuns e individuais do trabalho colaborativo para que todos estejam alinhados. ▪ **Diversidade e inclusão:** Valorizar e respeitar a diversidade de ideias, experiências e perspetivas para enriquecer o processo colaborativo. ▪ **Responsabilidade partilhada:** Definir claramente as responsabilidades de cada membro e promover a responsabilidade mútua para alcançar as metas coletivas. ▪ **Ferramentas e recursos adequados:** Fornecer as ferramentas e recursos necessários para facilitar a colaboração, como plataformas de partilha de materiais, espaços físicos de trabalho colaborativo, entre outros. ▪ **Feedback construtivo:** Encorajar e facilitar o feedback entre os membros, promovendo uma cultura de aprendizagem contínua e de melhoria. ▪ **Liderança facilitadora:** Ter líderes que saibam direcionar o grupo, facilitar discussões e incentivar a participação de todos sem dominar o processo colaborativo. ▪ **Flexibilidade e adaptação:** Permitir espaço para ajustes e mudanças conforme necessário para atender às demandas e desafios emergentes.
	Nuvem de ideias: ▪ Respeitar (a diversidade de ideias, experiências e perspetivas para enriquecer o processo colaborativo) ▪ Partilhar (ideias, opiniões e preocupações sem medo de críticas negativas) ▪ Apoiar e Desafiar ▪ Feedback construtivo ▪ Flexibilidade e adaptação

Antecipar as contribuições dos professores

Figura 1. Excerto do Plano da sessão 1

Tal como o professor que antecipa as estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de uma tarefa, a facilitadora elaborou questões a colocar aos professores sobre a seleção das tarefas, a estrutura da aula, as representações, os processos de raciocínio dos alunos e a discussão coletiva. De facto, ao longo das sessões a facilitadora foi constantemente colocando questões, com diferentes propósitos. A figura 2 apresenta um excerto do plano da sessão 5 no qual a facilitadora questionou os professores sobre o ensino exploratório.

Data – 21-02-2024

SESSÃO 5

Objetivo:

Estudo sobre dinâmica da aula.

Descrição:

Tempo (min)	Descrição
20 minutos	• Boas-vindas aos participantes e explicação do objetivo da sessão. • Contextualização do ensino exploratório e a sua importância para a aprendizagem dos alunos. Análise do artigo: Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17. Caso os professores não procedam à leitura do artigo solicitar a sua leitura. Questão a colocar aos professores: Já alguma vez aplicaram o ensino exploratório em sala de aula? Em caso afirmativo, como correu a experiência? Qual das fases tiveram mais dificuldade? Porquê?

Figura 2. Excerto do plano da sessão 5

Foi ainda importante para a facilitadora definir os diferentes contributos a prestar aos professores (enquadramentos teóricos, elementos de conhecimento disciplinar, aspetos didáticos, etc.), o momento oportuno de trazer esses recursos e a forma como estes seriam apresentados. Por exemplo, na sessão 3 o objetivo da sessão era o estudo das tarefas. Assim, era oportuno perguntar aos professores se eles sabiam o que é uma tarefa. Esta sessão foi tão marcante que a Ema o referiu no seu relatório final:

> Na terceira sessão falámos sobre as diferenças entre atividade e tarefa, entre tarefas abertas e fechadas, de curta duração ou longa duração. Foi interessante analisar e discutir estes conceitos pois no dia a dia acabamos por não nos lembrarmos destas diferenças e é bom ter sempre estes conceitos vivos pois são fundamentais para melhorar a qualidade das aprendizagens dos nossos alunos. (Relatório Final, Ema)

Condução das sessões de estudo de aula

Na etapa definição do problema a facilitadora orientou o grupo de professores a escolher um problema que fosse significativo para o contexto de aprendizagem dos alunos e relevante para o desenvolvimento profissional dos próprios professores. Foi analisado as Aprendizagens Essenciais de Matemática do 8.º ano e decidido trabalhar as expressões algébricas e equações.

Na etapa estudo curricular e planificação o grupo estudou e analisou as orientações curriculares e material sobre o tópico selecionado e planeou a aula de investigação. A sessão 2 teve como objetivo o estudo sobre o tópico. Nesta sessão foi estabelecido um propósito claro e significativo para o estudo de aula através da identificação de um tema de pesquisa, do desenvolvimento e cumprimento de normas de colaboração em equipa e da manutenção de um foco de investigação na aprendizagem dos alunos durante todo o processo. O grupo começou por refletir sobre as suas experiências passadas de desenvolvimento profissional. A facilitadora perguntou aos participantes sobre as experiências mais interessantes que tiveram, como workshops, cursos, conferências ou colaborações com outros profissionais, e como essas oportunidades influenciaram a sua prática. A facilitadora foi sempre tentando manter a discussão focada ancorando-se nas ideias dos participantes. Foi analisado o enquadramento curricular do tópico escolhido, assim como os subtópicos a abordar na aula de investigação e foi analisado um artigo que apresentava as dificuldades dos alunos na compreensão de expressões algébricas e equações do 1.º grau.

A sessão 3 teve como objetivo o estudo sobre a tarefa. A facilitadora selecionou uma tarefa (Figura 3) onde os alunos poderiam utilizar diversas estratégias, e encorajou os professores a resolvê-la pensando como os alunos.

Tarefa — "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

1. Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
2. Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
3. O Lucas recebeu menos dois votos que a Francisca;
4. A Sandra recebeu o dobro dos votos que recebeu o Lucas.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Fonte: http://p3m.ie.ul.pt/caso-3-eleicao-para-o-delegado-de-turma-3-ciclo3

Figura 3. Tarefa – "Eleição para o delegado de turma"

Em seguida, colocou aos professores algumas questões, nomeadamente, em que nível de escolaridade poderia ser aplicada a tarefa. Os professores responderam:

> Ema: Não é imediato. 7.º ou 8.º. Dependendo da estratégia que se siga. A estratégia que eu seguia era só o 8.º ano que chegava lá [Resolveu por uma equação com parênteses].
>
> Ana: Eu estou a fazer com equações [Sistemas de equações].
>
> Ema: Mas é possível fazê-la no 7.º se eles seguirem outra estratégia.
>
> Maria: Eles [alunos] podem ir por tentativa e erro.

Os professores anteciparam estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa e refletiram nas opções metodológicas que tomariam para o desenvolvimento de uma aula em torno desta tarefa. Nesta sessão a facilitadora apresentou o testemunho de uma professora relativamente à fase da introdução da tarefa (compreensão da tarefa, organização do trabalho e disponibilização de materiais) e da realização da tarefa (apoio ao trabalho do aluno, antecipação das estratégias, antecipação das dificuldades e representações). Foram visualizados em vídeo dois episódios que ilustravam como a professora apoiou os seus alunos na resolução da tarefa e foram analisados excertos das resoluções dos alunos. A visualização dos vídeos ofereceu uma oportunidade de observar, refletir e discutir práticas dos professores. Foi ainda analisado o plano de aula da professora. Maria ficou surpreendida com o facto de os alunos terem apenas 10 minutos para fazerem a tarefa e 30 minutos para a discussão coletiva.

A sessão 4 teve como objetivo elaborar/selecionar a tarefa (Figura 4) a aplicar na aula de investigação e justificar a sua escolha.

TAREFA FINAL

PARQUE AQUÁTICO SPIRALSPLASH

PARTE I

1. No parque aquático SpiralSplash existem várias áreas de diversão para todas as idades.
Na área de divertimentos para maiores de 12 anos, há **três tipos de pistas: as pistas rápidas, as pistas normais e as aquatube, em forma de tubo.**

Sabe-se que:
- o número de pistas rápidas é um terço do número de pistas normais;
- o número de pistas aquatube é metade do número de pistas rápidas;
- o número total de pistas é 18.

Seja x o número de pistas rápidas.

1.1. Escreve uma expressão matemática que represente:
a) O número de pistas normais em função das pistas rápidas
b) O número de pistas aquatube em função das pistas rápidas
c) O número total de pistas

1.2. Traduz a situação apresentada por uma equação.
1.3. Verifica que 4 é solução da equação da questão 1.2.
1.4. Indica o número de pistas rápidas, normais e aquatube que existe no SpiralSplash.

Questão 1 - Adaptado do Espiral 8, Porto Editora

PARTE II

2. O grupo comprou 1 bilhete Normal; 3 bilhetes Infantil; 3 bilhetes Júnior e 1 bilhete Sénior.

Sabe-se que:
- O bilhete Infantil é grátis;
- O bilhete Júnior custa menos 2€ que o bilhete Normal;
- O preço do bilhete Sénior é metade do preço do bilhete Normal.

A despesa total é 57€.
Qual o preço de cada bilhete Normal, Júnior e Sénior?

3. Na gelataria do parque aquático SpiralSplash são vendidos gelados em três tipos de copos: pequeno, médio e grande. O preço de cada gelado de tamanho médio é 2,50€ e o preço de cada gelado de tamanho pequeno é $\frac{1}{3}$ do preço de cada gelado de tamanho grande.
Num grupo de oito amigos cada um comprou um gelado.
Sabe-se que:
- quatro amigos compraram gelados de tamanho pequeno;
- dois amigos compraram gelados de tamanho médio;
- dois amigos compraram gelados de tamanho grande;
- a despesa total foi de 22€.

Qual é o preço, em euros, de cada gelado vendido em copo pequeno e de cada gelado vendido em copo grande?

Questão 2 - Adaptado do Espiral 8, Porto Editora e Questão 3 - Adaptado dos materiais fornecidos pelo Prisma 8, Asa Editora

Figura 4. Tarefa "Parque aquático SpiralSplash"

O grupo selecionou e resolveu a tarefa para a aula de investigação e discutiu possíveis alterações. Além disso, antecipou as dificuldades e estratégias dos alunos na resolução da tarefa e a forma como o professor planeia apoiar os alunos. A facilitadora apoiou o grupo a selecionar a tarefa e incentivou os professores a anteciparem as possíveis dificuldades e as estratégias dos alunos, permitindo ao grupo colocar-se no lugar do aluno. No planeamento das formas de apoio do professor durante a aula, a facilitadora ajudou o grupo a definir estratégias de mediação adequadas, promovendo uma abordagem centrada no aluno. Em vez de dar respostas prontas, a facilitadora encorajou os professores a pensarem em questões que guiassem os alunos na descoberta e resolução dos problemas de forma autónoma, desenvolvendo o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas.

Nas sessões 6 e 7 o grupo procedeu ao planeamento da aula de investigação, os professores selecionaram a tarefa a propor aos alunos e planearam a aula (Figura 5). A facilitadora foi sempre questionando, apoiando e desafiando os professores sobre as escolhas que realizavam.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de aprendizagem	Duração esperada	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
1. Introdução (em coletivo)	5 minutos	• Entrada e acomodação dos alunos na sala de aula. • Será distribuída a Parte I da ficha de trabalho com a tarefa a realizar em discussão com a turma. • Leitura em silêncio do enunciado da tarefa. • Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado da tarefa, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido. • Os alunos podem recorrer às estratégias de resolução do problema que acharem mais pertinentes. • Os alunos têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como a estratégia que usarem, não esquecendo a resposta ao problema. • Cada par/grupo de alunos tem de estar preparado para apresentar a sua resolução à turma.	• Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula: – Os alunos vão realizar a tarefa "Parque Spiralsplash". – A tarefa vai ser realizada em par/grupo – A aula está dividida em dois momentos. **1.º momento:** Trabalho de pares/grupos. Duração: 30 min. Apresentação da tarefa: 5 min. Trabalho autónomo dos alunos: 10 min. Discussão coletiva: 15 min. **2.º momento:** Trabalho de pares/grupos. Duração: 55 min. Apresentação da tarefa: 5 minutos. Trabalho autónomo dos alunos: 20 minutos. Discussão coletiva: 20 minutos. Síntese final: 10 minutos – Todos os alunos resolvem a tarefa no enunciado e no final a professora irá recolher um deles aleatoriamente. • Ler o enunciado da questão 1.	• Perceber o que é dado e o que é pedido na questão 1.
2. Resolução da questão 1.1. (trabalho autónomo)	10 minutos	a) $3x$ b) $\frac{x}{2}$ c) $x + 3x + \frac{x}{2}$ **Dificuldades:** 1.1.a) Os alunos podem ter dificuldade em compreender e reconhecer a relação entre o número de pistas rápidas e o número de pistas normais. Os alunos podem ter dificuldade em traduzir para linguagem matemática que o número de pistas rápidas é um terço do número de pistas normais. Os alunos podem responder $\frac{x}{3}$ em vez de $3x$. 1.1.b) Os alunos podem ter dificuldade em compreender e reconhecer a relação entre o	• Se os alunos apresentarem dificuldade em interpretar a questão 1.1.a) então colocar as seguintes questões: – Que dados conseguimos extrair do enunciado? – O que representa a incógnita? – O que significa o número de pistas rápidas ser um terço do número de pistas normais? – Que relação existe entre o número de pistas rápidas e o número de pistas normais? $R = \frac{1}{3}N$ ou $N = 3R = 3x$ • Se os alunos continuarem com dificuldade em interpretar a questão 1.1.a) então concretizar	• 1.1.a) Compreender e reconhecer a relação entre o número de pistas rápidas e o número de pistas normais. • 1.1.b) Compreender e reconhecer a relação entre o número de pistas aquatube e o número de pistas rápidas. • 1.1.c) Compreender e reconhecer que o número total de pistas é igual à soma das pistas rápidas, normais e aquatube.

Figura 5. Excerto da Planificação da aula de investigação

Esta etapa do estudo de aula foi muito importante para os professores, tanto que Ana o refere no seu relatório final:

> … elaborámos o plano de aula para a tarefa a aplicar. Tentámos prever todas as resoluções que os alunos poderiam apresentar assim como as respetivas dificuldades sentidas e como orientar os alunos a ultrapassá-las. Foi um trabalho demorado, mas produtivo e que me deu a segurança e inspiração necessárias para aplicar a tarefa na minha turma (Relatório final, Ana).

Na etapa observação, todos os participantes observaram o desenvolvimento das atividades de cada aula de investigação, o que proporcionou uma rica oportunidade para a reflexão individual e coletiva sobre cada aula observada. Na sua entrevista final, Maria destacou a importância de observar aulas de outros colegas. Ela enfatizou como essa prática proporciona uma oportunidade valiosa para refletir sobre a prática.

> Maria: Eu partilho todo o material com outra colega, mas ela dá a maneira dela, eu nunca tinha visto outro colega a explicar a matéria.
>
> Facilitadora: O mesmo conteúdo.

> Maria: O mesmo conteúdo. Foi muito importante para mim perceber que, olha, de facto, a Ema achei brilhante, achei muito gira a maneira dela trabalhar, percebes?

Na etapa reflexão das aulas de investigação foi partilhado os dados que foram recolhidos pelos observadores nas aulas de investigação, foi analisado excertos dos áudios e vídeo da aula de investigação e foi refletido sobre a concretização da planificação, a aprendizagem dos alunos, as tarefas selecionadas, as estratégias implementadas. No seu relatório final Maria referiu o impacto do estudo de aula na sua prática docente, nomeadamente no que diz respeito à condução da comunicação:

> Relativamente à condução da comunicação, ainda tenho muito a aprender. Nas minhas aulas, tento criar um ambiente de aprendizagem onde todos os alunos estejam envolvidos e se sintam à vontade para colocar as suas dúvidas. Contudo, percebi que não lhes dou o tempo suficiente para poderem errar. Quando vejo um erro, dou-lhe logo feedback, e os alunos alteram o que estão a fazer, provavelmente sem perceberem o porquê. Assistir às aulas dos colegas ajudou-me a perceber que devo criar ambientes de aprendizagem onde errar seja encarado como algo natural durante o processo de aprendizagem (Relatório final, Maria)

Desafios enfrentados pela facilitadora

Durante a preparação e o planeamento das sessões de estudo de aula, a facilitadora enfrentou vários desafios. O primeiro foi encontrar e selecionar recursos adequados em português, como artigos, tarefas, vídeos com excertos de aulas e excertos de resoluções de alunos para analisar e refletir com os professores. A facilitadora refere no seu diário de bordo que:

> Embora existam muitos recursos disponíveis para estudos de aula, o maior desafio na preparação das sessões foi a falta de materiais específicos para apoiar o trabalho dos facilitadores. Senti a necessidade de atividades que auxiliassem na facilitação de cada etapa do processo, além de recursos e questões adicionais que pudessem enriquecer a discussão.
>
> A tarefa de encontrar e selecionar recursos adequados em português tem sido realmente desafiante. Grande parte dos materiais pedagógicos de alta qualidade está disponível em outras línguas, como o inglês, exigindo muito tempo e esforço para identificar recursos acessíveis e relevantes em português, especialmente no caso de excertos de resoluções de alunos e de vídeos curtos de aulas reais que possam ser úteis e acessíveis.
>
> Além disso, é difícil encontrar recursos que incentivem a análise e a reflexão crítica entre os professores, particularmente materiais que reflitam o contexto e a experiência dos professores participantes e que fomentem debates significativos sobre a prática pedagógica (Diário de Bordo 2023-2024)

O reconhecimento do facilitador como mais um membro do grupo foi desafiante. Como o estudo de aula foi organizado como formação, os professores esperavam que o facilitador lhes transmitisse conhecimento. Para desfazer essa perceção, foi necessário esclarecer o papel do facilitador e como se encaixa dentro do papel como membro do grupo. Além disso, foi enfatizada a importância do trabalho em equipa e da colaboração entre os professores, destacando que cada membro do grupo pode trazer capacidades e conhecimentos únicos para enriquecer o processo de aprendizagem. Foi ainda necessário participar ativamente das discussões e atividades do grupo, mostrando interesse em trabalhar colaborativamente; partilhar experiências pessoais e incentivar os professores a contribuir com as suas próprias ideias e perspetivas.

Outro aspeto desafiante foi encontrar forma de discutir fragilidades na prática dos participantes, tendo sido necessário encontrar abordagens que promovessem diálogos significativos e envolventes sem comprometer a confiança estabelecida. A facilitadora refere no seu diário de bordo que:

> As três primeiras sessões foram importantes pois permitiram criar um ambiente seguro e de respeito mútuo, onde todos os participantes se sentiram apoiados e compreendidos. Tive de adotar uma postura empática e imparcial, incentivando cada professor a ver as suas fragilidades como oportunidades de desenvolvimento, ao invés de falhas.
>
> Além disso, para promover um diálogo significativo, coloquei perguntas abertas para potenciar a reflexão, em vez de críticas diretas. As visualizações de vídeos com excertos de aulas reais permitiram que os participantes explorassem a sua prática de forma crítica, mas com suporte, e incentivaram o grupo a partilhar estratégias para lidar com desafios comuns (Diário de Bordo 2023-2024).

A condução das discussões e apresentação de conhecimentos matemáticos ou didáticos aos professores participantes na formação também se revelaram desafiante. Neste aspeto a preparação cuidadosa das sessões de estudo de aula aproveitando as experiências dos professores e selecionando recursos apropriados para trabalhar permitiu antecipar as suas contribuições e tornar as discussões mais produtivas.

Conclusão

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores de natureza colaborativa e reflexiva, próximo de uma investigação sobre a prática e cujo foco é a aprendizagem dos alunos.

Os professores, ao participarem num estudo de aula, trabalham colaborativamente na seleção de tarefas, na planificação da aula de investigação e é criada uma oportunidade para refletir sobre a sua prática. Essa colaboração permitiu a troca de ideias, partilha de experiências e aprendizagem mútua, contribuindo para o seu desenvolvimento profissional e para a construção de uma comunidade de aprendizagem profissional.

O papel do facilitador é estabelecer um ambiente seguro e motivador para que os participantes possam partilhar ideias, debater e aprender juntos. O facilitador tem de apresentar capacidades de gestão e organização para garantir que o processo seja bem estruturado e conduzido de forma eficiente (Clivaz & Clerc-Georgy, 2020; Dotger, 2015). As suas funções incluem o planeamento e preparação das sessões, orientação, propostas para a organização do trabalho coletivo e individual, facilitação de discussões, bem como o fornecimento de suporte e desafio para que os participantes assumam riscos na sua prática letiva.

A preparação e o planeamento das sessões foram fundamentais para o envolvimento e aprendizagem dos professores (Mynott & Zimmatore, 2022). A seleção criteriosa de recursos permitiu uma reflexão sobre as tarefas e a dinâmica da aula, tendo sempre como foco a aprendizagem dos alunos. Foi ainda essencial antecipar as contribuições dos professores e elaborar questões que potenciassem a discussão e reflexão. Outro aspeto importante foi definir os diferentes contributos a prestar aos professores, o momento oportuno de trazer esses recursos e a forma como estes seriam apresentados.

Durante a condução do estudo de aula o facilitador atuou como um mediador, facilitando a interação entre os participantes, fornecendo suporte e orientação durante o processo de aprendizagem e encorajando novas formas de pensar sobre o ensino-aprendizagem (Hauge, 2022).

Ao refletir sobre o papel do facilitador verifico que é fundamental o facilitador encontrar um equilíbrio entre a necessidade de fornecer apoio e a necessidade de impulsionar o processo, garantindo ao mesmo tempo que o estudo seja gerido e da propriedade dos professores (Hauge, 2022). Outro aspeto importante é a necessidade de uma direção clara no estudo de aula. Qualquer ambiguidade no foco pode tornar a facilitação muito difícil, visto que o foco ajuda a apoiar a aprendizagem dentro do estudo de aula e os potenciais resultados (Dotger, 2015; Mynott & Zimmatore, 2022).

Referências

Amador, J., & Carter, I. (2016). Audible conversational affordances and constraints of verbalizing professional noticing during prospective teacher lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*, 5-34. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9347-x

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* Springer.

Clivaz, S., & Clerc-Georgy, A. (2020). Facilitators' roles in lesson study: from leading the group to doing with the group. In A. Murata & C. K.-E. Lee (Eds.), *Stepping up lesson study: An educator's guide to deeper learning* (pp. 86-93). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003002536-9

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 165-184. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9225-0

De Vries, S., & Uffen, I. (2020). Facilitating a lesson study team to adopt an inquiry stance. In A. Murata, & C. K-E. Lee (Eds.), *Stepping up lesson study: An educator's guide to deeper learning* (pp. 94-106). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003002536-10

Dotger, S. (2015). Methodological understandings from elementary science lesson study facilitation and research, *Journal of Science Teacher Education, 26*(4), 349–369. https://doi.org/10.1007/s10972-015-9427-2

Dudley, P., Xu, H., Vermunt, J., & Lang, J. (2019), Empirical evidence of the impact of lesson study on students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution. *European Journal of Education, 54*(2), 202–217. https://doi.org/10.1111/ejed.12337

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). MacMillan.

Fernandez, C., Cannon, J., & Chokshi, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*(2), 171–185. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00102-6

Fujii, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.) *Task design in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_9

Grigioni Baur, S., & Hoznour, P. I. (2019). *Impact of learning-centered facilitation on teachers' professional development during a LS* [Conference presentation]. WALS Congress, Amsterdam, The Netherlands. http://hdl.handle.net/20.500.12162/3554

Gutierez, S. B. (2016). Building a classroom-based professional learning community through lesson study: Insights from elementary school science teachers. *Professional Development in Education*, *42* (5), 801–817. https://doi.org/10.1080/19415257.2015.1119709

Hauge, K. (2022). *The Researcher's Role: An Intervention Study Using Lesson Study in Norway*. IntechOpen. doi: 10.5772/intechopen.101100.

Jorgensen, D.L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies.* Sage.

Lewis, C., & Perry, R. (2017). Lesson study to scale up research-based knowledge: A randomized, controlled trial of fractions learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(3), 261-299. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.3.0261

Lewis, J. M. (2016). Learning to lead, leading to learn: How facilitators learn to lead lesson study. *ZDM Mathematics Education, 48*(4), 527–540. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0753-9

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sisyphus, Journal of Education*, *1*(3), 44-75.

Mynott, J. (2018, November 16-17). *Facilitating the lesson study facilitator: A reflection on expertise in lesson study* [Conference presentation]. IPDA Annual Conference, Birmingham, United Kingdom.

Morago, S., & Grigioni Baur, S. (2020). Learner-centered facilitation in lesson study groups. In A. Murata & C. Lee (Eds.), Stepping up lesson study: An educator's guide to deeper learning (pp. 106-115). Routledge.

Murata, A., Bofferding, L., Pothen, B., Taylor, M., & Wischnia, S. (2012). Making connections among student learning, content, and teaching: Teacher talk paths in elementary mathematics lesson study. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 616–650. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0616

Patton, M.Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Sage.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema, 30, 868-891*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico.* Universidade Aberta.

Takahashi, A., & McDougal, T. (2018). Collaborative lesson research (CLR). In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, N. Shuilleabhain & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 143-152). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_8

Posters

PERCEÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE A ABORDAGEM STE(A)M
TEACHERS' PERCEPTION OF THE STE(A)M APPROACH

Patrícia Teixeira
CIEB /Instituto Politécnico de Bragança, Portugal
patricia.teixeira@ipb.pt

Helena Rocha
CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal
hcr@fct.unl.pt

Cristina Martins
CIEB /Instituto Politécnico de Bragança, Portugal
mcesm@ipb.pt

Resumo: Este trabalho surge de um trabalho mais abrangente focado nas práticas letivas dos professores que ensinam matemática quando implementam uma abordagem STEAM. Esta comunicação tem por base uma revisão sistemática de literatura, focando-se apenas numa das categorias definidas – desafios da implementação da abordagem STE(A)M. Pretendemos responder à seguinte questão de investigação: Quais as perceções dos professores sobre as dificuldades encontradas nas suas práticas quando envolvidos numa abordagem STE(A)M? Os estudos foram selecionados nas bases de dados Scopus e Web of Science. Os resultados revelaram que as perceções dos professores sobre as dificuldades se centram na escassez de recursos e na falta de formação, nomeadamente o desenvolvimento profissional dos professores.

Palavras-chave: STE(A)M, professores, práticas letivas.

Abstract: This work stems from a broader study focused on the teaching practices of teachers who teach mathematics when implementing a STEAM approach. This paper is based on a systematic literature review, focusing only on one of the categories defined - challenges of implementing the STE(A)M approach. We aim to answer the following research question: What are teachers' perceptions of the difficulties encountered in their practice when involved in a STE(A)M approach? The studies analyzed were selected from the Scopus and Web of Science databases. The results revealed that teachers' perceptions of the difficulties are centered on a lack of resources and a lack of training, particularly in teacher professional development.

Keywords: STE(A)M, teachers, teaching practices.

Introdução

A abordagem STE(A)M pode ser uma estratégia adequada para que os professores que ensinam matemática atendam aos princípios orientadores das novas Aprendizagens Essenciais no Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), promovendo uma matemática para todos, alinhada às exigências do século XXI e entendida como uma disciplina única, mas não isolada das restantes. Nesse contexto, a abordagem STE(A)M favorece práticas pedagógicas inovadoras ao integrar a matemática com outras áreas do saber, valorizando a interdisciplinaridade em vez da multidisciplinaridade. Contudo, a conceptualização da abordagem STE(A)M ainda não é consensual, especialmente no que diz respeito às diferentes perspetivas de integração disciplinar (Teixeira et al., 2022). A adoção desta abordagem implica uma mudança de paradigma na prática docente, que pode apresentar desafios específicos aos professores. Assim, pretendemos responder à seguinte questão de investigação: Quais as perceções dos professores sobre as dificuldades encontradas nas suas práticas quando envolvidos numa abordagem STE(A)M?

Metodologia de investigação

No âmbito do trabalho mais amplo, em desenvolvimento, centrado nas práticas letivas dos professores de 1.º e 2.º ciclos do ensino básico através de uma abordagem STE(A)M, foi realizada uma Revisão Sistemática da Literatura, com pesquisa nas bases de dados Scopus e Web of Science.

Para a seleção dos artigos foram utilizadas as palavras-chave: "teacher", "STEAM" e "teaching practices", resultando em 752 artigos. Foram removidos 6 duplicados e 368 por não serem de acesso aberto. Dos 378 restantes, 90 foram excluídos por não se incluírem nas Ciências Sociais. Mantivemos 282, publicados nos últimos 10 anos, e excluímos os artigos que não continham "STEAM" ou "STEM" no título, no resumo ou nas palavras-chave, resultando em 130 artigos. Após eliminar revisões de literatura e estudos focados em alunos, 124 artigos foram selecionados para leitura, tendo posteriormente sido selecionados 16 artigos para integrar a parte do estudo que aqui se apresenta.

Perceção dos professores sobre a implementação STE(A)M

A implementação da abordagem STE(A)M representa uma mudança significativa na prática pedagógica, mas envolve desafios consideráveis (Akkoyun & Topalsan, 2022; Lupión-Cobos et al., 2023).

Destaca-se o papel da matemática na abordagem STE(A)M, marcada por resistência quanto à sua integração. Alkhateeb (2018) aponta que muitos professores de Matemática têm dificuldades na integração com outras áreas. Mafugu et al. (2022) discutem a visão dos professores em formação, que embora reconheçam a importância de STE(A)M, veem a matemática como uma área isolada e difícil de integrar, e que quando integrada, se limita à resolução de problemas. Já os professores que participam em formações sentem-se mais preparados para a sua integração de maneira significativa (O´Dwyer et al., 2023).

Akkoyun e Topalsan (2022) e O´Dwyer et al. (2023) indicam que a ansiedade dos docentes pode ser causada por lacunas no conhecimento e na compreensão conceptual. Romero-Ariza et al. (2021) destacam que uma formação insuficiente afeta negativamente os professores. Quigley e Herro (2016) sublinham que STE(A)M implica alterações significativas nas práticas, enquanto Jho et al. (2016) e Boice et al. (2021) ressaltam a necessidade de capacitação específica para desenvolver as competências necessárias para implementar uma abordagem interdisciplinar.

Relativamente à interdisciplinaridade e à adaptação curricular, Boice et al. (2021) e Quigley et al. (2020) revelam a falta de tempo dos professores para planificar e colaborar com colegas. A falta de recursos e apoio institucional é também, um obstáculo significativo. Amran et al. (2021) e Lupión-Cobos et al. (2023) apontam que a falta de materiais limita a implementação de STE(A)M, e Dokumaci et al. (2023) enfatizam a necessidade de apoio institucional e de disponibilidade de recursos.

Conclusão

Da análise realizada às perceções dos professores centrada nas dificuldades da implementação da abordagem STE(A)M, percebe-se que as perceções dos professores refletem um conjunto de desafios, desde a preparação insuficiente e a escassez de recursos até aos obstáculos inerentes à interdisciplinaridade. As dificuldades em trabalhar com currículos interdisciplinares e promover a colaboração entre disciplinas são uma realidade. Além disso, a resistência dos alunos e dos próprios professores à mudança pode dificultar o processo. Desafios, como o stress e a ansiedade dos professores inexperientes, sublinham a importância de investir mais na formação e no apoio aos docentes. Estes desafios demonstram a necessidade de maior suporte institucional e adaptação curricular para garantir a implementação da abordagem STE(A)M.

Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto UIDB/05777/2020 e através da bolsa de doutoramento concedida à primeira autora deste trabalho (2024.06181.BD).

Referências

Akkoyun, N., & Topalsan, K. (2022). İlkokulda fen bilimleri öğretimi ve stem uygulamalari: Sinif öğretmenlerinin genel kaygi durumlari. *Milli eğitim dergisi, 51*(235), 2031-2060. https://doi.org/10.37669/milliegitim.926093

Alkhateeb, M. A. (2018). The degree practices for mathematics teachers STEM education. *Kıbrıslı Eğitim Bilimleri Dergisi, 13*(3), 360-371. https://doi.org/10.18844/cjes.v13i3.3010

Amran, M. S., Bakar, K. A., Surat, S., Mahmud, S. N. D., & Shafie, A. A. B. M. (2021). Assessing preschool teachers' challenges and needs for creativity in STEM education. *Asian Journal of University Education, 17*(3), 99-108. https://doi.org/10.24191/ajue.v17i3.14517

Boice, K. L., Jackson, J. R., Alemdar, M., Rao, A. E., Grossman, S., & Usselman, M. (2021). Supporting teachers on their STEAM journey: A collaborative STEAM teacher training program. *Education Sciences, 11*(3), 105. https://doi.org/10.3390/educsci11030105

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., L, Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. http://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de.matematica

Dokumaci, N., Bilgic, B., & Toprak, Y. (2023). STEM temel seviye eğitiminin öğretmenlerin STEM uygulamaları öz-yeterliklerine etkisi. *Journal of National Education, 52*(239). https://doi.org/10.37669/milliegitim.1134278

Jho, H., Hong, O., & Song, J. (2016). An analysis of STEM/STEAM teacher education in Korea with a case study of two schools from a community of practice perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(7), 1843-1862. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1538a

Lupión-Cobos, T., Crespo-Gómez, J. I., & García-Ruiz, C. (2023). Challenges and opportunities to teaching inquiry approaches by STE(A)M projects in the primary education classroom. *Journal of Baltic Science Education, 22(*3), 454-469. https://doi.org/10.33225/jbse/23.22.454

Mafugu, T., Tsakeni, M., & Jita, L.C. (2022). Preservice primary teachers' perceptions of STEM-based teaching in natural sciences and technology classrooms. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(4), 898-914. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00252-z

O´Dwyer, A., Hourigan, M., Leavy, A. M., & Corry, E. (2023). 'I have seen STEM in action and it's quite do-able!' The impact of an extended professional development model on teacher efficacy in Primary STEM Education. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(1), 131-157. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10361-2

Quigley, C. F., & Herro, D. (2016). “Finding the joy in the unknown”: Implementation of STEAM teaching practices in middle school science and math classrooms. *Journal of Science education and technology, 25*, 410-426. https://doi.org/10.1007/s10956-016-9602-z

Quigley, C. F., Herro, D., King, E., & Plank, H. (2020). STEAM designed and enacted: Understanding the process of design and implementation of STEAM curriculum in an elementary school. *Journal of Science Education and Technology, 29*, 499-518. https://doi.org/10.1007/s10956-020-09832-w

Romero-Ariza, M., Quesada, A., Abril, A.-M., & Cobo, C. (2021). Changing teachers’ self-efficacy, beliefs and practices through STEAM teacher professional development. *Journal for the Study of Education and Development*, *44*(4), 942-969. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1926164

Teixeira, P. B., Martins, C., & Rocha, H. (2022). STE(A)M approach: Distinguishing and discussing meanings. In *EDULEARN22 Proceedings* (pp. 9842–9847). IATED. https://doi.org/10.21125/edulearn.2022.2374

AS TIC NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UM OLHAR SOBRE AS SUAS VANTAGENS E DESAFIOS

ICT IN MATHEMATICS EDUCATION: A LOOK AT ITS ADVANTAGES AND CHALLENGES

Virgílio César Armando Chivinda

Universidade de Aveiro, Portugal

chivindavirgilio@ua.pt

Vanda Santos

Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro, Portugal

vandasantos@ua.pt

Resumo: O Século XXI é denotado pelo grande avanço das indústrias tecnológicas que chegam a quase todas as esferas da nossa sociedade. O impacto destas tecnologias é tão notável que a educação optou por inseri-las no seu ambiente. Por esta razão o objetivo deste poster é mostrar alguns benefícios e desafios do uso das TIC no ensino da Matemática. O estudo é feito a partir da revisão artigos publicados sobre a incorporação das TIC no sistema educativo, e como caso particular no ensino da Matemática. Após a realização do estudo concluiu-se que a incorporação das TIC no ensino da Matemática traz consigo numerosas benefícios, porém, essa incorporação também traz uma série de desafios, sendo um dos principais, a formação de professores de Matemática no uso das TIC para um melhor aproveitamento destas tecnologias.

Palavras-chave: ensino da matemática, tecnologia de informação e comunicação, processo de ensino e aprendizagem.

Abstract: The 21st century is marked by the significant advancement of technological industries, which have reached almost all spheres of our society. The impact of these technologies is so remarkable that education cannot be excluded from it. For this reason, the aim of this poster is to highlight some advantages and challenges of using ICT in mathematics education. The study is based on a review of published articles regarding the incorporation of ICT in the educational system, with a particular focus on mathematics education. The study concluded that the integration of ICT into mathematics education offers numerous advantages; however, it also presents several challenges, with one of the main ones being the training of mathematics teachers in the use of ICT to better leverage these technologies.

Keywords: teaching of mathematics, information and communication technology, teaching and learning process.

Introdução

Um dos grandes avanços que tem sofrido a nossa sociedade vem sendo justamente o avanço tecnológico (Faustino et al., 2019). O crescimento das indústrias tecnológicas traz consigo novas exigências no que tange a adaptação dos produtos derivados delas em diferentes esferas da vida. Sendo assim, o sistema educativo sentiu a necessidade de optar pela inserção dessas tecnologias no seu ambiente (Chivinda, 2020; Herrero, 2014).

Portanto, de acordo com as ideias de Schön, que em 1987 destacou a importância de os professores renovarem os seus métodos de ensino a partir dos resultados que obtêm nas suas práticas diárias, os intermediários do processo de ensino e aprendizagem da Matemática passaram a usar as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para facilitar o ensino dos conteúdos matemáticos, o que resulta em uma melhor aprendizagem (Morales et al., 2021; Rebello & Bernadino, 2023).

Procura-se resposta à questão quais as vantagens e desafios do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino da Matemática? Para isso, se estabelece como objetivo compreender os benefícios e os obstáculos associados à integração das TIC no ensino da Matemática.

A natureza do estudo é qualitativa, com paradigma interpretativo (Coutinho, 2011). O presente estudo está na sua fase inicial em que o campo de pesquisa é em Angola e será apresentada a fundamentação teórica.

As TIC no ensino da Matemática

A matemática é uma das áreas do saber que mais tardou para incorporar as tecnologias nos seus afazeres, e, desta forma dar um passo significativo em fazer uso das tecnologias de informação e comunicação para melhorar o processo de ensino e aprendizagem dos seus conteúdos (Vega et al., 2015). Existe uma certa resistência por parte dos professores de Matemática em abandonar o método de ensino tradicional para optar por um processo mais atualizado em que as TIC exigem visibilidade (Grisales, 2018).

A incorporação das TIC no ensino da Matemática, assim como nas demais disciplinas, permite uma dissociação do ensino tradicional em que o professor era o único detentor do conhecimento e os estudantes simplesmente tinham o professor como a fonte de transmissão do conhecimento (Barbante & Oliveira, 2023).

Nesta ordem de ideia, no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, Rabello e Bernardino (2023) argumentam que os estudantes sentem dificuldade na aprendizagem da Matemática, encarando a mesma como uma disciplina muito desafiadora. Segundo Cueva et al. (2021), as TIC podem servir de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, diminuindo as dificuldades existentes nos estudantes, motivando-os e incentivando-os a participar durante as aulas, despertando um maior interesse por elas.

Autores como Amir et al. (2020) e Araújo e Silva (2020) destacam que o uso das TIC nas aulas de Matemática contribui para a melhoria da aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Anjos et al. (2023) mencionam que, com o apoio das TIC, é possível criar ambientes colaborativos e interativos que tornam a aprendizagem da Matemática mais interessante e divertida.

Neste sentido, Da Silva et al. (2021) argumentam que com as TIC é possível aproximar o estudante aos entes matemáticos com os quais trabalha, assim significado e símbolo acaba se tornando mais palpáveis, servindo ao método de descoberta e constituindo-se em instrumentos com os quais o estudante avança com mais segurança na descoberta de novos artefactos. Pois, segundo Papert (1994, citado por Da Silva et al., 2021) as TIC derrubam barreiras que tradicionalmente o concreto do abstrato, o corpóreo do incorpóreo.

É importante destacar que a utilização das TIC por parte dos estudantes para as aulas de Matemática serve de ponta de lança para consolidar uma disciplina organizativa em base aos conteúdos existentes, o que sem dúvida contribui a um melhor desempenho académico. Além do mais, segundo Morales e Cuevas (2021), impulsa o trabalho colaborativo, e a través deste, melhora o seu rendimento escolar.

Por tanto, a utilização dos recursos tecnológicos para o ensino da Matemática constitui uma mais valia para a aprendizagem dos seus conteúdos, visto que, as TIC facilitam a construção do conhecimento, possibilitando aos estudantes a superação de conceções alternativas, aumentam a sua autonomia, proporcionam conjuntos de dados e apresentações, permitem evidenciar facilmente a teoria com a prática, melhoram as habilidades de resolução de problemas e exercícios (Chivinda, 2020; Méndez, 2014.).

Apesar de todas as vantagens que a incorporação das TIC no ensino da Matemática oferece, existe uma serie de desafios a ser ultrapassado para um melhor aproveitamento destas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Desafios na incorporação das TIC no ensino da Matemática

Com a incorporação das TIC nos sistemas educativos, se alcança uma autogestão do conhecimento por parte do estudante, isso, pelo facto de compreender que o conhecimento precisa ser construído, pois, o ser capaz de selecioná-la não o conduz a aprendizagem. A pessoa que deseja aprender deve se comprometer com ele e gerar um novo saber a partir da sua própria experiência na interação com as TIC (Araya, 2015).

Sendo assim, é importância que os professores de Matemática procurem constante aperfeiçoamento, podendo assim, adquirir mais habilidade na manipulação das ferramentas tecnológicas que estão a sua disposição, o que lhe permitirá reavaliar seus objetivos e seu desempenho junto dos seus estudantes (Cuevas et al., 2021).

A incorporação das TIC no processo de ensino e aprendizagem da Matemática proporciona o acesso a um leque de informações, interações, materiais, maior flexibilidade, dinamismo e motiva a cooperação entre os estudantes (Padilla & Conde, 2020). Durante o processo de inserção das TIC no ensino da Matemática, os professores enfrentam a indecisão das ferramentas mais adequadas para determinados conteúdos. É, portanto, necessário que estes decidam quais oferecem uma melhor experiência para a aprendizagem dos seus alunos (Wang, 2008).

A narrativa anterior, conduz o autor dessa investigação a apoiar-se nas palavras expressadas por Araya (2015) que ressalta que os desafios que implicam a inserção das TIC no contexto educativo de forma geral, residem em consciencializar os estudantes a um uso racional destas tecnologias, e a própria preparação tanto das instituições educativas como do próprio profissional da educação para fazer frente ao uso delas no seu ambiente.

Está claro, que a implementação das TIC como ferramentas de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática é uma questão indiscutível, isso devido as suas múltiplas funcionalidades e vantagens, mas, resulta importante fazer frente e ultrapassar os desafios propostos para a sua utilização de maneira racional e desta forma poder explorar essas ferramentas como deve ser.

Considerações finais

A incorporação das TIC no ensino da Matemática traz consigo inúmeras vantagens, pois, facilita o acesso aos recursos informativos. As plataformas interativas permitem o trabalho com processo mais variados, isto é, a própria dinâmica escolar é mediada pelas tecnologias. O estudante trabalha ao seu próprio ritmo e nos horários mais convenientes para si. Por sua vez, para os professores, as TIC possibilitam o enriquecimento dos estilos e dinâmica de trabalho (Garcia, 2018).

As TIC no ensino da Matemática trazem consigo muitos desafios, entre eles, Araújo (2017), ressalta que utilizar as tecnologias como ferramentas pedagógicas podem auxiliar o estudante no processo de construção do conhecimento. Porém, para isso a formação de professores e inclusão digital do profissional do ensino da Matemática é indispensável, porque o professor é o elemento central da mediação do saber.

Agradecimentos

O trabalho de Vanda Santos é financiado por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e no âmbito do contrato-quadro previsto nos números 4, 5 e 6 do artigo 23.º, do Decreto-Lei 57/2016, de 29 de agosto, alterado pela Lei 57/2017, de 19 de julho.

Referências

Amir, M. F., Fediyanto, N., Rudyanto, H. E., Nur Afifah, D. S., & Tortop, H. S. (2020). Elementary students' perceptions of 3Dmetric: A cross-sectional study. *Heliyon*, *6*(6), 1–8. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04052

Anjos, I. M., Moreira, J. A., & Tinti, D. (2023). Gamificação nas aulas de Matemática: Uma experiência com alunos da EJA da APAE de Itabirito/MG. *Revista Insignare Scientia*, *6*(1), 447-463. https://doi.org/10.36661/2595-4520.2023v6n1.13107

Araújo, S., Vieira, V., Klen, S., & Kresciglova, S. (2017). Tecnologia na educação: Contexto Hhistórico, papel e diversidade. *Revista Educativa*, *2*(5), 12-20.

Araújo, T. O. R., & Silva, M. D. F. (2020). Das motivações ao referencial teórico: Os caminhos para consolidar uma pesquisa sobre Educação de Jovens e Adultos e o uso das tecnologias digitais. *REMATEC*, *15*, 61–78. https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2020.n0.p61-78.id218

Araya, S. (2015). Experiencia de cambio metodológico en estudiantes chilenos basada en la autonomía y colaboración para la construcción de aprendizajes. *Educación Médica Superior*, *29*(2), 233-246. https://bit.ly/3Cd0I4D

Barbante, C. J. S., & Oliveira, L. R. (2023). Desafios da educação superior em Angola no contexto pós-pandemia da covid-19. *Revista de Estudios Africanos*, *4*, 1–22. https://doi.org/10.15366/reauam2023.4.001

Chivinda, V. C. A. (2020). *La autogestión del conocimiento y las Tecnologias de Información y comunicación en la Licenciatura en Educación Matemática en Angola* [Tesis presentada en opción al título académico de Master en Matemática educativa]. Universidad de Matanzas.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Almedina

Cuevas, F. F., Martínez, C. R., & González, F. A. (2021). El uso de las TIC en la enseñanza de los conceptos geométricos en la educación básica. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarollo Educativo*, *12*(23). https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1024

Da Silva, B., Rafael, W., Coragem, B., & Gea, M. (2021), Professores que formam professores e suas percepções frente ao uso das TIC nas aulas de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Superior (ries)*, *12* (35), 169-183. https://doi.org/10.22201/iisue.20072872e.2021.35.1088

Faustino, A., Wongo, E., & Arocha, O. (2019). Las tecnologías computacionales y su repercusión en el proceso de formación matemática en la República de Angola. *Revista Educación*, *43*(1), 245–270. https://doi.org/10.15517/revedu.v43i1.25502

García, C., & Sotelo, N. (2018). El autoaprendizaje en la licenciatura en Medicina. Breve revisión. *Revista Universidad y Sociedad, 35*(1), 39-44. https://bit.ly/3tq5ckr

Griseles, A. L. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemática: Retos y perspectivas. *Entramado, 4*(2), 198-214. https://orcid.org/0000-0002-4385-4474

Herrero, R. M. M. (2014). El papel de las TIC en el aula universitaria para la formación en competencias del alumnado Pixel-Bit. *Revista de Medios y Educación*, *2*(45), 173–188.

Méndez, C. D. (2014). Influencia de la inteligencia y la metodologia de enseñanza en la resolución de problemas de Física. *Perfiles Educativos, 36*(146), 30-44.

Morales, F. A., & Cueva, V. (2021). Uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el nível superior. *Revista Iberoamericana para la Investigación y del Desarrollo Educativo, 12*(23). https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1023

Padilla, I. A., & Acevedo, J. P. (2022). Conocimiento especializado del professor de matemática en la enseñanza de la modelacón de la elipse a través del recurso tecnológico. *Revista Lasallista de Investigación, 19*(1), 67-83. 10.22507/rli.v19n1a4

Rabello, M. G. D., & Bernardino, F. M. (2023). O ensino da matemática com apoio das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC): Cenário atual e perspectivas no âmbito do metaverso. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, *15*(9), 9572–9600. https://doi.org/10.55905/cuadv15n9-085

Schön, D. (1987). *La formacion de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseno de la ensenanza y aprendizaje en las profesiones*. Editora Paidós Ibérica.

Vega, J. C., Duarte, F., Cárdena, Y. P. (2025). Enseñanza de las matemáticas básicas en un entorno e-Learning: un estudio de caso de la Universidad Manuela Beltrán Virtual. *Revista Escuela de Administración de Negocios*, 79, 172–185. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-81602015000200011

Wang, Q. (2008). A generic model for guiding the integration of ICT into teaching and learning. *Innovations in Education and Teaching International*, *45*(4), 411–419. https://doi.org/10.1080/14703290802377307

USO ADECUADO DE LA CONTEXTUALIZACIÓN PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

APPROPRIATE USE OF CONTEXTUALIZATION TO DEVELOP COMPUTATIONAL THINKING IN MATHEMATICS FROM SPAIN'S PRIMARY EDUCATION

Gregorio Arjona Aranda
Universidad de Málaga, España
gregorio32@uma.es

Cristina Sánchez-Cruzado
Universidad de Málaga, España
cristinasanchez@uma.es

Mª Teresa Sánchez-Compaña
Universidad de Málaga, España
teresasanchez@uma.es

Resumen: La ley educativa española incluye en el currículum de matemáticas el sentido socioafectivo, con el que se pretende desarrollar, entre otras, la gestión de emociones y donde se promueve un trabajo en equipo respetuosamente. A su vez, se aprecia la inclusión del pensamiento computacional (PC) al sentido algebraico. Éste computacional implica la resolución de problemas y la comprensión del comportamiento de las personas a partir del uso de ideas básicas de la informática (Wing, 2006). Recientemente, algunos autores defienden que el PC debe estar relacionado con elementos de ciencias de la computación (Santaengracia et al., 2023), mientras que otros intentan aplicar los fundamentos del PC al mundo real y a nuestro alrededor (Angeli y Giannakos, 2020). En este trabajo se pretende establecer cómo una buena contextualización de actividades fomenta el desarrollo de la competencia socioafectiva y del PC, mostrando dos intervenciones realizadas bajo dos contextos distintos. Según Beltrán-Pellicer y Alsina (2022), la inclusión del sentido socioafectivo a la ley educativa española, en particular al currículum de matemáticas, se debería ver acompañada de una formación adecuada al futuro profesorado, por lo que ofrecemos una experiencia que pueda servir de inspiración.

Palabras clave: sentido socioafectivo, pensamiento computacional, contextualización, educación matemática.

Abstract: The Spanish education law includes in the mathematics curriculum the socio-affective competence, through which students can learn to manage their emotions and work in groups accordingly. It also adds computational thinking (CT) to the algebraic competence. It implies problem resolution, system design and an understanding of human behaviors through basic ideas from computation (Wing, 2006). As of recent, some authors defend that CT should be fully related to computer science (Santaengracia et al., 2023), whereas others try to apply fundaments of CT to more quotidian situations (Angeli & Giannakos, 2020). In this work we establish how a proper contextualization of activities promotes the development of socio-affective competence and computational thinking, showcasing two interventions made under two different contexts. According to Beltrán-Pellicer and Alsina (2022), the addition of the socio-affective domain in the Spanish education law, especially in the mathematics curriculum, should be accompanied by a proper formation to future teachers, so we present an experience in the hopes to inspire them.

Keywords: socio-affective competence, computational thinking, contextualization, mathematics education.

Planteamiento de la propuesta

Para llevar a cabo esta experiencia, se realizó una intervención en dos centros escolares públicos de Málaga en la que se fomentaba el desarrollo de destrezas propias del PC mediante actividades desconectadas, sin ordenador. Se utilizó un juego llamado *Turing Tumble,* juego de programación de manera desconectada que promueve el PC (Ayala-Altamirano et al., 2024). Se realizó la experiencia con 5 grupos clase, con un total de 125 estudiantes, de cuarto y quinto curso de Educación Primaria (entre 9 y 11 años). El juego está recomendado para estudiantes de esas edades, según Boswell y Boswell (2021), y en futuras investigaciones se pretende comparar los resultados obtenidos entre ambos ciclos. Se pretendía, además, mediante esta propuesta propiciar habilidades socioafectivas que motivaran al alumnado a aprender junto con sus compañeros y compañeras, promoviendo comportamientos respetuosos, creencias y actitudes adecuadas hacia las matemáticas. Se utilizaron contextos diferentes en los que el alumnado podía ver cómo las matemáticas surgen de un problema en una situación que necesita ser resuelta (García Martínez y Campillo Ferrer, 2023). Las sesiones de trabajo fueron grabadas para su posterior análisis cualitativo.

Desarrollo de la propuesta

En la primera intervención, donde participó uno de los colegios, con dos grupos clase y un total de 50 estudiantes, se usó como tema de fondo la posibilidad de formar parte de un equipo de astronautas, presentando al equipo de investigación como integrantes de la agencia espacial UMASA (siglas inspiradas en la NASA). En esta ocasión se planteaban tareas, en las que se el juego *Turing Tumble,* representaba un mando de control de la nave y el alumnado tenía que aprender a usarlo para poder tener la oportunidad de entrar en la agencia espacial UMASA. Algunas de las personas participantes se caracterizaron de astronautas para tener más inmersión en el aula, y despertar espíritus científicos.

La intervención en el segundo centro, que se trabajó con tres grupos clase acumulando un total de 75 estudiantes, se contextualizó en la II Guerra Mundial, focalizando en el trabajo de Alan Turing, quien da nombre del juego. Este juego simula una máquina de Turing (Pitt, 2023), la máquina que se utilizó para frenar ataques de las fuerzas nazis, descodificando mensajes cifrados. Además de hablar sobre Alan Turing y de la diversidad afectivo-sexual, se introdujo a su compañera Joan Clarke y se habló acerca del papel de la mujer científica en la historia, en concreto en la II Guerra Mundial. Se comentó una breve biografía de las personas matemáticas de manera paulatina, tanto antes como después de las actividades de pensamiento computacional; hablando en la primera sesión de Alan Turing y su papel en la II Guerra Mundial, en la segunda sesión de Joan Clarke y de su relación con Turing, en la tercera sesión de la homosexualidad de Alan Turing, y en la cuarta de sus últimos años y su trabajo en la computación.

El alumnado interpretó como capítulos de un cuento o de una serie. La autora Caro Samada (2016) indica que estas *historias de vida* permiten no solo transmitir valores como la empatía y el espíritu de superación, sino además propicia en el alumnado un aprendizaje más significativo. No son historias ficticias o impersonales, están asociadas a personas que existieron y contribuyeron a un evento histórico importante. Además, el equipo de trabajo que participó en la experiencia interpretó a los personajes de los que se hablaba en la historia, de modo que el alumnado pudiera ponerle cara y gestos para afianzar la contextualización. Este hecho permitió trabajar de forma interdisciplinariedad las matemáticas, la lengua, y conocimiento del medio.

Se está llevando a cabo un análisis cualitativo de los vídeos de las sesiones. El alumnado desarrolló habilidades de PC como organizar datos, crear, optimizar y depurar algoritmos. En cuanto al sentido socioafectivo, se observó interés y motivación en los contextos, aunque las actividades generaron comportamientos y percepciones más diversas. El análisis socioafectivo tiene en cuenta ítems marcados por la ley educativa española como la iniciativa, la autonomía, la gestión emocional, el trabajo en equipo y la comunicación, tanto a nivel individual como a nivel grupal.

Resultados

Usar contextos con dramatización, enlazados con historias reales, ya sean contemporáneas o atemporales, parece una excelente forma de introducir al alumnado en el desarrollo de distintas habilidades propias de las matemáticas, haciendo que olviden, en parte, el rechazo y los bloqueos que en muchas ocasiones ocurre cuando están trabajando matemáticas, debido a experiencias negativas previas.

Tras la experiencia, los primeros resultados adelantan que no es tan importante el tema que contextualiza, como es el conseguir la atención del grupo en una secuencia didáctica que esté correctamente hilada y relacionada con una historia completa. Resultó muy atractiva la creación de personajes con historias vitales diferentes, con problemáticas diferentes que iban apareciendo en el relato completo. El alumnado asistía a cada sesión con altas expectativas para conocer de primera mano cómo continuaba la historia y qué ocurría con los personajes, como si de una serie se tratara.

Consideraciones finales

El aumento de la motivación causó en el alumnado una mejor experiencia de trabajo, y asistía con ilusión a las sesiones, se mostraba participativo, activo y con interés. Con un primer análisis de estas intervenciones, que forman parte de un proyecto más amplio, se ha pretendido comprobar que, si hay emoción, si hay interés, entonces hay aprendizaje.

Evidentemente no ha sido todo positivo, una de las limitaciones es el número de personas que ha podido participar en las sesiones. En condiciones normales en un aula no es sencillo contar con varias personas para poder interpretar distintos roles. Sin embargo, sí sería posible contemplar la opción de un trabajo interdisciplinar con varios docentes, quienes se repartirían los personajes de la historia, o incluso hacer al alumnado partícipe asignándoles distintos roles.

Agradecimientos

Esta investigación está enmarcada en el proyecto JA.BI-34, código B1-2023_029, financiado por el Plan Propio de Investigación, Transferencia y Divulgación Científica de la Universidad de Málaga; dentro del grupo de investigación. HUM324: investigación en el carácter funcional, formativo e instrumental de la didáctica de la matemática.

Referencias

Angeli, C., & Giannakos, M. (2020). Computational thinking education: Issues and challenges. *Computers in Human Behavior*, *105*, 106185.

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N., & Sánchez-Cruso, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII*, (pp. 121-128). SEIEM.

Beltrán-Pellicer, P., & Alsina, Á. (2022). La competencia matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes, Revista de Educación de la Universidad de Málaga, 3*(2), 31-58. http://dx.doi.org10.24310/mgnmar.v3i2.14693

Boswell, P., & Boswell, A. (2021). *Turing tumble: Libro de problemas.* Upper Story.

Caro Samada, M. C. (2016). El uso de historias de vida para la formación del carácter de los maestros. En I. Carrillo i Flores (Coord.), *Democracia y Educación en la formación docente* (pp. 213-216). Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya.

García Martínez, J. J., & Campillo Ferrer, J. M. (2023). La contextualización matemática: Un enfoque educativo efectivo en la formación didáctica del profesorado de educación primaria. *Revista Interuniversitaria De Formación Del Profesorado. Continuación De La Antigua Revista De Escuelas Normales*, *98*(37.3). https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.3.96985

Pitt, L. (2023). Turing tumble is turing-complete. *Theoretical Computer Science, 948,* 113734. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.113734

Santaengracia, J. J., Palop, B., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Wing, J.M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE EM PRÁTICAS LETIVAS DE PROFESSORES EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

TEACHER PROFESSIONAL DEVELOPMENT IN TEACHING PRACTICES OF TEACHERS IN STATISCAL EDUCATION

Edivaldo Lubavem Pereira

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Brasil

edivaldolubavem@hotmail.com

Regina Célia Grando

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Brasil

regrando@yahoo.com.br

Hélia Oliveira

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Resumo: A finalidade desta investigação consiste em aprofundar o conceito de práticas letivas de professores em contextos de Educação Estatística que lecionam na Educação Básica atrelados ao desenvolvimento profissional de professores inseridos em um grupo colaborativo de estudos e pesquisas (ICEM).

Palavras-chave: práticas letivas; educação estatística; desenvolvimento profissional docente.

Abstract: The purpose of this investigation is to deepen the concept of teaching practices of teachers in Statistical Education contexts who teach in Basic Education linked to the professional development of teachers inserted in a collaborative study and research group (ICEM).

Keywords: teaching practices; statistical education; teacher professional development.

Introdução

O desenvolvimento profissional de professores é um assunto de ampla discussão na pesquisa em Educação Matemática. Os programas de formação de professores representam uma ação que necessita ser contínua, em que esses profissionais encontrem orientações necessárias para o seu desenvolvimento profissional (Garcia, 2014). Ao explorar o conceito de práticas letivas, utilizado no contexto de pesquisa em formação de professores, em uma perspectiva de pesquisa *com* professores, requer maior aprofundamento sobre sua definição caracterizada por uma ação pedagógica construída entre estudantes e professores. Segundo os estudos de Ponte (2014) a importância dessa construção entre eles, embora com papéis diferentes, mas que nos leva a compreender a definição de práticas letivas dos professores desenvolvidas na sala de aula sobre Educação Estatística.

Enquadramento do estudo

O objetivo principal desta pesquisa de doutoramento visa aprofundar o conceito de práticas letivas contribuindo para os estudos sobre desenvolvimento profissional docente dos professores que atuam na Educação Básica e que compõe o Grupo de Estudos e de Pesquisa sobre Insubordinação Criativa em Educação Matemática – ICEM. De acordo com Teres (2021), referido grupo é uma comunidade de investigação constituída na universidade entre formadores, licenciandos e professores que ensinam matemática nas escolas que almejam investigar possibilidades de aprendizagem profissional *da* e *sobre* a docência em matemática escolar, como foco em: (1) analisar os indícios de aprendizagem profissional quando se toma a produção e discussão de narrativas de aula como objeto de estudo e (2) analisar as aprendizagens matemáticas dos alunos em uma perspectiva de investigação com o professor. Por esta razão, os professores que compõe o ICEM, farão parte desta investigação por atuarem na Educação Básica e fortalecer as discussões a partir de suas práticas em sala de aula.

Os encontros de estudos do ICEM ocorrem desde 2018, a cada 15 dias por webconferência e também pelo recurso tecnológico whatsapp onde são aprofundadas e construídas comunicações associadas à matemática escolar e à docência, o qual será também material de análise.

Campo de conhecimento matemático a ser explorado: Educação Estatística

É importante mencionar que esta investigação está inserida no projeto intitulado, “Pesquisas colaborativa em Educação Estatística: Subsídios para a produção e avaliação compartilhada de atividade pedagógicas” 22composta por atividades de estatística para a sala de aula, realizadas por professores da Educação Básica financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O intuito é utilizar o projeto financiado com a participação de professores identificando suas práticas letivas por meio do desenvolvimento de tarefas ancoradas a Estatística.

O projeto apresenta resultados parciais indicando lacunas nas diretrizes curriculares de Matemática no Brasil, no que tange o desenvolvimento curricular em Educação Estatística nos primeiros anos de escolarização (6 a 10 anos). Serão constituídas tarefas investigativas destinadas aos diferentes anos do Ensino Fundamental para a efetivação da Educação Estatística, bem como pesquisas do conhecimento docente sobre Estatística, articulado ao conhecimento dos estudantes.

Após a elaboração, iremos acompanhar o desenvolvimento das tarefas realizadas pelos professores que farão parte da pesquisa, onde a tese se desenvolve no seio do grupo ICEM em torno das práticas letivas reconhecendo os saberes, as experiências vivenciadas por estes profissionais com a Educação Estatística, na maioria das vezes representam insubordinações criativas de professores (Lopes & Grando, 2023), sendo esta a metodologia usada para a recolha de dados e disseminação das conclusões.

A definição de insubordinação criativa em Educação Matemática no Brasil, foi delineado a partir das investigações acadêmicas e estudos das autoras, Beatriz D’Ambrosio e Celi Lopes. As autoras explicam que, adotar uma postura insubordinada criativa significa

22 O projeto de pesquisa, financiado pelo CNPq, modalidade projeto Universal, que está sendo desenvolvido (proc. 313562/2021-0), intitulado “Educação Estatística no currículo de Matemática da Escola Básica”, apresenta resultados parciais indicando lacunas nas diretrizes curriculares de Matemática no que se refere a um desenvolvimento curricular em especial para a Educação Estatística no Ensino Fundamental.

reivindicar questões estabelecidas de forma a se opor contra o que está uniformizado. Trata-se de uma ação legitimada por profissionais que trabalham no engajamento em formar pessoas críticas, fortalecer a cidadania e intensificar a justiça social, a fim de questionar o que é posto por liderança política, visando atender o mercado de trabalho (Teres, 2021).

Partimos de um levantamento “o que pensam os professores acerca do ensino de Educação Estatística”, através de um instrumento de pesquisa, usado em entrevistas com os professores, que apresenta três situações de ensino de Estatística em sala de aula. A) um relato de um professor que explora com os estudantes de 12 anos, a probabilidade de aproveitamento de um goleiro pegue no jogo de futebol, desenvolvendo um projeto estatístico com estudantes sobre o tema; b) diz respeito a uma atividade em sala de aula com crianças de 6 anos que envolve a coleta de dados sobre escolhas, registro em tabelas e construção/análise de gráfico de setores e c) situação explora a probabilidade em um manual didático de 3º ano. Para cada situação os professores são convidados a analisar a proposta pedagógica sobre (planejamento, desenvolvimento, problematização, conteúdos abordados e semelhanças com suas próprias práticas letivas). De uma forma notável tais ações estão intrínsecas nas práticas dos professores (Canavarro & Santos, 2019).

Metodologia

A presente pesquisa se trata de um estudo qualitativo que recorrerá à observação as discussões ocorridas do grupo ICEM, através da interação do whatsapp com a participação de 80 professores. Além disso, a observação das aulas nas escolas em que os participantes atuam fará parte da metodologia em que a recolha dos dados ocorrerá no período entre março e dezembro de 2025, de modo a identificar como a Educação Estatística é mobilizada pelos professores da Educação Básica em suas práticas letivas.

Primeiros Resultados

A experiência como investigador ao entrevistar os professores da Educação Básica, nesta primeira tarefa ocasionou reflexão sobre a própria prática ao pensar a Educação Estatística numa perspectiva insubordinada e criativa. A segunda constatação, é perceber dos professores, a preocupação de explorar o conteúdo de forma contextualizada, a fim de atrair a curiosidade deles. A terceira gerou discussões fecundas a partir de outros ações desta natureza desenvolvidas pelos professores dos anos iniciais retomando a grade curricular em Educação Estatística do Brasil em lacunas que precisam ser superadas na aprendizagem dos estudantes.

Referências

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática*, 99-104. https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/8305.

Garcia, T. M. R. (2014). *Identidade profissional de professores de Matemática em uma comunidade de prática* (Tese de doutorado, Universidade Estadual de Londrina). https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/GARCIA-Tania-Marli-Rocha.pdf

Lopes, C., & Grando, R. (2023). *Práticas formativas em educação matemática em diálogos com a insubordinação criativa.* Mercado de Letras.

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais* *dos professores de matemática* (pp. 135-161). https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/2429/1/2014_LM_out_liv.pdf

Ponte, J. P. (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310

Teres, S. L. L. (2021). *(Com) partilhando conhecimentos para e no ensinar e aprender matemática na perspectiva da insubordinação criativa em um contexto colaborativo*. [Tese de doutorado Universidade Federal de Santa Catarina]. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/231162

AVALIAÇÃO PEDAGÓGICA: COMO OS REFERENCIAIS DE AVALIAÇÃO SE ESTÃO A REFLETIR NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

PEDAGOGICAL ASSESSMENT: HOW ASSESSMENT FRAMEWORKS ARE BEING REFLECTED IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Francisco A. Silva

Pograma Doutoral em Ensino e Divulgação das Ciências, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal

assisleite@gmail.com

Rosa A. Tomás Ferreira

Centro de Matemática da Universidade do Porto, Unidade de Ensino das Ciências, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal

rferreir@fc.up.pt

Resumo: Apresentamos alguns resultados preliminares de um estudo em curso que procura investigar as efetivas implicações nas práticas letivas dos professores de matemática, decorrentes do Projeto Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação (MAIA), nomeadamente ao nível da avaliação pedagógica. A análise de dados incide sobre: o referencial de avaliação de um agrupamento de escolas (AE) afeto a um centro de formação da região norte, as reflexões partilhadas por um professor da respetiva equipa MAIA, as notas de campo de um conjunto de observações de aulas e produções escritas desse professor. Os resultados sugerem que, apesar de o referencial de avaliação refletir os princípios do Projeto MAIA, as práticas de avaliação pedagógica são ainda tímidas e condicionadas pelas perspetivas do professor acerca do referencial aprovado pelo AE.

Palavras-chave: avaliação pedagógica, práticas de avaliação, projeto MAIA.

Abstract: We present some preliminary results of an ongoing study that seeks to investigate the effective implications on the teaching practices of mathematics teachers, arising from the Monitoring, Follow-up and Research in Assessment Project (MAIA), namely regarding pedagogical assessment. Data analysis focuses on: the assessment framework of a cluster of schools associated with a training centre in the northern region, the reflections shared by a teacher from the respective MAIA team, the field notes of a set of class observations, and the teacher’s written productions. Results suggest that, although the assessment framework reflects the principles of the MAIA Project, pedagogical assessment practices are still timid and conditioned by the teacher's perspectives on the approved framework.

Keywords: pedagogical assessment, assessment practices, MAIA project.

Introdução

Os atuais documentos curriculares basilares em Portugal, o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (Martins et al., 2017) e as *Aprendizagens essenciais* das várias áreas disciplinares, enfatizam a avaliação pedagógica, uma avaliação para as aprendizagens e não só das aprendizagens. Na sequência da publicação do Decreto-Lei N.º 55/2018, de 08 de julho, surge a necessidade de efetivar a mudança prevista no âmbito da avaliação pedagógica. O Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA), iniciado em 2019/20, "foi pensado, concebido e desenvolvido tendo em conta que a melhoria das aprendizagens dos alunos está fortemente relacionada com as práticas pedagógicas das escolas e dos professores" (DGE, 2022, s/p).

Focamo-nos aqui no referencial de avaliação de um agrupamento de escolas (AE) que participou em várias ações de formação dinamizadas num Centro de Formação de Agrupamentos de Escolas (CFAE) da zona norte, no âmbito do projeto MAIA, procurando entender como esse referencial se reflete nas práticas de avaliação de um professor de matemática. Neste poster, que decorre de um estudo mais amplo em curso que procura compreender as dinâmicas internas que surgiram no AE a partir dos novos referenciais de avaliação pedagógica, o nosso objetivo consiste em perceber: que práticas avaliativas se observam na sala de aula de matemática, nomeadamente ao nível da avaliação formativa.

Enquadramento teórico

A avaliação pedagógica possui dois pilares fundamentais, a avaliação formativa e a avaliação sumativa (Fernandes, 2021), que se associam, respetivamente, aos termos avaliação *para* as aprendizagens e avaliação *das* aprendizagens (Black & Wiliam, 1998). A avaliação formativa assume-se como um processo eminentemente pedagógico orientado para a melhoria das aprendizagens. No âmbito do Projeto MAIA,

> A avaliação formativa, por natureza, tem de estar integrada nos processos de ensino e de aprendizagem. Isto significa que a avaliação formativa tem de ser realizada quando os professores estão a ensinar e quando os alunos estão a aprender; ou seja, ela deve ocorrer durante os processos de ensino e aprendizagem. Assim sendo, a avaliação formativa é um processo tendencialmente contínuo que pressupõe a participação ativa dos alunos nas tarefas propostas pelos professores. (Fernandes, 2021, p. 4)

A avaliação sumativa está centrada nos resultados dos alunos e ocorre após o ensino e a aprendizagem. O seu "objetivo é o de descrever e dar conta do que o aluno aprendeu e é capaz de fazer num certo momento (…) a fim de hierarquizar, selecionar, orientar e certificar" (Santos, 2016, p. 640). "O fulcral não é o instrumento de avaliação, mas sim o modo como este é trabalhado com os alunos" (p. 660), sendo que a diversificação de técnicas e de instrumentos promovem equidade e fiabilidade e, assim, contribuem para o rigor e a transparência dos processos avaliativos.

Para Fernandes (2021, p. 6), “O feedback é a peça central de qualquer processo de avaliação pedagógica”. Hattie e Temperley (2007) reforçam as questões orientadoras de um bom feedback – “Para onde vou? Como estou indo? e Para onde vou a seguir?” (pp. 89-90). Além disso, salientam quatro focos do feedback: quando incide na tarefa ou na produção do aluno, dá informação ao aluno sobre a correção do seu pensamento, acompanhada de sugestões de melhoria, mas isto só se mostra eficaz se o erro não resulta de falta de conhecimento; quando o feedback incide no processo, o foco é ajudar a entender ou resolver a tarefa; quando o foco é na autorregulação, o objetivo do feedback é levar o aluno a refletir sobre o seu trabalho, motivando-o para o melhorar; quando o foco do feedback é na pessoa, o que se enfatiza é o elogio ao aluno, e a eficácia na melhoria das aprendizagens dos alunos é muito limitada.

Contexto e metodologia de investigação

Em 2021/22, dois docentes, escolhidos pela direção do AE selecionado (por conveniência), elaboraram o Projeto de Intervenção (PI) do AE como produto da formação realizada no CFAE respetivo (dinamizada pelo primeiro autor) e no âmbito do Projeto MAIA. Esta oficina promoveu a reflexão sobre a noção de avaliação pedagógica e sobre práticas de uma avaliação pedagógica, enfatizando o papel do *feedback* de elevada qualidade (Santos, 2022) como essencial para que todos os alunos aprendam melhor. No entanto, após debate interno alargado no AE, ficou decidido que o PI deveria ser mais discutido e melhor apropriado por toda a comunidade educativa. Em 2022/23, oito docentes deste AE participaram num ciclo de estudos, também no âmbito do Projeto MAIA, com o intuito de melhorar o seu PI. E foi este novo PI, denominado internamente por Referencial de Avaliação do AE que, em 2023/24, chegou à sala de aula de matemática do 9.º ano do professor Rui, selecionado por conveniência, por não ter participado nas iniciativas de formação do Projeto MAIA e por manifestar uma postura de reserva face à implementação do PI no seu AE. O professor Rui não teve qualquer envolvimento na construção do PI; no entanto, participou nas reuniões do departamento onde o PI foi discutido e o Referencial de Avaliação aprovado. Neste texto, analisamos o referencial de avaliação, deste AE e ilustramos algumas práticas avaliativas do professor Rui. Numa abordagem qualitativa, os dados foram recolhidos das através da observação não participante de cinco aulas de 100 minutos cada, entre janeiro e junho de 2024, de notas de campo, e da reflexão escrita elaborada pelo professor no final do ano letivo.

O referencial de avaliação do AE e o seu reflexo na prática do professor Rui

O referencial de avaliação anteriormente existente no AE não estava alinhado com os princípios base da avaliação pedagógica, privilegiando a avaliação sumativa e os processos de classificação. A reformulação do PI do AE, que resultou da partilha de experiências com outro AE do mesmo CFAE, permitiu que o referencial de avaliação se ajustasse melhor à avaliação pedagógica e aos princípios nos quais assenta o Projeto MAIA. Neste novo referencial, pode ler-se que a avaliação deve ser contínua e sistemática, ao serviço das aprendizagens. Ao destacar que as informações obtidas em resultado da avaliação vão permitir a revisão de todo o processo de ensino e de aprendizagem, abre-se o caminho para práticas avaliativas mais promissoras.

Desafiado a refletir sobre as suas práticas, o professor Rui referiu que:

> Foram várias as Estratégias de ensino e de aprendizagem usadas, a título exemplificativo, foi usada a plataforma intuitivo, pois à data a preocupação do docente com as provas nacionais sempre foi uma constante nas aulas. Era sempre dado feedback aos alunos (umas vezes de forma síncrona e noutras assíncrona) sobre o trabalho que iam desenvolvendo. (…) recorrendo a fichas de trabalho e propostas de trabalho conjunto com o feedback sendo prestado através de anotações e correção nas fichas ou oralmente em contexto de sala de aula. (Reflexão, 30/09/2024)

O professor Rui assume a sua preocupação com o desempenho dos alunos em provas nacionais e, mesmo referindo-se ao *feedback*, não é claro que o veja com uma natureza formativa. Por exemplo, numa aula, o professor Rui informou os alunos que a correção escrita do teste realizado tinha sido disponibilizado no *moodle* do AE. Esta prática colide com as orientações do referencial de avaliação do AE, pois pouco ou nada apoiou as aprendizagens dos alunos. Pelo contrário, nessa mesma aula, o professor Rui convidou os alunos a usar a aplicação *Intuitivo* para uma tarefa de associação e acompanhou o progresso dos alunos na tarefa, fazendo sugestões de melhoria à medida que circulava pelas mesas, finalizando com uma discussão das soluções encontradas pelos vários grupos e consensualizando uma resposta. Deste modo, o professor Rui evidenciou práticas de avaliação pedagógica conformes ao referencial de avaliação adotado no AE e seguindo as orientações do Projeto MAIA.

Reflexão final

O caso do professor Rui reflete, de algum modo, as dinâmicas internas e a cultura de escola no AE. Não tendo participado nas formações sobre avaliação pedagógica promovidas pelo Projeto MAIA, tem como preocupação essencial e assumida preparar os alunos para a avaliação externa. As práticas avaliativas do professor Rui são baseadas em testes e minitestes, que são usados como instrumentos de avaliação *das* e não *para* as aprendizagens. No entanto, foi possível reconhecer algumas práticas de avaliação formativa nas aulas observadas. O caminho percorrido na construção de documentos estruturantes de avaliação pedagógica, preconizados pela legislação atual e impulsionados pelo projeto MAIA, ainda não é suficiente para gerar práticas efetivas de avaliação pedagógica. Requer-se continuidade e mais aprofundamento para assegurar a prevalência dessas práticas.

Referências

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7-74.

Direção-Geral da Educação (2022). *Projeto MAIA: Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica.* https://afc.dge.mec.pt/projeto-maia-introducao

Fernandes, D. (2021*). Para uma fundamentação e melhoria das práticas de avaliação pedagógica no âmbito do Projeto MAIA*. Texto de Apoio à formação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA). Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77* (1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Camilo, J., Silva, L. & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* DGE. https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/22377/1/perfil_dos_alunos.pdf

Santos, L. (2016) A articulação entre a avaliação sumativa e a formativa, na prática pedagógica: Uma impossibilidade ou um desafio*? Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, 24*(92), 637-669. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-40362016000300006

Santos, L. (2022). O feedback como uma poderosa ferramenta para a aprendizagem matemática: Uma meta-análise de estudos portugueses. *REVEMOP*, *4*, e202210-e202210. https://doi.org/ 10.33532/revemop.e20221

GRUPO DE DISCUSSÃO 2

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E A MATEMÁTICA PARA TODOS NO SÉCULO XXI

TEACHER EDUCATION AND MATHEMATICS FOR ALL IN THE 21ST CENTURY

Elvira Lázaro Santos

Escola Superior de Educação da Lusofonia- IPLUSO, Portugal

elvira.santos@ipluso.pt

A Matemática, com o seu valor cultural, científico e formativo, ocupa um lugar central nos currículos escolares, sendo essencial tanto para o desenvolvimento pessoal dos alunos como para a preparação dos cidadãos face aos desafios do século XXI. Assente nos princípios de "Matemática para todos", "A Matemática é única, mas não é a única" e "Matemática para o século XXI" o documento relativo às aprendizagens Essenciais do Ensino Básico promove uma aprendizagem inclusiva, exigente e articulada com outras áreas do saber, reforçando a literacia matemática como instrumento fundamental para o exercício de uma cidadania crítica, informada e participativa (Canavarro et al., 2021).

Neste contexto, a formação de professores assume um papel determinante. No século XXI, ensinar exige mais do que inspiração e motivação: requer compromisso com a aprendizagem ao longo da vida, competência nas múltiplas dimensões da prática profissional e envolvimento ativo em comunidades de aprendizagem e reflexão (Shulman & Shulman, 2004). A constante evolução das dinâmicas sociais, tecnológicas e educativas impõe aos docentes a necessidade de repensar e reconstruir as suas práticas, articulando teoria e ação em resposta a novos desafios.

A forma como os professores lidam com essas mudanças nem sempre é homogénea. Enquanto alguns veem na inovação uma oportunidade de alinhar práticas e crenças, outros enfrentam tensões entre o novo e o que consideram essencial na sua identidade profissional (Lafortune, 2006). Ainda assim, acredita-se que, com tempo e apoio adequados, é possível promover ajustes significativos que contribuam para o desenvolvimento profissional sustentado.

Neste sentido, os modelos tradicionais de formação, centrados na transmissão de conteúdos por especialistas, têm vindo a ser amplamente questionados. Em alternativa, ganham destaque abordagens colaborativas de investigação/formação, nas quais os professores assumem um papel ativo na análise das suas práticas, na partilha de saberes e na construção coletiva de conhecimento (Butler et al., 2004; Butler, 2005).

Este grupo de discussão reúne investigações que exploram diferentes dimensões da formação de professores e da prática docente em Educação Matemática, contribuindo para uma reflexão crítica e fundamentada sobre o ensino e a aprendizagem da disciplina, alinhada com os desafios contemporâneos na promoção de uma educação mais inclusiva.

A comunicação de Lurdes Serrazina, Joana Castro, Elvira Santos, Ana Isabel Silvestre, Hélia Jacinto, Susana Carreira, Rosa Tomás Ferreira, Cristina Martins, Nélia Amado e Manuel Vara Pires intitulada *Valores em Educação Matemática de potenciais professores à entrada da Licenciatura em Educação Básica* apresenta um estudo exploratório realizado com estudantes do 1.º ano da Licenciatura em Educação Básica, provenientes de escolas superiores de educação públicas e privadas da região de Lisboa. O estudo identifica e discute os aspetos que são valorizados no ensino e na aprendizagem da matemática por estes futuros professores, destacando-se, relativamente à aprendizagem, o Processo com enfoque no Raciocínio e na Compreensão. Relativamente ao ensino, priorizam a Motivação e dedicação, contudo parecem estar a referir-se ao papel que atribuem ao professor sobretudo na sua capacidade de captar o interesse dos alunos (Bishop, 1988; Seah, 2008; Dede, 2013; Silvestre et al., 2023).

Na comunicação *Cenários para investigação no 1.º ciclo: contribuições para a prática docente a partir de uma formação contínua*, Guilherme Gomes da Silva e João Pedro da Ponte analisam a experiência de quatro professoras do 1.º ciclo que, após participarem numa formação contínua, passaram a implementar cenários para investigação em aulas de Matemática, inseridas no âmbito da Educação Matemática Crítica. A análise de práticas pedagógicas destas docentes, a lecionar o 4.º ano de escolaridade, revela que os cenários foram planeados com base em questões socialmente relevantes, promovendo a reflexão crítica dos alunos, o uso de diferentes estratégias e a exploração de múltiplas soluções (Ponte, 2012; Silva & Penteado, 2013; Ponte et al., 2016; Skovsmose, 2023).

A comunicação *Das tarefas tradicionais às tarefas criativas*, de autoria de Adriana Santos Sousa, Maria Teresa Blanco e Tânia Cristina Gusmão investiga como a reformulação de tarefas matemáticas tradicionais pode promover a criatividade dos estudantes e ao mesmo tempo que contribui para desconstruir a visão tradicional da matemática como uma disciplina associada apenas na memorização de conceitos. Esta abordagem promove o pensamento crítico e o desenvolvimento de competências na resolução de problemas (Gusmão & Font, 2020; Godino et al., 2008; Godino, 2024; Liljedahl, 2024).

Izaskum Baro e Iera Arrieta, na comunicação em formato de poster *Actitud hacia las matemáticas en el alumnado de primer curso del grado en educación primaria*, analisam as atitudes dos estudantes face à matemática, com base no questionário de Auzmendi (1992). Os resultados revelam uma atitude geral moderada, face à matemática, posicionando-se no percentil 35, sem diferenças significativas entre géneros (Brandell & Starbert, 2008).

Por fim, Kelvin de Oliveira, Pedro Palhares e Maria Raquel Morelatti, também em forma de poster, apresentam a comunicação *Entre o previsto e o real: investigação sobre a formação inicial de professores de matemática no Brasil e em Portugal*. Esta proposta visa aprofundar os referenciais teórico-metodológicos sobre a formação inicial de professores, comparando os modelos formativos dos dois países, com especial atenção à articulação (ou fragmentação) entre os conteúdos do ensino superior e a Educação Básica (Cury & Bisognin, 2017; Gatti, 2013).

Espera-se que estas investigações contribuam para melhorar a formação de professores e das práticas pedagógicas, promovendo o sucesso dos alunos na disciplina de matemática.

Referências

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179–191. http://dx.doi.org/10.1007/BF00751231.

Brandell, G. y Staberg, E. M. (2008). Mathematics: A female, male or gender neutral domain? A study of attitudes among students at secondary level. *Gender and education*, *20*(5), 495-509.

Butler, D. L. (2005). L'autorégulation de l'apprentissage et la collaboration dans le développement professionnel des enseignants. *Revue des Sciences de l'Éducation*, *31*(1), 55-78.

Butler, D. L., Lauscher, H. N., Jarvis-Selinger, S., & Beckingham, B. (2004). Collaboration and self-regulation in teachers' professional development. *Teaching and Teacher Education*, *20*(5), 435-455.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.

Cury, H. N., & Bisognin, E. (2017). Conhecimento matemático para o ensino: Um estudo com professores em formação inicial e continuada. *Revista Thema*, *14*(3), 241–249. https://doi.org/10.15536/thema.14.2017.241-249.482.

Dede, Y. (2013). Examining the underlying values of Turkish and German mathematics teachers' decision making processes in group studies. *Kuram Ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, *13*, 690–706.

Gatti, B. A. (2013). Educação, escola e formação de professores: Políticas e impasses. *Educar em Revista*, 50, 51-67.https://www.scielo.br/j/er/a/MXXDfbw5fnMPBQFR6v8CD5x/?format=pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*(2), 07–37. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/62

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* Editorial Aula Magna.

Gusmão, T. C. R. S. & Font, V. M. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa - São Paulo*, *22*(3), 666 – 697. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/50704/pdf_1

Lafortune, L. (2006). Accompagnement-recherche-formation d'un changement en éducation: un processus exigeant une démarche de pratique réflexive. *Revue des HEP de Suisse romande et du Tessin: Formation et pratiques d'enseignement en questions*, *5*, 187-202.

Liljedahl, P. (2024). *Diseñando aulas para pensar em Matemáticas primaria y secundária: 14 prácticas docentes para mejorar el aprendizaje*. NED Educciones.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2016). *Investigações matemáticas na sala de aula* (3 ed.). Autêntica.

Seah, W. T. (2008). Valuing values in mathematics education. In P. Clarkson, & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 239–252). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09673-5_17

Silva, G. H. G., & Penteado, M. G. (2013). Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de Matemática diante da imprevisibilidade. *Ciência & Educação*, *19*(2), 279-292.

Silvestre, A. I., Jacinto, H., Serrazina, L., Amado, N., Carreira, S., Santos, E., Tomás Ferreira, R., Martins, C., Vara Pires, M., & Castro, J. (2023). Valores no ensino e na aprendizagem da matemática: Os aspetos mais valorizados por professores portugueses. *Quadrante*, *32*(2), 49–76. https://doi.org/10.48489/quadrante.32632

Shulman, L. S., & Shulman, J. H. (2004). How and what teachers learn: A shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies*, *36*(2), 257-271.

Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer.

Comunicações

VALORES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE POTENCIAIS PROFESSORES À ENTRADA DA LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA

VALUES IN MATHEMATICS EDUCATION OF POTENTIAL TEACHERS ON ENTRY TO A DEGREE IN BASIC EDUCATION

Lurdes Serrazina[1], Joana Castro[2], Elvira Santos[3], Ana Isabel Silvestre[4],

Hélia Jacinto[5], Susana Carreira[6], Rosa Tomás Ferreira[7], Cristina Martins[8],

Nélia Amado[9], Manuel Vara Pires[10]

[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal, lurdess@eselx.ipl.pt; [2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal, joanac@eselx.ipl.pt; [3] Escola Superior de Educação da Lusofonia do Instituto Politécnico da Lusofonia, Portugal, elvira.santos@ipluso.pt; [4]Centro de Estudos em Educação e Inovação (CI&DEI), Portugal, anaisabelsilvestre@gmail.com; [5]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, hjacinto@ie.ulisboa.pt, [6] FCT, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, scarrei@ualg.pt; [7]Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, Portugal, rferreir@fc.up.pt; [8]Centro de Investigação em Educação Básica, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal, mcesm@ipb.pt; [9]FCT, Universidade do Algarve, namado@ualg.pt; [10]Centro de Investigação em Educação Básica, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal, mvp@ipb.pt

Resumo: Este artigo apresenta um estudo exploratório que envolveu estudantes do 1.º ano da Licenciatura em Educação Básica, de escolas superiores de educação públicas e privadas da região de Lisboa, onde se identificam e discutem os aspetos que valorizam no ensino e na aprendizagem da matemática. O estudo adota uma metodologia qualitativa recorrendo à análise de conteúdo para categorizar as respostas dos 125 participantes. Em duas questões de resposta aberta solicitou-se a indicação de três aspetos que, na perspetiva do inquirido, são os mais importantes no ensino e na aprendizagem da matemática. Os resultados do estudo mostram que os estudantes, que poderão vir a ser educadores de infância ou professores que ensinam matemática no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, respondem de modo diferenciado quando se referem à aprendizagem e ao ensino. Estes estudantes priorizam, relativamente à aprendizagem, os valores 'Processo', Matemática em contexto` e 'Motivação e dedicação'. Relativamente ao 'Processo' as respostas dos participantes remetem claramente para a valorização do raciocínio, da compreensão e da resolução de problemas. No que diz respeito ao ensino estes estudantes priorizam 'Motivação e dedicação', 'Exposição' e 'Processo'. Relativamente ao valor 'Motivação e dedicação' as respostas dos participantes remetem para a valorização da dedicação, motivação e paciência. Os valores priorizados pelos potenciais futuros professores no que se refere ao ensino parecem estar relacionados com a sua experiência como sujeitos que foram ensinados e não com o papel de professor que ainda está muito distante.

Palavras-chave: valores em educação matemática, futuros professores do ensino básico, ensino e aprendizagem da matemática.

Abstract: This article presents an exploratory study involving 1st year undergraduate students in Basic Education, from public and private higher education institutions, which identifies and discusses the aspects they value in the teaching and learning of mathematics. The study adopts a qualitative methodology, using content analysis to categorize the responses of the 125 participants. In two open-ended questions, the respondents were asked to indicate three aspects that, from their perspective, are the most important in the teaching and learning of mathematics.

The results of the study show that the students, who may become kindergarten teachers or teachers who teach mathematics in the 1st and 2nd cycles of basic education, respond differently when referring to learning and teaching. Regarding learning, these students prioritize the values 'Process', 'Mathematics in Context' and 'Motivation and dedication'. About 'Process', the participants' answers clearly refer to the value of reasoning, understanding and problem-solving. With regard to teaching, these students prioritize ‘Motivation and dedication', 'Exposition' and 'Process'. Regarding the value 'Motivation and dedication', the participants' answers refer to the value of dedication, motivation and patience. The values about teaching prioritized by potential future teachers seem to be related to their experience as subjects who have been taught and not to the role of teacher, which is still a long way off.

Keywords: values in mathematics education, future elementary school teachers, teaching and learning mathematics.

Introdução

Os valores na educação matemática são os princípios que os indivíduos consideram fundamentais para a aprendizagem e o ensino da matemática, funcionando como uma “janela” que revela o que é valorizado por alunos, professores, pais, diretores e pela sociedade em geral no que respeita a esses processos (Barkatsas & Seah, 2015). Uma vez que as atitudes, preferências, opções e ações relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática refletem aquilo que os alunos e os professores valorizam, e também o que é valorizado pela sociedade (Fan, 2021), identificar esses valores e conhecer como alguns são mais priorizados do que outros pode ser um componente-chave para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática (Barkatsas & Seah, 2015; Seah & Andersson, 2015).

A investigação no campo dos valores focou-se, inicialmente, na identificação e compreensão dos valores educacionais gerais ou matemáticos, mas esse panorama mudou na primeira década do século XXI, registando-se um interesse crescente no estudo dos valores relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática de alunos, professores e, ainda, os que estão imbuídos nos currículos (Kim et al., 2024).

Existem poucos estudos sobre valores envolvendo futuros professores. Num deles, Haciömeroğlu (2020) realçou que os valores dos futuros professores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática são moldados e alterados pelas suas vivências na sala de aula de matemática enquanto alunos. Assim, é importante conhecer os valores que os futuros professores têm de modo a levá-los a refletir sobre eles durante a sua formação contribuindo para que venham a ser melhores professores no futuro.

Um grupo de investigadores do Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática, que faz parte de um consórcio internacional de investigadores, tem estudado em Portugal o que valorizam os professores e alunos sobre o ensino e aprendizagem da Matemática (Silvestre et al., 2023). Aquele grupo utilizou o questionário destinado aos alunos, usado anteriormente, para realizar um novo estudo sobre os valores dos estudantes da Licenciatura em Educação Básica (LEB)[23]. Assim, o presente artigo tem como objetivo caracterizar e discutir os aspetos que estudantes do 1.º

23 Licenciatura em Educação Básica refere-se ao 1.º Ciclo de Estudos de Bolonha com total de 180 ECTS – “a Licenciatura visa a formação de licenciados nas diversas áreas do saber, capacitando-os para a intervenção nos âmbitos da ação educativa, nomeadamente educadores de infância, professores, ATL, Ludotecas, Museus, Autarquias, Bibliotecas, Serviços de Pediatria, entre outros.”

ano da LEB, ou seja, potenciais educadores de infância ou futuros professores que irão ensinar matemática até ao 2.º ciclo do Ensino Básico (CEB), valorizam na aprendizagem e no ensino da Matemática.

Valores em Educação Matemática

Numa perspetiva cultural a ideia de *valor* ganhou relevo em Educação Matemática no final da década de oitenta do século passado, introduzida por Bishop (1988). Já neste século e progredindo na mesma linha, Seah (2008) alargou o seu âmbito, propondo que os valores são influenciados pelo ambiente sociocultural no qual o indivíduo se encontra, afirmando que os valores e o processo de valorização não são exclusivamente cognitivos nem afetivos, visto não representarem apenas um processamento mental, nem serem exclusivamente orientados pelos afetos. O mesmo autor considera que o processo e o ato de valorizar envolvem invariavelmente raciocínio e pensamento e são, por natureza, socioculturais pois refletem anos de aprendizagem e influência das nossas experiências, histórias e interações sociais como membros das culturas a que pertencemos (Seah, 2018).

O quadro conceptual, baseado no trabalho de Bishop (1988) sobre valores relativos à Educação Matemática enuncia três dimensões: (i) valores sobre a matemática; (ii) valores sobre ensino e aprendizagem da matemática; e (iii) valores culturais e gerais sobre a educação. Os valores sobre ensino e aprendizagem da matemática são indicados como os valores relativos ao aprender e ao ensinar em contexto escolar (Kinone et al., 2020). Quando os professores ensinam matemática na escola expressam os seus valores através das suas práticas pedagógicas (Seah, 2013).

Seah (2016) refere que existem três formas diferentes de ter em consideração os valores na educação matemática: (i) *valores através da educação matemática* em que os professores defendem e ensinam os seus alunos a desenvolver valores estruturantes da sua personalidade, como por exemplo a justiça e os direitos humanos, através da forma como planificam ou integram na sala de aula as discussões coletivas; (ii) *valores de educação matemática* que representam valores sociopolíticos e culturais, estão incorporados na matemática através das políticas educativas e das normas sociais, e que podem, por exemplo, valorizar a capacidade de cálculo em oposição à visualização; e, (iii) *valores para a educação matemática* onde o que os professores e alunos valorizam poderá ser tido em consideração para otimizar a compreensão e a competência matemática, por exemplo, quando os professores reconhecem que se os alunos valorizam 'brincar' podem aproveitar esta valorização para otimizar a aprendizagem dos alunos ao recorrer a atividades exploratórias com materiais manipuláveis. Por outro lado, um professor pode ele próprio valorizar o 'brincar' como uma abordagem pedagógica para a compreensão conceptual, introduzindo assim atividades exploratórias nas planificações.

O estudo *What I Find Important (in my maths learning)*, do *The Third Wave Lab* analisou 21 países e comunidades de várias regiões do mundo, verificando que os alunos valorizam diferentes aspetos relacionados com o ensino e a aprendizagem da matemática, resultando em conjuntos de valores únicos em cada sistema educativo (Zhong et al., 2024).

Akyidiz et al. (2021) realizaram um estudo sobre os valores dos professores no ensino da matemática, partindo do questionário para alunos desenvolvido no *WIFI study*, convertendo os 64 itens do questionário dos alunos num instrumento onde os professores participantes puderam expressar as suas opiniões e os seus valores. Para chegarem ao instrumento organizaram os itens em cinco componentes e realizaram um estudo piloto. O questionário obtido, organizado nas cinco componentes, tinha a seguinte composição: (i) *Relevância* (4 itens) – incluía explicar e justificar conceitos e fórmulas matemáticas, fazer demonstrações, validar teoremas e hipóteses, ligação à vida real; (ii) *Prática* (11 itens) - baseado na prática e em avaliações orientadas pelos resultados no processo de ensino da matemática; (iii) *Utilização das TIC* (Tecnologias de Informação e Comunicação) (5 itens) - uso das TIC no ensino da matemática; (iv) *Abordagem ao ensino* (17 itens) - focado no aplicar diferentes abordagens no ensino e aprendizagem da matemática, atividades extracurriculares de matemática, procura por diferentes formas para chegar ao resultado durante o ensino da matemática e discussões em pequeno e grande grupo; e (v) *Consolidação* (18 itens) - apoio ao processo de aprendizagem da matemática usando materiais de apoio, de modo que os alunos consolidem as suas aprendizagens. Responderam 2226 professores de matemática da Turquia que valorizaram mais os valores da componente consolidação e menos o valor referente às TIC. Relativamente às outras componentes os resultados são, em ordem decrescente: prática, abordagem ao ensino e relevância.

Dede (2013) reportou que os professores alemães e os professores turcos valorizam diferentes aspetos no ensino e na aprendizagem da matemática, sendo que esta diferença varia ainda de acordo com os anos de escolaridade que lecionam. Também Osman et al. (2024) afirmam que os valores sobre educação matemática podem diferir de país para país. Num estudo desenvolvido na Suécia, com o objetivo de conhecer o que é valorizado por professores e alunos dos 7.º e 8.º anos nas aulas de matemática, Peng e Nyroos (2012) concluíram que os professores valorizam a exposição, a interação entre os alunos da turma e a atmosfera tranquila da sala de aula, a comunicação, o trabalho de grupo, a experimentação e a aprendizagem fora da sala de aula. Já um outro estudo envolvendo professores e futuros professores, realizado na Coreia do Sul, identificou como valores relativos ao ensino e à aprendizagem da disciplina: aulas divertidas, a resolução de problemas, as representações, o cálculo, a aptidão e a explicação, sendo a resolução de problemas o mais valorizado por professores e futuros professores (Yim et al., 2020).

Mais recentemente, num estudo realizado na Malásia, relativamente ao alinhamento entre os valores dos professores e os dos seus alunos, em relação à aprendizagem da matemática, Chia e Zhang (2023) concluíram que os professores priorizam o processo em vez do produto, a arduidade em detrimento do bem-estar, o esforço em relação à aptidão, a aplicação de conhecimentos em vez do cálculo, as ideias e práticas em vez de factos e teorias, a exploração em vez da exposição, e a memorização em vez da criação. Ao estudar o que os professores de matemática dos 7.º e 10.º anos em Portugal valorizam no ensino e na aprendizagem da matemática, Silvestre et al. (2023) concluem que os professores priorizam a motivação e dedicação, o bem-estar, e o currículo e organização da escola.

Formação inicial e valores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática

Os estudos com futuros professores que conseguimos identificar são escassos e quando existem foram realizados em contextos significativamente diferentes do português, o que obriga a algum cuidado na sua interpretação. Entre esses estudos, o de Haciömeroğlu (2020), já referido, conclui pela influência das vivências enquanto alunos nos valores dos futuros professores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. No mesmo sentido, Osman et al. (2024), num estudo também com futuros professores, concluem que as vivências dos futuros professores enquanto alunos influenciam os seus valores sobre o ensino e aprendizagem daí a necessidade de que estes tomem consciência dos seus valores relativamente ao ensino da matemática antes de iniciarem a sua profissão como professores. Assim, identificar os valores de futuros professores sobre o ensino da matemática parece ser essencial na medida em que estes podem influenciar a forma como a vão ensinar aos seus alunos como já afirmavam Bishop et al. (2006) e mais recentemente foi observado por Haciömeroğlu (2020). Para este último autor, os formadores dos futuros professores, ao fazerem a identificação dos valores dos seus estudantes relativamente à matemática e ao seu ensino, poderão alinhar as suas práticas de modo a proporcionar-lhes oportunidades para que tomem consciência dos seus próprios valores, de como estes afetam o seu ensino, a aprendizagem matemática e a construção dos valores dos seus futuros alunos. Assim, aos futuros professores devem ser proporcionadas experiências variadas, nas diferentes unidades curriculares do seu percurso formativo, nomeadamente nas unidades curriculares de didáticas específicas e de iniciação à prática profissional, onde possam refletir sobre os seus valores, designadamente os que consideram contribuir para um ensino eficaz da matemática (Haciömeroğlu, 2020).

O presente estudo, de natureza exploratória, constitui um primeiro contributo para este campo ainda tão pouco explorado, em especial quando se trata de estudantes, potenciais futuros professores que vão ensinar matemática nos primeiros anos de escolaridade.

Metodologia

Os estudantes a frequentar o 1.º ano da LEB, no ano letivo de 2023-2024, nas diferentes Instituições de Ensino Superior (IES) de Portugal, foram convidados para participar no estudo "O que considero importante no ensino e na aprendizagem da matemática?", com o objetivo de conhecer e caracterizar os valores veiculados pelos potenciais futuros professores generalistas do 1.º CEB e de Matemática/Ciências da Natureza do 2.º CEB, relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática. De realçar que os estudantes da LEB podem também vir a ser educadores de infância onde se espera que desenvolvam com as crianças atividades potenciadoras da aprendizagem da matemática. Para esta comunicação foram apenas analisados os dados relativos às respostas dos estudantes do 1.º ano da LEB de quatro IES (uma pública e três privadas) da área geográfica de Lisboa.

Recolha de dados

Os dados foram recolhidos por meio de um questionário *onlin*e, composto por itens de resposta fechada (escala de tipo Likert de 5 níveis) e itens de resposta aberta. O questionário é uma adaptação ao contexto português do questionário elaborado pelo consórcio *The Third Wave Project* (ver Kinone et al., 2020), foi traduzido do inglês e adaptado pela equipa portuguesa deste consórcio. A versão final do questionário engloba um total de 66 itens. Esta comunicação incide nos itens de 1 a 6, que visavam recolher dados sociodemográficos sobre os participantes, bem como nos itens 7 e 8 onde se solicitava a esses estudantes, que indicassem os três principais aspetos que influenciam, respetivamente, a aprendizagem e o ensino da matemática dos alunos. Esta comunicação foca-se exclusivamente na análise qualitativa das respostas abertas dos participantes sobre os aspetos que consideraram mais importantes no ensino e na aprendizagem da matemática (itens 7 e 8). O item 7 solicitava a identificação dos três aspetos que, do seu ponto de vista, valorizam na aprendizagem da matemática e uma justificação dessas escolhas (Figura 1). O item 8 solicitava a identificação dos três aspetos que, na sua perspetiva, valorizam no ensino da matemática e respetiva justificação (Figura 1). Assumiu-se que o estudante, ao ter de mencionar três aspetos como os mais importantes, iria escolher aqueles que mais valoriza na aprendizagem e no ensino da matemática.

O que é importante para si na/o **aprendizagem/ensino** da matemática?

Nesta secção pretende-se conhecer os 3 aspetos que na sua opinião enquanto futuro/a professor/a são importantes para a **aprendizagem/ensino** da matemática.

Exemplo

Pergunta: O que faz quando escolhe um telemóvel novo? (Pense no que é importante para si)

Respostas:

(1) Tamanho de ecrã. Um tamanho de ecrã grande é importante, porque eu trabalho muito no meu telemóvel.
(2) Peso. É difícil caminhar com um telemóvel pesado no bolso.
(3) Conectividade. Uma porta USB seria o meu sonho. Transfere arquivos de forma eficiente.

(1) O que é importante para si na **aprendizagem/ensino** da matemática? Justifique a sua opinião.
(resposta longa)

(2) O que é importante para si na **aprendizagem/ensino** da matemática? Justifique a sua opinião.
(resposta longa)

(3) O que é importante para si na **aprendizagem/ensino** da matemática? Justifique a sua opinião.
(resposta longa)

Figura 1. Itens 7 (referente à aprendizagem) e 8 (referente ao ensino) do questionário aplicado aos estudantes potenciais futuros professores

Participantes

No convite dirigido aos alunos do 1.º ano da LEB, em conformidade com todas as questões éticas associadas a este tipo de estudos, foi assegurado aos participantes que a sua contribuição seria anónima e voluntária, e que os dados recolhidos seriam tratados com confidencialidade, não interferindo de modo algum com o seu desempenho académico.

Responderam ao questionário um total de 125 estudantes, potenciais futuros professores que vão ensinar matemática até ao 2.º CEB. Estes estudantes realizam a sua formação em IES (público e privado) da zona de Lisboa.

O questionário foi aplicado entre janeiro e março de 2024, isto é, no final do 1.º ou no início do 2.º semestre. Importa referir que cada IES tem o seu próprio currículo, o que implica que o trabalho desenvolvido na área da matemática até então com estes estudantes na LEB não tinha sido o mesmo. A título de exemplo, referimos que enquanto numa das IES não existe no currículo qualquer unidade curricular (UC) de matemática no primeiro semestre, apenas no 2.º semestre os estudantes têm a primeira UC da área de Matemática. Nas restantes, aquando da aplicação do questionário, os estudantes já tinham frequentado uma UC de matemática durante o 1.º semestre. Em comum no currículo das IES foi o facto de terem uma UC sobre Números e Operações no 1.º ano. Assim, de um modo geral e até ao momento da aplicação do questionário, os estudantes teriam, no limite, tido oportunidade de contactar com diferentes perspetivas sobre a natureza dos números e das operações, bem como finalidades e objetivos do ensino da matemática.

A maioria dos estudantes respondentes é do género feminino (94%) e tem idade compreendida entre 17 e 23 anos (Tabela 1). De notar que a faixa etária dos respondentes varia entre os 17 e os 48 anos de idade, com uma média de idades de 20,3 anos. A Tabela 1 resume a caracterização dos participantes neste estudo.

Tabela 1. Caracterização dos participantes (n=125).

	Descrição	n (%)
Género	Feminino	117 (93,60%)
	Masculino	8 (6,30%)
Idade	17 – 23 anos	105 (84,00%)
	24 – 30 anos	11 (8,80%)
	31 – 37 anos	5 (4,00%)
	38 – 44 anos	3 (2,40%)
	45 – 48 anos	1 (0,80%)
Formação anterior	Ensino Secundário (12ºano)	83 (66,40%)
	Ensino Profissional (12.º ano) de Ação Educativa	7 (5,60%)
	Curso técnico superior profissional (CTeSP) de Acompanhamento de Criança e Jovens	4 (3,20%)
	Ensino Profissional (12.º ano) de Apoio à Infância	5 (4,00%)
	Assistente operacional ou técnico de apoio à infância	2 (1,60%)
	Ensino Artístico (12.º ano)	2 (1,60%)
	Curso Profissional (técnico de gestão, animação sociocultural)	9 (7,20%)
	Animação sociocultural	1 (0,80%)
	Licenciatura em Arquitetura	2 (1,60%)
	Ciências da Educação	2 (1,60%)
	Mestrado em Psicologia	1 (0,80%)
	Outros	7 (5,60%)

Nota: n=frequência, %=percentagem

Cerca de 57% (73) dos futuros professores não têm qualquer experiência profissional na área da educação; dos que indicam ter experiência, apenas oito (6,3%) têm-na na atividade de explicador/a de matemática nos anos iniciais em centros de explicações (Tabela 2).

Tabela 2. Caracterização da experiência profissional dos participantes (n=125)

Experiência profissional	n (%)
Não tenho experiência de trabalho na área da educação	73 (58,40%)
Experiência noutra área relacionada com a educação	44 (35,20%)
Experiência como explicador/a de matemática dos anos iniciais num centro de explicações	8 (6,40%)

Nota: n=frequência; %=percentagem

Análise dos dados

Procedeu-se a uma análise de conteúdo das respostas aos itens 7 e 8, após o processo de limpeza dos dados, com o intento de identificar os aspetos mais valorizados pelos futuros professores relativamente ao ensino e à aprendizagem da matemática. A análise dos dados foi feita com base no livro de códigos utilizado no mais recente trabalho publicado pela equipa portuguesa do *The Third Wave Lab* (Silvestre et al., 2023), com uma ligeira adaptação feita à medida que foram analisados os dois itens do questionário dirigido aos potenciais futuros professores em que nos focamos nesta comunicação.

Assim, e à semelhança do que foi feito no trabalho com futuros professores de matemática do 3.º CEB e ensino secundário (Ferreira et al., 2024), incluíram-se alguns códigos abertos, como "aprender com os erros", "pensamento crítico", "pensamento flexível", "inclusão" e "comunicação matemática". A Tabela 3 apresenta os pares de valores que compõem o livro de códigos, bem como uma breve síntese do seu significado no ensino e aprendizagem da matemática.

Tabela 3. Quadro de valores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática
(adaptado de Kinone e Seah (2015), Silvestre et al. (2023, pp. 75-76))

	Valores	**Conteúdo**
1	Aptidão	Valoriza o talento, aptidão, habilidade, capacidade no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Motivação e dedicação	Valoriza o esforço, a dedicação e a motivação no ensino e na aprendizagem da matemática.
2	Bem-estar	Valoriza situações de ambiente calmo, de bem-estar e gosto no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Arduidade	Valoriza o comportamento disciplinado, a dificuldade e o ambiente de tensão no ensino e na aprendizagem da matemática.
3	Processo	Valoriza a realização de processos no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Produto	Valoriza a obtenção de produtos no ensino e na aprendizagem da matemática.
4	Aplicação de conhecimentos	Valoriza a aplicação do conhecimento na resolução de exercícios e problemas no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Cálculo	Valoriza o cálculo e a execução de algoritmos no ensino e na aprendizagem da matemática.
5	Factos matemáticos e abstração	Valoriza os factos matemáticos e a abstração no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Matemática em contexto	Valoriza o contexto do quotidiano ou mundo real no ensino e na aprendizagem da matemática.

6	Exposição	Valoriza a explicação por parte do professor no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Exploração	Valoriza a exploração e a descoberta pelos próprios alunos, incluindo a colaboração, no ensino e na aprendizagem da matemática.
7	Memorização	Valoriza a memorização, o relembrar do conhecimento matemático tal como foi transmitido, no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Construção	Valoriza a criação de ideias, de processos e produtos pelo aluno no ensino e na aprendizagem da matemática.
8	Recursos tecnológicos	Valoriza o uso de tecnologias no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Recursos não tecnológicos	Valoriza o uso de recursos não tecnológicos no ensino e na aprendizagem da matemática.
9	Currículo e organização da escola	Valoriza aspetos relacionados com o currículo e com a organização da escola no ensino e na aprendizagem da matemática.
	Equipamento e condições físicas da escola	Valoriza aspetos relacionados com o equipamento e o espaço físico da escola no ensino e na aprendizagem da matemática.
10	Formação profissional do professor	Valoriza a formação inicial e a formação contínua do professor no ensino da matemática.
	Conhecimento e práticas do professor	Valoriza aspetos do conhecimento e das práticas do professor no ensino da matemática.

Apresentação de resultados

Nesta secção, apresentamos os resultados da análise dos dados. As percentagens são sempre relativas ao total de respostas válidas e não ao total de participantes no estudo. De notar que o número de respostas consideradas válidas não é o mesmo para os dois itens (335 para o item 7 e 288 para o item 8).

Os gráficos das Figuras 2 e 3 mostram que, ao contrário do que aconteceu com os resultados do estudo dos futuros professores de matemática do 3.º CEB e ensino secundário (Ferreira et al., 2024), estes estudantes do 1.º ano da LEB respondem de modo diferenciado quando se referem à aprendizagem ou ao ensino

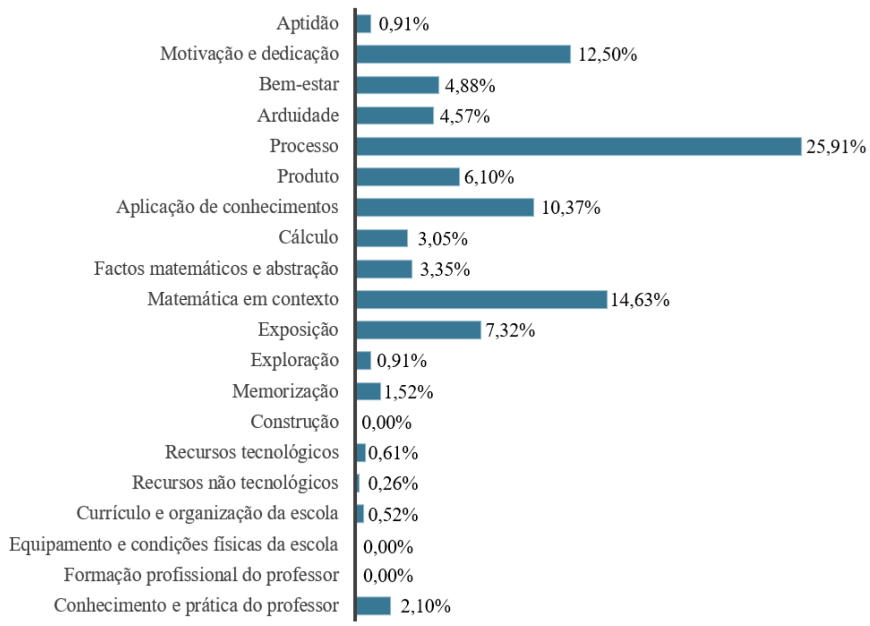


Figura 2. Percentagens da ocorrência de valores sobre a aprendizagem da matemática, manifestados pelos potenciais futuros professores inquiridos

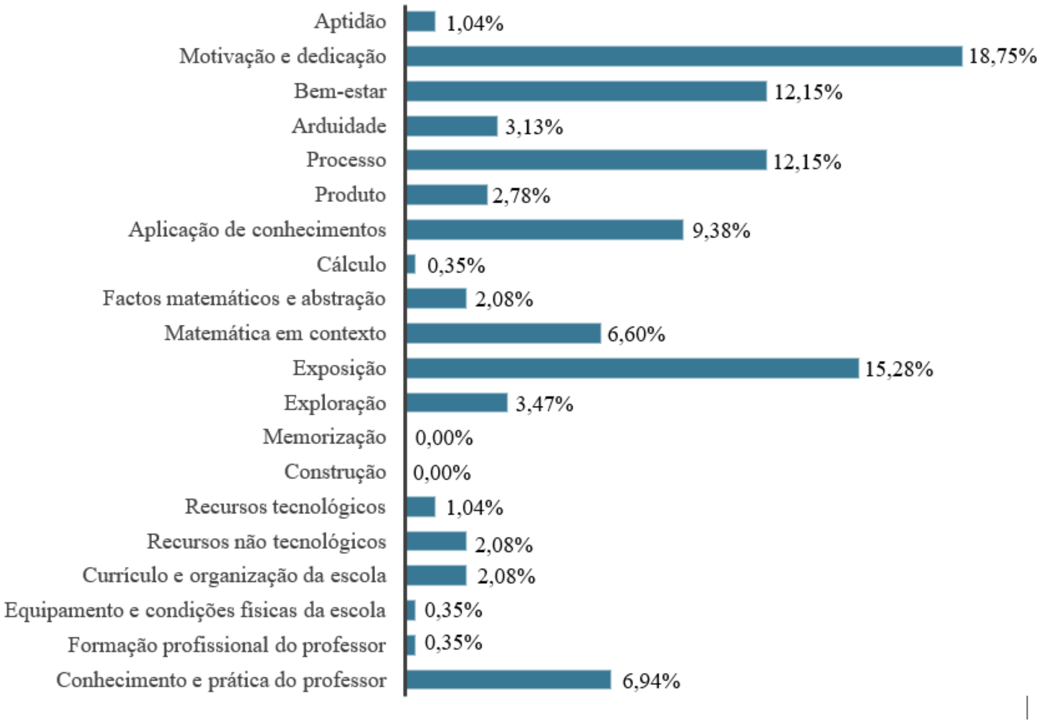


Figura 3. Percentagens da ocorrência de valores sobre o ensino da matemática, manifestados pelos potenciais futuros professores inquiridos

A partir dos gráficos das Figuras 2 e 3 é possível identificar os seis aspetos mais valorizados pelos estudantes tanto no ensino como na aprendizagem (Tabela 4). Destes, verificamos existirem quatro em comum, mas numa ordem bastante distinta.

Tabela 4. Valores mais referidos na aprendizagem e no ensino da matemática

Aprendizagem		**Ensino**	
Processo	85 (25,91%)	Motivação e dedicação	54 (18,75%)
Matemática em contexto	48 (14,63%)	Exposição	44 (15,28%)
Motivação e dedicação	41 (12,50%)	Processo	35 (12,15%)
Aplicação de conhecimentos	34 (10,37%)	Bem-estar	35 (12,15%)
Exposição	24 (7,32%)	Aplicação de conhecimentos	27 (9,38%)
Produto	20 (6,10%)	Conhecimento e prática do professor	20 (6,94%)

O *Processo* é o valor mais mencionado na aprendizagem, com 85 respostas (25,91%), já no ensino está na terceira posição, apenas com 35 respostas (12,15%). A *Motivação e dedicação* tem o maior número de respostas no ensino, 54 (18,75%), estando na aprendizagem no terceiro lugar com 41 respostas (12,50%). Ainda no ensino, a *Exposição* tem o segundo maior número de respostas (44 respostas, 15,28%), tendo na aprendizagem 24 respostas (7,32%), correspondentes à quinta posição. Já *Aplicação de conhecimentos* tem na aprendizagem 34 respostas (4.ª posição) e no ensino 27 respostas (5.ª posição). Ainda entre os seis mais valorizados estão a *Matemática em contexto* em segundo lugar na aprendizagem, com 48 respostas (14,63%), o *Bem estar* no ensino (4.ª posição), e o

Produto na aprendizagem (6.ª posição) e ainda o *Conhecimento e prática do professor* em 6.º lugar no ensino com 20 respostas.

Numa tentativa de compreender melhor o porquê das prioridades estabelecidas pelos estudantes da LEB, analisámos os valores correspondentes aos três primeiros lugares na aprendizagem e no ensino, confrontando o que resultou num e no outro.

Relativamente ao *Processo* (Tabela 5 – 1.ª posição na aprendizagem) os três aspetos mais valorizadas coincidem na aprendizagem e no ensino, mas não pela mesma ordem, sendo o *Raciocínio* mais valorizado na aprendizagem e a *Compreensão* no ensino. Na aprendizagem, os três aspetos identificados foram, em primeiro lugar e destacado, o *Raciocínio* (55,30%), seguido pela *Compreensão* (31,76%) e pela *Resolução de problemas* (12,94%). De notar que a ideia de raciocínio muitas vezes explicitada é a de "raciocínio lógico". No ensino, os mesmos três aspetos são também os priorizados, mas numa ordem diferente, aparecendo agora o *Raciocínio* na terceira posição a uma distância significativa da *Compreensão* (1.ª posição) e da *Resolução de problemas* (2.ª posição). Para além disso é ainda mencionado o *Pensamento crítico* em duas respostas.

Tabela 5. Aspetos do *Processo* na aprendizagem (1.ª posição) e no ensino (3.ª posição)

Aprendizagem		**Ensino**	
Raciocínio	47 (55,30%)	Resolução de problemas	12 (34,29%)
Compreensão	27 (31,76%)	Compreensão	11 (31,43%)
Resolução de problemas	11 (12,94%)	Raciocínio	10 (28,57%)
		Pensamento crítico	2 (5,71%)

Analisando agora a *Motivação e dedicação*, em primeira posição no ensino e terceira na aprendizagem, a Tabela 6 mostra-nos os aspetos mais valorizados pelos estudantes. Numa primeira análise, ressalta que as escolhas priorizadas pelos estudantes mostram uma maior dispersão quando comparado com o *Processo*, isto é, são indicados um maior número de aspetos. A *Dedicação* tem o maior número de respostas no ensino, enquanto na aprendizagem é a *Paciência*, mas com valores próximos da *Dedicação* e da *Motivação*. De notar que estes três aspetos ocupam os três primeiros lugares tanto na aprendizagem como no ensino e ainda que aspetos como *Motivação, Dedicação, Esclarecer dúvidas* ou *Vontade de aprender* tenham, na aprendizagem, todos o mesmo número de respostas.

Tabela 6. Aspetos da Motivação e dedicação na aprendizagem (3.ª posição) e no ensino (1.ª posição)

Aprendizagem		**Ensino**	
Paciência	6 (14,63%)	Dedicação	13 (24,07%)
Motivação	5 (12,20%)	Motivação	10 (18,52%)
Dedicação	5 (12,20%)	Paciência	8 (14,81%)
Esclarecer dúvidas	5 (12,20%)	Apresentar dúvidas	7 (12,96%)
Vontade de aprender	5(12,20%)	Vontade de aprender	4 (7,40%)
Atenção	4 (9,26%)	Concentração	4 (7,40%)

Os dados analisados revelam que, mesmo na aprendizagem, os estudantes parecem estar a referir-se ao professor com expressões do tipo "cativar os alunos" ou "os alunos precisam de se sentir motivados para sentir gosto em aprender".

A Tabela 7 mostra como os estudantes valorizam os diferentes aspetos relativos à *Matemática em contexto* que, na aprendizagem, aparece com o maior número de respostas a seguir ao *Processo*, mas, no ensino, ocupa a sexta posição. De realçar que, embora o número de respostas seja diferente, os aspetos mais valorizados nas quatro primeiras posições são os mesmos na aprendizagem e no ensino, aparecendo pela mesma ordem.

Tabela 7. Aspetos da *Matemática em contexto* na aprendizagem (2.ª posição) e no ensino (6.ª posição)

Aprendizagem		**Ensino**	
Aplicação à realidade	34 (70,83%)	Aplicação à realidade	13 (68,42%)
Usar a matemática	11 (22,92%)	Usar a matemática	3 (15,79%)
Útil no futuro	2 (4,16%)	Útil no futuro	3 (15,79%)
Valoriza a matemática	1 (2,09%)		

Na Tabela 8, referente à *Exposição*, os estudantes priorizaram tanto no ensino como na aprendizagem, o aspeto *Qualidade da explicação*, com uma percentagem superior a 80% em ambas. A *Qualidade da comunicação* (segunda posição) aparece com menor referência nos dois casos.

Tabela 8. Aspetos da *Exposição* na aprendizagem (5.ª posição) e no ensino (2.ª posição)

Aprendizagem		**Ensino**	
Qualidade da explicação	21 (87,49%)	Qualidade da explicação	37 (84,09%)
Qualidade da comunicação	1 (4,17%)	Qualidade da comunicação	4 (9,09%)
Organização da exposição	1 (4,17%)	O professor que explica bem	2 (4,55%)
O professor que explica bem	1 (4,17%)	Organização da exposição	1 (2,27%)

Estes dados colocam-nos algumas reflexões sobre o que estes estudantes valorizam no ensino e na aprendizagem. Relativamente à aprendizagem, parecem encará-la como algo em que se encontram ainda muito envolvidos e daí a valorização do *Raciocínio*, *Compreensão* e *Resolução de problemas*. Quando se referem ao ensino colocam em primeiro lugar a *Motivação e dedicação*, seguido da *Exposição* onde valorizam sobretudo a qualidade da explicação. Podemos conjeturar que os valores que atribuem ao ensino parecem estar relacionados com a sua experiência como sujeitos que foram ensinados e não com o seu futuro papel como professor que ainda está muito distante, dado que estão a iniciar a LEB.

Discussão e conclusão

Este estudo exploratório procurou identificar aspetos que estudantes da Licenciatura em Educação Básica consideram importantes no ensino e na aprendizagem da matemática. Os resultados evidenciam que estes estudantes, potenciais futuros professores que vão ensinar matemática, valorizam predominantemente o *Processo* na aprendizagem, com destaque para o *Raciocínio* e a *Compreensão*, embora o significado que atribuem ao raciocínio pareça ser bastante limitado. Este resultado acompanha o estudo de Ferreira et al. (2024) com futuros professores do 3.º CEB e ensino secundário, bem como o estudo de Chia e Zhang (2023) realizado com professores, onde o *Processo* também é bastante valorizado.

Relativamente ao ensino, os participantes priorizam em primeiro lugar a *Motivação e dedicação,* como os professores do 7.º e 10.º anos do estudo de Silvestre at al. (2023). Como já referido, os futuros professores mesmo quando se referem à aprendizagem parecem estar-se a referir ao papel que atribuem ao professor para captar o interesse dos seus alunos. De notar que, ao contrário desse estudo, valores como currículo e organização da escola são muito pouco mencionados pelos participantes neste estudo, o que pode ser devido ao facto de serem estudantes do 1.º ano da LEB e, tal como no estudo de Haciömeroğlu (2020), os seus valores serem marcados pela sua experiência como alunos do ensino não superior.

Dado que os valores priorizados pelos professores influenciam diretamente a sua prática profissional (Bishop et al., 2006; Haciömeroğlu, 2020), os formadores devem conhecer e dar a conhecer os valores dos formandos e alinhar as suas práticas nesse sentido, discutindo a existência de valores que potenciam o ensino e a aprendizagem da Matemática. Ao criarem condições para que os futuros professores reflitam sobre os seus valores e os questionem, os formadores estão a contribuir para a formação de profissionais mais conscientes de um ensino da matemática que se destine a todos.

Como afirmado, trata-se de um estudo exploratório, que não é mais do que uma abordagem inicial ao tema com estudantes a frequentar o 1.º ano da LEB. Uma primeira limitação do estudo diz respeito ao facto de apenas estarmos a analisar respostas de futuros professores estudantes do 1.º ano da LEB de quatro instituições da região de Lisboa. A circunstância de os dados serem recolhidos através de um questionário, respondido pelos estudantes no seu telemóvel pessoal, constitui uma outra limitação do estudo que importa reconhecer e completar continuando este estudo com outros instrumentos de recolha de dados como entrevistas. Consideramos importante continuar a trabalhar o tema e propomo-nos voltar a inquirir estes estudantes no final da LEB.

Referências

Akyildiz, P., Aktas; F. N., Dede, Y., & Haciömeroğlu, G. (2021). Mathematics teachers' values about teaching mathematics. *Studies in Educational Evaluation, 68,* 100954.

Andersson, A. (2011). "Curling Teacher" in mathematics education: Teacher identities and pedagogy development. *Mathematics Education Research Journal 23*(4), 437–454. doi:10.1007/s13394-011-0025-0

Barkatsas, A., & Seah, W. T. (2015). Learners' preferred mathematical task types: The values perspective. In A. Bishop, H. Tan, & T. N. Barkatsas (Eds.), *Diversity in mathematics education: Towards inclusive practices* (pp. 63–79). Springer. https://doi.org/0.1007/978-3-319-05978-5_4

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 179–191. http://dx.doi.org/10.1007/BF00751231

Bishop, A. J., Gunstone, D., Clarke, B., & Corrigan, D. (2006). Values in mathematics and science education: Researchers' and teachers' views on the similarities and differences. *For the Learning of Mathematics, 26*(1), 7–11.

Chia, H. M., & Zhang, Q. (2023). Comparing Malaysian secondary school teachers' and students' values in mathematics learning: A mixed method study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* Advance online publication. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2204103

Dede, Y. (2013). Examining the underlying values of Turkish and German mathematics teachers' decision making processes in group studies. *Kuram Ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, *13*, 690–706.

Fan (范良火), L. (2021). Exploring issues about values in mathematics education. *ECNU Review of Education*, *4*(2), 388–395. https://doi.org/10.1177/20965311211016002

Ferreira, R. T., Silvestre, A. I., Jacinto, H., Serrazina, L., Martins, C., Santos, E., Castro, J., Pires, M. V., Amado, N., & Carreira. S. (2024*). Valores em Educação Matemática de futuros professores à entrada do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário*. Comunicação apresentada no SIEM 2024, 17 e 18 julho. Associação de Professores de Matemática.

Haciömeroğlu, G. (2020). Mathematics education values portrayed by elementary student teachers. *Educational Policy Analysis and Strategic Research*, *15*(2), 259–270.

Kim, H., Kim, W., & Lee, G. (2024). What do Korean students value in mathematics learning? Insights into mathematical well-being. In Y. Dede, G. Marschall, & P. Clarkson (Eds.), *Values and valuing in mathematics education* (pp. 211–236). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-9454-0_11

Kinone, C., & Seah, W. T. (2015). International comparative study "The Third Wave" and study on values in mathematics education: Discussion on the framework of values in mathematics education by WIFI Study. In *Proceedings of the 3rd Spring Research Conference* (pp. 93–100). Japan Society of Mathematics Education.

Kinone, C., Soeda, Y., & Watanabe, K. (2020). The influences of teacher valuing on the development of student valuing in mathematics education: Data analysis of questionnaire survey in Miyazaki Prefecture using the questionnaire WIFItoo developed by international comparative study The Third Wave. *Journal of JASME: Research in Mathematics Education*, *26*(1), 43–58. https://doi.org/10.24529/jasme.26.1_43

Osman, R. Ayub, H., Ilias, M. R., Badaruddin, Z., & Mazhaimi, M. I. C (2024). Mathematics values in classroom held by pre-service teachers. *Proceedings of the 29th National Symposium on Mathematical Sciences* (pp. 040003-1 – 040003-7). AIP Publishing.

Peng, A., & Nyroos, M. (2012). Values in effective mathematics lessons in Sweden: What do they tell us? *The Mathematics Enthusiast*, *9*(3), 409–430. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1252

Seah, W. T. (2008). Valuing values in mathematics education. In P. Clarkson, & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 239–252). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09673-5_17

Seah, W. T. (2013). Assessing values in mathematics education. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193–200). IGPME.

Seah, W. T. (2016) Values in the mathematics classroom: Supporting cognitive and affective pedagogical ideas. *Pedagogical Research*, *1*(2), 53. doi: http://dx.doi.org/10.20897/lectito.201653

Seah, W. T. (2018). Improving mathematics pedagogy through student/teacher valuing: Lesson from five continents. In G. Kaiser et al. (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematics Education, Chapter 31* (pp. 561–580). ICME13 Monographs.

Seah, W. T., & Andersson, A. (2015). Beyond cognition and affect: Valuing as a volitional variable in mathematics education. In A. Bishop, H. Tan, & T. Barkatsas (Eds.), *Diversity in mathematics education: Towards inclusive practices* (pp. 167–183). Springer.

Silvestre, A. I., Jacinto, H., Serrazina, L., Amado, N., Carreira, S., Santos, E., Tomás Ferreira, R., Martins, C., Vara Pires, M., & Castro, J. (2023). Valores no ensino e na aprendizagem da matemática: Os aspetos mais valorizados por professores portugueses. *Quadrante*, *32*(2), 49–76. https://doi.org/10.48489/quadrante.32632

Yim, M., Cho, S., & Pang, J. (2020). Comparison of the mathematics educational values between pre-service and in-service elementary school teachers. *Communications of Mathematical Education*, *34*(3), 277–297. https://doi.org/10.7468/JKSMEE.2020.34.3.2

Zhang, Q. (2019). Values in mathematics learning: Perspectives of Chinese mainland primary and secondary students. In P. Clarkson, W. Seah, & J. Pang (Eds.), *Values and valuing in mathematics education. ICME-13 Monographs* (pp. 185–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-16892-6_13

Zhong, J., Seah, W. T., Cao, Y., & Zhang, Y. (2024). The role of teacher knowledge in fostering student fulfilment of values crucial for mathematical wellbeing. In Y. Dede, G. Marschall, & P. Clackson (Eds.), *Values and valuing in mathematics education: Moving forward into practice* (pp. 237–258). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-9454-0_12

CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO NO 1.º CICLO: CONTRIBUIÇÕES PARA A PRÁTICA DOCENTE A PARTIR DE UMA FORMAÇÃO CONTÍNUA

LANDSCAPES OF INVESTIGATION IN PRIMARY SCHOOL: CONTRIBUTIONS TO TEACHING PRACTICE FROM TEACHER EDUCATION

Guilherme Henrique Gomes da Silva

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil

guilherme.silva@ie.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: A Educação Matemática Crítica preocupa-se com a conexão entre a Educação Matemática e questões como equidade, justiça social, racismo, sexismo, diálogo em sala de aula, desenvolvimento de projetos, inclusão e relações de poder. O uso de cenários para investigação tem sido uma forma de abordar essas preocupações nas aulas de Matemática. Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa que visa compreender o modo como professores em serviço do 1.º ciclo utilizam cenários para investigação em sua prática letiva a partir do envolvimento em uma formação contínua. Especificamente, discutimos como quatro professoras do 4.º ano, que participaram em uma formação em seu contexto de trabalho, planejaram e implementaram um cenário para investigação com seus alunos. Os resultados sugerem que as participantes entenderam que o trabalho pedagógico envolvendo cenários para investigação está vinculado à exploração de uma questão social relevante. As tarefas foram projetadas com base em um contexto de semirrealidade, permitindo o uso de diferentes estratégias e oferecendo múltiplas soluções possíveis. Além disso, as tarefas incentivaram a reflexão crítica entre as crianças.

Palavras-chave: 1.º Ciclo, formação contínua, educação matemática crítica, educação matemática.

Abstract: Critical Mathematics Education addresses issues related to mathematics education and its connection to equity, social justice, classroom dialogue, project development, inclusion and power relations. Implementing landscapes of investigation in the classroom has been a way to address these concerns. This paper presents results from research aimed at understanding how in-service primary school teachers utilize landscapes of investigation in their teaching practice from their involvement in in-service teacher education. Specifically, we discuss how four grade 4 teachers, who participated in a teacher education course, planned and implemented a landscape of investigation with their students. The results suggest that the participants understood that work involving landscapes of investigation is linked to the exploration of a relevant social issue. The tasks were designed based on a semi-reality context, allowing for the use of different strategies and offering multiple possible solutions. Additionally, the tasks encouraged critical reflection among children.

Keywords: primary education, teacher education, critical mathematics education, mathematics education.

Introdução

Na pesquisa em Educação Matemática, a formação de professores que atuam no 1.º ciclo tem sido foco de diferentes pesquisas (Bakirci & Karisan, 2018; Gatti & Nunes, 2009; Haylock & Manning, 2014; Julio & Silva, 2018). No entanto, são poucas aquelas que têm abordado o desenvolvimento de práticas de formação que se relacionem com a exploração da Matemática como forma de compreender e lidar com questões sociais, tais como desigualdades sociais, mudanças ambientais e climáticas, violência e racismo (Civiero et al., 2022; Gutstein, 2018). O tratamento dessas e de outras questões nas aulas de Matemática têm se tornado uma exigência dos currículos escolares básicos. Como consequência, muitos professores do 1.º ciclo, principalmente aqueles em início de carreira, não se sentem preparados para trabalhar com essas questões, o que os leva a buscar formação posterior. Embora essa situação seja conhecida e discutida na literatura em Educação Matemática (Bartell, 2013; Civiero et al., 2022; Silva et al., 2021), há poucos estudos especificamente voltados para compreender como professores do 1.º ciclo podem aprender e usar tarefas de investigação matemática que permitem o tratamento de questões sociais em suas aulas como resultado de um envolvimento em programas de formação contínua.

Neste sentido, apresentamos nesse trabalho resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi o de compreender, a partir da perspectiva da Educação Matemática Crítica, como professores do 1.º ciclo utilizam a metodologia de trabalho com cenários para investigação em sua prática didática a partir do envolvimento em uma formação contínua. Neste texto, de forma específica, discutimos o modo como quatro professoras do 4.º ano do 1.º ciclo, participantes de um curso de formação contínua, planejaram e implementaram um cenário para investigação com foco em problematizar aspectos sociais com seus alunos.

Perspectiva teórica

A Educação Matemática Crítica preocupa-se, entre outros aspectos, com a conexão entre a Educação Matemática e questões como equidade, justiça social, racismo, sexismo, diálogo em sala de aula, desenvolvimento de projetos, inclusão e relações de poder (Skovsmose, 2023). O uso de cenários para investigação tem se mostrado como uma maneira de abordar essas e outras preocupações nas aulas de Matemática, além de permitir a exploração e o desenvolvimento de atividades significativas que favorecem a construção de conceitos e ideias matemáticas.

Cenários para investigação são ambientes de aprendizagem alternativos ao paradigma do exercício, caracterizado por um padrão de aulas em que os alunos trabalham com exercícios, cada um dos quais tem uma, e apenas uma, solução correta. Em cenários para investigação, os alunos são convidados a envolverem-se em tarefas que oferecem oportunidades para que possam (a) engajar-se em processos exploratórios e investigativos, os quais incluem ações como criar linhas de raciocínio, conjecturar, testar hipóteses, realizar testes, levantar e defender ideias, construir novas hipóteses ou criar modelos (Ponte et al., 2016; Skovsmose, 2023); e (b) explorar e refletir criticamente sobre questões sociopolíticas, muitas delas controversas (Skovsmose, 2023).

Geralmente, essas tarefas possuem diferentes caminhos que podem ser trilhados pelos alunos e até mesmo diferentes respostas (Ponte, et al., 2016). Isso requer a necessidade de o professor assumir riscos (Penteado & Skovsmose, 2022; Silva & Penteado, 2013), já que muitas vezes não é possível antecipar todas as situações que podem acontecer durante a investigação dos alunos. No paradigma do exercício e em cenários para investigação, as tarefas podem fazer referência a assuntos puramente matemáticos, a uma semirrealidade (situações/informações inventadas e simplificadas) e à realidade (situações/informações reais). O padrão comunicativo se baseia no diálogo, entendido como um tipo de comunicação que emerge em processos educacionais (Milani, 2020; Skovsmose, 2023). O diálogo se relaciona com a busca por conhecer algo e com o questionamento, visando o aprendizado. É um processo aberto, já que seu curso é imprevisível. Também incorpora elementos de equidade, pois o que importa é o conteúdo que está sendo dito e não a posição do participante (Skovsmose, 2023).

Neste trabalho, consideramos o conhecimento docente como plural e heterogêneo. Segundo Ponte (2012), o professor se desenvolve profissionalmente a partir da reflexão e da ação em sua prática. Para compreender os diferentes modos em que o conhecimento docente pode ser construído, nos respaldamos no Modelo do Conhecimento Didático (Ponte, 2012). Neste modelo, há quatro dimensões: conhecimento da Matemática a ensinar, conhecimento do currículo, conhecimento dos alunos e conhecimento da prática letiva. Esta última dimensão é o núcleo central do modelo. Sua essência diz respeito aos conhecimentos necessários para a condução das situações de aprendizagem dos alunos. Inclui diversos elementos, como o planejamento didático a médio e a longo prazo, e que envolve a elaboração específica de cada aula; a escolha, adaptação e preparação das tarefas e a maneira como serão realizadas em sala de aula, o modo de organização dos alunos em sala de aula, a criação de uma cultura de aprendizagem, a escolha e a forma como se desenrola a comunicação, o processo de avaliação dos alunos e do ensino do professor, e as representações matemáticas a usar. Inclui ainda o que se passa após a aula, como a reflexão sobre os processos de ensino usados e a forma como a aprendizagem ocorreu a partir das tarefas propostas.

Metodologia

Na pesquisa aqui discutida, usamos a metodologia de estudo de caso com uma abordagem qualitativa (Ponte, 2006). Os dados foram produzidos através de um curso de formação contínua realizada com professores do 1.º ciclo português. A formação possuía uma carga horária de 75 horas e foi realizada no contexto de trabalho dos participantes. Analisamos o envolvimento dos professores nessa formação, que tinha como foco particular envolvê-los com o trabalho com cenários para investigação. Participam 12 professoras do 1.º ciclo português de um agrupamento escolar na região de Lisboa (referidas adiante com nomes fictícios). As participantes são do mesmo agrupamento e nove delas trabalham na mesma escola. Com exceção de duas, todas as professoras possuem mais de 15 anos de experiência docente. O curso de formação continua desenvolve-se no âmbito da parceria universidade-escola, com creditação para os professores participantes. As professoras foram convidadas por intermédio da coordenação do 1.º ciclo do agrupamento escolar.

Realizámos até o momento um ciclo formativo completo, de dois previstos, durante o 2.º semestre letivo de 2023/2024. Foram realizadas seis sessões que ocorreram semanalmente às segundas-feiras, com início às 17h e duração de 2h 30min. Houve ainda sessões em que as professoras se reuniram em equipes em horários alternados para andamento do planejamento e produção dos materiais didáticos, além da realização de aulas planejadas com seus estudantes. Na próxima seção detalhamos o modelo formativo utilizado.

O método empregado na pesquisa é a observação participante (Lüdke & André, 2013). Integramos neste método três instrumentos de recolha de dados: gravação em vídeo e áudio das sessões de formação, notas no caderno de campo do investigador durante a realização das aulas planejadas pelas professoras e entrevistas semiestruturadas.

Adicionalmente, compõe os dados do estudo os materiais utilizados e explorados pelas professoras durante as sessões de formação, os materiais produzidos por elas para a realização das aulas e as interações e comentários que realizaram em um ambiente virtual em que são depositados os materiais da formação. Todos os dados foram transcritos. Utilizamos a análise de conteúdo categorial (Bardin, 2016), com o apoio do software MaxQDA. Adotando uma abordagem interdisciplinar, utilizamos as lentes teóricas da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2023), juntamente com um enquadramento do Conhecimento Didático Docente (Ponte 2012), que permite o aprofundamento da interpretação dos dados e da inferência necessária para atingir os objetivos do estudo. A pesquisa está na fase de análise preliminar de dados.

Processo formativo

Para a formação, utilizamos um modelo prático denominado *Ciclos de Formação Docente para Educação Matemática Crítica* (Afini & Silva, 2024), que envolve a criação de oportunidades para a atuação e reflexão dos professores sobre seu contexto educacional (Ribeiro & Ponte, 2020) na perspectiva da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2023).

Os ciclos são compostos por quatro etapas. A etapa 1 (E1) abrange o estudo teórico das ideias da Educação Matemática Crítica relacionadas com o trabalho com cenários para investigação. Os professores são estimulados a se envolverem em tarefas com essa perspectiva relacionadas com conceitos matemáticos, semirrealidade e realidade. É um momento em que vivenciam diferentes tarefas que podem ser realizadas pelos estudantes ao mesmo tempo que refletem sobre a possibilidade de sua utilização ou adaptação com sua turma. Para que isso ocorra, é necessário o aceite do professor, que, evidentemente, tem características diferentes do aceite de estudantes quando são propostos cenários para investigação (Afini & Silva, 2024). Para potencializar o aceite dos professores usamos ações como a entrega de materiais impressos no formato de caderno de acompanhamento, o uso de materiais manipuláveis e a proposta de tarefas que possuem relação direta com conteúdos matemáticos do contexto escolar do professor (Afini & Silva, 2024).

A etapa 2 (E2) envolve o planejamento colaborativo, pelos participantes, de uma ou mais aulas baseadas em cenários para investigação. Durante essa etapa, os professores "testam" as propostas que desenvolveram e muitas vezes se esforçam para antecipar situações que podem surgir. As tarefas são implementadas na etapa 3 (E3), com o apoio dos formadores. Neste momento, os professores possuem atenção especial ao modo como a aprendizagem dos alunos acontece, refletem sobre a abordagem adotada em sala de aula e identificam os desafios e as oportunidades de aprendizagem propiciadas pelo cenário para investigação planejado. Os professores são estimulados a relatos sobre esses tópicos tão logo a aula se encerre, utilizando narrativas escritas (ou narradas em áudio), escrita cronológica do relato ou outras formas.

Na etapa 4 (E4), há uma reflexão coletiva sobre a prática realizada dentro do contexto formativo. Neste momento, os participantes compartilham suas experiências, relatam as dinâmicas utilizadas em sala de aula, destacam os principais resultados e avaliam as áreas para melhoria, mudança ou continuação. Os participantes também discutem suas dificuldades e o que se mostrou significativo na aula, recebendo feedback e sugestões, entre outros aspectos. Uma vez concluídas as quatro etapas, um novo ciclo se inicia.

Na etapa 1 da formação, durante três sessões iniciais, as professoras vivenciaram diferentes cenários para investigação. Na primeira, realizaram investigações com o Tangram no intuito de trabalhar diferentes noções de área e relações matemáticas entre as peças do jogo. Posteriormente, utilizaram as ideias matemáticas discutidas para estimar o desflorestamento no mundo e pensar em alternativas que poderiam ser feitas para enfrentar essa situação. Na segunda sessão, investigaram propriedades matemáticas da tabela pitagórica. Exploraram diversas propriedades e trabalharam com diferentes operações matemáticas nesse processo, incluindo a tabuada. Posteriormente, na terceira sessão, utilizaram os conceitos discutidos para explorar o custo de se realizar uma alimentação saudável. As professoras vivenciaram uma tarefa em que uma família fictícia (Família Gorgonzola) possuía uma rotina de alimentação nada saudável. O cenário para investigação as convidava a analisar os alimentos consumidos por essa família, propor uma dieta mais saudável e comparar, em folhetos de diferentes supermercados, o custo para se ter uma alimentação saudável.

Na Etapa 2 do ciclo de formação (sessões 4 e 5), as professoras foram convidadas a planejar um cenário para investigação que abordasse uma temática social que considerassem relevante para o contexto dos conteúdos matemáticos que estavam a trabalhar com suas turmas. As doze professoras foram divididas em três grupos, de acordo com o ano de escolaridade em que atuavam (2.º, 3.º ou 4.º ano). O grupo do 4.º ano foi formado por quatro professoras: Teresa, Rosa, Fátima e Eunice. Teresa e Rosa eram docentes de duas salas. Fátima e Eunice eram coordenadoras pedagógicas. Elas planejaram um cenário para investigação envolvendo o trabalho com operações matemáticas, valores monetários, estimativas e percentagens e a conscientização sobre gastos excessivos. As tarefas foram realizadas em seis aulas de uma hora, ao longo de três dias, trabalhadas nas turmas de Teresa e Rosa.

Na tarefa 1, em grupos, os alunos foram convidados a avaliar o orçamento de uma família fictícia, que apresentava gastos maiores do que o seu rendimento. A família também gostaria de poupar 10% do rendimento todo mês, para emergências. Havia um gasto excessivo com roupas e acessórios (250€). Inicialmente, os alunos foram convidados a realizar cálculos e a verificar se o rendimento da família era suficiente para cobrir os gastos. Verificando que o orçamento era excessivo, precisavam elaborar um novo orçamento para a família, escolhendo itens que eram essenciais e não essenciais.

Na tarefa 2, as crianças foram convidadas a visitar os "perdidos e achados" da escola e selecionar amostras de diferentes roupas. Os alunos, utilizando frações e percentagens, precisavam atribuir um valor justo para cada artigo, levando em conta seu estado, a marca e o valor de uma peça nova. Usaram a internet para fazer essa pesquisa.

Na tarefa 3, com as peças etiquetadas, criou-se uma "feira" na sala de aula. Cada grupo possuía 60€ para realizar compras dos artigos e precisava decidir quais comprar, de forma a aproveitar o dinheiro da melhor forma possível. Um grupo era responsável pela venda, atuando como feirantes. As crianças manipularam dinheiro fictício, realizando os cálculos necessários. Ao término, as professoras conduziram uma discussão coletiva levando as crianças a refletir sobre o valor que poderia ser arrecadado para a escola com a venda das roupas dos perdidos e achados. As crianças fizeram estimativas e forneceram ideias apropriadas sobre como usar esse recurso.

Resultados e discussão

As tarefas elaboradas e propostas pelas professoras do 4.º ano apresentaram quatro características principais: (i) exploravam um assunto social relevante e próximo da realidade das crianças, (ii) utilizaram a semirrealidade para explorar este assunto, (iii) tinham espaço para a utilização de diferentes estratégias matemáticas e diferentes respostas, fornecendo poder de decisão às crianças e (iv) levavam a reflexões críticas.

Entendemos essas características como indícios da maneira como essas professoras construíram seu entendimento sobre o trabalho com cenários para investigação com alunos do 4.º ano e as abordamos a seguir.

Exploração de uma questão socialmente relevante próxima à realidade dos alunos

Durante o primeiro encontro de planejamento, as professoras passaram um tempo importante discutindo sobre as definições das aprendizagens relacionadas à temática social e ao conteúdo matemático que seriam abordadas nas tarefas. Começaram com uma “chuva de ideias” sobre diferentes questões sociais que poderiam ser adequadas para trabalhar com crianças de 9 a 10 anos. Ao fim de algum tempo, definiram o aspecto social do excesso de consumo para posteriormente elencar os objetivos matemáticos que iram trabalhar, de acordo com o currículo português. Desta forma, elas conectaram o trabalho com cenários para investigação com a problematização de uma questão social que fosse relevante para as crianças e que de alguma maneira estivesse próximo da realidade destas (Gutstein, 2018; Skovsmose, 2023). Além disso, o movimento de negociação entre o aspecto social e o conteúdo matemático foi marcado por idas e vindas. Por exemplo, no trecho a seguir, evidenciamos uma das discussões do grupo na qual as professoras começaram a problematizar a importância da conscientização sobre gastos desnecessários para posteriormente voltarem a atenção para um problema da escola, relacionado com a grande quantidade de roupas e acessórios esquecidos pelas crianças, que não eram reclamados pelos pais e que ficavam espalhados em um balcão de “perdidos e achados” na entrada da escola:

> Rosa: Mas também podíamos fazer assim: cada criança ia ver o que é que tinha em casa, o excesso de roupa que tinha nos roupeiros. Roupa que já não vestiam há não sei quanto tempo...
>
> Eunice: Olha, não. Não vamos mais longe. Podemos chamá-los à atenção para o que está aqui no pátio da escola. Aquela montanha de roupas esquecidas. E escrever ali, qualquer coisa, fazer um cartaz ou qualquer coisa assim...
>
> Fátima: Agora, não sei como é que a gente começava. Porque nós temos que introduzir o conteúdo... Temos que dizer o que é que nós pretendemos.
>
> Teresa: Nós estamos a partir do problema social “excesso de consumo”. Nós podemos partir disso, o desaproveitamento. Mas 1.º temos que entender o que é que é a atividade Matemática. Depois, eles próprios é que iam chegar à conclusão que não era benéfico a família todo dia vir aqui comprar uma roupa, uma peça de roupa. (Encontro 4)

Quando professores planejam tarefas matemáticas que se podem conectar a questões sociais há uma tensão no equilíbrio entre os objetivos matemáticos e os objetivos relacionados à questão social e, muitas vezes, acabam focando mais atenção na componente social (Bartell, 2013). Esse aspecto também ocorreu com as professoras durante o planejamento das tarefas. Foi apenas no segundo encontro de planejamento, já decidido o aspecto social a trabalhar, que o grupo definiu as aprendizagens matemáticas a desenvolver:

Fátima: Frações. Porque nós vamos dizer assim, o valor é a 50 euros, o valor real. Então vamos vender por metade. Será que é melhor por uma quarta parte?

Teresa: Também pode ser percentagens. Isso, já está.

Rosa: Estimativas, percentagens, adição, operações com valores monetários.

Fátima: Nós estamos a fazer uma amostra. Escreve aí no planejamento. Comercializar o vestuário dos perdidos e achados existentes com uma pequena amostra. Cinco peças de cada. Porque não podemos estar a pôr tudo, não. Cinco peças de cada. Cinco de manga curta, cinco de manga longa, cinco de cada. (Encontro 5)

Uso da semirrealidade para explorar um assunto social

Outra característica das tarefas planejadas pelo grupo foi o uso de tarefas na semirrealidade para desencadear o trabalho investigativo das crianças. Isso pode ter ocorrido, em grande parte, pela influência da própria formação em que elas participavam. Como destacado anteriormente, durante a sessão 3 da Etapa 1 (E1) da formação, as professoras vivenciaram a tarefa em que a Família Gorgonzola possui uma rotina de alimentação pouco saudável. Elas foram convidadas a analisar os alimentos consumidos por essa família, pensar e propor uma dieta que fosse mais saudável e posteriormente utilizar folhetos de diferentes supermercados para comparar o alto custo para se ter uma alimentação saudável. O fato de se trabalhar com uma semirrealidade para lidar com um aspecto social (no caso, alimentação saudável) influenciou, de alguma maneira, o planejamento das professoras para discutir a questão social que elas pretendiam abordar com as crianças, como se vê no diálogo:

Eunice: E se nós disséssemos isto usando uma família fictícia? [Toma em sua mão a tarefa da família Gorgonzola]. Vejam essa que fizemos: "A rotina da alimentação da família Gorgonzola parece pouco saudável. Discutia com os colegas...". "A atitude dessa família era correta ou não era correta? Vamos ajudar a família? Para isso precisamos elaborar uma nova ementa..." [começa a folhear a tarefa e mostrar para as outras professoras do grupo].

Fátima: E a família podia gastar muito com roupas.

Teresa: A ideia é levar as crianças a entenderem que não devemos comprar roupa todos os meses. E a partir daí, de uma história em que a mãe ou o pai é um gastador nato... E chega ao fim do mês, terminado o mês, a família não tem dinheiro para pagar a água, o gás.

Fátima: E depois temos aqui a nossa entrada, onde está ali um monte de roupa. Porque os miúdos não tomam conta da roupa deles, porque eles têm tanta roupa … que nem sabem o que falta.

Teresa: E os pais também não se preocupam com o resultado, nem o conhecem.

Rosa: Pois, também podíamos falar no final o que fazer com aquelas roupas da entrada da escola. Se ninguém vier buscar, o que é que podemos fazer com elas? Qual é a solução que vocês dão àquelas roupas? Doar? Vendê-las? (Encontro 4)

Usualmente, nos manuais escolares de Matemática, há muitas tarefas no paradigma do exercício. Por exemplo, muitas tarefas na semirrealidade apenas se preocupam com a aplicação de um algoritmo ou conceito aprendido pelas crianças. Quando professores iniciam o desenvolvimento de cenários para investigação, um caminho utilizado é o de "abrir um exercício" (Milani, 2020). Isso significa utilizar os exercícios e problemas dos manuais e encontrar uma maneira de os adaptar para um formato investigativo. As professoras do 4.º ano também seguiram esse movimento:

Fátima: [Começa a ler uma tarefa do manual de Matemática] "O João acabou a faculdade e começou a trabalhar. Ele tem um rendimento mensal de 1.200 euros. Para que o dinheiro chegue para as despesas do mês, ele fez um orçamento. Observa, ele tem estas despesas: a prestação do carro, ajuda nas despesas da casa dos pais [...] Depois de pagar todas as despesas, com o que saldo fica o João?".

Rosa: Mas isto é paradigma do exercício.

Eunice: Esse é paradigma do exercício.

Fátima: OK. Mas aí já é que partimos disso...

Teresa: Sim.

Fátima: E agora, por exemplo, como é que eles investigam?

Teresa: Colocamos três ou quatro coisas que não são mesmo importantes, para ver o que é que eles retiram. Por exemplo, eles podiam retirar o valor gasto na roupa. Os outros podiam ter outras coisas. Outro grupo pode retirar, não sei, da alimentação. E aí vamos encontrar o que é supérfluo para uns não é para outros.

Eunice: E aí, pode ser essa a ideia, pode ser "você precisa justificar a escolha".

Fátima: Isso mesmo. Claro, claro.

Teresa: O que é que pode ser, se vieram apresentar o orçamento, será que dava as contas do tipo...

Rosa: Pois, porque é que se tu retirares a roupa, quanto vai ser o orçamento que é melhor? Vai haver algum saldo?

Fátima: É que damos um orçamento e eles aí fazem um novo. (Encontro 5).

Um caminho para a elaboração de cenários para investigação passa pela transformação de exercícios em tarefas investigativas (Milani, 2020). No diálogo anterior, as professoras tomaram um exercício e discutiram ideias para que ele pudesse ser modificado ou adaptado de forma a se tornar uma tarefa investigativa.

Tarefas que permitem o uso de diferentes estratégias e respostas e fornecem poder de decisão aos estudantes

As tarefas que compunham o cenário para investigação que as professoras planejaram ofereciam aos alunos oportunidades para que utilizassem diferentes estratégias de resolução e apresentavam questões com diferentes respostas, de acordo com o poder de escolha das crianças. Isso é uma característica que torna as tarefas investigativas muito ricas no trabalho com a Matemática (Ponte et al., 2016) e contribui para a superação do paradigma do exercício (Skovsmose, 2023). Na tarefa 1, as crianças foram convidadas a avaliar um orçamento mensal de uma família em que havia gastos excessivos com roupas e acessórios. Durante a realização da tarefa, as crianças fizeram cálculos (de diferentes maneiras) e perceberam que o rendimento da família não era suficiente para cobrir o orçamento. Posteriormente, precisaram de elaborar um novo orçamento que coubesse no rendimento da família. Nessa elaboração, as crianças poderiam escolher itens a retirar, adicionar ou mesmo a alterar o valor. Isso gerou diferentes respostas e enriqueceu a discussão coletiva realizada na aula:

Rosa: Muitos dos miúdos disseram realmente que não se justificava gastarem 250 euros com roupas. Acharam que era muito dinheiro, era excessivo e que não se justificava gastar esse dinheiro todos os meses. Então, excluíram logo os 250 euros. Excluíram também... houve um menino que fez uma observação e disse “olha professora, mas também, refeições em restaurantes, 60 euros, três pessoas, também só vão uma vez”. Opa, foi muito giro. Portanto, também, não dá assim para tantas vezes. Eu disse, “pois, mas se calhar, o que é que tu achas? O que é que vocês acham?”. Disseram “Ah, não, então vamos tirar. Se o dinheiro não chega, não vamos ao restaurante”. (Encontro 6)

Nas tarefas, com exceção da parte 1 da tarefa 1, não havia uma única solução e as crianças poderiam ou não explorar a questão do valor excessivo do orçamento relacionado com o gasto com vestuário e acessórios. Isso era um aspecto-chave da tarefa 1 que desencadearia as discussões sobre excesso de consumo e a exploração do excesso de roupas esquecidas na escola. Dessa forma, ao planejar essa tarefa, as professoras “assumiram riscos” (Penteado & Skovsmose, 2022; Silva & Penteado, 2013). Ou seja, não era possível prever com exatidão o caminho que as escolhas das crianças poderiam levar. Isso não foi tomado como obstáculo pelas professoras, mas como uma potencialidade da tarefa:

Rosa: Estávamos a imaginar as respostas dos alunos e não conseguimos pensar em tudo.

Teresa: Ah vão nos surpreender... vão nos surpreender...

Fátima: Investigação é isso... por mais que a gente... estou a supor que eles vão dizer isso, estou a supor que eles vão dizer aquilo... Por mais que a gente tente antecipar o que pode acontecer, a gente nunca antecipa tudo. (Encontro 5)

Tarefas que estimulam reflexões críticas

De forma geral, cenários para investigação propiciam espaços para os alunos refletirem de forma crítica. Esse movimento de reflexão crítica pode ser feito de várias maneiras. Por exemplo, em uma tarefa puramente matemática, pode ser realizado quando os alunos escolhem determinada estratégia de resolução em detrimento de outra (Ponte, et al., 2016) ou quando analisam criticamente uma situação de injustiça social a partir de uma tarefa em um contexto de realidade ou semirrealidade (Gutstein, 2018; Skovsmose, 2023). A tarefa desenvolvida pelas professoras fez um movimento de oferecer situações para reflexão crítica das crianças, em diferentes maneiras:

> Teresa: Abordou-se a caixa da roupa de "Perdidos e Achados" existente na escola. Uma aluna afirmou "Os alunos têm muita roupa e os pais nem dão pela sua falta". A partir daqui surgiram várias ideias para fazer com toda a roupa dos Perdidos e Achados: doar a instituições de caridade ou a crianças mais pobres da escola ou fazer uma feira para angariar dinheiro para escola. (Instrumento de avaliação da Etapa 3)

O cenário para investigação trabalhado pelas professoras do 4.º ano mostrou potencial para envolver as crianças com assuntos controversos (Skovsmose, 2023). Por exemplo, alguns alunos poderiam considerar que os gastos com roupas e acessórios pela família não eram exagerados ou que o problema das roupas esquecidas na escola não se relacionava ao excesso de consumo, mas a outros aspectos como falta de memória ou falta de responsabilidade. Ou seja, ao elaborar cenários para investigação que propiciem oportunidades para as crianças refletirem criticamente sobre questões sociais, as professoras abriram uma porta para que discussões sobre assuntos que tradicionalmente não fazem parte da rotina das aulas de Matemática. Além de abordar a temática do excesso de consumo, o cenário para investigação também poderia levar a outras discussões, como a produção de roupas que exploram o trabalho infantil, o rendimento familiar justo e impacto ambiental relacionado ao consumo excessivo.

Conclusão

Práticas de desenvolvimento profissional docente devem ser planejadas como um processo que favoreça o crescimento pessoal dos participantes e devem envolver elementos relacionados com a didática de forma ampla, ocorrendo em interação com outros profissionais da educação e resultando em uma melhoria na competência prática em sala de aula (Ponte, 2012). Um dos principais objetivos da formação que propusemos foi oferecer oportunidades para a ampliação do conhecimento da prática letiva das participantes (Ponte, 2012). O engajamento na elaboração e no desenvolvimento de um cenário para investigação permitiu às professoras iniciarem um movimento de se pensar em tarefas para além do paradigma do exercício. Os resultados deste estudo sugerem que essas professoras entenderam que o trabalho com cenários para investigação deve se conectar à exploração de um assunto social, o qual foi ponto de partida para o planejamento das tarefas, com posterior encaixe dos conteúdos matemáticos do currículo que poderiam ser trabalhados ao abordar a temática. As tarefas pensadas pelas professoras a partir de uma semirrealidade, permitiram a utilização de diferentes estratégias de resolução, apresentando diferentes possibilidades de resposta e propiciaram reflexões críticas pelas crianças. Estes elementos evidenciam a forma como as professoras compreenderam e colocaram em ação o trabalho com cenários para investigação em sala de aula.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela União Europeia, Horizon-MSCA-2022-PF-01, sob a concessão 101103353. As visões e opiniões expressas são, no entanto, apenas dos autores e não refletem necessariamente as da União Europeia ou da Agência Executiva de Pesquisa Europeia (REA), entidades que não podem ser responsabilizadas por elas.

Referências

Afini, D. C. & Silva, G. H. G. (2024). O desenvolvimento de cenários para investigação na formação continuada de professores dos anos iniciais do ensino fundamental. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática 38*, e240028.

Bakirci, H., & Karisan, D. (2018). Investigating the preservice primary school, mathematics and science teachers' STEM awareness. *Journal of Education and Training Studies, 6*(1), 32-42.

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Bartell, T. G. (2013). Learning to teach mathematics for social justice: Negotiating social justice and mathematical goals. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(1), 129-163.

Civiero, P. A. G., Milani, R., Lima, A. S., & Lima, A. S. (2022). *Educação Matemática Crítica: Múltiplas possibilidades na formação de professores que ensinam Matemática*. SBEM.

Gatti, B. A., & Nunes, M. M. R. (2009). *Formação de professores para o ensino fundamental*. Fundação Carlos Chagas/Departamento de Pesquisas Educacionais.

Gutstein, E. R. (2018). The struggle is pedagogical: Learning to teach critical mathematics. In P. Ernest (Ed.), *The philosophy of mathematics education today* (pp. 131-143). Springer.

Haylock, D., & Manning, R. (2014). Mathematics explained for primary teachers (5 ed.). SAGE

Julio, R. S., & Silva, G. H. G. (2018). Compreendendo a formação Matemática de futuros pedagogos por meio de narrativas. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1012-1029.

Lüdke, M., André, M. (2013). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. LTC.

Milani, R. (2020). Diálogo em Educação Matemática e suas múltiplas interpretações. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática, 34*(68), 1036-1055.

Penteado, M. G., & Skovsmose, O. (2022). *Landscapes of investigation: Contributions to critical mathematics education.* OpenBook.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2016). *Investigações matemáticas na sala de aula* (3 ed.). Autêntica.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké 28*, 1-20.

Silva, G. H. G., Lima, I. M, & Gutiérrez, F. A. (2021). *Educação Matemática Crítica e a (in)justiça social: práticas pedagógicas e formação de professores.* Mercado de Letras.

Silva, G. H. G., & Penteado, M. G. (2013). Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de Matemática diante da imprevisibilidade. *Ciência & Educação*, *19*(2), 279-292.

Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer.

DAS TAREFAS TRADICIONAIS ÀS TAREFAS MATEMÁTICAS CRIATIVAS
FROM TRADITIONAL TASKS TO CREATIVE MATHEMATICAL TASKS

Adriana Santos Sousa
Universidad de Santiago de Compostela, Espanha
adrianassousa@gmail.com

Maria Teresa Fernández Blanco
Universidad de Santiago de Compostela, Espanha
teref.blanco@usc.es

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Brasil
professorataniagusmao@gmail.com

Resumo: O ensino tradicional de matemática, com foco em memorização e procedimentos repetitivos, tem dificultado o engajamento dos alunos e limitado sua criatividade. Essa abordagem padronizada, por vezes, impede que os estudantes desenvolvam processos investigativos e resolução de problemas mais complexos. Este artigo visa responder à pergunta: “Como as tarefas matemáticas tradicionais podem ser redesenhadas para promover a criatividade nos estudantes?” por meio de uma investigação qualitativa e interventiva. Para tanto, utilizamos os indicadores do Ciclo de Estudos e Desenho de Tarefas à luz da criatividade para que os professores, em um ciclo formativo *online*, pudessem redesenhar uma tarefa fechada, considerada tradicional, em outra tarefa que promovesse o desenvolvimento do pensamento criativo matemático dos estudantes. Os resultados apontam que, mesmo com os avanços alcançados pela formação, os professores ainda se sentem inseguros e precisam de mais apoio para reconhecer, vivenciar e desenhar tarefas mais criativas e desafiadoras.

Palavras-chave: desenho de tarefas, critérios de idoneidade didática, matemática, criatividade.

Abstract: Traditional mathematics teaching, with its focus on memorization and repetitive procedures, has hindered student engagement and limited their creativity. This standardized approach sometimes prevents students from developing investigative processes and solving more complex problems. This article aims to answer the question: “How can traditional mathematical tasks be redesigned to promote creativity in students?” through a qualitative and interventional investigation. To this end, we used the indicators of the Study Cycle and Task Design in light of creativity so that teachers, in an online training cycle, could redesign a closed task, considered traditional, into another task that would promote the development of students' creative mathematical thinking. The results indicate that, even with the advances achieved in training, teachers still feel insecure and need more support to recognize, experience and design more creative and challenging tasks.

Keywords: task design, didactic suitability criteria, mathematics, creativity.

Introdução

A educação matemática tem enfrentado desafios relacionados à promoção de uma aprendizagem criativa e engajadora para os estudantes. O modelo "tradicional" de ensino, que enfatiza a repetição de procedimentos (Pochulu et al., 2013) e a memorização de fórmulas, muitas vezes torna a matemática uma disciplina vista como complexa e desmotivadora. Este cenário limita o potencial criativo e investigativo dos estudantes, que acabam restringindo-se a seguir soluções pré-definidas para problemas padronizados.

Com a crescente necessidade de formar indivíduos capazes de resolver problemas de maneira inovadora e de aplicar o pensamento crítico no dia a dia, torna-se urgente reformular as metodologias de ensino da matemática. A criatividade, nesse contexto, surge como um elemento para possível superação desses desafios.

Neste sentido, propomos a questão de pesquisa: como as tarefas matemáticas tradicionais podem ser redesenhadas para promover a criatividade em nossos estudantes? Por tarefas tradicionais entendemos aquelas com foco no treino repetitivo e na memorização de fórmulas e ênfase nos resultados. Essas tarefas geralmente exigem uma resposta única, alcançada por meio de um método específico, estabelecido previamente pelo professor ou material didático (Pochulu et al., 2013). Embora tenham seu valor em determinados contextos, esse tipo de tarefa pode limitar o desenvolvimento do pensamento criativo e da autonomia dos alunos. Assim, realizamos uma reflexão sobre o Ciclo de Estudos e Desenho de Tarefas (CEDT) (Gusmão & Font, 2020) com foco na criatividade para o redesenho de tarefas tradicionais de maneira a ampliar o potencial criativo e a aprendizagem de estudantes. Esse tema é objeto de estudo do Grupo de Innovación Docente em Educación Matemática (TESELA), da Universidad de Santiago de Compostela (USC-Espanha), e do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática (GDICEM), da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB-Brasil), coordenados, respectivamente, pela segunda e terceira autoras deste artigo.

O estudo em questão é um recorte da pesquisa de doutoramento, da primeira autora, intitulada "A criatividade dos (futuros) professores para o desenho de tarefas matemáticas", que tem por objetivo geral analisar o processo de aprendizagem e criatividade em (futuros) professores para desenhar tarefas matemáticas próprias e originais de forma individual e coletiva, visando identificar os conhecimentos e critérios que utilizam para desenhá-las. Para isso, a pesquisa toma como referenciais teóricos os Critérios de Idoneidade Didática (CID), do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS) (Godino et al., 2008; Godino, 2024) com foco na criatividade.

Pretende-se com o estudo contribuir para a prática e formação docente, uma vez que analisar e redesenhar tarefas matemáticas pode promover o desenvolvimento de conhecimentos e competências didático-matemáticas em professores e futuros professores (Gusmão, 2006, 2019; Rodrigues, 2019; Sousa & Gusmão, 2023), bem como estimular a curiosidade de estudantes e aumentar o engajamento e a qualidade das suas aprendizagens. A aplicação de atividades criativas também pode ajudar a superar a visão tradicional da matemática como uma disciplina puramente técnica, ampliando suas possibilidades educativas (Liljedahl, 2024).

O artigo apresenta, na primeira secção, o referencial teórico sobre criatividade na educação, o que são e os tipos de tarefas, o CEDT e o redesenho de tarefas matemáticas. Em seguida, é referido o percurso metodológico adotado na pesquisa. A secção de resultados e discussão aborda os principais achados do estudo e exemplos práticos de tarefas redesenhadas, com foco na criatividade. Por fim, a conclusão sintetiza os resultados e propõe reflexões para a prática docente e futuras pesquisas.

A criatividade na educação

Embora os estudos da criatividade sejam advindos da psicologia (Beghetto, 2017; Csikszentmihalyi, 2020; Guilford, 1950; Rhodes, 1961; Torrance, 1966; Wallas, 1926), no contexto educacional, pode ser definida como a capacidade de gerar ideias originais e inovadoras para resolver problemas, pensar de forma flexível e aplicar diferentes estratégias de abordagem.

Alencar (1995) discute a importância de um ambiente educacional que estimule a experimentação e o pensamento divergente (geração de várias ideias) para promover a criatividade. Ela aponta fatores inibidores, como o medo de errar e o conformismo, e reforça o papel dos educadores em incentivar o raciocínio crítico e a resolução de problemas. A autora sugere valorizar tanto o processo criativo quanto o resultado, promovendo a curiosidade e a busca por soluções variadas. Um ambiente flexível e apoio emocional são fatores importantes para que os estudantes se sintam seguros para explorar novas ideias e superar barreiras criativas.

No ensino de matemática, a criatividade desempenha um papel crucial, pois permite que os alunos explorem múltiplos caminhos para chegar a uma solução, questionem procedimentos padrão e desenvolvam suas próprias interpretações e métodos. Ao introduzir a criatividade nas aulas de matemática, o ensino se transforma em um processo de descoberta, no qual os alunos não apenas replicam o conhecimento, mas também o constroem e o ampliam.

Estudiosos como Guilford, Torrance e Beghetto são referências na compreensão da criatividade na educação. Guilford (1950), por meio de sua teoria sobre o pensamento divergente, destacou a importância da flexibilidade e originalidade no pensamento criativo. Ele argumentou que o pensamento divergente, fundamental para a criatividade, permite que o indivíduo busque diversas soluções para um único problema, habilidade central para o desenvolvimento matemático. Torrance (1966), por sua vez, criou o Teste de Pensamento Criativo Torrance (TTCT), que avalia a criatividade a partir de critérios como fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração. Esses conceitos são fundamentais no ensino de matemática, pois estimulam os alunos a verem além dos algoritmos e regras fixas, possibilitando uma compreensão mais profunda e significativa.

A criatividade no ensino de matemática pode promover o envolvimento dos alunos em níveis mais elevados de pensamento crítico e resolução de problema. Isso vai ao encontro de uma pedagogia que valoriza não apenas o resultado, mas também o processo pelo qual os alunos chegam a suas contribuições. No entanto, Sriraman (2004), afirma que a criatividade matemática pode ser estimulada através do estudo e da investigação, mas ressalta que o trabalho com a criatividade não é uma prática amplamente adotada pelos professores de matemática.

Beghetto (2017) destaca a importância de os educadores desenvolverem sua própria criatividade e participarem de um contínuo desenvolvimento profissional, além de colaborar com colegas para criar um ambiente de ensino mais criativo. Ele propõe integrar a criatividade na formação de professores em três dimensões: a) ensinar sobre criatividade, abordando conceitos, princípios teóricos e fatores que influenciam a criatividade; b) ensinar com criatividade, utilizando métodos inovadores que tornam o aprendizado mais dinâmico e envolvente; e c) ensinar para a criatividade, promovendo o desenvolvimento das habilidades criativas dos alunos por meio de oportunidades para a resolução de problemas e pensamento crítico.

Das tarefas “tradicionais” às tarefas criativas

Comumente no âmbito educacional utilizamos os termos “tarefas” e “atividades” como sinônimos. Zabala (2008) faz uma importante distinção entre esses termos, considerando as tarefas como unidades de trabalho com um propósito claro de aprendizagem, que exigem dos alunos a mobilização de conhecimentos e habilidades para atingir objetivos específicos, como a resolução de problemas, projetos ou investigações. Em contrapartida, as atividades referem-se às ações realizadas pelos alunos, que podem ou não estar vinculadas a um objetivo de aprendizagem. Para a autora, “as tarefas contêm o germe que permite induzir o conhecimento e desenvolver competências” (Zabala, 2008, p.131) e, nesse sentido, observa que os educadores necessitam planejar as experiências de aprendizagem e incentivar a participação dos estudantes.

Gusmão (2019) define tarefas como “problemas, atividades, exercícios, projetos, jogos, experiências, investigações, etc., que o professor utiliza em sala de aula para promover a aprendizagem matemática” (p. 1). Para que os alunos desenvolvam o pensamento criativo, é fundamental que as tarefas promovam fluência (geração de muitas ideias), flexibilidade (adaptação a diferentes respostas), originalidade (produção de soluções únicas), elaboração (detalhamento das ideias) e avaliação (seleção das melhores opções) (Alencar, 1995).

Nessa direção, Gusmão e Font (2020) enfatizam a importância de se romper com o pensamento linear por meio de diferentes abordagens de tarefas em prol do pensamento flexível, mas alertando que “criar tarefas não é um processo simples e requer conhecimento de conteúdo e tempo” (p. 683). Para os autores, as dificuldades surgem, em grande parte, da falta de domínio sobre o conteúdo, concepções equivocadas sobre o papel das tarefas e da limitação de tempo. Ademais, muitos professores encontram dificuldade em criar tarefas originais e autênticas, recorrendo, muitas vezes, à adaptação de tarefas já existentes e, por isso, a criação de tarefas criativas é vista como um desafio ainda maior, pois demanda sair do formato tradicional e aplicar a criatividade (Gusmão & Font, 2020).

Penalva e Linares (2011) reforçam a importância de elaborar tarefas que estimulem o pensamento crítico e a autonomia dos alunos no ensino de Matemática quando indicam que as tarefas não devem se restringir à aplicação mecânica de conteúdos, mas sim incentivar a investigação e a reflexão. Além disso, os autores destacam a importância de considerar as diferentes formas de aprendizagem dos alunos, criando tarefas inclusivas e desafiadoras que promovam um ambiente de aprendizagem mais engajador e colaborativo. Assim, as tarefas tornam-se um meio de desenvolver competências matemáticas e uma atitude positiva em relação ao aprendizado.

É nesse contexto que apresentamos, na Tabela 1, um conjunto de critérios de desenho de tarefas proposto por Gusmão e Font (2020).

Tabela 1. Critérios de desenho das tarefas

CRITÉRIOS DE DESENHO DE TAREFAS	INDICADORES
NATUREZA	Aberta (infinitas respostas, múltiplas respostas, nenhuma resposta, admite subjetividade etc.). Fechada (normalmente resposta única e com objetividade).
EXIGÊNCIA COGNITIVA	As tarefas devem atender a diferentes objetivos de aprendizagem, levando o resolvedor a desenvolver diferentes competências cognitivas e metacognitivas (domínio do conhecimento do conteúdo, reflexão mais ampla sobre a solução do problema etc.).
INTERATIVIDADE, ATRAÇÃO, DIVERSÃO, INCLUSÃO	As tarefas devem envolver os resolvedores em um trabalho que lhes cause prazer, vontade de continuar resolvendo, que eleve sua autoestima e confiança para se sentirem incluídos e capazes de resolver.
DESAFIOS	As tarefas devem ter potencial de envolver os resolvedores em um trabalho que desencadeie níveis de pensamento complexo (do mais simples ao mais avançado), mas que estejam ao alcance deles e que os façam se sentir desafiados.
TIPOLOGIA	As tarefas devem ser de diferentes tipos (exercícios, jogos, problemas, investigação, projetos, videoaulas, sequências didáticas etc.) e em cada tipo deve variar a forma de apresentação; podem servir de diferentes funções (avaliação, contexto, *feedback* etc.).
ABERTURA DE PENSAMENTO	As tarefas devem permitir abertura na forma de abordagem, apresentando várias soluções ou representações; proporcionar formas de pensamento reversível, flexível, descentrado, em oposição ao pensamento inflexível e centrado em um único ponto de vista.
CRIATIVIDADE, ORIGINALIDADE, AUTENTICIDADE	As tarefas devem estimular o uso de alternativas diferentes, uma solução original, podendo ser uma aplicação em outros contextos, e demonstrar criatividade.

Fonte: Gusmão e Font (2020, pp. 674-675).

Para a construção destes critérios, Gusmão e Font (2020) também tomaram como base os CID do EOS (Godino et al., 2008). Os CID referem-se à adequação dos processos de ensino-aprendizagem e avaliam o equilíbrio entre os significados pessoais adquiridos pelos estudantes e os significados institucionais desejados, considerando os recursos disponíveis. Os CID são compostos por seis dimensões inter-relacionadas: a) Idoneidade epistêmica: avalia se o conteúdo ensinado é matematicamente correto; b) Idoneidade cognitiva: verifica a proximidade entre o conhecimento dos alunos e o conteúdo ensinado, além da ampliação dos conhecimentos; c) Idoneidade interacional: analisa as interações entre professor, estudantes e a matemática; d) Idoneidade mediacional/meios: verifica a adequação dos recursos materiais, temporais e espaciais utilizados; e) Idoneidade emocional/afetiva: avalia o interesse e motivação dos estudantes; e f) Idoneidade ecológica: considera a conformidade do ensino com o projeto pedagógico, as diretrizes curriculares e o ambiente social.

Os CID vêm contribuir para dar o suporte teórico ao CEDT (Gusmão & Font, 2020) e nos ajudar a compreender a competência criativa dos professores e futuros professores de Matemática. Os critérios não apenas facilitam o trabalho de (re)desenho de tarefas, como podem estimular o pensamento crítico e a criatividade dos estudantes de maneira mais eficiente.

Os indicadores do CEDT à luz da criatividade

O CEDT é definido como um "um método de pesquisa dirigido ao estudo e desenho de tarefas próprias, originais ou modificadas para lograr melhorias de processos de ensino e de aprendizagem de Matemática" (Gusmão & Font, 2020, p. 668). Ele oferece os fundamentos e indicadores necessários para que os professores projetem atividades desafiadoras e engajadoras, promovendo a aprendizagem e desenvolvendo competências além do conteúdo, como criatividade, colaboração e resolução de problemas. Ao incentivar os educadores a cultivarem a criatividade, estamos caminhando para uma educação mais dinâmica, inclusiva e relevante, preparando os futuros cidadãos para enfrentar os desafios e oportunidades do mundo atual.

O CEDT, configurado em fases adaptadas à nossa pesquisa, pode ser representado conforme descrito na Figura 1:

Figura 1. Fases do CEDT (Fonte: adaptado de Gusmão e Font (2020))

Neste estudo destacamos a fase 8, o redesenho de tarefas com foco na criatividade levando em consideração os indicadores da Tabela 2.

Tabela 2. Indicadores do Desenho de Tarefas à luz da Criatividade[24]

	EPISTÊMICO
IDT-E1	O enunciado se apresenta com linguagem clara, correta e adequada ao nível de ensino?
IDT-E2	Utiliza **mais de uma linguagem** e/ou forma de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica, pictórica etc.)?
IDT-E5	Promove o levantamento de hipóteses, a abertura de pensamento (reversível, flexível, descentrado, divergente) e incentivam o uso de processos de argumentação e justificativas?
IDT-E6	**Encoraja a análise, a síntese e a avaliação de informações?**
	COGNITIVO
IDT-C6	**Permite a geração de múltiplas soluções, encorajando os alunos a explorarem diferentes abordagens e perspectivas de resolução?**
	INTERACIONAL
DT-I1	Prevê momentos de diálogo e de argumentação entre os estudantes ou entre professor e estudantes?

[24] Os destaques em negritos foram adequados, acrescentados e/ou alterados dos indicadores originais com foco na criatividade.

IDT-I2	Incentiva e valoriza a resolução de forma individual, em dupla ou em grupo?
IDT-I5	**Prevê um ambiente colaborativo e acolhedor para resolução das tarefas?**
IDT-I6	**Incentiva os estudantes a compartilhar suas ideias, assumir riscos e explorar sua criatividade sem medo de críticas ou julgamentos?**
	MEDIACIONAL
IDT-M1	Fornece, indica **ou incentiva** o uso de materiais manipuláveis e/ou tecnológicos para auxiliar na realização da tarefa?
IDT-M2	Prevê tempo suficiente para a sua realização, **contextualização** e a manutenção da concentração e interesse?
IDT-M3	Prevê tempos adequados aos tipos de tarefas (reprodução, conexão, reflexão etc.)?
IDT-M4	Prevê espaços adequados para a sua realização?
IDT-M5	Prevê momentos de experimentação prática para auxiliar na compreensão de conceitos e sua aplicabilidade?
	EMOCIONAL/AFETIVO
IDT-Em1	Promove a interatividade, atração, diversão e inclusão, elevando a autoestima, o sentimento de inclusão, a abertura da subjetividade e o gosto pela Matemática?
IDT-Em2	Valoriza os diferentes tipos de raciocínio, argumentação e respostas?
IDT-Em3	Apresenta desafios possíveis de serem alcançados, desencadeando níveis de pensamento cada vez mais complexo?
IDT-Em8	**Valoriza o erro no processo de aprendizagem?**
IDT-Em9	**É flexível o suficiente para se adaptar às necessidades e habilidades dos estudantes?**
IDT-Em10	**Permite que os estudantes expressem sua criatividade por meio de diferentes formas, como desenhos, narrativas, jogos ou projetos?**
	ECOLÓGICO
IDT-Ec1	Contempla os documentos curriculares oficiais (nacional e local)?
IDT-Ec2	O conteúdo das tarefas é útil para a vida social e laboral?

Fonte: adaptado de Gusmão e Font (2020)

Consideramos que redesenhar tarefas matemáticas significa reestruturar as atividades tradicionais de modo a incentivar a exploração criativa e o desenvolvimento de habilidades cognitivas mais complexas. O redesenho de tarefas foca em transformar a matemática de uma disciplina com respostas fixas e procedimentos lineares em um campo de exploração criativa, onde múltiplas abordagens e soluções são possíveis. Nesse processo, as tarefas devem oferecer maior liberdade para que os alunos escolham suas próprias estratégias, fazendo conexões entre diferentes conceitos e ampliando suas formas de julgamento além de permitir um maior engajamento dos alunos, uma formação mais ampla de suas competências cognitivas e emocionais.

Percurso metodológico

Essa pesquisa é de abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e de tipo interventiva que permite, por meio de processos colaborativos, testar ideias, desenvolver estratégias e recursos, visando resolver questões práticas enquanto produz conhecimento sistematizado (Teixeira & Neto, 2017). Chizzotti (2011) destaca que as interações sociais entre pesquisadores e participantes são essenciais para o processo investigativo. Essa modalidade envolve a execução e análise de dados em um processo de intervenção, buscando delimitar seus limites e possibilidades, com o intuito de contribuir para a construção de conhecimentos e práticas pedagógicas (Teixeira & Neto, 2017).

A intervenção, vista como fundamental para compreender e explicar os efeitos das ações estudadas (Chizotti, 2006), aconteceu por meio de um ciclo formativo para professores em docência e (futuros) professores. A formação intitulada “Desenho de Tarefas Matemáticas Criativas” teve uma carga horária de 60 horas, divididas em nove reuniões regulares e uma extra de duas horas semanais no formato *online* e atividades realizadas no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)[25]. Os participantes, que se inscreveram de forma voluntária e gratuita, estavam distribuídos em diversas instituições educacionais no Brasil e, dos 42 participantes que iniciaram o curso, 15 concluíram. Dentre as razões para a desistência estão: mudança de horário de trabalho conflitante com o horário do curso; excesso de trabalho e doença.

Durante o ciclo formativo, para produção de dados, utilizamos a plataforma *Google Meet* para as reuniões síncronas que foram gravadas e transcritas com autorização dos participantes; as intervenções e registros no AVA; questionários; entrevistas e o diário de bordo da primeira autora. As análises dos dados foram baseadas nos indicadores do CEDT à luz da criatividade.

Análise de dados

Trazemos para a análise, a tarefa apresentada aos professores em um dos encontros síncronos:

Um retângulo de 7u X 5u tem quanto de área? (Gusmão, 2019)

Quando questionados sobre as características da tarefa considerando os indicadores da Tabela 1, os cursistas foram unânimes em indicar que era um exercício fechado por admitir apenas uma solução e que não apresentava desafio nem promovia o engajamento dos estudantes. De acordo com Pochulu et al. (2013), as características apontadas indicam que a tarefa é considerada “tradicional”, ou seja, limitada por seu foco em respostas fechadas, repetição mecânica de procedimentos e desconexão com o cotidiano, o que restringe a criatividade e o interesse dos alunos. Embora critiquem tarefas deste tipo, os autores apontam que essas tarefas devem ser complementadas por abordagens mais criativas e dinâmicas que promovam um aprendizado mais significativo e conectado à realidade dos estudantes.

Partimos para a análise da mesma tarefa considerando os indicadores da Tabela 2. No que tange o aspecto epistêmico, os cursistas indicaram a presença do indicador IDT-E1 pela clareza e linguagens claras do enunciado. Por ser uma tarefa fechada, não foram encontrados aspectos que, do ponto de vista cognitivo, ampliasse ou exercitasse raciocínios mais elaborados. No aspecto mediacional, os participantes indicaram que esperavam que fossem oferecidos aos estudantes materiais manipuláveis, tempo adequado para discussão entre pares e ações práticas que atendessem aos indicadores previstos, embora a tarefa não deixasse isso explícito. Quanto ao aspecto emocional/afetivo, foi identificado o IDT-Em3 de forma parcial, pois o questionamento proposto foi possível de ser alcançado, mas não proporcionou o desenvolvimento de níveis mais complexos de pensamento. No aspecto ecológico, os professores consideraram que a tarefa contemplava os documentos curriculares oficiais e o conteúdo das tarefas é útil para a vida social e laboral (embora não havendo a contextualização na vida real), identificando os indicadores IDT-Ec1 e IDT-Ec2.

Num terceiro momento, foi proposto aos participantes realizar o redesenho da tarefa e a indicação dos indicadores contemplados em seus redesenhos de modo a proporcionar a criatividade do estudante (Tabela 3).

[25] Link do Ambiente Virtual de Aprendizagem: http://cjccvc.org

Tabela 3. Redesenhos da tarefa e indicadores contemplados pelos professores

REDESENHOS DA TAREFA	INDICADORES CONTEMPLADOS
Um retângulo tem 35 u de perímetro. Qual pode ser sua área? Qual a área máxima? (Profa. NB[26])	IDT-E5, IDT-E6. IDT-C6 IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em2, IDT-Em3, IDT-Em8, IDT-Em9, IDT-Em10
Vocês são parte de uma expedição arqueológica em busca de um antigo tesouro perdido. Eles descobriram um mapa que indica a localização exata do tesouro, mas para desvendar o segredo, eles precisam decifrar uma inscrição em uma placa encontrada em uma sala subterrânea. A inscrição revela que o tesouro está escondido em um retângulo mágico de dimensões 7 por 5 unidades. No entanto, para acessar o tesouro, você precisa calcular a área total desse retângulo e fornecer a resposta correta para abrir a porta secreta que leva ao local do tesouro. (Profa. MM)	IDTE1 IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em2, IDT-Em3, IDT-Em8, IDT-Em10
Um crime aconteceu no centro da cidade, e a polícia pediu para fechar todo o perímetro contido em 6 quadras daquela área, quantos metros quadrados serão fechadas sabendo que cada uma tem um formato retangular de 7u por 5u. (Profa. AP)	IDT-E1, IDT-E5, IDT-E6. IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em1, IDT-Em3, IDT-Em8, IDT-Em10
Um criador de galinhas necessitava fazer um cercado para prender alguns de seus animais. Ele fez esse cercado com telas, ficando 5 metros de largura e 7 metros de comprimento. Qual a quantidade em metros quadrados de tela que ele necessitou comprar para fazer esse cercado? (Prof. ML)	IDT-E1, IDT-E5, IDT-E6. IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em1, IDT-Em8, IDT-Em10.
Imagine que você está prestes a criar um incrível tapete mágico para decorar seu quarto dos sonhos! O tapete precisa ter a forma de um retângulo mágico de 7 unidades misteriosas de comprimento por 5 unidades encantadas de largura. Agora, para começar a tecer essa maravilha, você precisa descobrir a área total do tapete. Qual é a área desse tapete mágico que embelezará o seu mundo? (Profa. EB)	IDT-E5 e IDT-E6. IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em1, IDT-Em8, IDT-Em10
Um campo de futebol de forma retangular tem 5 m e 7 m como medidas de largura e comprimento, respectivamente. As turmas do terceiro ano foram desafiadas a completar uma volta correndo, sendo	IDT-E1, IDT-E5, IDT-E6.

[26] Os participantes do curso serão identificados com a primeira e última iniciais do nome, para garantir o seu anonimato.

assim qual seria a área do campo em questão? (Profa. RF)	IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em1, IDT-Em8, IDT-Em10
Dado um retângulo com 24 unidades de perímetro. Qual a área desse retângulo? (Prof. AC)	IDT-E1, IDT-E5, IDT-E6. IDT-C6 IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5, IDT-I6 IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5 IDT-Em2, IDT-Em3, IDT-Em8, IDT-Em10

Fonte: Elaboração das autoras (2024)

Durante a formação e no planejamento, todos os indicadores interacionais (IDT-I1, IDT-I2, IDT-I5 e IDT-I6), mediacionais (IDT-M1, IDT-M2, IDT-M3, IDT-M4, IDT-M5) foram discutidos e validados pelos professores. Esse diálogo possibilitou uma análise de cada indicador e sua adaptação para atender às necessidades didáticas e aos objetivos de aprendizagem dos estudantes. O quadro mostra os diferentes redesenhos das tarefas e os indicadores identificados pelos participantes.

Considerando a tarefa original, percebemos um erro na tarefa modificada pela Profa. NB, uma vez que um retângulo com as dimensões de 7u por 5u não tem 35u de perímetro. Na tarefa da Profa. EB, o enunciado apresenta linguagem diferenciada, porém quando relaciona as unidades de medida, a professora não se atenta que estão diferentes (unidades misteriosas x unidades encantadas) podendo promover inconsistências matemáticas relacionadas às operações necessárias ao IDT-E1. A proposta da Profa. RF apresenta linguagem contextualizada, mas possui um equívoco relacionado ao conceito de perímetro e área quando menciona “completar uma volta correndo” e pergunta “qual seria a área do campo”. O equívoco pode ser explicado quando o conteúdo ensinado em uma tarefa não corresponde ao que é considerado a "boa matemática", ou seja, quando há imprecisões, ambiguidades ou erros conceituais na forma como os conhecimentos matemáticos são apresentados (Gusmão & Font, 2020). Tal situação pode comprometer a qualidade da aprendizagem, pois afeta a clareza e a exatidão dos conceitos, o que pode levar os estudantes a desenvolverem entendimentos equivocados sobre o conteúdo matemático.

Por outro lado, a proposta da Profa. NB permite múltiplas soluções e exploração de diferentes abordagens e perspectivas de resolução, atingindo o IDT-C6, assim como a elaborada pelo Prof. AC. As propostas destes professores e de alguns outros também, valorizam os diferentes tipos de raciocínio (IDT-Em2), podendo ampliar o nível de pensamento (IDT-Em3), a valorização do erro (IDT-Em8) a flexibilidade de pensamento (IDT-Em9) e a possibilidade de expressão das ideias em diferentes formas (IDT-Em10). Sobre essas tarefas, Pochulu et al (2013), Alencar (1995) e Gusmão (2019) defendem que elas devem ir além da simples reprodução de conhecimento, incentivando o pensamento crítico e criativo dos estudantes, sugerindo que as tarefas sejam abertas e permitindo múltiplas soluções. Além disso, esses autores destacam a importância de desafios progressivos, promovendo a confiança dos estudantes, e de atividades colaborativas, que incentivem a troca de ideias. As tarefas, segundo eles, também devem desenvolver competências como resolução de problemas e habilidades socioemocionais, estimulando o desenvolvimento integral dos estudantes.

Apesar dos equívocos observados nos redesenhos das tarefas analisadas, as propostas dos professores participantes apresentam características que podem promover um ensino mais criativo e crítico. No entanto, foi perceptível a dificuldade enfrentada na tentativa dos redesenhos com vistas à criatividade, principalmente no que se refere à promoção da fluência, flexibilidade e originalidade do pensamento matemático. Isso evidencia a necessidade de maior formação e apoio para que os docentes consigam integrar de forma eficaz elementos criativos e rigor matemático, proporcionando uma aprendizagem mais rica, contextualizada e engajadora para os estudantes.

Considerações finais

A inserção de tarefas matemáticas criativas tem papel fundamental na sala de aula, pois incentivam o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e de competências na feitura e resolução de problemas, que vão além da simples memorização de conceitos conforme indicam Penalva e Linares (2011), Liljdehal (2024) e Gontijo, Carvalho, Fonseca e Farias (2019).

Mesmo com os resultados positivos obtidos na formação, corroborando com os estudos de Sousa & Gusmão (2023), identificamos que muitos professores ainda enfrentam dificuldades na criação e implementação dessas tarefas em sua prática pedagógica. Entre os principais desafios estão a insegurança em conciliar criatividade com rigor conceitual; a falta de vivência com as tarefas criativas; ausência de formação específica para planejar atividades que valorizem múltiplas soluções e a necessidade de adequar o conteúdo às diretrizes curriculares.

Para superar essas barreiras, é importante investir em formações continuadas para os docentes elaborarem tarefas matemáticas próprias e originais. Além disso, a colaboração entre professores, por meio de grupos de estudos e trocas de experiências, pode ajudar a fortalecer a confiança no desenvolvimento de propostas inovadoras. Sousa e Sant'Ana (2017, 2021) indicam que o apoio de materiais didáticos e recursos tecnológicos também pode contribuir para a criação de tarefas mais dinâmicas e conectadas com a realidade dos alunos.

O conhecimento de indicadores para desenhar tarefas criativas pode ser uma ferramenta valiosa para os professores na análise e elaboração de suas atividades pedagógicas. Esses indicadores funcionam como um guia para criar atividades mais ricas e envolventes, ajudando os professores a superar as dificuldades comuns na implementação de tarefas. Os indicadores permitem avaliar a qualidade das tarefas, garantindo, entre outas coisas, que sejam abertas a múltiplas soluções. Ao utilizá-los, os docentes podem verificar se as tarefas promovem o desenvolvimento do pensamento crítico, incentivam a colaboração, respeitam o rigor conceitual e estão alinhadas aos objetivos de aprendizagem.

Com este trabalho podemos lançar luz à prática pedagógica do professor na elaboração de tarefas matemáticas visando o desenvolvimento da aprendizagem com criatividade.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do ProxectoPID2021-122326OB-I00 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033. A terceira autora é Bolsista Produtividade em Pesquisa do CNPq, PQ-2.

Referências

Alencar, E. S. (1995). *Como desenvolver o potencial criador: Um guia para a liberação da criatividade em sala de aula* (3.ª ed.). Vozes.

Beghetto, R. A. (2017). Creativity in teaching. In J. C. Kaufman, C. James, V. P. Glaveanu, & J. Baer (Eds.), *The Cambridge handbook of creativity across domains* (pp. 549–564). Cambridge University Press.

Bogdan, R. C & Biklen S. K. (1994) *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução a teoria e aos métodos.* Porto Editora LTDA.

Chizzoti, A. (2011). *Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais.* 4ª Ed. Vozes.

Csikszentmihalyi, M. (2020). *Flow: a psicologia do alto desempenho e da felicidade* / Mihaly Csikszentmihalyi; tradução Cássio de Arantes Leite. — 1ª ed. Objetiva.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*(2), 07–37. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/62

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* Editorial Aula Magna.

Gontijo, C. H. & Carvalho, A. T. & Fonseca, M. G., & Farias, M. P. (2019). *Criatividade em matemática: conceitos, metodologias e avaliação.* Editora Universidade de Brasília.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist, 5*(9), 444–454. http://doi:10.1037/h0063487

Gusmão T, C. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontossemiótica*. [Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências da Educação, Universidade de Santiago de Compostela, Espanha] http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf

Gusmão, T. C. R. S. (2019). Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In: *Anais do 18º Encontro Baiano De Educação Matemática* https://casilhero.com.br/ebem/mini/uploads/periodico/files/2019/PA2.pdf

Gusmão, T. C. R. S. & Font, V. M. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa - São Paulo, 22*(3), 666 – 697. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/50704/pdf_1

Liljedahl, P. (2024). *Diseñando aulas para pensar em Matemáticas primaria y secundária: 14 prácticas docentes para mejorar el aprendizaje*. NED Educciones.

Penalva, M. C., & Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la educación secundaria. In J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 27–52). Editorial GRAÒ.

Pochulu, M. & Font, V. & Rodriguez M. (2013). Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores. In *Actas del VII CIBEM.* (pp. 4999-5009)

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *Phi Delta Kappan, 42*(7), 305–310.

Rodrigues, G.S.S. (2019). *Desenho de tarefas matemáticas na perspectiva da criatividade: um estudo com professores.* [Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista-BA].

Sousa, A. S., & Gusmão, T. C. R. S. (2023). (Re)Desenho de tarefas matemáticas à luz dos critérios de idoneidade didática e criatividade. *Zetetike*, *31*(00), e023014. https://doi.org/10.20396/zet.v31i00.8672198

Sousa, A. S., & Sant'Ana, C. de C. (2017). Formação de professores e histórias em quadrinhos na Educação Matemática: possibilidades e desafios. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre As Ciências*, *6*(1), 137-152. https://doi.org/10.22481/rbba.v6i1.1516

Sousa, A. S., & Sant'Ana, C. de C. (2021). O uso do Geogebra como recurso didático digital. In: Atividades colaborativas e cooperativas em educação: ações do Grupo de Estudos em Educação Matemática. (pp. 40-55). Edições UESB.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. The Mathematics Educator 2004, Vol. 14, No. 1, 19–3.

Teixeira, P. M. & NETO, J.M. (2017). Uma proposta de tipologia para pesquisa de natureza interventiva. Revista Ciência e Educação, vol. 23, nº 4, p. 1055-1076. Bauru, 2017. https://www.scielo.br/j/ciedu/a/cBjf7MPDSy5V5JYwFJRs4bd/abstract/?lang=pt

Torrance, E. P. (1966). *The Torrance Tests of Creative Thinking – Norms-Technical Manual Research Edition – Verbal Tests, Forms A and B – Figural Tests, Forms A and B.* Princeton NJ: Personnel Press.

Wallas, G. (1926). *The Art of thought*. New York: Harcourt, Brace and Company.

Zabala, J. Mª. G. (2008). Las tareas a realizar son la clave para el desarrollo de los aprendizajes. In: *El desarrollo de la competencia matemática.* Editorial GRAÓ. 1ª EDIÇÃO.

Posters

ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN EL ALUMNADO DE PRIMER CURSO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

ATTITUDE TOWARDS MATHEMATICS OF STUDENTS OF FIRST COURSE OF UNDERGRADUATE DEGREE OF PRIMARY EDUCATION

Izaskun Baro

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), España

izaskun.baro@ehu.eus

Iera Arrieta

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), España

iera.arrieta@ehu.eus

Resumen: Las actitudes en educación matemática se han definido utilizando diversas acepciones. En general, se definen como una predisposición psicológica para comportarse de manera favorable o desfavorable frente a una entidad (Eagly y Chayken, 1998) y las engloban dentro del dominio afectivo (Marbán, 2020). Partiendo de esta definición, se analiza la actitud hacia las matemáticas del futuro profesorado de Educación Primaria. En este caso, se realiza una investigación de corte cuantitativo, con una muestra de 144 estudiantes de 1º del Grado en Educación Primaria, utilizando el cuestionario de Auzmendi (1992). Los resultados muestran que el futuro profesorado, en general tiene un nivel de actitud medio (78.10) y sin diferencias significativas respecto a la identidad de género.

Palabras-clave: actitud hacia las matemáticas, educación primaria, futuros maestros y maestras, formación universitaria.

Abstract: Attitudes in mathematics education have been defined using various meanings. In general, they are defined as a psychological predisposition to behave favourable or unfavourable towards an entity (Eagly and Chayken, 1998) and are included within the affective domain (Marbán, 2020). Based on this definition, the attitude towards mathematics of future Primary Education teachers is analysed. In this case, a quantitative research was carried out with a sample of 144 students in the first year of the Primary Education Degree, using Auzmendi's questionnaire (1992). The results show that future teachers, in general, have an average level of attitude (78.10) and no significant differences with respect to gender identity.

Keywords: attitudes towards mathematics, primary education, future teachers, university education.

Marco Teórico

El dominio afectivo está compuesto por la terna creada por las creencias matemáticas, las emociones y las actitudes hacia esta materia (Marbán et al., 2020).

Haciendo una revisión bibliográfica, se observa que las actitudes hacia las matemáticas se definen utilizando varias acepciones. Aun así, existe un consenso entre las investigaciones previas de este ámbito. En general, las definen como una predisposición psicológica para comportarse de manera favorable o desfavorable frente a una entidad particular (Eagly y Chaiken, 1998).

Es importante remarcar que además de las habilidades matemáticas, los aspectos cognitivos también son importantes debido que se vinculan los factores afectivos con la creencia acerca de la enseñanza (Rodríguez-Alveal, y Díaz-Levicoy, 2024).

Uno de los trabajos pioneros midiendo las actitudes hacia las matemáticas es el trabajo de Auzmendi (1992), en el que se presenta una escala compuesta por 25 ítems. Este cuestionario es el más citado (Palacios et al., 2014) y el más utilizado (Caballero et al., 2008; Fernández et al., 2016; Nortes y Nortes, 2020) de los realizados en lengua castellana. Da una visión global de las actitudes hacia las matemáticas y sus diferentes dimensiones, lo cual es necesario conocer (Martínez-Artero et al., 2022), con el fin de crear estrategias para mejorar la actitud hacia las matemáticas en futuros maestros y maestras.

Fernández y Aguirre (2010), utilizando el cuestionario de Auzmendi (1992) con 146 estudiantes de la Universidad de Castilla la Mancha obtuvieron el valor medio de 75.86. Con el mismo cuestionario y 1121 estudiantes de la Universidad de Murcia, Nortes y Nortes (2020) adquieren una media de 77.04.

En cuanto a la perspectiva de género se refiere, los resultados obtenidos no son iguales en todos los estudios. Mientras Brandell y Staberg (2008) aseguran que a los hombres les gustan más las matemáticas, otros estudios obtienen como resultado el mismo nivel de actitud (Kloosterman et al., 2001).

Objetivo

El objetivo de esta investigación es analizar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes que ingresan en el Grado en Educación Primaria de la Facultad de Educación, Filosofía y Antropología de Donostia.

Metodología

Diseño

El diseño metodológico planteado se basa en una investigación descriptiva y se plantea un estudio empírico exploratorio (Hernández et al., 2016).

Muestra

El cuestionario lo han completado al inicio del curso como propone Colón-Rosa (2012), 144 estudiantes matriculados en 1º el curso 2021/22.

Este proyecto tiene el informe favorable del Comité de Ética para las Investigaciones relacionadas con Seres Humanos (CEISH) de la universidad.

En la muestra empleada el porcentaje de mujeres y hombres es de 63.19% y 36.81% respectivamente. Estos datos son similares a los recogidos en EDUCAbase (67.41% mujeres y 32.58% hombres).

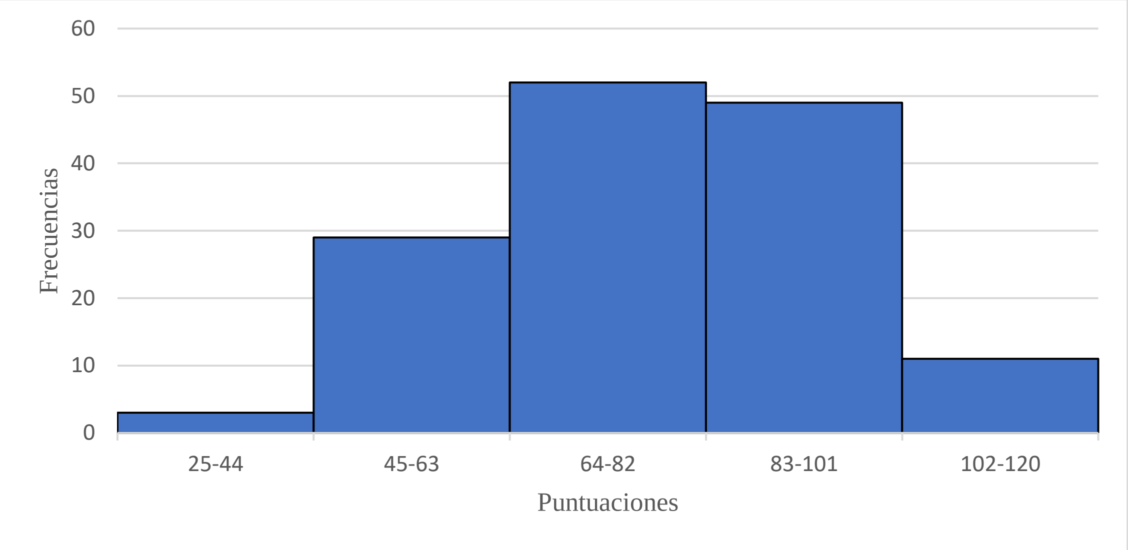
Instrumento

El cuestionario empleado *es la escala de actitud hacia las matemáticas de Auzmendi (1992), compuesta por 25 ítems y* de tipo *Likert* de 1 a 5, (1=Totalmente en desacuerdo y 5=Totalmente de acuerdo). El cuestionario tiene una buena consistencia y fiabilidad (alpha de Cronbach=.93, KMO=.94 y esfericidad de Bartlett $p<.05$).

Resultados

La media obtenida en la actitud hacia las matemáticas es de 78.10 (D.T.=16.26). La distribución de estas puntuaciones en cinco clases es la que muestra el gráfico 1.

Gráfico 1**.** Distribución de las puntuaciones de actitud hacia las matemáticas.



Al clasificar los estudiantes por identidad de género, se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 1. Medias y desviaciones típicas de la actitud por identidad de género.

Género	N	Media	D.T.
Mujer	91	77.48	16.32
Hombre	53	79.15	16.25

Aunque la media de la actitud sea mayor en los hombres que en las mujeres, no hay diferencias significativas respecto a la identidad de género (prueba Scheffé para muestras independientes).

Discusión y conclusiones

Comparando la media obtenida en este estudio con los referenciados en el marco teórico, este (78.10) supera a los obtenidos en estudios similares en otras universidades españolas (Fernández y Aguirre, 2013; Nortes y Nortes, 2020). Sin embargo, si se compara con los de Auzmendi (1992) el valor de la media de actitud se situaría en el percentil 35.

Por último, se ha analizado la actitud respecto a la identidad de género. Se ha podido comprobar que no hay diferencias significativas, aunque las medias, en general, son mejores en hombres que en mujeres como afirman Brandell y Starbert (2008).

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero.

Brandell, G., y Staberg, E. M. (2008). Mathematics: A female, male or gender-neutral domain? A study of attitudes among students at secondary level. *Gender and education*, *20*(5), 495-509.

Caballero, A., Blanco, L. J,. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *Paradigma, 29*(2), 157-171.

Colón-Rosa, H. W. (2012). *Actitudes de estudiantes universitarios que tomaron cursos introductorios de estadística y su relación con el éxito académico en la disciplina.* [Tesis de Maestría. Univ. Puerto Rico]. https://eric.ed.gov/?id=ED551476

EDUCAbase (mecd.gob.es), Indicadores de rendimiento académico de estudiantes de grado, http://estadisticas.mecd.gob.es/ (2021)

Eagly, A., y Chaiken, S. (1998). Attitude structure. *Handbook of Social Psychology, 1*, 269-322.

Fernández, R., Pinto, N. S., Rizzo, K., Camino, A. G., Albarrán, L. M., y Espinosa, A. (2016). Las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes y maestros de educación infantil y primaria: Revisión de la adecuación de una escala para su medida. *Revista iberoamericana de ciencia tecnología y sociedad, 11*(33), 227-238.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2016). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.

Kloosterman, P., Tassell, J., Ponniah, A., y Essex, N. K. (2001). Mathematics as a gendered domain in the United States. *The American Educational Research Association*, *13*, 1-15.

Marbán, J. M., Palacios, A., y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, *18*, 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Martínez-Artero, R. N., López. J. A., Núñez, R. M., y Checa, A. N. (2022). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros maestros? *PNA*, *16*(3). 191-213. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.20948

Nortes, R., y Nortes, A. (2020). Actitud hacia las matemáticas en el Grado de Maestro de Primaria. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *23*(2), 225-239. https://doi.org/10.6018/reifop.348061

Palacios, A., Arias, V., y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: Construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica*, *19*, 67-91. https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.8961

Rodríguez-Alveal, F., y Díaz-Levicoy, D. (2024). Actitudes de futuros profesores de matemática hacia la estadística y su enseñanza: Una aproximación a la alfabetización estadística. *Interciencia, 49*(2), 124-131.

Sánchez, J., Segovia, I., y Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Revista Profesorado 15*(3), 297-312.

ENTRE O PREVISTO E O REAL: INVESTIGAÇÃO SOBRE A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO BRASIL E EM PORTUGAL

BETWEEN THE EXPECTED AND THE REAL: RESEARCH INTO THE INITIAL TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS IN BRAZIL AND PORTUGAL

Kelvin Rafael Rodrigues de Oliveira

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, Brasil

kelvin.rodrigues@unesp.br

Pedro Manuel Baptista Palhares

Universidade do Minho (UMinho), Braga, Portugal

palhares@ie.uminho.pt

Maria Raquel Miotto Morelatti

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, Brasil

maria.raquel@unesp.br

Resumo: O trabalho apresenta uma proposta de investigação no âmbito do Estágio Científico Avançado de Doutoramento, realizado no Instituto de Educação da Universidade do Minho (IE/UMinho). O objetivo é aprofundar referenciais teórico-metodológicos para desenvolver novas abordagens sobre a formação inicial de professores de Matemática. Para isso, está sendo realizado um levantamento de teses e dissertações do IE/UMinho dos últimos 10 anos, com foco na relação entre teoria e prática. Os dados serão analisados por meio da Análise Textual Discursiva (Moraes & Galiazzi, 2007). Busca-se, assim, compreender melhor os elementos constitutivos dessa formação e promover intercâmbios de investigação entre as universidades dos autores envolvidos.

Palavras-chave: educação matemática, formação de professores, licenciatura em matemática, teoria e prática.

Abstract: This work presents a research proposal developed within the framework of an Advanced Scientific Doctoral Internship conducted at the Institute of Education of the University of Minho (IE/UMinho). The aim is to deepen theoretical and methodological frameworks to develop new approaches to the initial training of Mathematics teachers. To this end, a survey of theses and dissertations from IE/UMinho over the past 10 years is being conducted, focusing on the relationship between theory and practice. The data will be analyzed using Discursive Textual Analysis (Moraes & Galiazzi, 2007). The study seeks to better understand the constitutive elements of this training and to foster research exchanges between the universities involved.

Keywords: mathematics education, teacher training, mathematics undergraduate degree, theory and practice.

Introdução

Apresentamos a proposta para o Estágio Científico Avançado de Doutorado no Instituto de Educação da Universidade do Minho, que teve início em setembro de 2024, sob a coorientação do segundo autor. Acreditamos que esse período será fundamental para a formação acadêmica do primeiro autor, além de representar uma oportunidade valiosa para estabelecer conexões qualitativas com pesquisadores da Educação Matemática em diferentes contextos e discutir referenciais teóricos e metodológicos da pesquisa.

Um dos principais objetivos para o trabalho em Portugal do primeiro autor reside na oportunidade de aprofundar as suas referências, verificando como a análise e condução metodológica de investigação próxima do seu tema revelam as potencialidades ou não das práticas no ensino da Matemática.

O contexto da formação de professores no Brasil

A dissonância entre o previsto legalmente e o praticado no interior dos cursos de formação de professores nos cursos de Matemática faz com que o futuro professor de Matemática tenha uma experiência pouco significativa no que diz respeito à relação teoria-prática, bem como no que concerne às reflexões da prática docente e metodologias de ensino. Ademais, a ausência de reflexões acerca dos aspectos histórico-filosóficos do saber matemático não lhes permite uma visão mais completa dos aspectos epistemológicos dos diversos conceitos abordados, inclusive, na Educação Básica. Essa estrutura "[...] distancia os futuros professores dos modos próprios de crianças e jovens da escola básica fazerem matemática, de mobilizá-la e comunicá-la, sendo essa uma etapa fundamental à formação matemática dos alunos" (Fiorentini & Oliveira, 2013, p. 931).

A esse respeito, Gatti (2013) conclui que, em geral, os cursos de formação de professores apresentam "currículos fragmentados, com conteúdos excessivamente genéricos e com grande dissociação entre teoria e prática, estágios fictícios e avaliação precária, interna e externa" (p. 58). Essa fragmentação faz com que "dependendo dos conteúdos programáticos de disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática, nem sempre os futuros professores veem a ligação entre tópicos do ensino superior e da educação básica" (Cury & Bisognin, 2017, p. 248). Em decorrência disso, esses cursos acabam precarizados, sobretudo, diante da "[...] frágil articulação entre a formação inicial, a formação continuada, a inserção profissional e as condições de trabalho, salário e carreira dos profissionais da educação" (Gatti et al., 2019, p. 177).

Diante dos aspectos supracitados, fica explícita a existência de problemas no currículo de formação de professores nos cursos de Matemática. Existe também, de forma mais intensa, a dicotomia entre disciplinas da área das Ciências da Educação, Matemática e científico-culturais.

Em linhas gerais, no Brasil, apesar das muitas investigações e significativas inovações, os cursos de formação de professores ainda apresentam muitas lacunas que se refletem, de forma direta, na prática desses futuros professores. Conforme preconizado, elementos previstos nos documentos normativos desses cursos não são suficientes diante do que realmente acontece, do ponto de vista da prática, no interior desses cursos. Ou seja, embora os cursos de licenciatura nas universidades brasileiras sejam voltados à formação pedagógica para a docência, observa-se uma supervalorização do conhecimento específico, o que acaba conferindo a esses cursos características semelhantes às de um bacharelado.

Pergunta e objetivos de investigação

Do exposto, emergem algumas questões, nomeadamente: O que podemos aprender com a experiência de formação de professores de Matemática em Portugal? Será que essa dissociação entre teoria e prática é frequentemente observada em programas de formação inicial de professores, como no Brasil? Como é que a investigação e os estudos portugueses lidam com estas questões e, ao mesmo tempo, que caminhos metodológicos são indicados para ultrapassar a dicotomia entre teoria e prática presente na realidade deste país? E, finalmente, quais são os desafios e perspetivas colocados aos cursos de formação inicial de professores de Matemática?

Metodologia

Será proposto um levantamento de teses e dissertações que discutam a temática da formação inicial de professores de Matemática com o objetivo de aprofundar as reflexões sobre os currículos de formação praticados no Brasil, bem como a precariedade da relação entre teoria e prática com uma literatura diferente. Este levantamento será realizado a partir da base de dados de teses e dissertações do Instituto de Educação da Universidade do Minho, onde o primeiro autor desenvolve sua investigação.

Entendemos que um estudo detalhado da realidade portuguesa, a partir desse levantamento e da discussão dos referenciais, poderá fornecer elementos relevantes para a constituição de novos quadros para a análise dos dados coletados no Brasil em nossa experiência de pesquisa em cursos de licenciatura que estamos desenvolvendo[27].

Os dados coletados no exterior serão analisados a partir da Análise Textual Discursiva (Moraes & Galiazzi, 2007) como forma de ampliação do quadro teórico-metodológico das pesquisas sobre a temática da formação inicial de professores de Matemática no Brasil e em Portugal, além, é claro, de proporcionar uma parceria na produção de futuros trabalhos científicos entre as universidades envolvidas.

Resultados esperados

Dialogar com o Instituto de Educação da Universidade do Minho pode ser uma oportunidade promissora para melhorar o nosso quadro teórico-metodológico no que diz respeito à formação inicial de professores, bem como no âmbito do ensino da Matemática, uma vez que os estudos portugueses têm contribuído muito para os investigadores brasileiros.

Finalmente, com este estágio doutoral, procuramos compreender melhor os elementos constitutivos da formação inicial de professores de Matemática a partir do contato com a literatura portuguesa, bem como de experiências práticas em ações relacionadas com a formação inicial de professores na universidade a que pretendemos ligar. Assim, consideramos que esta experiência pode contribuir de forma notável para o aperfeiçoamento da tese em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação da instituição onde estuda o primeiro autor.

[27] A pesquisa de doutorado (em curso desde 2022) tem como objetivo geral compreender a identidade dos cursos de Matemática no âmbito do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), como um novo *lócus* de formação de professores de Matemática no Brasil.

Referências

Cury, H. N., & Bisognin, E. (2017). Conhecimento matemático para o ensino: Um estudo com professores em formação inicial e continuada. *Revista Thema*, *14*(3), 241–249. https://doi.org/10.15536/thema.14.2017.241-249.482

Fiorentini, D., & Oliveira, A. T. C. C. (2013). O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: Que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, *27*(47), 917-938. https://www.scielo.br/j/bolema/a/99f8nsJSh8K9KMpbGrg8BrP/abstract/?lang=pt

Gatti, B. A. (2013). Educação, escola e formação de professores: Políticas e impasses. *Educar em Revista*, *50*, 51-67, https://www.scielo.br/j/er/a/MXXDfbw5fnMPBQFR6v8CD5x/?format=pdf

Gatti, B. A., Barretto, E. S. S., Andre, M. E. D. A., Almeida, P. C. A. (2019). *Professores do Brasil: Novos cenários de formação.* Unesco.

Moraes, R., & Galiazzi, M. C. (2007). *Análise textual discursiva*. Ed. Unijui.

GRUPO DE DISCUSSÃO 3

A APRENDIZAGEM DE UMA MATEMÁTICA PARA TODOS NO SÉCULO XXI

THE LEARNING OF A MATHEMATICS FOR ALL IN THE XXI CENTURY

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

amdd@fct.unl.pt

Neusa Branco

Instituto Politécnico de Santarém, Escola Superior de Educação

neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

A ideia da aprendizagem da Matemática para todos os alunos é central no currículo de Matemática, assegurando a equidade e a qualidade dessa aprendizagem num contexto de desenvolvimento de competências para o século XXI. Esta ideia poderosa remete para a importância de que todos os alunos devem ter acesso a aprendizagens significativas, procurando que todos atinjam o seu maior nível de desempenho. Os novos programas de Matemática dos ensinos básico e secundário (Canavarro et al, 2021; Carvalho e Silva et al., 2023) retoma este princípio de matemática para todos já destacado por Abrantes et al. (1999). Assim, importa reforçar a reflexão sobre aspetos essenciais que influenciam o modo como os alunos aprendem. Ponte (2014) identifica dois fatores principais para a aprendizagem dos alunos, por um lado, a atividade matemática que realizam e, por outro lado, a reflexão que fazem sobre essa atividade. Essa atividade matemática deve emergir de tarefas desafiantes do ponto de vista cognitivo, que mobilizem o raciocínio do aluno. É essencial que todos os alunos tenham oportunidade de desenvolver ao longo de toda a escolaridade atividades diversificadas que contribuam para a construção de novos conhecimentos a partir de conhecimentos que já possuem e através da sua atitude em relação à matemática (Abrantes et al. 1999). Santos e Canavarro (2013) sistematizam aspetos essenciais da aula de matemática identificados por Paulo Abrantes que influenciam a aprendizagem matemática de todos os alunos: i) as atividades realizadas pelos alunos decorrentes das tarefas propostas; ii) a relação do conhecimento novo que se pretende construir com conhecimentos anteriores; iii) o ambiente de comunicação e interação na sala de aula; iv) o papel do professor para a promoção das oportunidades aos alunos de se envolverem em experiências matemáticas relevantes.

Cabe assim ao professor propor tarefas diversificadas e desafiantes, inseridas num contexto didático favorável a um percurso de aprendizagem coerente (Ponte, 2014), de modo a favorecer as aprendizagens previstas, considerando as competências essenciais para o século XXI. Essas tarefas devem dar aos alunos a oportunidade de desenvolvimento de atividade matemática num ambiente de sala de aula que valorize um discurso dialógico (Ponte et al., 2012). Nessa atividade matemática é relevante a intencionalidade do trabalho nos temas matemáticos e no desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais e de capacidades e atitudes gerais. O papel ativo dos alunos é assim essencial, tanto num processo de trabalho autónomo, individual ou em grupo, como em momentos de partilha e discussão de resoluções e de ideias matemáticas.

Estratégias de aprendizagens ativas que mobilizem as dimensões cognitiva, social e física podem favorecer o envolvimento dos alunos no trabalho com os conteúdos matemáticos que devem aprender (Edwards, 2015).

A evolução que se verifica no século XXI, nomeadamente com a emergência da tecnologia e das ferramentas digitais deve ser também refletida no contexto educativo e pensado o contributo que a diversidade de recursos disponíveis pode dar para assegurar aprendizagens matemáticas relevantes para todos os alunos. A integração da tecnologia na sala de aula deve ser feita de um modo pertinente, auxiliando o pensamento dos alunos e contribuindo para uma melhor compreensão de conceitos e procedimentos e para potenciar o desenvolvimento das capacidades de matemáticas transversais: a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, as representações matemáticas, as conexões (internas e externas) e o pensamento computacional. As *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*, de 2021, e para o ensino secundário, de 2023, identificam a importância do uso da tecnologia e dos recursos digitais para a aprendizagem dos alunos, mas não como um fim em si mesmo. Resultados de investigação em educação matemática têm já evidenciado contributos de diversas ferramentas tecnológicas para a promoção de aprendizagens significativas, tais como objetos robóticos, calculadoras ou computador e o uso de ambientes de geometria dinâmica, folhas de cálculo, ambientes de programação visual. Contudo, apesar da tecnologia poder potenciar a aprendizagem, esta por si só não garante aprendizagens matemáticas, como apontam por exemplo Oliveira et al. (2022) e Santos e Santos (2019). Para Oliveira et al. (2022) é preciso considerar as condições, as tarefas e os contextos de utilização da tecnologia. Assim, o papel do professor e o modo como este integra a tecnologia na dinâmica da aula e na sequência de aprendizagem são determinantes para o sucesso da aprendizagem (Santos & Santos, 2019). Por exemplo, Subtil et al. (2023) referem que a calculadora gráfica funcionou como instrumento de mediação semiótica, mas a orquestração da professora na discussão coletiva é essencial para que o potencial semiótico do artefacto fosse desenvolvido e para que se efetivasse a transição para signos matemáticos. Além disso, reforçam o papel das tarefas e da sua natureza exploratória para promover o uso de diferentes representações.

O grupo de discussão 3, “A aprendizagem de uma matemática para todos no século XXI”, contou com cinco comunicações e quatro posters, organizados em dois simpósios de discussão.

A comunicação oral de Maria Eugenia Reyes-Escobar e António Moreno Verdejo, intitulada “Tareas de patrones utilizadas em planificaciones de terceiro de primaria” centra-se na análise de tarefas utilizadas no ensino de padrões no 1.º ciclo por professores nas suas planificações. Os seus resultados identificam tarefas de três níveis de complexidade (reprodução, conexão e reflexão), prevendo o uso de diferentes representações, o que contribui de modo positivo para a aprendizagem dos alunos. Contudo, apenas dois tipos de tarefas são mais frequentes, as tarefas de conexão e de reprodução. Verificam ainda que surgem tarefas com diferentes tipos de padrões, existindo uma maior frequência para padrões numéricos em tarefas de reprodução e de conexão e padrões visuais em tarefas de conexão.

Os autores da comunicação “Evaluación de la eficiência de algoritmos creados mediante tareas desconectadas em educación matemática”, Gregorio Arjona-Aranda, Cristina Sánchez-Cruzado, Maria Teresa Sánchez-Compaña e Antonio Ruano-Cano, apresentam uma experiência piloto com futuros professores onde propõem a realização de tarefas desconectadas para que estes conheçam como fomentar o desenvolvimento do pensamento computacional (PC). Nessas propostas são usados recursos manipuláveis para os futuros professores criarem e executarem algoritmos, sendo avaliada a eficácia desses algoritmos tendo em conta o tempo de execução e o de peças usadas. A sua proposta de trabalho visa inspirar professores para introduzirem o pensamento computacional na sala de aula, promovendo a otimização de algoritmos e outras práticas do PC.

Marta Teixeira, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte apresentam uma comunicação com o título “A estrutura retangular e a medição da área de uma superfície”, que se centra em tarefas de natureza exploratória realizadas com alunos de 4.º ano de escolaridade para compreender como percecionam as várias componentes de uma estrutura retangular para medição e cálculo da área de superfícies com essa forma, antes da introdução da fórmula do cálculo da área. A realização da tarefa proposta permitiu aos alunos realizar a medição com unidades de medida padronizadas e a relação entre as unidades de medida padronizadas. Verificam no estudo que os alunos já conseguem perceber a estrutura retangular formada por linhas e colunas, o que favorece a compreensão das fórmulas da área do quadrado e do retângulo.

O estudo apresentado na comunicação “As dificuldades sentidas pelos alunos no decorrer de uma *gallery walk*” por Andreia Rodrigues e Maria Helena Martinho destacam a importância de promover uma aprendizagem ativa, envolvendo para tal as dimensões cognitiva, social e física. Identificam a *gallery walk* como uma estratégia favorável à promoção dessa aprendizagem ativa e centram o seu estudo na identificação de dificuldades de alunos de 10.º ano durante essa abordagem. Verificam dificuldades na interpretação e desenvolvimento da tarefa proposta e na construção do poster. Além disso revelam também dificuldades em dar feedback aos posters dos colegas e em expressar o seu raciocínio na discussão final. Segundo as autoras, os resultados evidenciam a importância de promover estratégias de aprendizagem ativa para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e transversais e de análise e discussão de diferentes abordagens para a resolução de tarefas matemáticas.

A comunicação com o título “Correio matemático: Feedback e partilha de cartas como promotores da comunicação matemática escrita” de Ana Sofia Gonçalves e Louise Lima apresenta o estudo sobre o modo com o feedback através da troca de cartas contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática. A abordagem seguida propõe a resolução de quatro desafios matemáticos por alunos de duas turmas de 8.º ano e a escrita e receção de *feedbacks* no enquadramento de uma avaliação entre pares. Os seus resultados identificam dificuldades dos alunos na interpretação e na capacidade de explicitação e organização e clareza das suas ideias. O contexto de aprendizagem proporcionado favoreceu o modo como os alunos justificam as suas respostas e comunicam por escrito o seu pensamento. Verificam que a avaliação por pares foi relevante e proporciona o desenvolvimento de capacidades, em particular a comunicação matemática.

O poster intitulado “Conflictos cognitivos en el cálculo de porcentajes en educación primaria: Un estudio de caso”, de Ane Izagirre, Izaskun Baro & Iera Arrieta analisa o tipo de erros cometidos por alunos do 5.º ano de escolaridade no cálculo de percentagens, sendo identificados conflitos cognitivos de tipo conceptual e representacional, no que respeita ao estabelecimento correto da relação de proporcionalidade e reconhecimento do sinal de igualdade.

O poster de José Wrigell, Klinger Teodoro Ciríaco & Ana Caballero-Carrasco, sobre o tema “Proposição de um mapeamento sobre aprendizagem do campo aritmético e metodologias de investigação em teses espanholas” apresenta uma pesquisa que visa o aprofundamento em referenciais teórico-metodológicos sobre aprendizagens no campo aritmético.

Catarina Vasconcelos Gonçalves e Ana Margarida Carvalho apresentam no poster “O papel da robótica na aprendizagem da geometria: Uma experiência de ensino no primeiro ano do ensino básico” o estudo realizado no 1.º ano de escolaridade sobre o papel da robótica na aprendizagem da matemática na Geometria, verificando-se um maior envolvimento dos alunos neste contexto e uma melhoria na compreensão de conceitos. O estudo apresentado por Fábio Correia de Rezende & Hélia Jacinto no poster com o título “Tarefas de pensamento computacional nos livros didáticos de matemática em Portugal” analisa tarefas envolvendo o ambiente de programação visual Scratch em três manuais escolares do 9.º ano. Num desses manuais o número de tarefas com vista ao desenvolvimento do pensamento computacional (PC) é ainda baixo, não sendo a apresentação de elementos característicos desse ambiente em algumas tarefas uma garantia de contributo para as práticas de PC.

Os diversos estudos destacam a relevância do papel das tarefas matemáticas a propor aos alunos e do seu envolvimento na atividade matemática na sala de aula. Informam também sobre dificuldades sentidas pelos alunos e aspetos importantes da prática do professor, o que pode contribuir para melhorar práticas letivas para uma melhoria da aprendizagem dos alunos. O recurso à tecnologia, à robótica e ao pensamento computacional aparecem como meios privilegiados de abordagens educacionais que podem proporcionar aprendizagens mais completas e duradouras.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. DEB-ME.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico, 5.º ano*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais, 10.º ano, Ensino Secundário, Matemática A*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.

Edwards, S. (2015). Active learning in the middle grades. *Middle School Journal*, *46*, 26-32. https://doi.org/10.1080/00940771.2015.11461922

Oliveira, H., Mendes, F., & Henriques, A. (2022). A investigação sobre o ensino e a aprendizagem de temas matemáticos publicada em 30 anos da revista Quadrante. *Quadrante, 31*(2), 32–62. https://doi.org/10.48489/quadrante.28086

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. da Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 13-27). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86

Santos, L., & Canavarro, A. P. (2013). Matemática para todos, Matemática com todos: Do acreditar ao querer: A interpelação de Paulo Abrantes. *Educação e Matemática*, *124*, 3-7.

Santos, E., & Santos, L. (2019). O papel do GeoGebra nas práticas de regulação do ensino da área do paralelogramo. *Quadrante, 28*(1), 6–26. https://doi.org/10.48489/quadrante.22977

Subtil, M., Domingos, A. & Mariotti, M. A. (2023). A calculadora gráfica no ensino básico com o contributo da Mediação Semiótica. *Da Investigação às Práticas: Estudos De Natureza Educacional*, *13*(1), 116–143. https://doi.org/10.25757/invep.v13i1.343

Comunicações

TAREAS DE PATRONES UTILIZADAS EN PLANIFICACIONES DE TERCERO DE PRIMARIA

PATTERN TASKS USED IN THIRD GRADE PRIMARY SCHOOL PLANNING

María Eugénia Reyes-Escobar

Universidad de Granada, Chile

e.mreyesescobar@go.ugr.es

Antonio Moreno Verdejo

Universidad de Granada, España

amverdejo@ugr.es

Resumen: El objetivo es indagar sobre cuáles son las tareas utilizadas en las planificaciones para la enseñanza de patrones, en el contexto de su evaluación docente. Dentro de los antecedentes vemos conceptos de planificación, patrones y tareas matemáticas. La metodología utilizada es cualitativa, descriptiva y exploratoria, presentamos: la muestra, unidades de información, el instrumento, las variables y categorías de análisis. Los resultados presentaron tres niveles de complejidad de las tareas: reproducción, conexión y reflexión. También se utilizaron diferentes tipos de patrones, mostrando ejemplos concretos de las planificaciones de primaria. Algunas de las conclusiones respecto a las planificaciones de patrones en primero de primaria son dos: la primera es que hay una mayor frecuencia para patrones numéricos, visuales y repetitivos; la segunda es que hay mayor frecuencia de tareas de conexión y reproducción, en donde encontramos patrones visuales relacionados con tareas de conexión, patrones numéricos relacionados con tareas de reproducción y patrones numéricos relacionados con tareas conexión.

Palabras-clave: tarea de reproducción, tarea de conexión, tarea de reflexión, tipos de patrones, planificaciones de primaria.

Abstract: The aim is to investigate what tasks are used in planning for teaching patterns, in the context of their teaching evaluation. Within the background we see concepts of planning, patterns and mathematical tasks. The methodology used is qualitative, descriptive and exploratory, we present: the sample, information units, the instrument, the variables and categories of analysis. The results presented three levels of complexity of the tasks: reproduction, connection and reflection. Different types of patterns were also used showing concrete examples of the primary school planning. Some of the conclusions regarding the planning of patterns in first grade of primary school are two: the first is that there is a greater frequency for numerical, visual and repetitive patterns; The second is that there is a greater frequency of connection and reproduction tasks, where we find visual patterns related to connection tasks, numerical patterns related to reproduction tasks, and numerical patterns related to connection tasks.

Keywords: reproduction task, connection task, reflection task, types of patterns, elementary school schedules.

Introducción

Un aspecto fundamental en la enseñanza de las matemáticas es la planificación y diseño de tareas. Explicar la instrucción planificada por los docentes y las actividades que realizan para los estudiantes de primaria es difícil, porque se sabe muy poco de lo que sucede en el interior del aula o del trabajo de preparación de la enseñanza que realiza el profesorado tales como, planificaciones y las tareas que diseñan. Planificar la enseñanza es hacer posible un cierto conjunto de objetivos. El papel de la planificación es un tipo de práctica cíclica que sirve para mejorar la enseñanza. Además, a través de la planificación los docentes pueden aprender sobre la enseñanza y a través de la enseñanza pueden aprender sobre la planificación (Mutton et al., 2011).

Algunos autores (Akyuz et al., 2013; Sullivan et al., 2009), subrayan la importancia del estudio de estos documentos, porque la planificación docente incluye la introducción de ideas clave, la selección de tareas asociadas y la creación de evaluaciones para medir la comprensión de los estudiantes, y tiene un gran efecto en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Esto es extensible no solo a la planificación de aula, sino también a los planes de unidades que abarcan una serie de temas relacionados (Roche et al., 2014).

Como lo expresan Blanton y Kaput (2005), la incorporación del álgebra en la educación primaria no es un asunto trivial, porque los docentes de estos niveles no cuentan con una formación inicial exclusiva en matemáticas. Además, Ávalos y Matus (2010) afirman que esto podría conducir a que su conocimiento carezca de profundidad disciplinar, imposibilitando comprender el cómo y el porqué del álgebra en enseñanza primaria. Solar y Rojas (2015), expresan la preocupación de que el conocimiento matemático no se refleje en las planificaciones de la enseñanza. Los docentes de primaria tienden a ver este tema directamente relacionado con los símbolos y su uso, y los docentes no se sienten cómodos con el contenido algebraico.

El papel destacado de los patrones en el desarrollo del conocimiento matemático es evidente como muestra su inclusión en varios documentos curriculares desde hace dos décadas. En los últimos años, los currículos de diversos países han establecido los patrones en la enseñanza primaria, tal como lo demuestra un estudio de los currículos de Canadá, Australia, Costa Rica, Corea, Singapur y Chile (Zapatera, 2018).

En el contexto chileno se realiza una evaluación del desempeño docente. En el contexto chileno una parte de la evaluación docente consiste en la elaboración de un portafolio con tres módulos. El módulo uno del portafolio, es en el cual el docente planifica, evalúa y reflexiona frente a un contenido de enseñanza, contamos con las planificaciones del módulo uno para nuestra investigación. Según el Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas (2020) varios países usan el portafolio docente como una herramienta relevante dentro de los procesos evaluativos nacionales.

Por lo tanto, el objetivo general de esta comunicación es analizar el tipo de tareas matemáticas propuestas por el profesorado de primaria en sus planificaciones sobre la enseñanza de patrones en el contexto de su evaluación docente. Y para ello nos hemos propuesto dos objetivos específicos en esta comunicación: identificar los tipos de tareas y qué patrones están relacionados con cierto tipo de tareas, en las planificaciones del profesorado de primaria en el contexto de su evaluación docente.

Marco teórico

Educadores y matemáticos han enfatizado la importancia de los patrones en el desarrollo del conocimiento matemático. Un patrón es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que puede volver a repetirse (Castro et al., 2010). Un patrón consiste en una repetición regular de objetos, números, sonidos, movimientos o formas, así se considera la estructura del patrón, la relación entre sus diversos componentes (Castro-Rodríguez y Castro, 2016).

Para las matemáticas básicas, un patrón se puede describir como cualquier regularidad predecible que, por lo general, implica relaciones lógicas, numéricas o espaciales (Mulligan y Mitchelmore, 2009). El contenido matemático de patrones, se considera como uno de los enfoques del pensamiento algebraico. Permite llegar a generalizaciones, contribuye a la capacidad de establecer modelos matemáticos y las bases para el desarrollo de habilidades algebraicas (Blanton y Kaput, 2005). Los patrones se clasifican de acuerdo con su estructura independientemente del contexto en que se produzcan.

Las secuencias son el conjunto de elementos matemáticos ordenados de acuerdo con una regla (Frobisher et al., 1999).

Los patrones numéricos son una secuencia en la cual los elementos matemáticos son solo números (Frobisher et al., 1999). Y son construidos sobre el número y donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante (Liljedahl, 2004).

Los patrones visuales es una secuencia en la cual los elementos son objetos, dibujos o figuras, o símbolos (Frobisher et al., 1999). Exhiben relaciones entre sí que nos permiten continuarla de manera predictiva (Vale y Pimentel, 2009).

Los patrones de repetición o reiterativos son aquellos que tienen una secuencia de elementos que se repiten constantemente (Castro- Rodríguez y Castro, 2016).

Los patrones de crecimiento, es una secuencia de números o formas que se prolongan de modo regular. Aumentan o disminuyen de forma sistemática produciendo expansión o reducción del núcleo y existen de dos tipos, de crecimiento y de decrecimiento (Castro-Rodríguez y Castro, 2016).

Patrones de simetría un objeto o una configuración que posee simetría está constituido por partes equivalentes que pueden ser intercambiadas sin alterar la apariencia global (Frobisher et al., 2007).

Los patrones lógicos son aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y/o diferencia de atributos entre objetos (Ontario Ministry of Education, 2007).

El objetivo curricular que estableció el ministerio de educación en la elaboración del portafolio para el contenido de patrones en tercero de primaria fue el OA 12, "Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo" (Ministerio de Educación, 2013).

El trabajo en el aula depende decisivamente de las tareas que el profesor propone a los estudiantes (Ponte, 2009). Como señalan Watson y Ohtani (2015), ya sea desde una perspectiva cognitiva, cultural o práctica, las tareas son el fundamento del aprendizaje matemático. En este sentido, es una responsabilidad de los docentes que enseñan matemáticas, proponer tareas lo suficientemente ricas para que los estudiantes desarrollen sus competencias. En el aula de matemáticas, el docente debe proponer tareas basadas en: unas matemáticas sólidas y coherentes, que presenten relaciones entre diferentes representaciones; que propongan situaciones significativas; con expectativas de aprendizaje definidas, y en diferentes niveles de complejidad (Lupiáñez, 2014).

La meta es la finalidad cognitiva de la tarea, es el propósito que el docente asigna a una tarea, los objetivos de aprendizaje a los que la tarea pretende contribuir y los errores y dificultades que espera que la tarea contribuya a superar. Moreno y Ramírez (2016), consideran que el análisis de una tarea matemática consiste en identificar, la meta y su expectativa de aprendizaje; señalan que una tarea es una propuesta educativa que ha sido planificada como instrumento para evaluar el aprendizaje.

La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA, basados en la pirámide propuesta por De Lange (1995). Cada una de las tareas enunciadas admite tipos diferentes de complejidad, lo cual afecta al modo en que deben ejecutarse los correspondientes procesos y permite describir la dificultad de la tarea. Para la investigación se utilizan las tareas matemáticas, se consideran tres grados de dificultad en orden creciente, se definen tres niveles de complejidad cognitiva, organizados en función de las tareas y los procesos que conforman la competencia: de reproducción, conexión y reflexión.

Las tareas de reproducción incorporan ejercicios que exigen repetición de conocimientos descritos; las tareas de conexión requieren relacionar distintas representaciones de una misma situación o enlazar diferentes aspectos para alcanzar la solución; y las tareas de reflexión, son aquellas que implican un mayor número de elementos y exigen generalizaciones, explicaciones, razonamientos más complejos y justificación de resultados (Moreno y Ramírez, 2016). Respecto a las tareas de reproducción nos encontramos con diferentes indicadores que caracterizan a esta tarea: contextos familiares, conocimientos ya practicados, aplicación de algoritmos estándar, realización de operaciones sencillas y uso de fórmulas elementales. En cambio, en las tareas de conexión los indicadores son: contextos menos familiares, interpretar y explicar, manejar y relacionar diferentes sistemas de representación, seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios. Y, finalmente, para las tareas de reflexión los indicadores se caracterizan por: tareas que requieren comprensión y reflexión, creatividad, ejemplificación y uso de conceptos, relacionar conocimientos para resolver problemas complejos, generalizar y justificar resultados obtenidos (Rico, 2006).

Metodología

La metodología utilizada es cualitativa y descriptiva. El alcance de la investigación es de tipo descriptivo, porque se realiza una recolección de información desde las planificaciones escritas por los docentes en torno a las tareas de patrones. Tiene un enfoque cualitativo, porque se utilizaron variables y categorías de análisis extraídas desde las planificaciones del profesorado. Se emplea el análisis de documentos que implica recopilar, revisar, cuestionar y analizar diferentes textos, en este caso en formato digital, como la fuente principal de esta investigación (Morgan, 2022).

Muestra

La selección de la muestra fue intencionada, cumpliendo con los siguientes criterios: la asignatura de matemática, eje temático de patrones y álgebra, nivel de enseñanza de primaria, y objetivos curriculares de patrones. La muestra seleccionada es de diez portafolios que cumplen los criterios descritos anteriormente, es una muestra diversa porque es una revisión de documentos elaborados por docentes en ejercicio en escuelas, de distintas edades, de diferente localización geográfica y de diferente especialización.

Unidades de información

Nuestras unidades de información son las oraciones, frases y palabras que describen las tareas y secuencias de tareas de clases en sus planificaciones, como son tres lecciones para el mismo objetivo curricular, los diez docentes de tercero de primaria redactan distintas tareas para cada una de las treinta lecciones que planifican.

Instrumento

El portafolio consiste en la preparación de tres módulos y cinco tareas, cuatro de ellas con evidencia escrita: el primer módulo (planificación, reflexión y evaluación), el segundo módulo (filmación de una clase) y el tercer módulo (trabajo colaborativo). Para esta comunicación consideramos parte del primer módulo, las planificaciones de tres clases del contenido de patrones. Esta comunicación utiliza como instrumento de recogida de datos, los portafolios de diez docentes chilenos de primaria que realizaron su portafolio en patrones. Los instrumentos son documentos oficiales y reservados. Los portafolios fueron solicitados al sistema de evaluación del desempeño profesional docente para el fin de esta investigación, por lo tanto, mantenemos la confidencialidad de la información de los datos elaborados.

Variables y categorías de análisis

Para la primera variable tareas matemáticas y para la segunda variable de patrones contemplamos las diferentes categorías de análisis: patrones y tareas matemáticas. Para patrones las categorías son: secuencias, patrones numéricos, patrones de crecimiento, y patrones repetitivos. En las tareas matemáticas tenemos tres tipos: tareas de reproducción, tareas de conexión y tareas de reflexión.

Resultados

De las planificaciones seleccionamos el apartado correspondiente a los objetivos de clases y a las actividades. Se utilizó una planilla de cálculo para ir clasificando de acuerdo con las categorías de análisis señaladas.

Para resguardar la confidencialidad de cada uno de los docentes, utilizaremos el curso y el orden de portafolio, por ejemplo, tenemos al docente de tercero de primaria que está en la posición seis y se simboliza como 3ºF.

En la primera parte se seleccionan los contenidos redactados por el profesorado, como son tres clases por cada docente, tenemos un total de 30 objetivos que están relacionados con los siguientes contenidos. Tal como se aprecia en la tabla 1, la mayor cantidad de contenidos están relacionados con secuencias, patrones numéricos y de crecimiento.

Tabla 1. Clasificación de patrones en los contenidos de clases

Clasificación	Clase 1	Clase 2	Clase 3	Total
Secuencias	6	3	1	10 (33,3%)
Patrones numéricos	3	4	3	10 (33,3%)
Patrones de crecimiento	0	3	6	9 (30%)
Patrones repetitivos	1	0	0	1 (3,4%)
Total	10	10	10	30 (100%)

Fonte: Elaboración propia

El profesorado, en su evaluación docente, tienen que elegir un contenido matemático para realizar su portafolio y en estas planificaciones eligen el objetivo curricular de patrones que están estipulados en las bases curriculares (Ministerio de Educación, 2013).

Los docentes de tercero de primaria hacen su planificación con el objetivo curricular “Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo”, en este caso vemos que los docentes también planifican para: secuencias (3ºA, 3ºC, 3ºE, 3ºF, 3ºG, 3ºH), patrones numéricos (3ºB, 3ºD, 3ºH, 3ºI, 3ºJ), patrones repetitivos (3ºB) y patrones de crecimiento (3ºA, 3ºB, 3ºC, 3ºE, 3ºG, 3ºH, 3ºI).

Tabla 2. Tipos de tareas planificadas en las actividades de clases

Tipos de tareas	Clase 1	Clase 2	Clase 3	Total
T. Reproducción	11	12	12	35 (38,8%)
T. Conexión	12	11	8	31 (34,4%)
T. Reflexión	4	4	5	13 (14,4%)
Sin tareas	3	3	5	11 (12,2%)
Total	30	30	30	90 (100%)

Fuente: Elaboración propia

Se muestra en la tabla 2, la variable tareas matemáticas, utilizada por el profesorado de primaria, y la frecuencia con que encontramos cada tipo de categoría. Se realiza la selección de actividades de las tres clases y obtenemos 90 clases para categorizar las diferentes tareas. Tal como se muestra en la tabla 2, las tareas de reproducción y de conexión son las que presentan una mayor frecuencia. Las tareas de reflexión pese a tener una baja frecuencia la mayoría de los docentes las utilizan en alguna clase (3ºA, 3ºB, 3ºC, 3ºE, 3ºF, 3ºH, 3ºJ).

Y finalmente en la tabla 3, a modo de resumen se muestran ejemplos empíricos redactados por los docentes, se pueden apreciar las distintas variables: tipos de patrones y tareas que aparecen mencionados en algunas lecciones.

Tabla 3. Tipos de tareas y patrones planificadas en las lecciones

Fragmento de planificación	Fundamentación
Docente 3ºE, lección 2: Para motivar a los alumnos, los invito al patio de la escuela realizando un juego al aire libre y utilizando objetos ya conocidos por ellos: conos, aros y pelotas, distribuí estos elementos formando el siguiente patrón, primero la pelota, luego el aro y finalmente el cono, luego fui repitiendo esta secuencia, colocando solo alguno de estos objetos, invitándolos a descubrir cual de estos elementos faltaban. Les indiqué que formaran una hilera para que cada estudiante realizara esta actividad comprendiendo de forma lúdica y concreta lo que significa la representación de un patrón, clarificando este concepto. A medida que pasaban los alumnos fui modificando esta secuencia.	La docente 3ºE en este fragmento de su planificación, en su lección 2, alude al concepto de patrón, secuencia y a una **tarea de reproducción**. Respecto al contenido ella alude al concepto de patrón y luego solicita continuar con la secuencia, además de modificarla. La tarea es de reproducción porque utiliza solo un tipo de ejercicios que exigen repetición de conocimientos y utiliza elementos de su contexto.
Fragmento de planificación	Fundamentación
Docente 3ºD, lección 3: Se reúnen en 2 grupos. Conjuntamente, se entregan las instrucciones en dónde, cada grupo debe trazar con tiza de color blanco, líneas verticales y horizontales, abarcando 10 cuadrados hacia abajo y 10 cuadrado hacia el lado hasta formar una cuadrícula en	La docente 3ºD en este fragmento de su planificación, en su lección 3, alude al concepto de patrones numéricos y a una **tarea de conexión**.

blanco. Escriben en cada casillero el número que le corresponde, hasta llegar al 100 y así, formar una tabla numerada. Terminada la primera instrucción, comienzan el juego. Forman 2 filas, cada fila tiene a un docente adelante, el primer docente, menciona que deben ir saltando de 10 en 10 de forma descendente (sin mencionar por donde deben comenzar) analizan por dónde pueden empezar, una vez realizados los saltos, deben trazar una la línea en forma de flecha desde donde comenzaron a saltar hasta donde finalizaron, explican y argumentan si la flecha es de forma ascendente o descendente. El segundo grupo, debe pintar con tiza de color rojo los casilleros que van de 5 en 5 hasta el 30. Luego, cada fila, realiza sentadillas en los números que van de 6 en 6, comenzando del número 30 (36, 42, 48 hasta llegar al 100).	Respecto al contenido ella alude al concepto de patrón numérico, porque las secuencias que utiliza son números. La docente en este fragmento de su lección utiliza diferentes contextos menos familiares y relaciona sistemas de representación visual-activo, como, por ejemplo: la tabla del 100 es visual, el juego de saltar y realizar sentadillas es activo.
Docente 3ºF, lección 3: …se pide que formen equipos de trabajo y se indicaran las tareas a realizar, a través de un power point se visualiza la actividad dando las instrucciones a seguir con cada patrón y secuencia. La primera será construir ,formar patrones y secuencias con figuras de papel de diario, servilletas, papel volatín, cartulina y goma eva, ellos eligen con que material trabajaran, luego de ésto tendrán que estimar su valor en conjuntos, dispondrán como apoyo un panel y power point los valores (diario 1 peso, servilleta 3 pesos, volatín 5 pesos y goma eva 9 pesos),posteriormente se le piden que calculen el valor de secuencias de los diversos tipos y materiales para completar una plantilla, se hace preguntas ¿por qué creen que valen distinto?¿cuántas guirnaldas o con cuales se hace más fácil para llegar al número 100?	La docente 3ºF en este fragmento de su planificación, en su lección 3, alude al concepto de secuencias, patrones de repetición, patrones numéricos, y a una **tarea de reflexión**. Realiza secuencia de distintos tipos de materiales y colores. La docente plantea primero construir patrones repetitivos y posteriormente estiman el valor por el material y el color para finalmente ver los patrones numéricos. La tarea corresponde a una tarea de reflexión porque requiere creatividad para realizar las secuencias, comprensión y reflexión para realizar el traspaso de patrones de repetición a patrones numéricos donde la base es 10 para llegar a 100. La docente plantea preguntas que orientan la justificación de resultados.

Fuente: Elaboración propia

Discusión

Los docentes tienen la libertad de crear diferentes contenidos y tareas que consideren pertinentes para lograr el objetivo curricular.

Pero las tareas en las que se enfocan los docentes en general son tareas de reproducción, tareas de conexión, y hay un porcentaje que incluso no planifica tareas relativas al contenido de patrones, son pocos los docentes que planifican tareas ricas para el aprendizaje de patrones como las tareas de reflexión. Esto reafirma lo expresado por Ponte (2009), en que muchas de las tareas propuestas con patrones y regularidades constituyen tareas de exploración o investigación, siendo las primeras más accesibles para la mayoría de los estudiantes y las segundas más complejas.

El profesorado manifiesta una mayor cantidad de contenidos planificados hacia los patrones numéricos en las planificaciones, esto puede ser a causa de que el profesorado podría seleccionar sus tareas en la planificación en los libros de texto. Como señala el trabajo de Bolaños y Moreno (2023), los libros de texto incluyen mayor cantidad de tareas sobre patrones numéricos. Pero que se enfoquen en más de un tipo de patrones ayuda al desarrollo del pensamiento algebraico. Porque una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático (Ministerio de Educación, 2013).

Las tareas planificadas por los docentes están relacionadas con diferentes elementos que las hacen ricas para el aprendizaje de los estudiantes, entre más sistemas de representación utilice el docente, mayor es la internalización del aprendizaje por parte del estudiantado. Tal como lo afirman Moreno y Ramírez, 2016, las tareas de conexión agrupan tareas que requieren relacionar distintas representaciones. Concordamos con Watson y Ohtani (2015), quienes afirman que las tareas son el fundamento del aprendizaje matemático, desde una perspectiva cognitiva, cultural o práctica.

Con este trabajo documentamos tareas de patrones para apoyar el crecimiento profesional de los docentes, sobre la preparación de la enseñanza. Y contribuimos a documentar las planificaciones como una fuente valiosa de información, para el conocimiento del profesorado, respecto al tipo de patrones y el nivel de complejidad de las tareas que utilizaron. Y en la misma línea de Chapman (2023) que ha incluido experiencias que involucran la colaboración con otros docentes para planificar, y discutir lecciones de matemáticas lo que orienta el crecimiento profesional, pensamos que estas planificaciones pueden ser un insumo para la colaboración profesional entre docentes.

Conclusión

En este trabajo hemos analizado el tipo de tareas matemáticas propuestas por el profesorado de primaria, en sus planificaciones didácticas sobre la enseñanza de patrones en el contexto de su evaluación docente.

Identificamos el tipo de patrones utilizados por el profesorado en sus planificaciones. Hemos encontrado que la mayor cantidad de contenidos planificados, además de los patrones numéricos que estipula el objetivo curricular, están relacionados con secuencias (33,3%) y patrones de crecimiento (30%).

También identificamos los tipos de tareas y el nivel de complejidad de tareas matemáticas en las planificaciones del profesorado de primaria en el contexto de su evaluación docente. Las tareas matemáticas tuvieron diferente frecuencia, las tareas de reproducción y de conexión (73,2 %) son las que el profesorado planifico con mayor frecuencia.

Una de las causas, es que el profesorado de este nivel tiene la práctica de utilizar distintas representaciones para trabajar los contenidos matemáticos. En general utilizan generalmente tres tipos de representaciones, esta es la esencia del modelo “concreto, pictórico, simbólico” que se designa con la sigla COPISI (Ministerio de Educación, 2013). Esto tiene consecuencias positivas para el aprendizaje de los estudiantes. Ejemplo de ello dos docentes lo estipulan en su planificación: la docente (3ºE), “recordando con los estudiantes que se pueden representar patrones de manera concreta, pictórica y simbólica” y la docente (3ºF) “la actividad se puede realizar con cualquier material concreto, pictórico y simbólico”. Esto concuerda con Lupiáñez, (2014), en las clases de matemáticas, el docente debe proponer tareas que presenten relaciones entre diferentes representaciones.

Hemos pretendido visibilizar la preparación de la enseñanza a través de las planificaciones de un grupo de docentes. Esta es solo una muestra y no representa al profesorado chileno, pero consideramos que mostrar las planificaciones en este contexto de evaluación docente sobre patrones son importantes, no solo para los profesores en ejercicio sino también para los profesores en formación. Para los profesores en ejercicio porque les ayuda a visibilizar el tipo de tareas significativas (conexión y reflexión) de sus pares en ejercicio en la planificación de los portafolios y así mejorar su nivel de desempeño en este instrumento. Y para los profesores en formación, porque son planificaciones del trabajo práctico de docentes chilenos que orienta sobre el modelo de planificación frente a un objetivo curricular dado.

Referencias bibliográficas

Akyuz, D., Dixon, JK., & Stephan, M. (2013). Mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas con prácticas de planificación efectivas. *Desarrollo Docente, 17*(1), 92–106. http://doi.org/10. 1080/13664530.2012.753939

Ávalos, B., & Matus, C. (2010). *La formación inicial docente en Chile desde una óptica Internacional.* Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412–446. https://eric.ed.gov/?id=EJ764987

Bolaños González, H., & Moreno, A. (2023). El análisis didáctico aplicado a libros de texto de matemática de sexto grado. *Repertorio Científico, 26*(2), 44–60. https://doi.org/10.22458/rc.v26i2.5065

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55–67.

Castro-Rodríguez, E., & Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. In E.Castro & E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 87–107). Pirámide. http://hdl.handle.net/10481/47545

Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas (2020). *Rúbricas generales para evaluar el desempeño docente en el portafolio*. Chile. http://www.docentemas.cl

Chapman O. (2023). Pre-existing mathematics teacher characteristics In A. Manizade (Eds.), *The evolution of research on teaching mathematics* (pp. 21-54). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31193-2_2

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. In T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87–172). SUNY Press.

Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, J. Roper, T., & Therlfall, J. (1999). *Learning to teach number*. Stanley Thornes.

Frobisher, L., Frobisher, A., & Orton, J. (2007). *Learning to teach shape and space*. Nelson Thornes.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24–42.

Lupiáñez, J. L. (2014). *Tareas que promueven el desarrollo de la competencia matemática.* Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad (8 de marzo de 2014).

Ministerio de Educación (2013). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Moreno, A., & Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas In L. Rico & A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243–258). Editorial Pirámide

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Mutton T., Hagger H., & Burn K. (2011). Aprender a planificar, planificar para aprender: La experiencia en desarrollo de los profesores principiantes, *Teachers and Teaching, 17*(4), 399–416, https://doi.org/10.1080/13540602.2011.580516

Ontario Ministry of Education (2007). *A guide to effective instruction in mathematics. Kindergarten to grade 3. Patterning and algebra*. Canadá: Autor.

Ponte, J. (2009). Uma agenda para investigação sobre padres e regularidades no ensino-aprendizagem da matemática e na formação de professores. In I. Vale & A. Barbosa (Eds.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática* (pp. 169-175). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo - Projecto Padrões

Rico Romero, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, 275–294.

Roche, A., Clarke, D. M., Clarke, D. J., & Sullivan, P. (2014). Primary teachers' written unit plans in mathematics and their perceptions of essential elements of these. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), pp. 853–870

Solar, H., & Rojas, F. (2015). Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional del álgebra escolar. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *10*(1), 14–33. http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662015000100002&lng=es&tlng=es

Sullivan, P., Clarke, D. J., & Clarke B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching *Mathematics Education Research Journal 21*(1), 85–105 https://link.springer.com/article/10.1007/BF03217539#preview

Vale, I., & Pimentel, T. (2009). Visual pattern tasks with elementary teachers and students: A didactical experiences In I. Vale & A. Barbosa (Eds.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática* (pp. 151-162). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo - Projecto Padrões. Portugal

Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, 97*, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros

EVALUACIÓN DE LA EFICIENCIA DE ALGORITMOS CREADOS MEDIANTE TAREAS DESCONECTADAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EVALUATION OF THE EFFICIENCY OF ALGORITHMS CREATED THROUGH UNPLUGGED TASKS OF MATHEMATICAL EDUCATION

Gregorio Arjona-Aranda

Universidad de Málaga, España

gregorio32@uma.es

Cristina Sánchez-Cruzado

Universidad de Málaga, España

cristinasanchez@uma.es

M.ª Teresa Sánchez-Compaña

Universidad de Málaga, España

teresasanchez@uma.es

Antonio Ruano-Cano

Universidad de Almería, España

antonioruanocano@uma.es

Resumen: Debido a la inclusión del pensamiento computacional en la legislación educativa española, en particular en el área de matemáticas, es necesario comprender este pensamiento en el contexto educativo, y poder aportar recursos para llevarlos al aula. Se presenta una experiencia piloto de una propuesta realizada para estudiantes del Grado de Educación Primaria, futuros docentes que deben conocer cómo fomentar el desarrollo del pensamiento computacional en el aula. Se proponen una serie de tareas desconectadas en las que, mediante recursos manipulativos, el profesorado en formación cree y ejecute, en este contexto, lo que se han denominado algoritmos. El objetivo de este trabajo es la búsqueda de una forma de evaluar cómo, de manera sencilla, se puede medir la eficiencia de algoritmos creados con recursos manipulativos, como puede ser el juego *Turing Tumble*. Mediante un análisis correlacional, se comprueban los factores de los que puede depender la eficiencia de estos algoritmos. En este caso, se contrastan unas medidas discretas propuestas por el equipo de investigación (que dependen del propio recurso) y una medida continúa establecida por la literatura (el tiempo). Los resultados contribuyen a una investigación mayor en la que se pretende comprender el pensamiento computacional desde el ámbito matemático, y cómo se pueden llevar propuestas didácticas al aula usando actividades desconectadas.

Palabras clave: pensamiento computacional, tareas desconectadas, eficiencia, medidas.

Abstract: Due to the inclusion of computational thinking in the Spanish education law, especially in mathematics, it is necessary to understand this thought process in an educational context, as well as to contribute resources to share them in classes. We present a pilot experience of a workshop made for students of Primary Education Degree, future teachers that need to know how to promote the development of computational thinking. We propose a series of unplugged activities in which the forming teachers create and execute what we call algorithms, given the context and using manipulative resources, like the game *Turing Tumble*. Through a correlational analysis, we check some factors that could potentially describe the efficiency of an algorithm. The objective of this work is to find a way to evaluate how to easily measure the efficiency of these algorithms. In this case, we contrast discrete measurements (that depend on the resource) and a continuous measurement established by literature (time). These results contribute to a broader investigation in which we try to understand computational thinking from a mathematical perspective, and how we can bring didactic proposals to classes using unplugged activities.

Keywords: computational thinking, unplugged tasks, efficiency, measures.

Introducción

En la actualidad, la ley educativa española (MEFP, 2022) añade al currículo de matemáticas el pensamiento computacional. Santaengracia et al. (2023) afirman que el profesorado se enfrenta a un reto para el que no se siente suficientemente preparado, por lo que es necesario proporcionar una formación adecuada que les permita llevar a cabo propuestas didácticas que fomenten el desarrollo de destrezas propias del pensamiento computacional (en adelante PC).

Wing (2008) consideraba que la implementación del PC en la educación primaria era importante, y que se puede encontrar en situaciones de la vida cotidiana. Kotsopoulos et al. (2017) resaltaban el interés y la necesidad de desarrollar este pensamiento mediante lo que se denominan tareas desconectadas (en inglés se puede encontrar el término *unplugged computational thinking*).

Esta investigación continúa con el trabajo realizado por Ayala-Altamirano et al. (2024) para tratar de caracterizar el PC mediante tareas desconectadas. En esta ocasión se intenta evaluar cómo, de forma sencilla, se puede medir la eficiencia de los algoritmos creados con un recurso manipulativo, *Turing Tumble*, juego de programación de manera desconectada que promueve el PC (Ayala-Altamirano et al., 2024). En general, la eficiencia de algoritmos creados puede medirse con el tiempo de funcionamiento de un programa (Gal-Ezer & Zur, 2004), a mayor tiempo menor eficiencia. En esta comunicación se mostrará si el tiempo en este caso, tiene alguna relación con la forma en la que se diseñan y crean algoritmos con el juego *Turing Tumble*.

La experiencia se ha realizado en forma de talleres en tres grupos del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Málaga, en la asignatura de cuarto curso de Didáctica de la Medida. En ella, el profesorado en formación inicial se enfrenta al reto de diseñar algoritmos, y medir su eficiencia con el tiempo de ejecución y el número de elementos que utilizaba.

Marco teórico

Para poder desarrollar este estudio, es necesario presentar ciertos fundamentos teóricos relacionados con el PC y la necesidad de promover su desarrollo mediante actividades desconectadas. Es necesario acordar qué se entiendo por algoritmo en una experiencia manipulativa sin ordenadores ni elementos de programación.

Pensamiento computacional

El término *pensamiento computacional* lleva apareciendo en la literatura desde la década del 1950 (Angeli & Giannakos, 2020). Pero Wing (2006) fue la primera autora en dar una definición clara del PC, pues comentaba que el PC implicaba una resolución de problemas, un diseño de sistemas y una comprensión del comportamiento de las personas a partir del uso de ideas esenciales de la informática.

Desde entonces, se ha intentado visibilizar este término, pero la comunidad no era capaz de dar con una definición global (Selby & Woollard, 2014; Denning & Tedre, 2019). Algunos autores defienden que el PC es la antesala imprescindible para poder trabajar con ordenadores (Barr & Stephenson, 2011; Santaengracia et al., 2023), mientras que otros intentan aplicar los fundamentos del PC al mundo real y a nuestro alrededor (Furber, 2012; Angeli & Giannakos, 2020). Angeli y Giannakos (2020) llegan a simplificar más la definición, pues este término describe la noción de usar un pensamiento estructurado, o algorítmico, para producir un resultado a partir de un registro. De este modo, podemos prescindir de las limitaciones del ordenador para poder desarrollar situaciones educativas con materiales de cualquier tipo.

Grover y Pea (2013, 2018) afirman que la esencia del PC reside en cómo piensa una persona con formación en informática, no la máquina que utiliza. Para que se realice una buena práctica de PC, se debe al menos descomponer problemas, crear lo que denominan *artefactos computacionales* (por ejemplo, un programa de ordenador o el algoritmo de una operación), testear y depurar, refinar las iteraciones, colaborar y tener creatividad.

De partida, parecía imprescindible introducir el PC junto con ordenadores. Sin embargo, aun teniendo aspectos positivos, el uso temprano de recursos digitales puede provocar varios problemas en el estudiantado, como dificultades de vista, uso inadecuado y adictivo de internet o las redes, y sedentarismo (Rumiche Valdez & Solis Trujillo, 2021). Kotsopoulos et al. (2017) afirman que, introduciendo el PC de manera desconectada, se aportan ideas preliminares y básicas sin tener que conocer un lenguaje máquina nuevo y complejo. Además, Looi et al. (2018) muestran en su estudio un beneficio en estudiantes que realizaron actividades desconectadas, frente a quienes realizaron tareas con ordenadores.

Desde entonces se han realizado algunas experiencias en el aula. Por ejemplo, Nakumasa et al. (2015) realizó una actividad de ordenación de poliedros según sus propiedades, estableciendo que ordenar es un ejemplo de algoritmo en el que las propiedades forman parte de la información a estudiar. Tsavara et al. (2017) realizan un experimento en el que trabajan el enfoque desconectado en una primera sesión, utilizando un juego inspirado en *Robot Turtles* en el que, mediante unas cartas, dan órdenes a las fichas de moverse hacia delante, hacia los lados, o hacia atrás. Entra en consonancia con la idea de Kotsopoulos et al. (2017) de que las actividades desconectadas deben ser una introducción del pensamiento computacional, siendo la primera de cuatro fases de aprendizaje (actividades desconectadas, actividades de retoque o *tinkering*, actividades de creación y actividades de combinación).

Algoritmia

Santaengracia et al. (2024) organizan el PC en tres ejes principales: según los datos, los algoritmos o la resolución de problemas. A su vez, hacen una distinción de componentes procedentes del PC, organizándolos alrededor de estos tres pilares (véase la Figura 1).

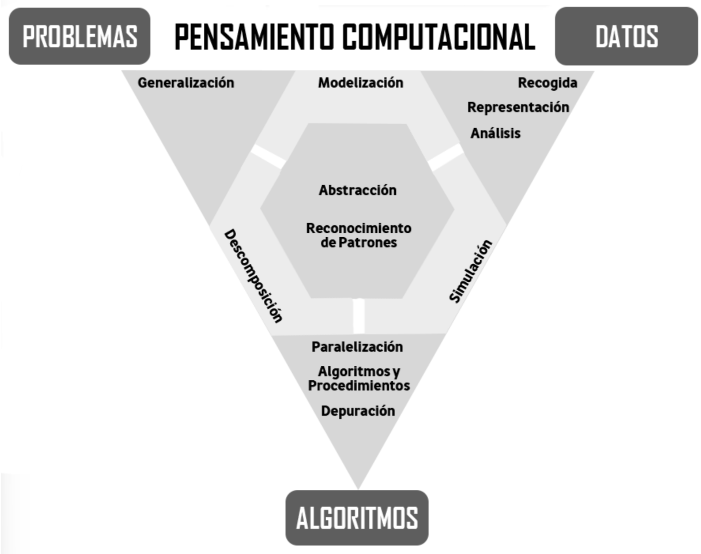


Figura 1. Distribución en tres ejes del PC, tomado de Santaengracia et al. (2024)

Debido a la naturaleza del recurso manipulativo, este trabajo se centrará en los algoritmos.

Según Pérez Alcázar (1994), la idea de algoritmo es tan antigua como el propio pensamiento matemático, adquiriendo su término característico en el siglo IX a partir del matemático persa Al-Juarismi. No obstante, no se llegaría a encontrar una definición hasta principios del siglo XX, con ciertas perspectivas dadas por referentes de la computación y la lógica como Church, Turing o Gödel (Pérez Jiménez, 2005). Según Yanofsky (2011), se puede definir informalmente un algoritmo como un procedimiento que toma un valor (o conjunto de valores) como un registro de entrada y devuelve un valor (o conjunto de valores), como una respuesta de salida.

Matemáticamente hablando, Fernández Bravo (2005) define el algoritmo como una secuencia de pasos que se realizan en una operación para realizar una tarea o resolver un problema. Distingue entre dos tipos de algoritmos: los sumisos, que se imponen “para realizar la acción operativa”, de modo que el alumnado acepta “lo que hace sin entender por qué lo hace” (p. 32); y los innovadores, que “se aplican con opción de decisión propia, comprendiendo [...] tanto lo que se hace como el porqué de ello” (p. 33). De este modo, el autor indica lo absurdo de enseñar algoritmos de manera sumisa y, como ejemplo, promueve una contextualización histórica de los algoritmos de las operaciones. Según él, la actividad matemática se encarga de encontrar relaciones y poder estructurarlas cuando se conocen.

Cerón Molina (2022) ha realizado una revisión bibliográfica en la que se pretende mostrar un desarrollo del pensamiento lógico-matemático en la educación primaria, mostrando los posibles retos y desafíos que tiene llevar la programación a esta etapa educativa para fomentar la resolución de problemas. Un recurso bastante utilizado es *Scratch*, un lenguaje de programación por bloques, pero se suele trabajar con alumnado de tercer ciclo de educación primaria (Brennan & Resnick, 2012; Moreno León et al., 2021).

Eficiencia de un algoritmo

Un algoritmo necesita ser evaluado desde dos perspectivas: la eficacia y la eficiencia. La eficacia establece si un algoritmo es correcto o no, si realiza aquello que se le pide o no. Según Gal-Ezer y Zur (2002), la eficiencia se mide a partir de una comparación de distintos algoritmos, fijándose en el espacio (de memoria) y tiempo ocupado. El espacio se puede medir mediante variables o tamaños de datos, mientras que el tiempo se puede medir de varias formas. La más común es cronometrando el algoritmo de principio a fin, algo relativamente sencillo en tareas a ordenador que cuentan con su propio cronómetro. Pero el ser humano es imperfecto y, ante medidas continuas, produce errores mucho más grandes que cualquier programa de ordenador.

Gal-Ezer y Zur (2004) proponen una forma de medir discretamente el tiempo mediante acciones individuales. De esta forma, se caracteriza una propiedad complicada de medir a ojo en otra tan sencilla como contar elementos en una lista. Esta idea será esencial para medir la eficiencia de los algoritmos creados a partir de los elementos que componen el propio recurso manipulativo *Turing Tumble*, un juego que simula una máquina de Turing (Pitt, 2023). Según Wolf (2014), una máquina de Turing es el modelo más conocido de computación, que consiste en una cinta infinita con posiciones en las que se pueden escribir ceros o unos, además de un cabezal que sirve para leer el estado de la máquina en una posición y un programa que modifica el estado de la cinta, moviéndola hacia los lados posición por posición.

Metodología

En este estudio se adopta un enfoque metodológico mixto, en el cual se combina elementos de enfoque cualitativo y cuantitativo. En la fase cualitativa se incluye un proceso de reducción y categorización (Cohen et al., 2018), mediante el cual se analizan y clasifican los datos recolectados, que en este caso son las soluciones dadas a las tareas presentadas por el alumnado. En la fase cuantitativa se lleva a cabo un análisis descriptivo y correlacional utilizando el coeficiente de correlación de Pearson entre las variables seleccionadas, que nos permite identificar posibles asociaciones lineales entre ellas. Como recurso se utilizó el juego *Turing Tumble*.

Participantes y contexto

La intervención se realizó con tres grupos de estudiantes de cuarto curso del grado de Educación Primaria de la Universidad de Málaga, trabajando en la asignatura de Didáctica de la Medida. Tal y como dice el nombre de la asignatura, en ella se trabajan tópicos como las magnitudes, medidas y cantidades, así como estadística y probabilidad. La muestra es intencional y está compuesta de 134 estudiantes de tres grupos clase diferentes, según interés y predisposición del profesorado.

A la hora de implementar el diseño, cada clase fue dividida en 10 u 11 equipos heterogéneos, de moda 5 personas por grupo, obteniendo un total de 31 subgrupos (11 en el grupo clase A, 10 en el grupo clase B y 10 en el grupo clase C). Durante la sesión de dos horas dentro de la asignatura de Didáctica de la Medida, trabajaban de forma simultánea los 10 u 11 equipos. Por otro lado, la clase fue guiada por un docente-investigador, y de apoyo en el aula estaba el docente habitual y otra persona de apoyo del equipo de investigación.

Diseño de tareas y recolección de datos

Turing Tumble es un juego creado por Boswell y Boswell (2021) en el que se pueden crear caminos mediante una serie de piezas que se sitúan en un tablero, por donde caen unas canicas, situadas en la parte superior, al ser accionadas por unas palancas en la parte inferior. El juego cuenta con seis tipos de piezas, pero, a efectos de esta investigación, solo se han utilizado tres de estos, que se pueden ver en la Figura 2 junto con el tablero.

Además, cada grupo dispuso de seis canicas rojas y seis canicas azules que podían situar en la parte superior del tablero.

Figura 2. Tablero de *Turing Tumble* a la izquierda con canicas colocadas arriba, y piezas utilizadas en este estudio, con sus respectivos nombres.

Cada fila se denomina nivel, y para crear caminos (crear algoritmos), se deben situar piezas de forma continua sin que se produzcan saltos entre ellas. En la Figura 3 se puede observar un ejemplo de camino correcto y de camino con saltos.

Figura 3. Ejemplo de camino correcto (izquierda) y de camino incorrecto con la presencia de un salto (derecha).

En el pensamiento computacional se encuentra incluido la creación de algoritmos, que en esta experiencia se traduce como la creación de caminos en el tablero, en cómo y dónde poner las distintas piezas de las que se dispone, para obtener el resultado deseado. La ejecución de algoritmos en este caso se corresponde con todo el proceso desde que se activa la palanca por primera vez hasta que cae la última canica del tablero.

Esta máquina guarda además relación con las matemáticas desde el sentido algebraico, ya que con ella se pueden reconocer patrones, realizar secuencias lógicas, contar y operar (Ayala-Altamirano et al., 2024).

Se propone al alumnado del grado resolver una secuencia de actividades relacionadas fundamentalmente con el sentido de la medida, realizando mediciones discretas no convencionales por conteo, y estimaciones continuas del tiempo, que se comparan y ordenan a posteriori, para tratar de hallar una relación entre las distintas medidas (tiempo y numerosidad).

La sesión se estructuró en tres secciones: una primera en la que se presentaba la máquina y sus componentes, una segunda en la que se dejaba al alumnado probar las máquinas de forma experimental y libre, y una tercera sección en la que se resolvían cuatro tareas propuestas por el equipo docente-investigador. Los resultados de las tareas eran recogidos en unos formularios que rellenaba el alumnado con las soluciones a las mismas, en forma de representación simbólica. En la **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** se puede ver un ejemplo de formulario en blanco (izquierda) con una posible solución en el tablero real (derecha).

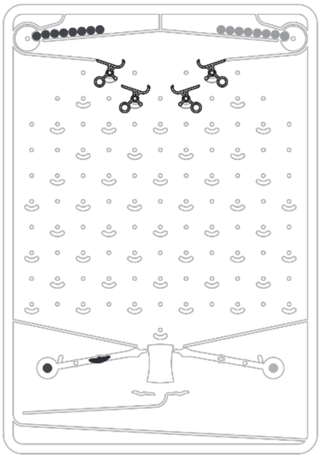


Figura 4. Formulario en blanco para el alumnado (izquierda). Posible solución en el tablero real (derecha).

Las actividades realizadas con *Turing Tumble* se inspiraron en la propuesta de Boswell y Boswell (2021), y facilitaba que el alumnado pudiera trabajar con problemas que iban escalando en dificultad. En la Tabla 1 se describen las actividades.

Tabla 1. Descripción de las tareas a realizar en la máquina *Turing Tumble*

Tarea	Descripción de la tarea
Introducción a la máquina	Juego libre en la que se conoce la máquina Turing Tumble.
Tarea 1	V1) Se presenta un tablero con un camino (algoritmo) incompleto. Usando solo rampas, tienen que completar el camino para que sólo caigan canicas azules. V2) Se presenta un tablero en blanco y, usando solo rampas, tienen que crear un camino (crear algoritmo) para que sólo caigan canicas azules.
Tarea 2	Se presenta el tablero vacío y se les pide que, con rampas, realicen un camino para que sólo caigan canicas rojas.
Tarea 3	Usando rampas y cruces, tienen que completar un camino para que el patrón de abajo resulte azul, rojo, azul, rojo, etc.
Tarea 4	Se presenta un camino similar al anterior, que incluye un bit y se les pide completarlo para que el patrón resultante sea azul, azul, rojo, azul, azul, rojo, etc.

Fuente: Elaboración propia.

La tarea 1 estaba dividida en dos versiones, V1 y V2, para que el alumnado tuviera posibilidad de elegir la dificultad de cómo empezar. Solo se hizo la división de dificultad en esta tarea, pues en el resto ya habían comprendido cómo se usaba la máquina.

Según Boswell y Boswell (2021), se recomienda realizar las tareas en solitario o por parejas, pero se vio pertinente hacer grupos grandes porque no solo se estaban creando caminos (creando algoritmos), sino que, además, se estaba midiendo la eficiencia. De este modo, se pudo realizar un reparto de roles para que cada estudiante prestase atención a un aspecto de la tarea y ponerlo en común a posteriori. Con esta gestión de roles se consigue que, además, el alumnado tome conciencia de la organización adecuada de los trabajos colaborativos (Fombona Cadavieco et al., 2016).

Los grupos tenían que realizar la actividad en el tablero de forma manipulativa, dibujar la solución en el formulario de forma simbólica, medir el número de piezas añadidas, y el tiempo que tardan todas las canicas necesarias en recorrer el camino (ejecución del algoritmo). Finalmente tenían que medir el tiempo desde que presionan la palanca adecuada hasta que cae la última canica posible.

Tras la realización de cada tarea, de forma colectiva se reflexionaba y comparaban las soluciones de los distintos grupos, identificando las más y las menos eficientes.

Análisis y resultados

El primer proceso en el análisis ha sido la depuración de los datos con los que se contaba. De los 31 grupos de partida se tuvo que prescindir de ocho, porque no cumplieron con alguna de las indicaciones dadas en la sesión (o no dibujaron los caminos, o no entregaron algunas soluciones, o tuvieron que marcharse antes de tiempo). De este modo, la investigación cuenta con los datos de 23 grupos, un 74,2 % de la muestra de partida.

Para valorar la eficiencia de los algoritmos creados por el alumnado, el equipo de investigación consideró adecuado utilizar no solo el recuento de número de piezas, sino además el número de zigzags que aparecen en los caminos. Respecto del recuento del número de piezas, cada pieza funciona como una puerta lógica, de modo que representan una acción individual (Gal-Ezer & Zur, 2004). Se considera un zigzag el fragmento de camino continuo, en el que una canica pasa de una rampa a otra colocada en sentido opuesto. Los zigzags aumentan el tiempo en el recorrido, ya que una canica mantiene su velocidad hasta que se encuentra con una rampa colocada en el sentido opuesto. En este caso, la canica se frena y tarda más tiempo en caer. Dada la construcción del tablero, es inevitable producir zigzags en los caminos, de modo que, para que el algoritmo tarde menos tiempo, se necesita un número pequeño de zigzags. El contar el número de zigzags es una prueba de la eficiencia del algoritmo creado.

Para medir el grado de eficiencia de las soluciones a las tareas, se contaba con una clasificación en cuatro niveles: modalidad *oro*, *plata*, *bronce* y *nada*. Esta distinción se basa en la clasificación utilizada por Ayala-Altamirano et al. (2024) acerca de la eficiencia en un programa. En vez de usar la terminología *alto*, *medio* y *bajo*, cambiamos a una terminología más sugerente, y añadimos una última modalidad por si algún grupo no llegaba a terminar la actividad o la acababa erróneamente. En la Tabla 2 se detalla cada uno de los niveles.

Tabla 2. Clasificación de la eficiencia de un algoritmo

Nivel	Descripción
Oro	El camino tiene pocas piezas y necesita pocos zigzags.
Plata	El camino tiene un número intermedio de piezas o necesita un número intermedio de zigzags.
Bronce	El camino tiene muchas piezas o necesita muchos zigzags.
Nada	No ha completado la tarea (correctamente).

Fuente: Elaboración propia.

Para cada tarea es preciso definir de forma concreta cada uno de los niveles descritos. Para ello se toma de entre todas las soluciones el mayor y el menor número de piezas, de zigzags, y tiempo. El rango obtenido se divide en tres intervalos regulares, que serán asignados a los niveles oro, plata y bronce.

En la tarea 1, los grupos utilizaron 10 u 11 piezas del juego, de modo que el número de piezas no afectaba directamente a la eficiencia del camino. En cuanto al número de zigzags, éste estaba comprendido entre 1 y 9, con una media de 2,47 y un coeficiente de variación de 1,07, hay una gran diferencia entre las formas de colocar las piezas en el tablero. En cuanto a los tiempos, estos variaban entre los 18 y los 31 segundos, con una media de 21,47 segundos y un coeficiente de variación de 0,17. Los algoritmos creados por el alumnado, tenían un tiempo muy homogéneo de ejecución. En la Tabla 3 se establecen los intervalos para cada uno de los niveles de eficiencia de la tarea 1.

Tabla 3. Intervalos para los niveles de eficiencia en la tarea 1

Tarea 1			
Niveles	Nº piezas	Nº zigzags	Tiempo (s)
Oro	No se tiene en cuenta	[1, 3]	[18, 22)
Plata	No se tiene en cuenta	[4, 6]	[22, 26)
Bronce	No se tiene en cuenta	[7, 9]	[26, 31]

Fuente: Elaboración propia.

La mayoría de los grupos llegó a obtener una calificación de oro. Dada la simplicidad de esta tarea de iniciación, todos terminaron la tarea sin errores. En la Figura 5 se muestran por separados los niveles de eficiencia respecto al n.º de zigzags (parte superior) y en cuanto a los tiempos de ejecución (parte inferior de la tabla). Se presentan los 23 grupos analizados por columnada, incluyendo en cada fila, el n.º de piezas y el n.º de zigzags. Se marca el nivel alcanzado en función de este recuento (oro, plata, bronce o nada).

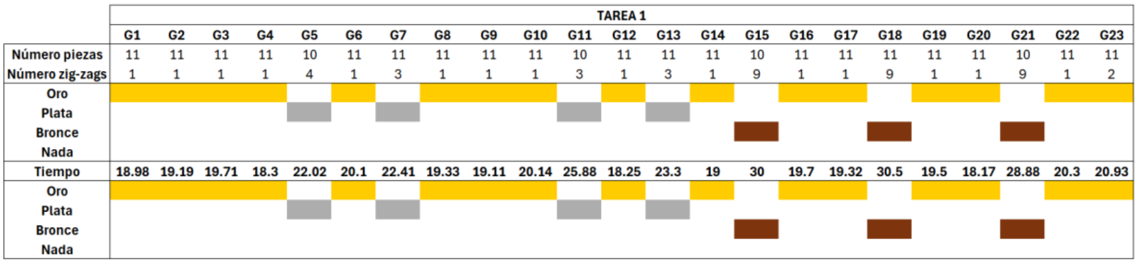


Figura 5. Asignación de niveles de eficiencia en la tarea 1.

Respecto a los tiempos de ejecución de los algoritmos (ver parte inferior de la Figura 5), se puede observar que los niveles de eficiencia respecto del tiempo coinciden con los niveles asociados al número de zigzags. En esta tarea los niveles de eficiencia teniendo en cuenta el n.º de zigzags y el tiempo de ejecución son coincidentes.

De manera general, para evaluar la correlación entre dos variables cuantitativas, se utiliza comúnmente el coeficiente de correlación de Pearson. Este coeficiente mide el grado de relación lineal entre dos variables. Su valor oscila entre -1 y 1, donde -1 indica una correlación lineal negativa perfecta, 1 indica una correlación lineal positiva perfecta y 0 indica ausencia de correlación lineal. Según López-Roldán y Fachelli (2016), se dice que un coeficiente de correlación de Pearson es fuerte cuando se encuentra entre 0,7 y 0,9, y es muy fuerte cuando se encuentra entre 0,9 y 1. En este caso se obtiene un coeficiente de correlación de -0,66 y 0,96 comparando el número de piezas y el tiempo de ejecución del algoritmo, y el número de zigzags y el tiempo de ejecución respectivamente (véase la Figura 6).

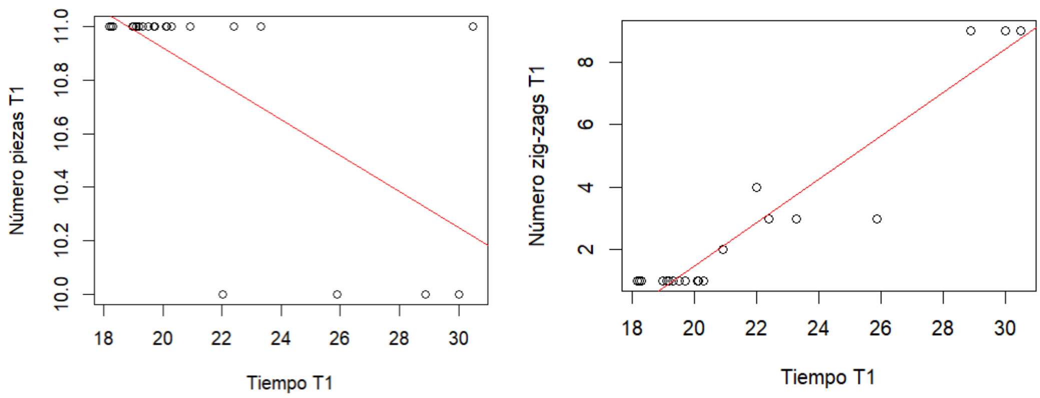


Figura 6. Correlación entre tiempo de ejecución y número de piezas (izquierda) y entre tiempo de ejecución y número de zigzags (derecha), en la tarea 1.

Aunque en la Tabla 1 se muestren tareas de la 1 a la 4, no se muestra en este documento el análisis de la tarea 2. Dicha tarea tiene como objetivo reconocer un patrón similar al de la tarea 1, pudiendo así utilizar estrategias similares para su resolución y desarrollar la destreza de generalización, propia del PC (Grover & Pea, 2018). La solución dada por los grupos era una simetría de la solución obtenida en la tarea 1 (véase la Figura 7 para un ejemplo de soluciones), de modo que el número de piezas y zigzags era el mismo, mientras que los tiempos eran muy cercanos entre sí.

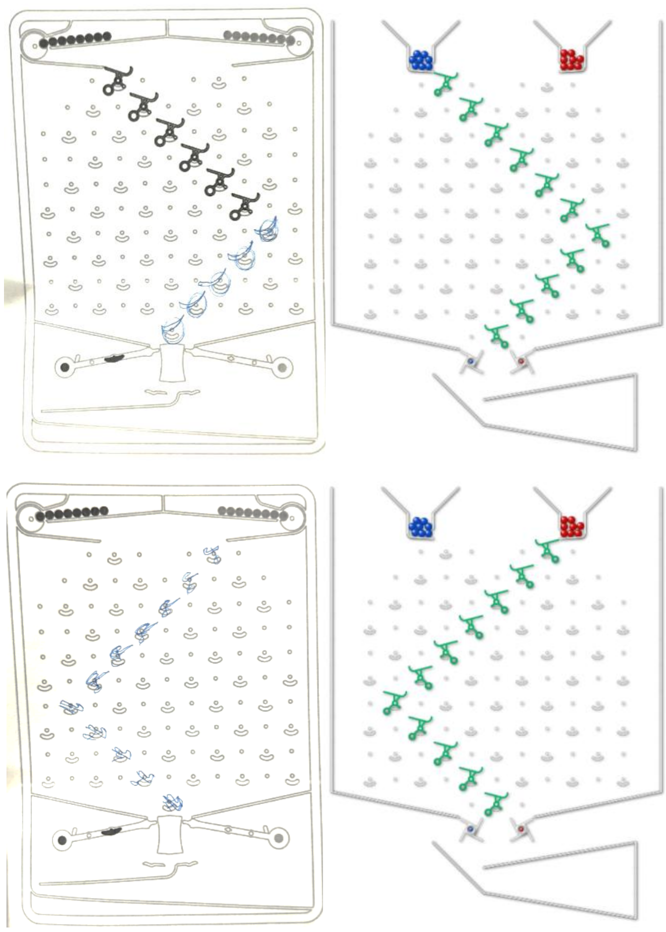


Figura 7. Contraste de soluciones de la tarea 1, V1, (arriba) y tarea 2 (abajo) realizadas por uno de los grupos. Cada solución está acompañada de una recreación en un simulador para que se vea mejor la solución escrita.

En la tarea 3, los grupos utilizaron en su mayoría 19 o 20 piezas, salvo uno de ellos que utilizó 17. En este caso, el número de piezas tampoco influyó significativamente en la eficiencia del algoritmo. Por tanto, la eficiencia vuelve a depender solo del número de zigzags, que se encuentra comprendido en esta ocasión entre 2 y 8, y del tiempo de ejecución. Ahora la media del n.º de zigzags es 3,91 y el coeficiente de variación es 0,35. En la Tabla 4 se aprecian los intervalos de los niveles de eficiencia definidos para la tarea 3.

Tabla 4. Intervalos para los niveles de eficiencia en la tarea 3

Tarea 3			
Niveles	Nº piezas	Nº zigzags	Tiempo (s)
Oro	No se tiene en cuenta	[2, 4]	[37, 43)
Plata	No se tiene en cuenta	[5, 6]	[43, 49)
Bronce	No se tiene en cuenta	[7, 8]	[49, 53]

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 8 se puede observar que 13 de los 23 grupos usaron 4 zigzags, y solo un grupo creó hasta 8 zigzags. En cuanto a los tiempos, estos varían entre los 37 y los 53 segundos, con una media de 42,33 segundos y un coeficiente de variación de 0,1.

La mayoría de los grupos mantuvo nivel oro, mientras que grupos como G7, G11, G13 y G15, mejoraron respecto a la tarea 1, y grupos como G3, G4, G20 y G22 empeoraron. Solo el grupo G23 se equivocó en la resolución de la tarea, ya que su patrón resultante no intercalaba canicas azules y rojas, sino que solo permitía la caída de canicas azules.

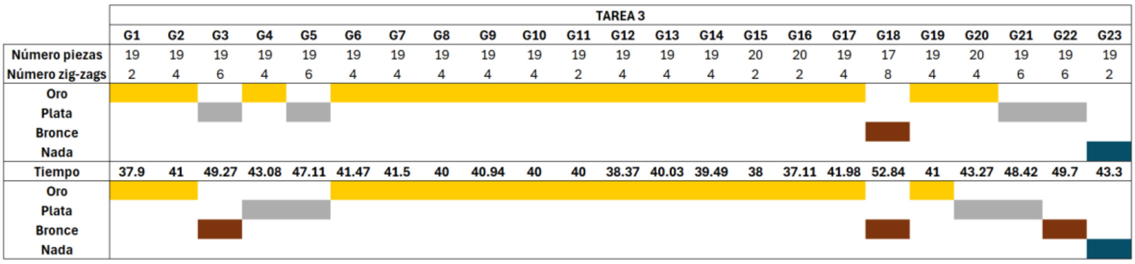


Figura 8. Asignación de niveles de eficiencia en la tarea 3.

En el caso de la tarea 3, no siempre coincide el nivel de eficiencia determinado a partir del n.º de zigzags, con el nivel asignado por el tiempo de ejecución. Los grupos G3, G4, G20 y G22, obtienen peores niveles de eficiencia respecto del tiempo que del n.º de zigzags.

En este caso el coeficiente de correlación de Pearson entre el número de piezas y el tiempo de ejecución del algoritmo, y el número de zigzags y el tiempo de ejecución, es de -0,57 y 0,86, respectivamente (véase la Figura 99Figura 6).

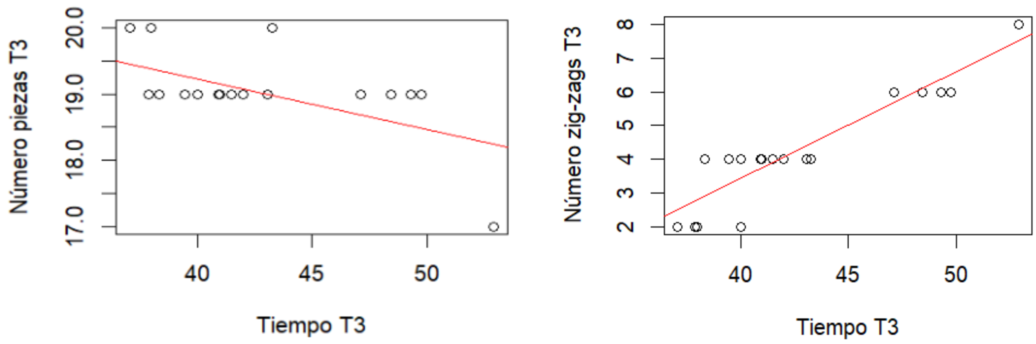


Figura 9. Correlación entre tiempo de ejecución y número de piezas (izquierda) y entre tiempo de ejecución y número de zigzags (derecha) de la tarea 3.

En la tarea 4, los grupos utilizaron entre 21 y 29 piezas. La diferencia existente fue considerada suficiente para ser analizada en este caso, permitiendo establecer un intervalo de estudio. La media de piezas se sitúa en 22,13 con un coeficiente de variación de 0,1, la moda es de 21 piezas. El número de zigzags se encuentra comprendido entre 2 y 13. La media de n.º de zigzags es 5,73 y el coeficiente de variación es 0,4, siendo la moda de 6 zigzags. En la Tabla 5 se establecen los intervalos de nivel de eficiencia.

Tabla 5. Intervalos para los niveles de eficiencia en la tarea 4

Tarea 4			
Niveles	Nº piezas	Nº zigzags	Tiempo (s)
Oro	[21, 23]	[2, 4]	[28, 33)
Plata	[24, 26]	[5, 7]	[33, 38)
Bronce	[27, 29]	[8, 13]	[38, 43]

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 10 se pueden apreciar los resultados de cada grupo. Para medir la eficiencia se debe tener en cuenta que el nivel más desfavorable es el factor limitante, es decir, se tomaría el nivel más bajo ente el n.º de piezas y el n.º de zigzags.

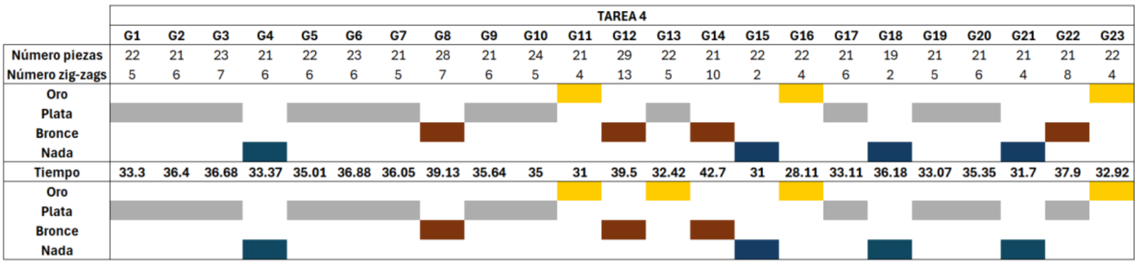
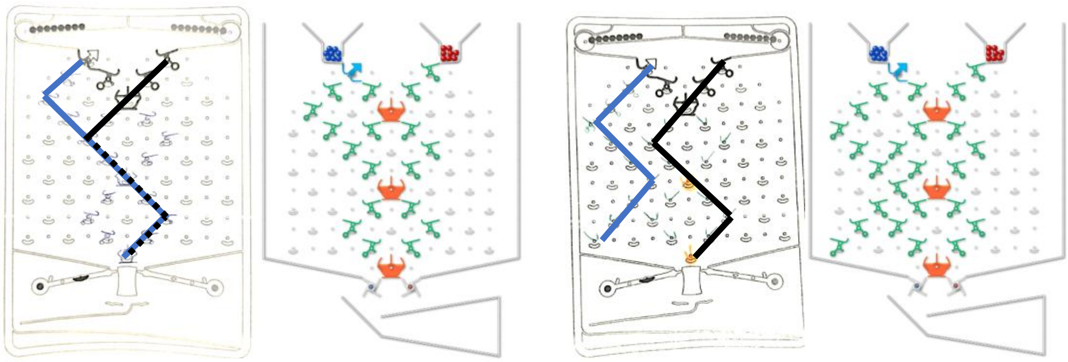


Figura 10. Asignación de niveles de eficiencia en la tarea 4.

En cuanto a los tiempos (ver parte inferior de la Figura 10), varían entre los 28 y los 43 segundos, con una media de 34,88 segundos y un coeficiente de variación de 0,09. Aunque la tarea 4 tenga más piezas que la tarea 3, el tiempo de ejecución es menor. Esto se debe a que en la tarea 4 se cuenta de partida con nueve canicas (seis canicas azules y tres rojas), mientras que en la tarea 3 se utilizan las doce canicas (seis canicas azules y seis rojas) iniciales.

Los niveles alcanzados en la tarea 4, son en general menores que en las anteriores tareas. Ahora fueron cuatro los grupos que no llegaron a crear el algoritmo de forma correcta, G4, G15, G18 y G21. En esta ocasión el grupo G23 alcanzó el nivel oro, aunque no realizó correctamente la tarea 3. Este grupo solicitó ayuda concreta para entender los errores de la tarea 3, lo que le facilitó la realización con nivel oro de la cuarta tarea.

Por lo general, los grupos aprovechaban los algoritmos creados en tareas previas. Sin embargo, algunos grupos realizaban caminos nuevos, aumentando el número de piezas y de zigzags usados. En la Figura 11 (izquierda) se puede ver la solución del grupo G13 (22 piezas y 5 zigzags), que aprovecha el algoritmo previo, añadiendo nuevas piezas para crear un nuevo algoritmo con nivel de eficiencia plata. A la derecha de la Figura 11, se observa la solución del grupo G8 (28 piezas y 7 zigzags) que, aunque siguen apareciendo las piezas del algoritmo anterior, añade más piezas aún para crear el algoritmo nuevo sin aprovechar correctamente las piezas ya existentes, siendo de menor eficiencia (nivel bronce).



Grupo G13 | Grupo G8

Figura 11. Diferencias en la solución de la tarea 4 del grupo G8 y G13.

En este caso el coeficiente de correlación de Pearson entre el número de piezas y el tiempo de ejecución del algoritmo, y el número de zigzags y el tiempo de ejecución, es de 0,37 y 0,79, respectivamente (véase la Figura 12Figura 6).

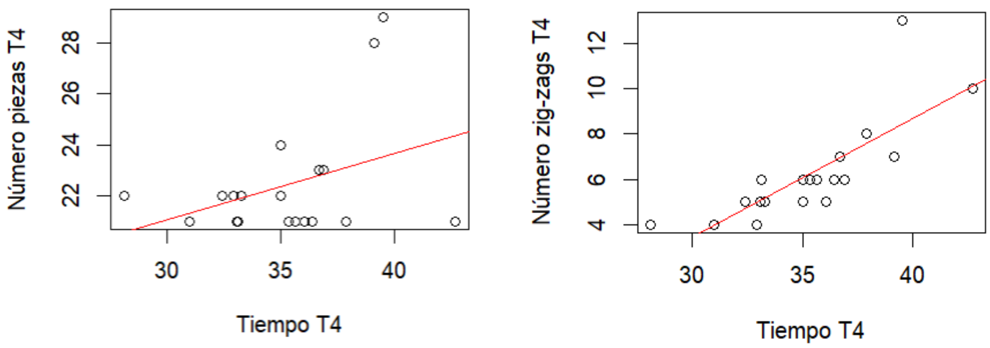


Figura 12. Correlación entre tiempo de ejecución y número de piezas (izquierda) y entre tiempo de ejecución y número de zigzags (derecha), en la tarea 4.

A través de las distintas pruebas de correlación de Pearson se puede apreciar que, tal y como se han planteado las distintas tareas, el número de piezas guarda una relación inconsistente con el tiempo de ejecución de los algoritmos realizados. Sin embargo, sí existe una relación fuerte entre el número de zigzags y el tiempo de ejecución de los algoritmos.

Finalmente, tras la realización de las tareas, se realizaban reflexiones comunes entre los equipos de trabajo en las que se contrastaban resultados y medidas de tiempo. Siendo cuatro tareas, había suficiente tiempo para compartir lo que habían realizado.

Conclusiones

En este trabajo se busca una forma de evaluar cómo, de forma sencilla, se puede medir la eficiencia de algoritmos creados con recursos manipulativos, como puede ser el juego *Turing Tumble*. Se busca poder caracterizar dicha eficiencia mediante herramientas simples, intuitivas y visuales. Gal-Ezer y Zur (2004) establecen que un factor importante para tener en cuenta es el tiempo que necesita un programa para funcionar, pudiendo ser este medido de varias formas. Ayala-Altamirano et al. (2024) proponen como medida de eficiencia el número de piezas utilizadas en el camino, así como el número de zigzags que posee. Esta información puede ser una forma sencilla de medir la eficiencia en este tipo de algoritmos. Por otro lado, puede ser utilizado además como una forma de autoevaluación del alumnado en edades tempranas, ya que desarrolla destrezas de conteo, y no requiere de mucha precisión.

Tras el análisis y con los datos de los que se dispone, se comprueba que existe una relación entre el tiempo de ejecución y el número de zigzags del camino (algoritmo), sin poder asegurar la relación entre el tiempo de ejecución y el número de piezas utilizadas.

Se debe subrayar que cuando se trata de medir eficiencias en la ejecución de algoritmos, el caso más desfavorable marcaría el nivel. En un entorno educativo este matiz no es tan restrictivo, y se trata de motivar al alumnado y no focalizar en los resultados menos favorables, con lo que se puede proponer consensuar acuerdos en el aula.

Una limitación presente en este trabajo reside en el diseño de las propias tareas y la claridad de su exposición. Es necesario explicar previamente el concepto de algoritmo eficiente, para que el alumnado tenga certeza de que, al dejar piezas redundantes, su creación pierde eficiencia, ya que suele corresponderse con un número mayor de piezas y de zigzags. Se debe tener en cuenta en futuras intervenciones.

Además de contar con una forma de medir la eficiencia de un algoritmo, en este estudio se prueba una propuesta que se puede llevar al aula con un recurso manipulativo. Estas experiencias pueden beneficiar o inspirar al profesorado quien, según Santaengracia et al. (2023), no se siente preparado para llevar el PC al aula. Con esta actividad no solo se fomenta la optimización de algoritmos, sino que además se llegan a desarrollar destrezas propias del PC como la organización y análisis de datos, la creación de algoritmos, el testeo y depuración y la generalización (Ayala-Altamirano et al., 2024).

Agradecimientos

Este trabajo está enmarcado en el proyecto JA.B1-34, código B1-2023_029 financiado por el Plan Propio de Investigación, Transferencia y Divulgación Científica de la Universidad de Málaga y dentro el grupo de investigación HUM324: "Investigación en el carácter funcional, formativo e instrumental de la didáctica de la matemática".

Referencias

Angeli, C., & Giannakos, M. (2020). Computational thinking education: Issues and challenges. *Computers in Human Behavior, 105,* 106185.

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N., & Sánchez-Cruzado, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones.

En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 121-128). SEIEM.

Barr, V., & Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? *AMC Inroads, 2*(1), 48-54. https://doi.org/10.1145/1929887.1929905

Boswell, P., & Boswell, A. (2021). *Turing Tumble: Libro de problemas.* Upper Story.

Brennan, K., & Resnick, M. (2012, abril). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. En AERA 2012 - *annual meeting of the American educational research association* (Vol. 1, p. 25). AERA.

Cerón Molina, J. A. (2022). La programación para niños: Perspectivas de abordaje desde el pensamiento lógico matemático. *Revista Internacional de Pedagogía e Innovación Educativa*, *2*(1), 101-122. https://doi.org/10.51660/ripie.v2i1.70

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education.* Routledge.

Denning, P. J., & Tedre, M. (2019). *Computational thinking*. The MIT Press.

Fernández Bravo, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(4), 31-46.

Fombona Cadavieco, J., Iglesias Martínez, M. J., & Lozano Cabezas, I. (2016). El trabajo colaborativo en la educación superior: Una competencia profesional para los futuros docentes. *Educação & Sociedade*, *37*(135), 519-538.

Furber, S. (2012). *Shut down or restart? The way forward for computing in UK schools*. The Royal Society.

Gal-Ezer, J., & Zur, E. (2002). The concept of 'algorithm efficiency' in the high school CS curriculum. En *Proceedings of the 32nd ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference*. https://doi.org/10.1109/FIE.2002.1157928

Gal-Ezer, J., & Zur, E. (2004). The efficiency of algorithms: misconceptions. *Computers & Education*, *42*(3), 215-226.

Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational thinking in K–12: A review of the state of the field. *Educational Researcher*, *42*(1), 38-43. https://doi.org/10.3102/0013189X12463051

Grover, S., & Pea, R. (2018). Computational thinking: A competency whose time has come. En S. Sentance, E. Barendsen & C. Schulte (Eds.). *Computer science education: Perspectives on teaching and learning in school* (pp. 19–38). Bloomsbury Academic. http://dx.doi.org/10.5040/9781350057142.ch-003

Kotsopoulos, D., Floyd, L., Khan, S., Namukasa, I. K., Somanath, S., Weber, J., & Yiu, C. (2017). A pedagogical framework for computational thinking. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*, 154-171. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0031-2

Looi, C. K., How, M. L., Longkai, W., Seow, P., & Liu, L. (2018). Analysis of linkages between an unplugged activity and the development of computational thinking. *Computer Science Education*, *28*(3), 255-279. https://doi.org/10.1080/08993408.2018.1533297

López-Roldán, P., & Fachelli, S. (2016). Análisis de regresión. En P. López-Roldán & S. Fachelli (Eds.), *Metodología de la investigación social cuantitativa*. Universitat Autònoma de Barcelona. http://ddd.uab.cat/record/163569.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.

Moreno León, J., Román González, M., García Perales, R., & Robles, G. (2021). Programar para aprender Matemáticas en 5º de Educación Primaria: Implementación del proyecto

ScratchMaths en España. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, *21*(68). https://doi.org/10.6018/red.485441

Namukasa, I. K., Kotsopoulos, D., Floyd, L., Weber, J., Kafai, Y., Khan, S., Yiu, C., Morrison, L., & Somanath, S. (2015). From computational thinking to computational participation: Towards achieving excellence through coding in elementary schools. In G. Gadanidis (Ed.), *Math + coding symposium*. Western University.

Pérez Alcázar, J. H. (1994). Algoritmos y gramáticas: Un capítulo apasionante de la teoría cognitiva. *Boletín de Matemáticas, 1*(2), 59-80.

Pérez Jiménez, A. J. (2005). Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(1), 37-44.

Pitt, L. (2023). Turing Tumble is Turing-Complete. *Theoretical Computer Science, 948*, 113734. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.113734

Rumiche Valdez, M. E., & Solis Trujillo, B. P. (2021). Los efectos positivos y negativos en el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación en educación. *Hamut'ay*, 8(1), 23-32.

Santaengracia, J. J., Palop, B., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Aguilar-González, Á., Palop, B., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 489-496). SEIEM.

Selby, C., & Woollard, J. (2014). *Refining an understanding of computational thinking* (pp. 1–23). University of Southampton. https://eprints.soton.ac.uk/372410/

Tsavara, K., Moeller, K., Pinkwart, N., & Butz, M. (October 5-6, 2017). *Training computational thinking: Game-based unplugged and plugged-in activities in primary school* [Conference presentation]. 11th European Conference on Game-Based Learning ECGBL 2017. Graz, Austria.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A, 366*(1881), 3717-3725. https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118

Wolf, M. (2014). Embedded computing. En M. Wolf (Ed.), *High-performance embedded computing: Architectures, applications and methodologies* (pp. 1-58). Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-410511-9.00001-0

Yanofsky, N. S. (2011). Towards a definition of an algorithm. *Journal of Logic and Computation, 21*(2), 253-286. https://doi.org/10.1093/logcom/exq016

A ESTRUTURA RETANGULAR E A MEDIÇÃO DA ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

THE RECTANGULAR STRUCTURE AND MEASURING THE AREA OF A SURFACE

Marta Teixeira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

martateixeira@edu.ulisboa.pt

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

lurdess@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Esta comunicação tem como objetivo compreender como é que os alunos percecionam as várias componentes de uma estrutura retangular, na medição e cálculo da área de superfícies retangulares, antes da aprendizagem da fórmula. A tarefa apresentada, de natureza exploratória, faz parte de uma sequência de tarefas incluídas num estudo mais abrangente, que inclui uma experiência de ensino realizada no 4.º ano de escolaridade, de natureza qualitativa e interpretativa, na modalidade de investigação baseada em design. Os dados foram recolhidos por observação participante, através de gravações vídeo, registos fotográficos, produções escritas dos alunos e notas de campo. A análise de dados baseia-se na análise de conteúdo das intervenções nos momentos de discussão coletiva, sendo analisadas as estratégias dos alunos. Os resultados mostram que os alunos já desenvolveram modelos mentais que lhes permitem percecionar a estrutura retangular formada por linhas e colunas.

Palavras-chave: área, medição, estrutura retangular, primeiro ciclo.

Abstract: This communication aims to understand how students perceive the several components of a rectangular structure, in measuring and calculating the area of rectangular surfaces, before learning the formula. The presented exploratory task is part of a sequence of tasks integrated on a broader study, which includes a teaching experiment conducted in the 4th grade, with a qualitative-interpretative approach, in the modality of design-based research. Data were collected by participant observation, through video recordings, photographic records, students' written productions and field notes. Data analysis is based on the content analysis of the interventions in moments of whole-class discussion. The results show that students have already developed mental models that allow them to perceive the rectangular structure of rows and columns.

Keywords: area, measurement, rectangular structure, primary school.

Introdução

O ensino e a aprendizagem da Medida, de modo que os alunos realizem uma aprendizagem com compreensão, constitui uma área problemática do currículo dos anos iniciais. Vários estudos revelam que os alunos têm uma compreensão inadequada dos conceitos relacionados com este tema, apresentando baixo desempenho em tarefas de medição (Cullen et al., 2018). Saber medir é uma competência matemática e científica elementar, que todos os alunos devem desenvolver, mas tende a ser mal compreendida, nomeadamente no que respeita aos princípios conceptuais que fundamentam o processo de medir. Esta comunicação tem como objetivo compreender como é que, no quadro de uma experiência de ensino, os alunos percecionam as várias componentes de uma estrutura retangular, na medição e cálculo da área de superfícies retangulares, antes da aprendizagem da fórmula.

Enquadramento teórico

A aprendizagem da medição da área envolve o conhecimento de procedimentos, mas também a compreensão dos conceitos subjacentes. A interligação destes conhecimentos promove uma aprendizagem matemática sólida (Van de Walle et al., 2020), o que significa, segundo Bjørkås e Van den Heuvel-Panhuizen (2019), que os alunos desenvolvem diversas estratégias para calcular a área dos polígonos. Os estudos realizados por Stephan e Clements (2003), complementados mais tarde por Clements e Sarama (2009), identificam quatro processos fundamentais na aprendizagem da medida da área: 1) partição equitativa; 2) iteração da unidade; 3) conservação; e 4) estruturação retangular. A estrutura de um modelo retangular é complexa para os alunos dos primeiros anos, uma vez que têm de saber como pavimentar uma superfície retangular com quadrados, alinhados em linhas e colunas, e ainda não têm esta compreensão (Clements & Sarama, 2009).

Para Battista (2007) as dificuldades dos alunos na medição da área devem-se a uma desconexão entre a estruturação espacial e o procedimento numérico, isto é, entre a iteração da unidade de medida (u.m.) e as medidas numéricas. Smith III et al. (2016) referem que, para determinar a área de um retângulo, sem recorrer à contagem unitária da u.m., os alunos devem estruturar mentalmente o conjunto de quadrados em unidades compostas, linhas ou colunas, permitindo uma contagem mais rápida e servindo de ponto de partida para a fórmula do cálculo da área destas figuras. Para Stephan e Clements (2003), mesmo que os alunos sejam capazes de organizar o espaço retangular em unidades compostas, ainda têm de relacionar a estrutura retangular com a multiplicação do comprimento pela largura, o que, segundo Outhred e Mitchelmore (2000), exige a coordenação entre unidades de medida de comprimento e de área, relacionando assim estas duas grandezas.

Battista (2003) refere que as dificuldades dos alunos em compreender a fórmula da área, estão relacionadas com a incompreensão da sua estrutura. Os alunos multiplicam o comprimento de um retângulo pela sua largura para obterem a medida de área, sem compreenderem que este produto corresponde a uma estrutura de linhas e colunas de unidades quadradas iguais. Battista (2007) considera que esta estrutura só pode ser construída de forma significativa se os alunos tiverem desenvolvido modelos mentais que lhes permitam localizar e organizar corretamente as unidades e identifica quatro processos mentais na compreensão da estrutura retangular: 1) formação e uso de modelos mentais; 2) estruturação espacial; 3) localização de unidades; e 4) organização de unidades compostas. Com base nesses processos, o autor apresenta sete níveis no desenvolvimento da estrutura retangular: 1) ausência de processos de localização de unidades e de organização em unidades compostas; 2) início da utilização dos processos de localização das unidades dentro da estrutura retangular e organização em unidades compostas; 3) desenvolvimento do processo de localização, permitindo reconhecer e eliminar contagens duplas; 4) mobilização de unidades compostas na estruturação retangular, podendo ocorrer enganos na iteração da u.m. por foco apenas numa das dimensões do retângulo; 5) localização das unidades na estrutura retangular, de modo a obter uma contagem correta, mas não maximizando as unidades compostas; 6) completo desenvolvimento e coordenação dos processos mentais: localização das unidades na estrutura retangular e a sua organização em unidades compostas; neste nível, os alunos adquirem modelos mentais que lhes permitem percecionar a estrutura retangular formada por linhas e colunas (Battista, 2003); e 7) relação entre os procedimentos numéricos e as estruturas espaciais e generalização. Battista (2003) considera o domínio da estrutura retangular um conhecimento mais poderoso do que o uso de fórmulas para a área.

Metodologia

Nesta investigação, optámos por uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), tendo em vista compreender as estratégias de resolução usadas pelos alunos, assim como a interação entre estes, na realização da tarefa que aqui apresentamos. Os dados foram recolhidos por observação participante, através de gravações vídeo, registos fotográficos, produções escritas dos alunos e notas de campo. A análise de dados é realizada por análise de conteúdo das intervenções nos momentos de discussão coletiva, com especial atenção às estratégias dos alunos. A investigação foi realizada numa escola pública do distrito de Lisboa, numa turma de 4.º ano, constituída por 18 alunos, com 9 e 10 anos de idade.

A tarefa que aqui apresentamos faz parte de uma sequência de tarefas integrada num estudo mais amplo, que compreende uma experiência de ensino realizada em 2021/2022 e 2022/2023, numa mesma turma de 3.º ano e 4.º ano, respetivamente, que inclui o estudo sobre Medida das grandezas comprimento, área e massa. Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) na modalidade de investigação baseada em *design* (Ponte et al., 2016). Definimos também uma conjetura que considera que os alunos desenvolvem a compreensão de grandeza, assim como o respetivo processo de medição, percorrendo cinco níveis de desenvolvimento: 1) identificação do atributo a medir; 2) medição informal: pavimentação; 3) medição informal: iteração da u.m.; 4) medição com u.m. padronizadas; e 5) relação entre as u.m. padronizadas. A tarefa proposta, que procurou promover o trabalho dos alunos nos níveis 4 e 5 desta conjetura, surgiu da necessidade de renovar os quatro placares de cortiça existentes na sala de aula. Foi discutida e planificada com os alunos, que consideraram a pintura dos placares como a melhor maneira de os reutilizar. Depois de investigarem qual o tipo de tinta mais adequado, em grupo, mediram a área de cada um dos placares, o que lhes permitiu aplicar os novos conhecimentos a situações reais e relacionadas com as suas vivências, para poderem saber a quantidade de tinta a adquirir.

De modo a analisar as estratégias de medição da área usadas pelos alunos e com base nos estudos de Stephan e Clements (2003), Clements e Sarama (2009), assim como Battista (2007), criámos quatro categorias de análise: 1) partição equitativa; 2) iteração da unidade de medida; 3) conservação da área; e 4) estrutura retangular. Estas categorias pretendem apresentar uma progressão natural no desenvolvimento das competências relacionadas com a medida de área e da estrutura retangular, partindo dos conceitos mais simples para os mais complexos. Para esta tarefa consideramos as categorias de análise 2 e 3, uma vez que um dos placares envolve o cálculo da área por decomposição, e 4, esta com diversas subcategorias (Tabela 1).

Tabela 1. Subcategorias de análise da categoria 4, para as estratégias de medição da área, relacionadas com a estrutura retangular.

Subcategorias de análise	Descritores
4. Estrutura retangular	O aluno estrutura as u.m. iguais em linhas ou colunas, sem lacunas, sobreposições ou transposição dos limites, para cobrir uma superfície.
4.1. Localização das unidades na estrutura retangular	O aluno localiza corretamente as u.m. na estrutura retangular, evitando duplicações ou omissões.
4.2. Organização de unidades compostas	O aluno agrupa as u.m. em unidades compostas, linha ou coluna, para facilitar a contagem e o cálculo da área.
4.3. Mobilização de unidades compostas – completo desenvolvimento e coordenação dos processos mentais	O aluno usa de modo eficaz as unidades compostas, coordenando as dimensões do retângulo.

Fonte: Autores com base nos estudos de Battista (2007).

Resultados

Para a medição da área dos quatro placares, os alunos tinham ao dispor 1 m^2, 1 dm^2 e uma fita métrica. As estratégias de resolução que apresentamos referem-se apenas à medição de dois dos placares, um retangular (placar 1) e outro em que a área tinha de ser calculada por decomposição em retângulos (placar 2), o que constituiu um novo desafio para os alunos. Cada grupo discutiu a estratégia de medição a usar em cada um dos placares, registou-a e, posteriormente, passou às respetivas medições. Optámos por esta organização, para que os alunos pudessem refletir e planear a ação antes de a realizar. De seguida, cada grupo apresentou à turma a sua estratégia, seguida de discussão.

Medição da área do placar 1

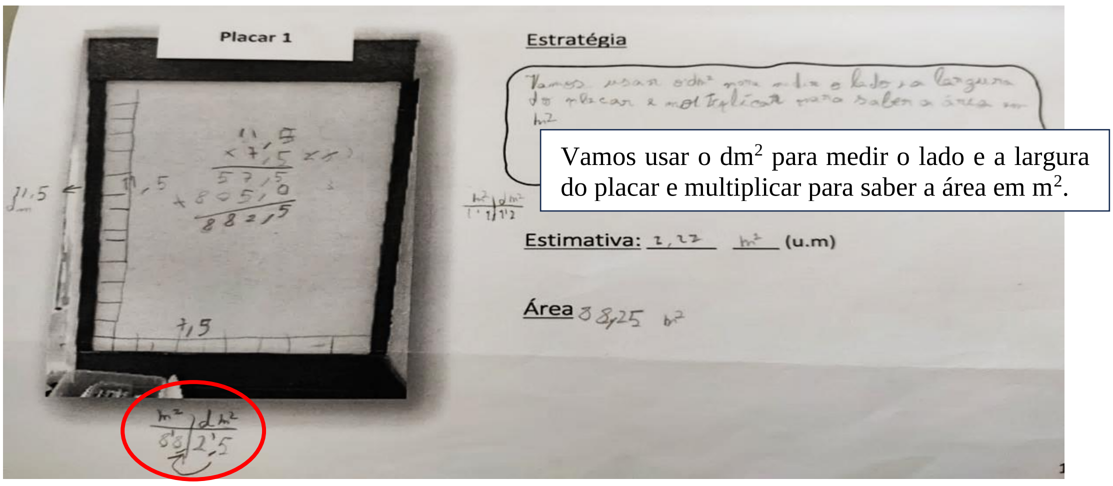


Figura 1. Estratégia de medição usada pelo grupo de Duarte para o placar 1.

Duarte leu a estratégia e explicou como o grupo mediu a área do placar 1:

Duarte: “Vamos usar o dm^2 para medir o lado e a largura do placar e multiplicar para saber a área em m^2.” Nós escolhemos a u.m., o dm^2 […] fomos marcando aqui [apontando para as marcações no trabalho projetado] e vimos que eram 11,5. E em baixo 7,5 dm^2. Depois, nós multiplicámos o 11,5 dm^2 pelo 7,5... e deu... 882,5 […] Nós tínhamos estimado 1,12 m^2 e… quando convertemos em m^2 deu… 88,25 m^2.

Duarte indicou o uso do dm^2 como u.m., a sua iteração em linha e em coluna e a multiplicação dos valores obtidos, como apresentado na Figura 1. Os alunos localizaram as u.m. na estrutura retangular, sem duplicações ou omissões, organizaram as unidades em unidades compostas, provavelmente como uma forma rápida de contar os quadrados que pavimentam o placar, e mobilizaram estas unidades compostas, contaram uma coluna de 11,5 quadrados com 1 dm, ou seja de 1 dm^2 e contaram que em cada linha cabiam 7,5 quadrados com 1 dm de lado, por isso multiplicaram o número de quadrados em cada coluna pelo número de linhas, chegando assim à área do retângulo, subcategorias de análise 4.1, 4.2 e 4.3. O valor da estimativa referido por Duarte aproxima-se do valor real, no entanto os alunos aparentemente não foram críticos perante o valor da medida de área obtido, 88,25 m^2.

Santiago: Não faz sentido! [referindo-se ao valor encontrado] […] Porque… se calhar é a área da escola!
Investigadora: O que é que o grupo acha?
Duarte: Também ficámos admirados, quando notámos isso […] tentámos pensar de outra forma […] não conseguimos.

Santiago revelou sentido crítico perante o resultado obtido, mostrando alguma noção do valor, quando o comparou com a medida da área da escola. O grupo também tinha percebido que a medida da área não fazia sentido, mas como não conseguiu ultrapassar o erro, apresentou-o mesmo assim.

Investigadora: Onde é que será que eles se enganaram? [questionando a turma]
Santiago: A trocar de dm^2 para m^2. […] 100 dm^2 é 1 m^2. […] Temos de dividir por 100.

Santiago identificou um dos erros, a conversão do dm^2 para m^2, como podemos verificar na Figura 1, rodeado a vermelho. Na sua resposta, o aluno mostra conhecimento conceptual sobre esta conversão.

Miguel identificou ainda o erro relacionado com o cálculo – a multiplicação com números decimais. A discussão prosseguiu no sentido de esclarecer os alunos sobre a conversão e o cálculo.

Medição da área do placar 2

Todos os grupos fizeram a decomposição do placar em três retângulos, uns de forma intuitiva, outros com compreensão desta decomposição. Na Figura 2, podemos ver a forma do placar, a vermelho, as setas azuis mostram a sua decomposição e a numeração identifica os três retângulos resultantes.

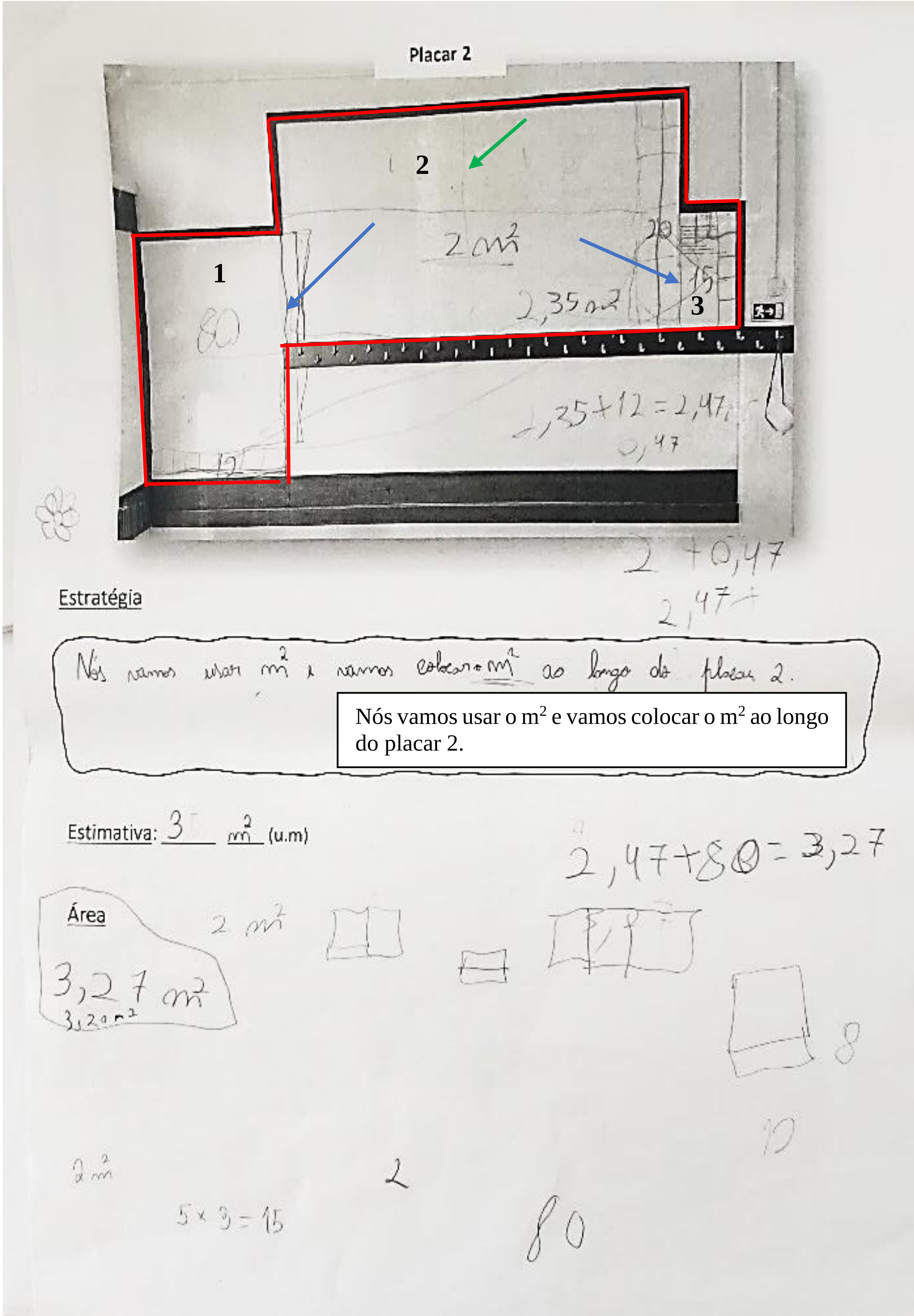


Figura 2. Estratégia de medição usada pelo grupo de Inês para o placar 2.

O registo da estratégia deste grupo está “uma bagunça” como referiu Miguel (Figura 2). Contudo, por apresentar valores de medição muito próximos do real, quisemos perceber o que os alunos fizeram. Rui, elemento do grupo, leu a estratégia planeada:

Rui: “Nós vamos usar o m^2 e vamos colocar o m^2 ao longo do placar 2.”

O grupo optou pelo uso do m^2 como u.m. e da sua iteração ao longo do placar. Este planeamento não tem em conta a forma do placar, uma vez que há partes em que a u.m. não é a mais adequada, dadas as suas dimensões.

Durante o trabalho autónomo, foi possível observar a discussão que se gerou neste grupo sobre a escolha da u.m. Inês e Liliana sugeriram o uso do m^2, por ser uma u.m. maior do que o dm^2, provavelmente por o placar apresentar grandes dimensões, assim como o m^2, enquanto Rui era da opinião que deveriam usar a fita métrica, pois este instrumento também “tem marcado 1 m, embora não seja um quadrado”, como justificou. Ainda que Liliana concordasse com esta justificação, relembrou que iriam medir a área, demonstrando assim não associar a fita métrica, usada na medição linear, à medição de um objeto bidimensional. Rui referiu que poderiam usar a fita métrica, para “medir em linha e em coluna”, mostrando ter mais conhecimentos sobre este processo. Como estava em minoria, a opção escolhida foi o m^2.

Inês prosseguiu, explicando a estratégia usada na medição da área do placar:

Inês: Colocámos o m^2 aqui e depois aqui [iteração da u.m. no retângulo 2] e vimos que tinha 2 m^2. Depois vimos que sobrava [faltava medir] isto [apontando] e vimos que eram 20 dm^2… medimos com o m^2 que está dividido em [100] dm^2 [esta divisão está registada no m^2].

Na medição do retângulo 2 percebemos que o grupo iterou o m^2. Contudo, a segunda iteração não foi suficiente para terminar a medição e, na terceira iteração, contabilizou apenas os dm^2 desenhados no m^2. Na Figura 2, a seta verde indica a marcação dos 2 m^2, e podemos ver as duas colunas de dm^2 e algumas linhas e o registo “20”, a representar os 20 dm^2 medidos com o m^2. No entanto, não foi registada nem mencionada a área total deste retângulo, 2 m^2 e 20 dm^2. Na medição do retângulo, o m^2 foi usado como u.m. e também como instrumento de medição.

Inês: Depois, esta parte mais pequenina [retângulo 3] […] colocámos o m^2, porque lá já tinha desenhados os dm^2… e vimos que aqui cabiam 15 dm^2.

Santiago: Eu tenho uma dúvida […] couberam aí todos [os 15 dm^2] ou foi só em linha e em coluna?

Inês: Pegámos o lado do m^2 e vimos que aqui cabiam 3 [dm^2 em coluna, apontando para o registo desta representação] e aqui 5 [dm^2 em linha, apontando também para o registo desta representação]. Depois vimos que tinha 15 dm^2 [apontando para a multiplicação, 5×3=15, na folha de registo].

Na medição da área do retângulo 3, o grupo utilizou novamente o m^2 como instrumento de medida, usando o dm^2 com u.m. A dúvida de Santiago está relacionada com a estratégia usada nesta medição, pavimentação do retângulo ou uso da multiplicação. A resposta de Inês e o registo (Figura 2), indicam que o grupo usou a multiplicação.

Rui: Depois juntámos os 2 m^2 com o 20 [dm^2] e com o 15 [dm^2]… e deu 2 m^2 e 35 dm^2.

Com a intervenção de Rui, percebemos que o grupo não determinou a área total do retângulo 2, mas adicionou todos os valores obtidos, determinando assim a área total dos dois retângulos, e esclarecendo o significado de "2,35 m^2" que surge no registo (Figura 2), sem qualquer indicação do cálculo.

> Inês: Aqui [retângulo 1] colocámos o m^2 e vimos que iam para fora 20 dm^2 […] Aqui dentro tinha 80 dm^2.

O grupo pavimentou o retângulo 1 utilizando o m^2. Como este estava dividido em dm^2, foi fácil determinar a área coberta em dm^2, através da relação entre estas duas u.m.

Inês continuou com a explicação da medição da área deste retângulo:

> Inês: Depois vimos que aqui [parte inferior do retângulo 1] sobrava esta parte aqui... faltava medir... porque o m^2 não chegava. […] Nós usámos o m^2 e vimos que aqui, cabia uma linha de dm^2 e como já sabíamos que sobravam 2 [apontando para o registo da medição anterior], então eram 8 dm^2. Depois aqui [2.ª linha] só cabia metade do dm^2. Então fomos juntando as metades… aqui dava 1, 2, 3 e 4 [dm^2] […] Depois juntámos tudo [8+4] e deu 12 dm^2.

Para medir a parte inferior do retângulo, o grupo usou novamente o m^2 e verificou que era possível pavimentar esta parte com uma linha de 8 dm^2, relacionando também com a medição anterior. Na segunda linha cabia apenas meio dm^2. Inês teve necessidade de contar as metades, não relacionando com metade de 8. Com esta explicação foi possível perceber o significado de 12, registado no retângulo 1 (Figura 2).

Inês explicou como o grupo procedeu para concluir a medição da área do placar 2:

> Inês: Depois [apontando para o cálculo] [...] o 2 m^2 e 35 que era destes dois [referindo-se à área total dos retângulos 2 e 3] e o 12 [dm^2] que era deste [retângulo 1]. Nós juntámos e deu 2,47. Depois colocámos os 2 m^2 e 47 aqui [apontando para o outro cálculo, registado mais abaixo] e juntámos estes 80 [dm^2, referentes ainda ao retângulo 1]. E deu 3 m^2 e 27... dm^2.

Tal como no retângulo 2, o grupo não calculou a área total do retângulo 1, embora tivesse os valores disponíveis. Ao valor da medida da área anterior, 2 m^2 e 35 dm^2, adicionou os 12 dm^2 do retângulo 1 e, ao resultado obtido, 2 m^2 e 47 dm^2, e, noutro cálculo, adicionou os 80 dm^2 ainda referentes a este retângulo, concluindo que o placar 2 mede de área 3 m^2 e 27 dm^2.

A discussão que se seguiu centrou-se na representação horizontal dos cálculos, nomeadamente 2,35+12 e 2,47+80. Como não houve conversão de 12 dm^2 e de 80 dm^2 para m^2, concluiu-se que, embora esta representação estivesse incorreta, a forma como os alunos realizaram os cálculos está correta, porque consideraram os valores como dm^2, adicionando dm^2 com dm^2 (35+12 e 47+80), tendo obtido como área total do placar 3 m^2 e 27 dm^2.

A Figura 3 mostra a estratégia usada pelo grupo de Miguel:

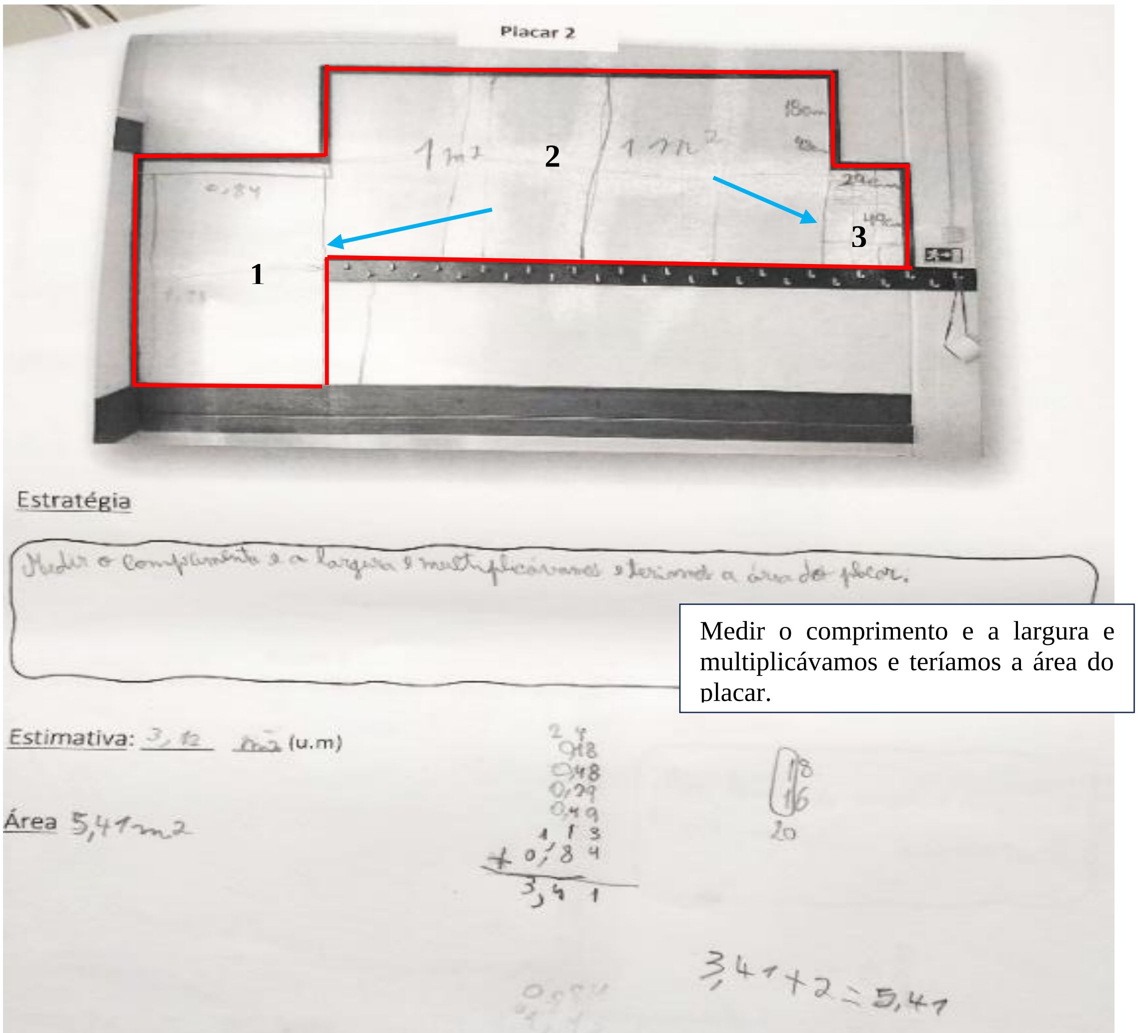


Figura 3. Estratégia de medição usada pelo grupo de Miguel para o placar 2.

Miguel leu a estratégia do seu grupo e referiu os instrumentos de medida usados na medição:

> Miguel: “Medir o comprimento e a largura e multiplicávamos e teríamos a área do placar” […] usámos a fita métrica e o m^2.

A estratégia sugere o uso intuitivo da fórmula para calcular a área do retângulo, embora esta ainda não tivesse sido trabalhada na aula, recorrendo à fita métrica e ao m^2, apesar do placar não ter forma retangular. Neste planeamento, parece que estes alunos adquiriram o completo desenvolvimento e coordenação dos processos mentais, ao percecionar a estrutura retangular formada por linhas e colunas, e utilizar os termos comprimento e largura.

> Santiago: Como é que vocês, com o m^2, conseguiram medir o comprimento e a largura, se [o placar] vai para baixo, vai para o lado, depois vai para cima…?
>
> […]
>
> Carlos: Dividimos [o placar] em 3 retângulos. […] Para contar os quadrados nos retângulos.

A questão colocada por Santiago refere-se à forma do placar (Figura 3) marcada a vermelho. A resposta de Carlos mostra que, embora o grupo não o tenha antecipado, tinha percebido que deveria decompor o placar em três retângulos, para poder calcular a sua área. A justificação do aluno, que envolve a contagem de quadrados, revela conhecimento conceptual do processo de medição. Na Figura 3, as setas azuis mostram a decomposição feita pelo grupo e a numeração identifica os três retângulos.

Miguel começou por explicar a estratégia de medição do retângulo 1:

> Miguel: […] Medimos com a fita métrica [...] o comprimento […] 1 metro e 13 centímetros e a largura […] 84 centímetros.

O grupo usou a fita métrica, mediu o comprimento e a largura do retângulo e registou (Figura 3). Embora já fosse possível calcular a área deste retângulo, preferiu continuar com as medições:

> Miguel: A seguir, fomos medir este [retângulo 2] com o m^2. Coube aqui e aqui [referindo-se à iteração da u.m.], mas não conseguimos medir tudo [...] E usámos a fita métrica... 18 cm [que faltava medir, referentes ao comprimento do lado menor, na horizontal]. A seguir usámos o dm^2 e vimos que tinha [...] 4 dm^2 [referindo-se ao comprimento do outro lado] e usámos a fita para medir o espacinho que sobrava, que eram 8 cm. Depois transformámos tudo em centímetros e deu 48 centímetros.

Para medir a área do retângulo 2, o grupo usou o m^2, uma u.m. quadrada. Pela explicação de Miguel, o grupo iterou duas vezes a u.m. Após a segunda iteração, como o m^2 era menor do que o espaço que faltava medir, o grupo conclui a medição usando a fita métrica, passando agora para a medição linear. Nesta nova medição, que tinha implícito um novo retângulo, mediu 18 cm na horizontal, correspondente ao comprimento do lado menor. Para medir o comprimento do outro lado, o grupo usou o dm^2, nova u.m. quadrada, iterou-o quatro vezes e contou 4 dm^2. Contudo, como ainda faltava medir "o espacinho que sobrava" e a u.m., agora, era maior do que este, o grupo recorreu novamente à fita métrica, novamente a medição linear, tendo medido 8 cm. Por se tratar de u.m. e grandezas diferentes, uma respeitante à medição da área, grandeza bidimensional, e outra à medição linear, Miguel referiu que "transformámos tudo em cm e deu 48 cm". Pelo valor da medida obtido e embora não seja explícito, o grupo considerou o lado do quadrado com 1 dm, como u.m., e relacionou esta u.m. com o cm, conseguindo assim relacionar a u.m. quadrada com a linear. Como iteraram quatro vezes o quadrado, seriam 4 dm, correspondentes a 40 cm. Depois juntaram os 8 cm, medidos com a fita métrica, tendo obtido 48 cm. De referir que este valor não corresponde à totalidade da largura do retângulo 2. O grupo não se apercebeu que esta largura já tinha sido medida, aquando da iteração do primeiro m^2. Concluídas as medições, o grupo optou por não calcular ainda a área deste retângulo.

Quanto à medição do retângulo 3, Miguel referiu a estratégia usada na medição do retângulo 1. Concluídas as medições, o aluno explicou como calcularam a área do placar 2:

> Miguel: Transformámos tudo em metros [referindo-se à conversão de todas as medidas obtidas] […] Depois juntámos as medidas

todas [o valor de todas as medições efetuadas]… deu 3 metros e 41centímetros [a medida da área do placar].

Após as medições, o grupo fez a conversão das u.m. para metros, mas adicionou os valores de todos os comprimentos dos três retângulos (Figura 3), ao contrário do que referiu no planeamento da estratégia, não calculando a área do placar.

Na discussão que se seguiu, Santiago sugeriu o uso apenas da fita métrica, pois permitiria a medição total do comprimento, evitando a mudança constante de u.m., o que não é prático e acaba por ser confuso. Foi discutido o facto do último cálculo não corresponder à medição da área do placar, mas à adição dos valores dos comprimentos dos vários lados do placar, tendo os alunos concluído que não se tratou do cálculo do perímetro, porque "faltou medir em baixo", referindo-se ao comprimento horizontal do retângulo 2, não considerando as medições anteriores, e "na conta não estão as medidas todas", referindo-se às medidas de comprimento de todos os lados do placar, justificações apresentadas por Duarte e Santiago, respetivamente. Duarte questionou esta adição, quando no planeamento da estratégia o grupo mencionou que iria multiplicar. Miguel referiu que o grupo não cumpriu a estratégia definida, por esquecimento, talvez pela complexidade da medição dos elementos relativos ao retângulo 2.

Investigadora: O que é que vocês pensaram multiplicar?
Carlos: Nós tínhamos pensado fazer como nos outros [placares] […] medir o comprimento e a largura e multiplicar.
Santiago: Então e porque é que não fizeram logo isso ali? [referindo-se ao retângulo 1] Se já tinham medido tudo! [referindo-se à medição do seu comprimento e da largura]
Miguel: Porque nós pensámos medir tudo [referindo-se aos 3 retângulos] e depois é que íamos multiplicar… no fim.
[…]
Santiago: Mas iam multiplicar tudo?
Carlos: Não. Íamos multiplicar em cada um [dos retângulos] […] o comprimento e a largura.

É possível perceber que o grupo tinha pensado usar a estrutura retangular em cada retângulo, para calcular a respetiva área. Assim, apesar do erro, o grupo mostrou um completo desenvolvimento dos processos mentais, na estruturação retangular.

Investigadora: Imaginando que tinham feito isso… e depois, o que é que iam fazer?
Miguel: Eu acho que depois… nós… íamos… juntar tudo… [referindo-se às medidas de área de cada um dos retângulos].
Carlos: Sim […] tínhamos de juntar tudo [apoiando e confirmando a resposta do colega].

A investigadora desafiou os alunos a irem mais além na explicação da estratégia de medição. A resposta insegura de Miguel, e validada pelo colega, leva-nos a afirmar que os alunos teriam conseguido concluir a medição da área do placar 2, caso tivessem calculado de imediato a área de cada um dos retângulos resultantes da decomposição do placar.

Discussão

Esta comunicação tem como objetivo compreender como é que os alunos percecionam as várias componentes de uma estrutura retangular, na medição e cálculo da área de superfícies retangulares, sem que tenham sido trabalhadas anteriormente as fórmulas da área. O grupo de Duarte, na estratégia apresentada para a medição da área do placar 1 (Figura 1), percorreu as três subcategorias da categoria de análise 4 (estrutura retangular), servindo como impulso para que a fórmula para calcular a área do retângulo comece a surgir com compreensão, o que Smith III et al. (2016) consideram como o processo seguinte nesta aprendizagem. As dificuldades apresentadas pelo grupo estão relacionadas com a multiplicação de números decimais e com a conversão entre unidades de medida de área, não estando presente a relação que se estabelece entre elas, que Santiago esclareceu sem qualquer dificuldade. A grelha que surge na Figura 1 (rodeada a vermelho) para a conversão das u.m., sugere o uso de regras que tendem a ser aplicadas de forma incorreta (Van de Walle et al., 2020).

Quanto ao placar 2, o grupo de Inês planeou usar o m^2 na medição da sua área, mas não questionou o facto da u.m. não ser a mais apropriada em determinadas partes do placar. Esta escolha está certamente relacionada com as dimensões do placar, associando assim a u.m. à área da superfície a medir (Smith III et al., 2016). Embora Rui tenha sugerido o uso da fita métrica para a medição da linha e da coluna, Liliana mostrou ainda não acompanhar esta estratégia, pois parece não coordenar as u.m. de comprimento com as de área (Outhred & Mitchelmore, 2000), ao contrário de Rui que referiu a relação entre o m e o m^2. Apesar de não ser referido no planeamento da estratégia, intuitivamente, o grupo dividiu o placar em três retângulos, mostrando que já conservam a área (categoria de análise 3), o que era esperado nesta fase, e que se revela essencial na aprendizagem da medida da área (Clements & Sarama, 2009; Smith III et al., 2016). O grupo usou o m^2, como planeado, e usou o dm^2 na medição da área, mas recorrendo ao m^2, dividido em dm^2, acabando por ser usado como u.m. e instrumento de medida. A medição da área dos retângulos 1 e 2 foi feita através da iteração do m^2, com recurso também ao dm^2, enquanto na do retângulo 3, o grupo recorreu à estrutura retangular, categoria 4, percorrendo as suas três subcategorias, mostrando assim ter este conhecimento. Deste modo, foram usadas diferentes estratégias para medir a área do placar 2 evidenciando que o grupo possui uma compreensão sólida do conceito de medição da área (Bjørkås & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).

O grupo de Miguel (Figura 3), planeou medir o comprimento e a largura do retângulo e multiplicar, o que sugere o uso intuitivo da fórmula para calcular a área do retângulo, mostrando assim a mobilização das unidades compostas, coordenando as dimensões do retângulo (subcategoria 4.3.), estratégia que foi usada na medição da área dos outros placares retangulares. Contudo, os alunos perceberam que a forma deste placar não permitia o uso direto da estratégia e decompuseram o placar em três retângulos, mostrando também que conservam a área (categoria de análise 3). O grupo também usou diferentes estratégias "para contar os quadrados nos retângulos" que resultaram desta decomposição, como referiu Carlos, mostrando também uma compreensão sólida do conceito de medição da área (Bjørkås & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019). Nos retângulos 1 e 3, o grupo usou a fita métrica, mediu os respetivos comprimento e largura, mas optou por não realizar, de imediato, a multiplicação, embora aparentemente tivesse consciência que o tinha de fazer, o que é consistente com a estratégia planeada. No retângulo 2, o grupo usou o m^2 como u.m., medindo a área de uma superfície grande com uma u.m. grande, relacionando assim a u.m. com a área da superfície a medir (Smith III et al., 2016). Como a segunda iteração da u.m. não foi suficiente para concluir a medição deste retângulo, o grupo usou o dm^2 e a fita métrica. Esta nova medição tinha implícito um novo retângulo. Embora tenha recorrido a u.m. de grandezas diferentes, o grupo considerou o lado do dm^2, correspondente a 10 centímetros, e a fita métrica para concluir a medição, conseguindo coordenar as u.m. lineares com as da área (Outhred & Mitchelmore, 2000). Tratou-se de uma estratégia demasiado confusa, o que poderá ter contribuído para que os alunos não concluíssem a medição deste comprimento. Relativamente aos retângulos 1 e 3, o facto de não terem realizado de imediato a multiplicação, após a medição dos respetivos comprimentos e larguras, levou a que o grupo, no final, desconsiderasse a estratégia inicial, mostrando-se confuso e adicionasse os valores de todas as medições feitas. Porém, parece que tinham intenção de calcular a área de cada um dos retângulos e, no final, adicionar todas as medidas de área obtidas, a fim de obter a área do placar 2.

Conclusão

A realização desta tarefa permitiu aos alunos trabalhar os níveis da conjetura 4) medição com u.m. padronizadas e 5) relação entre as u.m. padronizadas.

As estratégias apresentadas pelos alunos na medição da área dos placares 1 e 2 evidenciam conhecimento conceptual e processual do processo de medição, embora não estejam todos ao mesmo nível. O grupo de Duarte, no placar 1, teve necessidade de iterar a u.m., em linha e em coluna, localizando a u.m. corretamente, sem duplicações ou omissões, posteriormente organizou as iterações em unidades compostas e usou essas unidades coordenando as dimensões do retângulo. O mesmo se passou com o grupo de Inês, mas apenas na medição da área do retângulo 3 do placar 2. Este grupo também mostrou conhecimento da estrutura retangular, mas nem todos os seus elementos coordenaram as medidas lineares com as medidas de área. Na medição da área do retângulo 2, o grupo iterou o m^2 e no retângulo 1, recorreu à pavimentação. O grupo de Miguel revelou um conhecimento mais avançado, começou por usar a fita métrica para medir os comprimentos dos lados dos retângulos 1 e 3, usou e mobilizou as unidades compostas, coordenando também as dimensões do retângulo. Os três grupos parecem ter atingindo a subcategoria de análise 4.3, correspondente ao nível 6 na evolução do desenvolvimento da estrutura retangular (completo desenvolvimento e coordenação dos processos mentais) proposto por Battista (2007). Atendendo a estes resultados, pareceu-nos que os alunos estavam prontos para a compreensão das fórmulas da área (Smith III et al., 2016), nomeadamente do quadrado e do retângulo, o que foi feito posteriormente pelo professor.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito da UIDEF - Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, https://doi.org/10.54499 /UIDB/04107/2020, e por meio de uma bolsa de doutoramento atribuída à primeira autora (2021.04798.BD).

Referências

Battista, M. T. (2003). Understanding students’ thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and meaching measurement* (pp. 122–142). NCTM.

Battista, M. T. (2007). The developmentof geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). NCTM.

Bjørkås, J., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Measuring area on the geoboard focusing on using flexible strategies. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (pp.745–752). https://hal.science/hal-02402122

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). Geometric measurement: Area, volume and angle. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (pp. 173–187). Routledge.

Cullen, A. L., Eames, C. L., Cullen, C. J., Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., & Van Dine, D. W. (2018). Effects of three interventions on children's spatial structuring and coordination of area units. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(5), 533–574. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0533

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 144–167. https://doi.org/10.2307/749749

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77–98. https://doi.org/10.48489/quadrante.22934

Smith III, J. P., Males, L. M., & Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 239–270. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements (Ed.), *Learning and teaching measurement* (pp. 3–16). NCTM.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10th ed.). Global Edition.

AS DIFICULDADES SENTIDAS PELOS ALUNOS NO DECORRER DE UMA GALLERY WALK

THE DIFFICULTIES EXPERIENCED BY STUDENTS DURING A GALLERY WALK

Andreia Rodrigues

Universidade do Minho, Portugal

andreiafilipacr2001@outlook.com

Maria Helena Martinho

CIEd- UMinho, Portugal

mhm@ie.uminho.pt

Resumo: Nos últimos anos, as abordagens tradicionais de ensino têm sido cada vez mais questionadas. Vários autores defendem que as dimensões intelectual, social e física devem estar interligadas no processo de aprendizagem. Neste contexto, a *Gallery Walk* surge como uma estratégia de aprendizagem ativa, contrapondo as abordagens tradicionais que têm sido questionadas pela sua ineficácia no processo de aprendizagem dos alunos. Durante uma *Gallery Walk*, a comunicação desempenha um papel crucial, pois os alunos são incentivados a expressar as suas ideias de forma clara, isto é, a organizar e a estruturar o seu raciocínio. Além disso, os alunos têm oportunidade de dar e receber *feedback*, o que os ajuda a refletir sobre as suas próprias estratégias de resolução. Assim, torna-se necessário reconhecer as dificuldades que os alunos enfrentam neste processo. O objetivo deste artigo passa por identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no decorrer de uma *Gallery Walk.* Este estudo adotou uma metodologia qualitativa e interpretativa, utilizando dados coletados por meio da observação e das produções dos alunos. Para alcançar este objetivo, são apresentados os resultados de uma *Gallery Walk* realizada com uma turma de 10.º ano Ciências Socioeconómicas. Durante essa *Gallery Walk*, foram observadas dificuldades na resolução da tarefa e na construção do *poster*, bem como nos comentários elaborados nos *post-its* e na discussão final. Na *resolução da tarefa e na construção do poster*, foram identificadas dificuldades tanto na interpretação quanto no desenvolvimento da tarefa. Nos *comentários elaborados nos post-its*, os alunos enfrentaram dificuldades em expressar as suas opiniões sobre os *posters* dos colegas. Já na *discussão final*, os alunos revelaram dificuldades em expressar o seu raciocínio e em explicar o porquê do raciocínio dos colegas não era correto ou estava incompleto.

Palavras-chave: *gallery walk*, ensino secundário, dificuldades, comunicação.

Abstract: In recent years, traditional approaches have been increasingly questioned. Several authors argue that the intellectual, social, and physical dimensions should be integrated into the learning process. This is where the *Gallery Walk* emerges as an active learning strategy, contrasting with traditional approaches that have been criticized for their ineffectiveness in supporting students' learning. Communication is important in a *Gallery Walk* approach since students are encouraged to express their ideas clearly and share their reasoning. Additionally, students have the opportunity to give and receive feedback, which helps them reflect on their problem-solving strategies. Thus, it is necessary to acknowledge the difficulties students face in this process. This article aims to identify the challenges students encounter during a *Gallery Walk*. This study adopted a qualitative and interpretative methodology, using data collected through observation and student work. To address this objective, the recurring results of a *Gallery Walk* in a 10th-grade Socioeconomic Sciences class are presented. During this *Gallery Walk*, difficulties were noted in task resolution and poster construction, the comments made on post-its and the final discussion. In completing the task and constructing the poster, students faced challenges in both interpreting and developing the task. In the comments written on post-its, students had difficulty expressing their opinions about their peers' posters. In the final discussion, students struggled to express their reasoning and to explain why their peers' reasoning was incorrect or incomplete.

Keywords: *gallery walk*, high school education, difficulties, communication

Introdução

Segundo o National Council of Teachers of Mathemathics (NCTM, 2000), os alunos devem ser capazes de organizar e de comunicar o seu pensamento de forma coerente aos colegas e ao professor, utilizando linguagem matemática precisa. Além disso, devem ser capazes de "analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usados por outros" (NCTM, 2000, p. 410). O documento curricular em vigor em Portugal, Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória (Martins et al., 2017), também destaca que os docentes devem promover atividades que permitam ao aluno confrontar diferentes pontos de vista.

Nesse contexto, a *Gallery Walk* surge como uma estratégia de aprendizagem ativa, uma vez que os alunos não se limitam a absorver informações transmitidas pelo professor, mas exploram, discutem, explicam e justificam resoluções matemáticas, tornando-se participantes ativos na construção do seu próprio conhecimento (Vale & Barbosa, 2018a; Hakim et al. 2019).

Este estudo retrata parte de uma intervenção realizada com alunos do 10.º ano e tem como objetivo identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no decorrer de uma *Gallery Walk*.

A *Gallery Walk* como estratégia de aprendizagem ativa

Nos últimos anos, diversos estudos têm investigado o papel dos alunos na sala de aula (e.g. Kieft et al., 2006; Kong, 2021). Neste sentido, as estratégias de aprendizagem ativa têm-se destacado uma vez que as abordagens tradicionais têm sido questionadas pela sua ineficácia no processo de aprendizagem dos alunos (Vale & Barbosa, 2018a).

Recorrendo a uma aprendizagem ativa é possível envolver os alunos em atividades que os fazem refletir sobre as ideias e a maneira como as aplicam (Edwards, 2015). Caracteriza-se pela co-construção de conhecimento por meio da participação e contribuição dos alunos, mantendo-os mentalmente e, muitas vezes, fisicamente envolvidos no seu processo de aprendizagem (Prince, 2004). Para que ocorra, é essencial que os alunos sejam incentivados a pensar criticamente, resolver problemas complexos e tomar decisões informadas (Vale & Barbosa, 2020). Além disso, devem ter oportunidade de comunicar as suas ideias, discutir e refletir em pequenos grupos sobre os conteúdos e situações do mundo real (Edwards, 2015).

Vários autores defendem que as dimensões intelectual, social e física devem estar interligadas (Edwards, 2015; Vale & Barbosa, 2018a), uma vez que a aprendizagem não é muito efetiva quando os alunos apenas ouvem o professor e memorizam procedimentos e conceitos (Vale & Barbosa, 2018b). No entanto, os alunos devem ser desafiados a refletir criticamente, analisar informações e aplicar conhecimentos teóricos na resolução de tarefas (NCTM, 2000). Este processo vai além da memorização de factos e envolve a capacidade de sintetizar, avaliar e resolver problemas, levando à construção de significados (Vale & Barbosa, 2018a). O movimento também assume um papel importante, visto que os alunos têm dificuldade em permanecer sentados e concentrados por longos períodos (Edwards, 2015).

Entre as várias metodologias de aprendizagem ativa, destaca-se a *Gallery Walk*. Esta metodologia de ensino envolve os alunos num processo dinâmico de movimento e interação, onde os alunos caminham pela sala de aula para observar e discutir diferentes trabalhos expostos. Durante a *Gallery Walk*, os alunos são encorajados a refletir sobre as ideias apresentadas, fazer perguntas, fornecer *feedback* e compartilhar as suas perceções (Vale & Barbosa, 2018a). Isto promove um ambiente de aprendizagem envolvente, onde a comunicação e a troca de ideias assumem um papel importante (Santos & Barbosa, 2023). Assim, os alunos tornam-se participantes ativos no seu processo de aprendizagem, em vez de meros recetores passivos de informações.

Segundo Vale e Barbosa (2018a), a *Gallery Walk* desenvolve-se em seis etapas: resolução de uma tarefa em pequenos grupos; construção de um póster com a resolução da tarefa; apresentação e observação dos *posters* dos colegas; elaboração de comentários em *post-its*; discussão dos comentários em grupo; e, por fim, uma discussão coletiva entre todos os alunos (Figura 1).

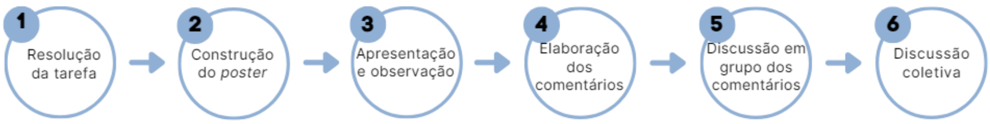


Figura 1. Esquema síntese das fases da Gallery Walk.

Na primeira etapa, os alunos são organizados em pequenos grupos e recebem uma tarefa específica para resolver. Esse momento inicial é crucial, pois permite aos alunos a troca de ideias e o aprofundamento dos conhecimentos já adquiridos, favorecendo o trabalho colaborativo.

Uma vez resolvida a tarefa, cada grupo deve criar um *poster* que apesente as suas resoluções e respetivos raciocínios. Essa etapa representa uma transição importante do trabalho verbal e mental para um formato visual e escrito, facilitando a organização e estruturação das ideias, ao mesmo tempo que promove uma comunicação mais clara e objetiva.

Com os *posters* prontos, estes são dispostos pela sala e os grupos circulam para observar as produções dos colegas. Durante essa etapa, os alunos são incentivados a elaborar comentários e perguntas, que são escritos em *post-its* e fixados nos *posters* correspondentes. Posteriormente, os alunos analisam os comentários presentes no *poster* do seu grupo, interpretam e respondem às questões colocadas pelos colegas preparando-se para a apresentação na fase de discussão. Estas duas etapas estimulam a reflexão crítica e a troca de ideias entre os grupos.

A *Gallery Walk* culmina numa discussão coletiva envolvendo toda a turma. Nesta última etapa, os principais pontos levantados durante as observações e os comentários são discutidos amplamente (Vale & Barbosa, 2018a). A discussão coletiva oferece aos alunos a oportunidade de explicar os seus raciocínios, defender as suas resoluções e ouvir diferentes perspetivas.

Dificuldades sentidas pelos alunos no decorrer da *Gallery Walk*

Reconhecer as dificuldades que os alunos enfrentam na comunicação escrita e oral é fundamental para que essas possam ser superadas. Embora cada aluno enfrente desafios específicos, algumas dificuldades que são mais comuns. Uma das mais frequentes é a dificuldade em expressar suas ideias de forma clara e coerente, tanto por escrito como oralmente (Martinho, 2017).

Os diferentes momentos da *Gallery Walk* podem apresentar dificuldades para os alunos, desde a interpretação da tarefa até à discussão final. Na etapa inicial, os alunos podem ter problemas de compreensão devido à linguagem matemática, esta possui termos e expressões específicas que, se não forem bem compreendidos, podem confundir os alunos. Alem disso, alguns alunos não estão habituados a uma leitura crítica e reflexiva, o que os leva a interpretar de forma incorreta as tarefas, resultando em execuções incompletas ou inadequadas (Possamai & Silva, 2020).

Durante a resolução da tarefa, alguns alunos encontram dificuldade em articular claramente os motivos que os levaram a tomar determinadas decisões. Frequentemente, descrevem as etapas de maneira superficial, sem detalhar sobre o porquê dessas escolhas serem apropriadas, o que resulta em respostas incompletas ou superficiais (NCTM, 2000; Martinho, 2017)

Nas etapas de análise e *feedback* sobre os trabalhos dos colegas, outras dificuldades surgem, como a insegurança em dar *feedback* ou a incapacidade de identificar pontos fortes e fracos nas estratégias utilizadas pelos outros grupos (Vale & Barbosa, 2018). Alguns alunos podem também sentir-se desconfortáveis em expressar a sua opinião.

A dificuldade em organizar pensamentos de forma coerente e apresentar ideias de forma lógica e estruturada afeta o desempenho de muitos alunos, em particular, na etapa de discussão coletiva (Martinho, 2017). Além disso, o uso de linguagem matemática apropriada na comunicação é um desafio frequente. Estas dificuldades podem levar a explicações confusas, e a alguns mal-entendidos nas diferentes etapas (NCTM, 2000).

Contexto e metodologia

O desenvolvimento deste estudo ocorreu numa turma do 10.º ano de Ciências Socioeconómicas, cujas disciplinas de opção são Economia A e História B. A turma era composta, inicialmente, por 28 alunos, mas com a saída de uma aluna a intervenção foi realizada com 27 alunos, sendo 22 rapazes e 5 raparigas. Os alunos foram divididos em 7 grupos, sendo que 6 tinham quatro alunos e um tinha três. Estes grupos mantiveram-se constantes ao longo da Intervenção que decorreu entre janeiro de 2024 e abril de 2024.

Este estudo teve uma abordagem qualitativa uma vez que os dados recolhidos foram analisados com o intuito de “descobrir significados, valores, explicações” (Resende, 2016, p. 51). Segundo Resende (2016), a investigação qualitativa divide-se em várias etapas, entre as quais, formulação de questões de investigação, recolha de dados, análise e discussão dos resultados e conclusões. Neste estudo, os resultados são apresentados maioritariamente através de diálogos sendo o foco as interações e os diálogos dos alunos.

Foram realizadas duas *Gallery Walks* durante o estudo. A primeira *Gallery Walk* teve como objetivo introduzir as coordenadas de um ponto no espaço, sendo a tarefa dividida em duas partes. Na primeira parte, os alunos usaram os conceitos previamente aprendidos sobre Geometria no Plano. Na segunda parte, a tarefa foi direcionada para a introdução das coordenadas de um ponto no espaço tridimensional. Já a segunda *Gallery Walk* teve como propósito apresenta uma nova geometria, a Geometria Esférica, que, apesar de não constar no documento das *Aprendizagens Essenciais* (Carvalho e Silva et al., 2021), enriquece a capacidade de visualização espacial dos alunos. Esta atividade permitiu promover curiosidade nos alunos e motivá-los a aprender além do que é proposto nas *Aprendizagens Essenciais*. Durante esta atividade, foi proposto um problema que incentivou o pensamento crítico e a aplicação de conceitos de Geometria Esférica em situações práticas, até então desconhecidos pelos alunos. Todas as *Gallery Walks* foram gravadas, uma gravação por cada grupo e as produções dos alunos recolhidas para posterior análise.

Neste artigo, o foco está nas dificuldades enfrentadas pelos alunos ao longo da primeira *Gallery Walk*. A escolha desse foco deve-se ao facto de que foi a primeira vez que os alunos participaram numa *Gallery Walk*, o que gerou desafios nas diferentes etapas. Assim, serão analisadas as dificuldades encontradas na resolução da tarefa, na construção do *poster*, na elaboração de comentários e na discussão final.

Apresentação dos resultados

A primeira *Gallery Walk* marcou o início da intervenção pedagógica, sendo realizada ao longo de três aulas: duas de 90 minutos e uma de 45 minutos. Na primeira aula um aluno do grupo 1, o A1, esteve ausente devido a problemas de saúde. Nas aulas subsequentes, todos os alunos estavam presentes. O objetivo desta *Gallery Walk*, conforme referido, era introduzir a Geometria no Espaço, e a atividade foi dividida em duas partes distintas (Figura 2).

Tarefa 1- Duas torres, duas aves e uma fonte

1.ª parte

Duas aves estão no cimo de duas torres de apartamentos. A primeira torre tem 30 metros de altura e a segunda tem 40 metros de altura e distam entre si apenas 50 metros. Entre as torres está uma fonte. A um determinado instante, as duas aves descem a voar em linha reta, à mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo ao centro da fonte. A que distância se encontra a fonte das duas torres?

Nota: Adaptada de Gil (2012)

2.ª parte

Supõe agora que as frentes Este e Oeste das torres têm 10 metros de comprimento, cada apartamento tem 2,5 metros de altura e o pináculo da fonte, que está alinhado com a frente norte das torres, tem um metro de altura. A Joana mora na primeira torre no 5.º andar e o Duarte mora na segunda torre no 6.º andar. As varandas dos seus quartos estão viradas para Sul, mas ambos conseguem ver a fonte da varanda.

No dia de São João vão escolher uma varanda para esticar uma fita até ao pináculo da fonte, mas, como não querem gastar muito dinheiro, vão escolher a varanda que está mais perto do pináculo da fonte. No mínimo, quantos metros de fita serão necessários?

Figura 2. Enunciado da tarefa proposta.

Na primeira parte da tarefa, os alunos podiam aplicar os conceitos previamente aprendidos em Geometria no Plano. Na segunda parte, foram fornecidos aos alunos materiais concretos: duas torres construídas em cartolina, uma com 30 cm e outra com 40 cm de altura e um dado de 1 cm, representando o pináculo da fonte. Esta segunda parte foi planeada para, na discussão final, introduzir o referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de um ponto no espaço.

Todos os grupos responderam às questões propostas. As respostas foram analisadas da seguinte forma: (i) correta (C), quando os alunos obtiveram a resposta correta sem cometerem erros em processos intermédios; (ii) parcialmente correta (PC), quando os alunos chegaram à resposta correta, mas cometeram algum erro em processos intermédios; (iii) incompleta (I), quando os alunos não conseguiram obter a resposta final mas demonstraram compreensão parcial do problema; (iv) incorreta (IC), quando os alunos não conseguiram chegar à resposta e cometeram erros significativos nos processos intermédios ou não compreenderam o problema. Na Tabela 1 é apresentada a frequência dos diferentes tipos de respostas entregues pelos sete grupos.

Tabela 1. Frequência dos diferentes tipos de resposta às questões.

	C	PC	I	IC
1.ª parte	6	0	0	1
2.ª parte	2	3	1	1

Resolução da tarefa e construção do poster

Durante a fase de resolução da tarefa e construção do *poster* da *Gallery Walk*, foram identificadas dificuldades tanto na interpretação quanto no desenvolvimento da tarefa. A seguir, são apresentados diálogos que exemplificam essas dificuldades.

Na primeira parte da tarefa, três grupos enfrentaram *dificuldades na interpretação da tarefa*. Esses grupos tiveram dificuldades em compreender o significado, no contexto do problema, de as duas aves voarem à mesma velocidade e chegarem ao mesmo tempo ao destino. Essa dificuldade pode ser ilustrada pelo diálogo que se segue, ocorrido no grupo 7:

A26: Se eles chegam à mesma hora quer dizer o quê?
A27: E à mesma velocidade.
A25: Se eles chegam à mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo quer dizer a fonte vai estar aqui (apontando para o rascunho) e a distância entre a torre a primeira torre e a fonte é igual à distância da segunda torre à fonte.
A27: Não, isso não faz muito sentido porque uma torre é mais baixa que a outra. Vamos pensar…
A26: Mas porquê que a distância tem de ser igual se aqui nem fala de distância?
A25: Porque se chegam ao mesmo tempo e andam à mesma velocidade…
A27: Ah! Já percebi (seguindo o raciocínio do aluno A25). Não é essa distância que tem de ser igual. É a distância que as aves percorrem.

No desenvolvimento da primeira parte da tarefa os alunos também encontraram dificuldades. Após concluírem que a distância percorrida pelas aves era a mesma, vários grupos enfrentaram dificuldades em encontrar um processo para determinar a distância entre a fonte e as duas torres. Segue-se, como exemplo, um diálogo ocorrido no grupo 2:

A6: Para elas chegarem ao mesmo tempo e se uma torre é mais alta do que a outra, então a torre mais alta tem de estar perto da fonte.

A5: Estás a pensar bem.
A8: Eu pensei no teorema de Pitágoras.
A6: Mas nós só temos uma medida.
A8: E sabes que a distância é a mesma e que em baixo (referindo-se à distância entre as duas torres) é 50 metros.
A6: Mesmo assim… Não sei como chegamos lá.
A8: Podemos fazer tentativa erro. Sabemos que uma torre mede 30 metros a outra 40. Imagina que daqui aqui mede 10 (apontando para o esquema desenhado referindo-se à distância do cimo torre à fonte) e vemos quanto mede no chão.
A6: E o que tiras disso?
A8: Quando a soma dos dois der 50 é essa a distância já que queremos saber a hipotenusa.
A6: Mas nós não queremos saber a hipotenusa. Queremos saber a distância da torre à fonte. É este cateto (apontando para o esquema dizendo que é a distância entre a torre e a fonte no chão).

Este grupo, embora tivesse percebido que poderia usar o teorema de Pitágoras, não estava a conseguir resolver uma vez que não tinham duas medidas que consideravam necessárias.

Já na segunda parte da tarefa, os alunos também revelaram *dificuldades na interpretação da tarefa*. Inicialmente, os alunos sentiram dificuldades ao utilizar os sentidos de orientação (ou os “pontos cardeais”) no contexto da tarefa, como é exemplificado no diálogo seguinte, ocorrido no grupo 3:

A12: O que é para fazer?
A9: Imagina, eu entendi o que é pedido. Não percebi aquela parte do este, oeste e sul.
A10: Mas sabes onde é que é Oeste, Este e assim.
A9: Sim, mas como é que sabemos que aqui é Este? (apontando para as torres).
A11: E onde é que é Oeste aí?
A10: Oeste acho que é no lado esquerdo.
A9: Não sei qual é o lado esquerdo do mundo. Pode ser para ali ou para ali (fazendo gestos com as mãos).
A12: Não tens aí uma bússola?
A10: Eu acho que isso não é importante. Não é preciso saber onde é.
A9: Professora, onde é que o Este e Oeste?
Prof.: Façam uma rosa dos ventos e pensem no contexto do enunciado. A frente das torres está onde?
A9: No Norte.
Prof.: Então peguem nas torres e fixem o Norte aí. Onde é Este e Oeste?
A9: Aqui (apontando para as torres).
A10: Ah já percebi. E o Sul vai ser aqui (apontando para as torres).

Neste diálogo, fica claro que os alunos estavam confusos em relação às direções, o que os impedia de avançar na resolução da tarefa. Nesse momento, a professora (primeira autora deste artigo) fez uma intervenção para explicar para toda a turma que as orientações do enunciado serviam para indicar a localização das varandas e da fonte. Esclareceu que, ao posicionar as torres e fixar o Norte, eles poderiam facilmente deduzir a localização do Este e do Oeste. Com essas orientações, os alunos conseguiram progredir na resolução.

Além disso, durante o *desenvolvimento da tarefa*, todos os grupos revelaram dificuldades em delinear as estratégias adequadas para resolver a tarefa. Como exemplo dessas dificuldades, segue-se o diálogo ocorrido no grupo 5:

> A19: Não estou a perceber a logica deste exercício.
> A18: Nem eu.
> A17: O objetivo é ver qual é a varanda que está mais perto.
> A19: Cada apartamento tem 2,5 metros de altura.
> A20: Então se ela mora no 5.º andar temos de fazer 2,5×5.
> A18: Mas mesmo assim como descobrimos qual está mais perto?
> A17: Ah… Já sabemos a altura da varanda da Joana e do Duarte.
> A17: A altura da fonte é 1 metro e o comprimento das torres é 10 metros.
> A18: Mas isso não nos vai adiantar de nada.
> A19: Se diz isso é porque é necessário para alguma coisa.
> A17: Então sabemos a altura da varanda e o comprimento. Devemos puder usar o teorema de Pitágoras porque temos duas medidas. A distância da torre à fonte é 32 e aqui é 12,5.
> A20: Temos de tirar 1 metro da fonte.
> A17: Pronto. Agora fazemos um teorema de Pitágoras e já está.

No diálogo acima, é possível observar que, inicialmente, o grupo enfrentou dificuldades para extrair os dados relevantes do enunciado. Após superar esse obstáculo, aplicaram o teorema de Pitágoras para calcular a distância. No entanto, utilizaram o teorema de Pitágoras apenas porque conheciam duas medidas que formavam um triângulo, sem compreenderem claramente qual era a medida que realmente estavam a calcular. Como consequência, mesmo tendo aplicado o teorema de Pitágoras corretamente, a resposta obtida foi incompleta, uma vez que não entenderam qual a medida que calcularam.

Comentários elaborados nos post-its

Na fase da *Gallery Walk*, correspondente à elaboração de comentários em *post*-its, os alunos enfrentaram dificuldades em expressar as suas opiniões sobre os *posters* dos colegas. Essas dificuldades tornaram-se evidentes pelas questões que colocaram, como: “O que é que é para escrever?”, “o que diz nesse *post-it*?” (referindo-se ao outro comentário já feito no *poster*). Essas perguntas revelam a insegurança e a incerteza dos alunos em relação ao que deveriam observar e comentar. Alguns pareciam estar mais preocupados em repetir ou validar os comentários realizados por outros colegas, em vez de formular as suas próprias opiniões ou críticas.

Nesse contexto, a professora reforçou a importância de procurarem compreender o raciocínio dos colegas e serem específicos nos comentários, apontando exemplos concretos do que estava bem feito ou do que poderia ser aprimorado, para que os colegas pudessem compreender claramente as sugestões apresentadas.

Posteriormente, os alunos revelaram dificuldades na compreensão do raciocínio dos colegas quando este divergia do próprio. Essas dificuldades podem ser ilustradas, por exemplo, no diálogo do grupo 6 referente à resolução da primeira parte da tarefa do grupo 1:

A21: Eles no exercício 1 usaram o teorema de Pitágoras.
A23: Deu diferente da nossa resposta.
A24: Eu já sabia que a nossa estava mal…
A22: A deles também pode estar não sabes.
A24: Não estou a perceber nada do que fizeram.
A23: Calma! Deixa ler.
A22: Mas como é que eles usaram o teorema de Pitágoras e tem duas letras diferentes? (referindo-se às incógnitas x e h)
A23: Estou a tentar perceber.
A21: Imagina. Eles supuseram que a distância no chão é x. Se no total é 50 então a outra é 50-x.
A22: Sim, mas mesmo assim… e o h?
A21: Suponho que seja a hipotenusa.
A22: E ela é igual?
A23: Pelos vistos…
A21: Nós fizemos mal. Claro que é igual porque a distância é a mesma.
A23: Não acredito que erramos…

O grupo 6 (Figura 3) teve a resposta incorreta (IC) e, ao analisar o *poster* do outro grupo (grupo 1, Figura 4), inicialmente ficou confuso ao se deparar com um raciocínio diferente do seu, o que dificultou a compreensão do método utilizado. Eles observaram que o outro grupo aplicou o teorema de Pitágoras, mas ficaram confusos ao notar que utilizaram duas incógnitas diferentes na aplicação do teorema. Quando conseguiram compreender o raciocínio dos colegas, o grupo 6 reconheceu que a sua própria resolução estava errada e que a do grupo 1 estava correta, uma vez que a distância era, de facto, igual.

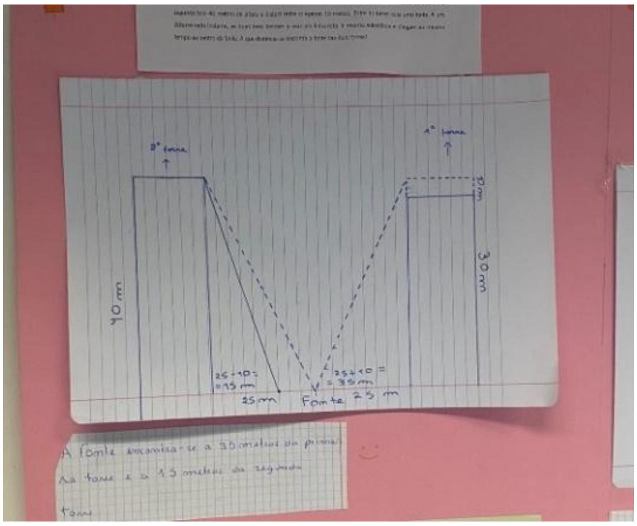


Figura 3. Resolução do grupo 6.

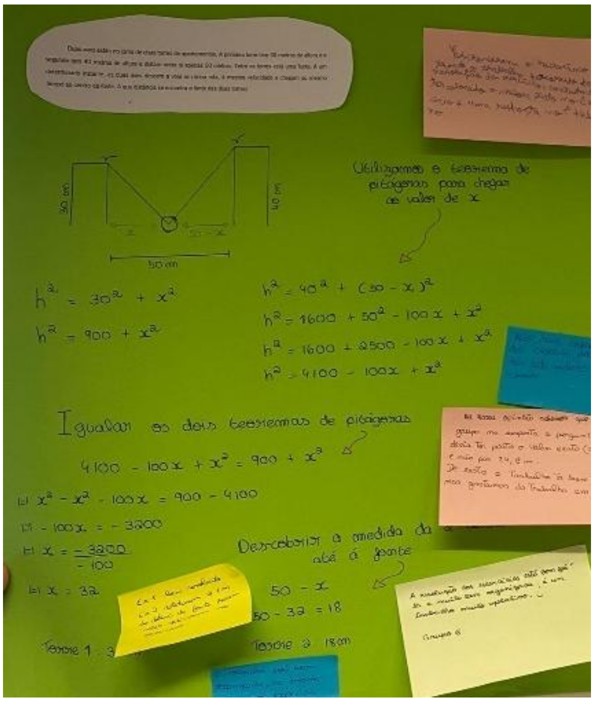


Figura 4. Resolução do grupo 1.

A dificuldade de compreender o raciocínio dos colegas também se manifestou no diálogo do grupo 5, referente à resolução da segunda parte da tarefa do grupo 2:

A18: Para quê que eles usaram o 10?
A19: Eles fizeram dois teoremas em cada torre. Porquê?
A18: E usaram o 12,5 e o 15. Não tiraram o 1 metro.
A17: Vou pegar numa torre para ver o que fizeram.
A17: 32 é a distância à fonte e 10 é o comprimento. Ao fazer o teorema de Pitágoras dá…
A20: Dá este lado.
A19: Mas aqui não é reto (referindo-se ao ângulo do triângulo).
A20: Pois não. Não podem usar.
A18: É sim. Olha (aponta para as torres). É aqui.
A17: E depois usam esse lado e a altura e descobrem… Isto (apontando para a torre).

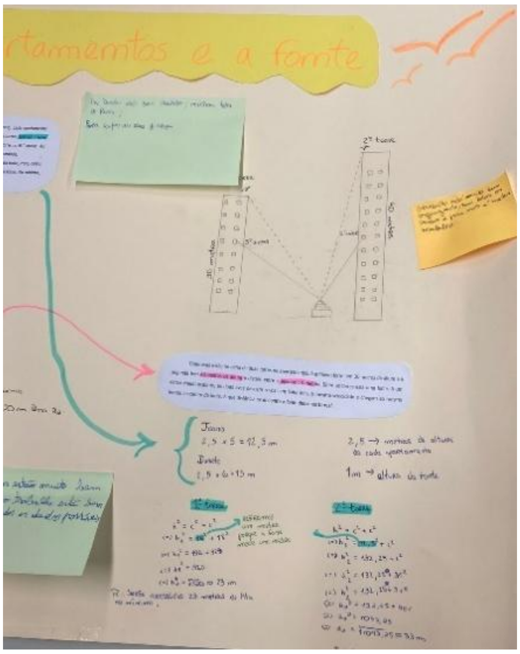


Figura 5. Resolução do grupo 5.

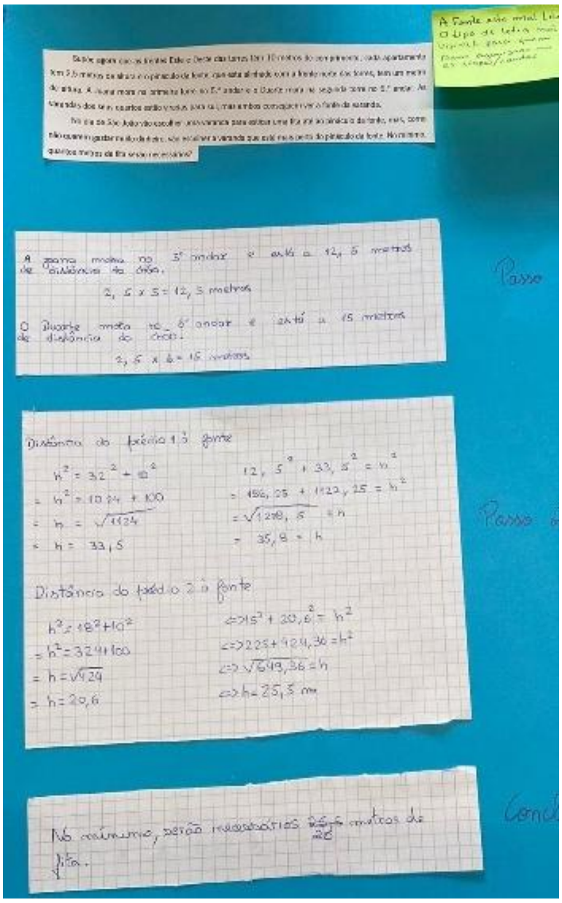


Figura 6. Resolução do grupo 2.

O grupo 5 (Figura 5) foi um dos grupos que apresentou uma resposta incompleta (I) na segunda parte da tarefa. Este grupo recorreu apenas uma vez ao teorema de Pitágoras na sua resolução, sem perceberem que não estavam a calcular a distância das varandas ao pináculo da fonte. Ao analisarem a resolução do grupo 2 (Figura 6), inicialmente ficaram confusos quanto ao motivo do grupo 2 ter recorrido duas vezes ao teorema de Pitágoras "fizeram dois teoremas em cada torre". Contudo, com a ajuda das torres de cartolina, conseguiram compreender que o grupo 2 tinha seguido o raciocino correto, enquanto a abordagem deles estava incompleta.

Discussão final

Durante a etapa da discussão coletiva, surgiram algumas dificuldades que merecem ser destacadas. Em primeiro lugar, muitos alunos mostraram insegurança ao explicar as suas ideias, refletindo uma dificuldade em verbalizar o raciocínio matemático de forma clara e coesa. No início das apresentações, alguns grupos que haviam recebido comentários nos *post-its* a criticar a caligrafia salientaram que isso se devia ao facto de considerarem que tiveram pouco tempo para resolver a tarefa. Essa observação é significativa, pois revela que os alunos enfrentaram dificuldades na gestão do tempo.

Durante a apresentação dos *posters*, dois grupos revelaram dificuldades em expressar o seu raciocínio, como podemos observar, por exemplo, na apresentação do grupo 1:

A3: Nós calculamos primeiro a altura da Joana fazendo 2,5×5. Depois aplicamos o teorema de Pitágoras para descobrir… Ahhhh (faz uma pausa) a hipotenusa. Depois… (faz uma pausa).

Prof.: O que é a hipotenusa?

A2: Era isto (apontando para a torre, indicando que seria a distância entre a fonte e zona Sul da torre no chão).

A3: Fizemos o mesmo para o Duarte e depois fizemos um segundo teorema de Pitágoras e vimos que a da Duarte era mais perto e eram necessários 24,8 metros.

Prof.: Porquê que não fizeram o segundo teorema de Pitágoras para a Joana?

A3: Porque...

A2: Porque não era preciso uma vez que o primeiro deu aproximadamente 34,5 e no Duarte deu $2\sqrt{106}$.

No diálogo acima, podemos observar que o aluno A2 revelava dificuldades ao expressar o seu raciocínio na resolução da segunda parte da tarefa. Utilizava o termo "hipotenusa" sem esclarecer a que se referia no contexto da sua resolução. Ao perceber essa dificuldade, o aluno A3 tentou ajudar a completar o raciocínio.

Quando a turma foi questionada acerca dos *posters* dos grupos que estavam a apresentar, alguns alunos revelaram dificuldades em explicar por que o raciocínio dos colegas não era correto ou estava incompleto. Isso pode ser evidenciado no diálogo seguinte, que ocorreu na apresentação do grupo 6:

Prof.: O que têm a dizer sobre este cartaz? Ou sobre a resolução dos vossos colegas?

A17: Na resolução do primeiro considero que o teorema de Pitágoras não está bem. Nunca poderiam ser os valores que comentaram.

Prof.: Eles estão a usar o teorema de Pitágoras?

A2: Não. Eles adicionaram 10 metros à segunda torre.

A25: Eu acho que está errado porque eles consideraram que a fonte estava no meio.

Prof.: Sim, mas se as duas torres tivessem efetivamente 40 metros a fonte estava a meio, certo? Porquê que não podemos apenas tirar 10 metros?
A8: Porque não funciona assim.
Prof.: Hmm… E não funciona assim porquê?
A8: Porque nós também tentamos essas coisas…. Deu esses resultados e quando fizemos o teorema de Pitágoras não dava para igualar, por isso…
Prof.: Podes tentar explicar de outra forma?
A8: Nós tentamos isso. Só que depois fizemos o teorema de Pitágoras e vimos que não dava isso.

Neste diálogo, é possível observar que os alunos não conseguiram compreender a abordagem que o grupo 6 tentou adotar. Quando questionados sobre o motivo da resposta do grupo 6 estar errada, os alunos não foram capazes de identificar claramente onde estava o erro.

Considerações finais

O objetivo deste artigo é identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no decorrer de uma *Gallery Walk*. Ao longo da sua concretização, foi possível identificar diversas dificuldades na resolução da tarefa e construção do *poster*, bem como nos comentários elaborados nos *post-its* e na discussão final.

Na resolução da tarefa e construção do *poster*, três grupos demonstraram dificuldades na interpretação da tarefa, o que os impedia de avançar. Os alunos tiveram dificuldade em extrair os dados relevantes e em compreender a relação entre eles. Esta dificuldade levou a que um dos grupos apresentasse uma resolução errada em toda a tarefa. Além disso, ao longo da resolução da tarefa, vários grupos enfrentaram dificuldades sobre que estratégia adotar para conseguir resolver a tarefa.

Nos comentários elaborados nos *post-its*, os alunos inicialmente mostraram dificuldades em entender o que realmente era esperado que comentassem. Embora também referissem a estética do trabalho, era fundamental que compreendessem o raciocínio dos colegas e comentassem a suas resoluções. Quando foram alertados sobre essa necessidade, os alunos começaram a revelar dificuldades em compreender o raciocínio dos colegas, principalmente quando divergia do seu.

Tal como no estudo de Gamboa (2019), esta *Gallery Walk* apresentou uma discussão pouco rica e dinâmica, uma vez que os alunos questionavam pouco e limitavam-se a apresentar as suas resoluções. Além disso, os alunos revelaram dificuldades em expressar o seu raciocínio de forma clara e em identificar os erros cometidos pelos colegas durante a apresentação dos cartazes. Os alunos hesitaram ao tentar explicar as suas resoluções e, por vezes, não conseguiram identificar os erros dos colegas.

Assim, percebe-se que as dificuldades não são apenas individuais, mas também coletivas. As diversas dificuldades observadas ao longo da resolução da tarefa estão relacionadas, em parte, ao facto de os alunos não estarem habituados a explorar novos conteúdos sem a introdução dos conhecimentos teóricos. Alem disso, a falta de familiaridade dos alunos com a prática de dar *feedback* evidenciou as dificuldades que enfrentaram ao comentar os *posters* dos colegas. Por outro lado, as dificuldades em expressar o seu raciocínio e em compreender os *posters* dos colegas resultaram numa discussão final menos rica.

Perante estas dificuldades, torna-se evidente a importância de valorizar estratégias de aprendizagem ativa, como a *Gallery Walk*, pois essa metodologia incentiva os alunos a explorar diferentes abordagens, desenvolvendo a capacidade de argumentação e o pensamento critico.

Referências

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2022) *Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos. 10.º ano - Ensino Secundário*. República Portuguesa: Educação. http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf

Edwards, S. (2015). Active learning in the middle grades. *Middle Grades Research Journal*, *10*(1), 65.

Gamboa, J. I. C. (2019). Os contributos de uma *Gallery Walk* para promover a comunicação matemática, *Educação e Matemática*, *153*, 11-16.

Hakim, M. A. R., Anggraini, N., & Saputra, A. (2019). Gallery Walk technique in improving students' speaking skill. *Journal of Linguistic and English Teaching (Script Journal)*, *4*(1), 26-37. https://doi.org/10.24903/sj.v4i1.251

Kieft, M., Rijlaarsdam, G., & van den Bergh, H. (2006). Writing as a learning tool: Testing the role of students' writing strategies. *European Journal of Psychology of Education*, *21*, 17-34. https://doi.org/10.1007/BF03173567

Kong, Y. (2021). The role of experiential learning on students' motivation and classroom engagement. *Frontiers in Psychology*, *12*, 771272. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.771272

Martinho, M. H. (2017). Dificuldades na escrita matemática: Estudo realizado com alunos de Licenciatura em Educação Básica. *Atas do VIII CIBEM - Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 299-307). FESPM. http://hdl.handle.net/1822/55421.

Martins, G. D. O., Gomes, C. A. S., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilo, J. L. A., Silva, L. M. U., Encarnação, M. M. G. A., Horta, M. J. V. C., Calçada, M. J. C. S., Nery, R. F. V., & Rodrigues, S. M. C. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Possamai, J. P., & Silva, V. C. (2020). Comunicação Matemática na Resolução de Problemas. *Revista de Educação em Matemática*, *17*, e020026. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id277

Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, *93*, 223-231.

Resende, R. (2016). Técnica de investigação qualitativa: ETCI. *Journal of Sport Pedagogy & Research*, *2*(1), 50-57.

Santos, C., & Barbosa, A. (2023). The impact of written feedback in geometry problem solving through a Gallery Walk. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, *11*(5), 1131-1153. https://doi.org/10.46328/ijemst.2891

Vale, I., & Barbosa, A. (2018a). O contributo da uma Gallery Walk para promover a comunicação matemática. *Educação & Matemática*, *149-150*, 2-8.

Vale, I., & Barbosa, A. (2018b). Gallery Walk uma estratégia para resolver problemas e promover discussões matemáticas produtivas. In Lopes, R., Pires, M., Castanheira, L., & Silva, E. (Orgs.) *III Encontro internacional de Formação na Docência (INCTE): Livro de atas* (pp. 483-490). Bragança. ISBN 978-972-745-241-5.

Vale, I., & Barbosa, A. (2020). Gallery Walk: Uma estratégia ativa para resolver problemas com múltiplas soluções. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 17*, 1-19

CORREIO MATEMÁTICO: FEEDBACK E A PARTILHA DE CARTAS COMO PROMOTORES DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA ESCRITA

MATHEMATICAL MAIL: FEEDBACK AND LETTER SHARING AS PROMOTERS OF WRITTEN MATHEMATICAL COMMUNICATION

Ana Sofia Gonçalves

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal

ana.sofia50@hotmail.com

Louise Lima

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal

louise.lima@fc.up.pt

Resumo: Transmitir ideias matemáticas para outros pode representar um desafio para os alunos, nomeadamente quando se trata de comunicar o seu raciocínio por escrito. Assim, o presente estudo centra-se na comunicação matemática escrita e na avaliação entre pares, através do *feedback*, com o objetivo de compreender de que modo o *feedback* através da troca de cartas contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita. Teve por base uma intervenção pedagógica com duas turmas do oitavo ano, envolvendo a resolução de quatro desafios matemáticos e a escrita/receção de quatro *feedbacks* correspondentes. Cada um destes momentos envolveu a escrita da resolução do desafio na forma de carta e a escrita do *feedback* a uma carta de um colega de outra turma. Numa abordagem qualitativa e interpretativa, os dados recolhidos incluíram as produções escritas dos alunos (cartas com as resoluções, *feedbacks* e as segundas fases das cartas), as respostas a um questionário e entrevistas a alguns alunos. A análise dos dados permitiu concluir que as principais dificuldades sentidas pelos alunos se relacionavam com a interpretação, a ausência de explicação e a falta de organização e clareza. Ademais, a maioria dos alunos afirmou, no questionário, ter sentido uma evolução no modo como justificam as suas respostas e comunicam o seu pensamento, a partir do Correio Matemático. Os resultados evidenciam a importância de proporcionar aos alunos atividades que desenvolvam a comunicação, o pensamento crítico e a autorregulação, destacando a avaliação entre pares como um impulsionador dessas capacidades.

Palavras-chave: comunicação matemática escrita, avaliação pedagógica, *feedback*, avaliação entre pares.

Abstract: Expressing mathematical ideas to others can translate as a challenge for students, namely when it comes to communicate their thinking in writing. Therefore, this study focuses on written mathematical communication and peer assessment through feedback, aiming to understand how peer feedback through the exchange of letters contributes to the development of written mathematical communication. It is based on a pedagogical intervention with two 8^{th} grade classes, involving the resolution of four mathematical challenges and the writing/receiving of four corresponding feedbacks. Each of these moments involved writing the resolution to the challenge in a letter format and writing feedback on a letter from a peer in another class. Using a qualitative and interpretative approach, the collected data included students' written work (letter with the resolutions, feedbacks and second phases of the letters), responses to a final questionnaire, and interviews with some students. Data analysis concluded that the greatest difficulties experienced by students were related to interpretation, lack of explanation, and lack of organization and clarity. Furthermore, the majority of students reported in the questionnaire experiencing an improvement in how they justify their answers and communicate their thinking, stemming from the Mathematical Mail. The results highlight the importance of providing students with activities that develop communication, critical thinking, and self-regulation, emphasizing peer assessment as a driver of these capabilities.

Keywords: written mathematical communication, pedagogical assessment, feedback, peer assessment.

Introdução

Embora os alunos, desde o ensino básico ao secundário, dominem a comunicação nas redes sociais e aplicações móveis, a comunicação específica de uma disciplina pode constituir-se um desafio. Na disciplina de Matemática, é esperado que os alunos desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente, o que "requer a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos, o que potencia a compreensão matemática e proporciona oportunidade para o uso progressivo da linguagem matemática como estratégia de comunicar com maior precisão" (Canavarro et al., 2021, p. 3).

Quando refletimos sobre a nossa experiência escolar, é comum recordarmo-nos de escrever em Português e História, mas raramente em Matemática. Contudo, a comunicação escrita tem sido cada vez mais valorizada na educação matemática, como enfatizado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM): "a comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática. É uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática. Através da comunicação, as ideias tornam-se objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção" (NCTM, 2017, p. 66). Porém, muitos alunos enfrentam obstáculos em explicar por escrito como resolveram um determinado problema, mesmo que consigam resolvê-lo sem dificuldade. No contexto da Prática de Ensino Supervisionada da primeira autora, observou-se que os alunos embora conseguissem explicar oralmente as suas respostas, resistiam a fazê-lo por escrito. Esse aspeto motivou-a a intervir, com o objetivo de que fossem capazes de explicar os processos que usavam, indo além de obter respostas corretas de forma mecânica e acrítica.

Neste sentido, fruto da intervenção pedagógica que teve incidência na capacidade transversal comunicação matemática, surgiu o Correio Matemático, que consistiu na partilha de cartas entre duas turmas do 8.º ano, pretendendo que os alunos tivessem a oportunidade de aprimorar a sua comunicação escrita e associando também a avaliação formativa através do *feedback* escrito entre pares. Deste modo, o conjunto de questões e objetivos que guiaram este trabalho, estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Questões e objetivos do estudo

Questão	Questões norteadoras	Objetivos específicos	Objetivo
Quais os contributos do feedback entre pares através da troca de cartas para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita?	Quais as principais dificuldades dos alunos na passagem do seu pensamento para a forma escrita?	Identificar as principais dificuldades dos alunos na comunicação escrita do seu pensamento	Compreender de que modo o *feedback* através da troca de cartas contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita
		Compreender como concretizam de forma escrita o que pensam e o que verbalizam	
	Quais as principais caraterísticas do *feedback* fornecido pelos alunos?	Identificar as principais caraterísticas ou tipo de *feedback* escrito pelos alunos	
	De que modo o *feedback* entre pares influencia a evolução da comunicação matemática escrita dos alunos?	Analisar a influência do *feedback* na reflexão crítica sobre as suas próprias produções	
		Compreender as perceções dos alunos sobre a utilidade do *feedback* entre pares	

Fonte: Gonçalves (2024, p. 2)

Enquadramento teórico

Comunicação matemática escrita

A importância da comunicação no desenvolvimento humano é incontestável uma vez que é a partir dela que estabelecemos conexões e relações sociais, partilhando também conhecimentos e ideias. No contexto educativo, a comunicação que ocorre na sala de aula influencia forçosamente o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, sendo por isso um tema valorizado na formação de professores (Ponte et al., 2007). Deste modo, a comunicação matemática é não só entendida como um conteúdo de aprendizagem, mas como um conteúdo de orientação metodológica (Serrazina, 2008). Neste sentido, como referem Ponte et al. (2007), "o aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos" (p. 8).

A comunicação matemática escrita reveste-se de especial importância uma vez que fornece aos alunos um registo do seu próprio pensamento, possibilitando a reflexão acerca do trabalho realizado e a interiorização dos conceitos matemáticos (NCTM, 2017). De acordo com Serrazina (2008) é possível trabalhá-la quando se solicita a realização de registos escritos referentes à realização de uma dada tarefa ou à elaboração de pequenos textos sobre determinados assuntos matemáticos. Contudo, os alunos revelam frequentemente dificuldades na escrita matemática e as suas produções escritas tendem a ser muito limitadas, reduzindo-se por vezes à simples realização de cálculos necessários para obter a resposta correta dos exercícios e problemas (Ponte & Serrazina, 2000). Daí ser essencial que os professores incentivem os alunos a escrever não só as suas respostas, mas explicarem o pensamento utilizado, apresentando as conclusões de forma clara e utilizando a linguagem matemática. Tal como falar bem exige prática, escrever bem no contexto da matemática, requer uma prática contínua e, portanto, a orientação do professor é fundamental, especialmente porque, segundo Martinho e Rocha (2018):

> o insucesso na explicitação de raciocínios não resulta da falta de conhecimento matemático, mas sobretudo da incapacidade de o verbalizar: dificuldades na conversão do pensamento em palavras, em saber como escrever, e na forma de apresentar a frase e encadear as ideias. (p. 34)

A escrita pressupõe a reflexão e organização das ideias, levando os alunos a constatar as suas próprias dificuldades e, simultaneamente, consolidarem os seus conhecimentos (Goma et al., 2020). Desta forma "os alunos escreverem para aprender e aprendem ao escreverem matemática" (Martinho & Rocha, 2018, p. 34).

Assim como a comunicação matemática escrita permite aos alunos refletirem e consolidarem os seus conhecimentos, a avaliação pedagógica, particularmente através do *feedback*, oferece uma oportunidade para orientar e melhorar essas aprendizagens.

Feedback: uma prática promotora da avaliação formativa

A avaliação pedagógica é uma componente essencial do processo de ensino-aprendizagem-avaliação (Lima & Cosme, 2018), sendo frequente no contexto educativo classificá-la em dois tipos principais: sumativa e formativa (Santos, 2018). A avaliação formativa tem como principal foco a intenção de melhorar o processo de ensino e aprendizagem, informando "sobre o que e como os alunos estão a aprender" (Fialho, 2022, p. 8), centrando-se nas aprendizagens do aluno. Por esse motivo, diversos autores substituem a expressão *avaliação formativa* por *avaliação para as aprendizagens* (Santos, 2017). Neste sentido, o erro é valorizado como um elemento essencial para a aprendizagem e considerado como um passo crucial para a construção do saber, permitindo identificar dificuldades específicas e procurar as melhores estratégias para as superar (Santos, 2008). Ao analisarmos o documento das *Aprendizagens Essenciais*, facilmente nos apercebemos da relevância dada ao papel da avaliação formativa no apoio às aprendizagens dos alunos: "uma prática de avaliação formativa continuada contribui de forma muito expressiva para as aprendizagens dos alunos, pelo que é imperioso o seu desenvolvimento na sala de aula de Matemática" (Canavarro et al., 2021, p. 7).

A avaliação pedagógica pode concretizar-se na sala de aula através de várias modalidades, sendo o *feedback* escrito uma das formas de operacionalizar a avaliação reguladora das aprendizagens (Dias & Santos, 2008). Hattie e Timperley (2007) consideram que a sua principal finalidade é reduzir o hiato entre os objetivos de aprendizagem e o desempenho dos alunos e argumentam que o *feedback* pode ter como foco: i) a tarefa realizada pelo aluno, que avalia a correção da tarefa, podendo incluir orientações; ii) os processos, estando mais orientado para o processamento de informações que exijam a compreensão da tarefa, podendo assim ajudar a realizar ou melhorar o desempenho na tarefa; iii) a autorregulação, dirigindo-se à capacidade de autoavaliação do aluno, permitindo um maior envolvimento e, concomitantemente, promovendo a reflexão sobre o trabalho realizado; ou iv) o próprio aluno, o *self*, incidindo mais sobre o indivíduo do que sobre a tarefa, ocorrendo geralmente sob a forma de elogios e por esse motivo é amplamente considerado como o menos efetivo na melhoria de aprendizagem.

Em síntese, a escrita avaliativa faz parte de um processo de regulação apenas quando utilizada para melhorar as aprendizagens dos alunos, sendo crucial criar oportunidades na aula de Matemática que enfatizem a comunicação matemática escrita e as práticas de *feedback*, tornando-as significativas para os alunos. A troca de correspondência por carta emerge como uma estratégia que proporciona a interação genuína e efetiva na comunicação (Crespo, 2003). Como não se trata de uma comunicação imediata, há a necessidade de ter um maior cuidado na explicação do pensamento, e consequentemente, uma produção escrita de melhor qualidade (Barbosa & Vale, 2019).

Embora exista uma vasta literatura sobre *feedback* e o seu papel na avaliação formativa, no que se refere ao *feedback* entre pares o mesmo não acontece. A maioria das pesquisas centra-se nos benefícios para quem recebe o *feedback*, negligenciando o impacto positivo para quem o fornece (Kollar & Fisher, 2010). O *feedback* entre pares é uma forma especializada de *feedback* que é fornecido por alunos no mesmo estatuto/nível, podendo ser visto como uma forma de avaliação formativa e um elemento importante da aprendizagem colaborativa (Gielen et al., 2010). Sob a perspetiva da avaliação formativa, diferencia-se de um *feedback* dado pelo docente na medida em que os colegas do aluno não são especialistas na área e, como consequência, os comentários trocados podem variar desde corretos a incorretos, o que resulta numa maior relutância em aceitar o conselho de um colega, evidenciando-se como uma desvantagem (Gielen et al., 2010). No entanto, receber *feedback* de um colega pode ser mais facilmente compreendido, já que a linguagem utilizada pelos alunos entre si é geralmente mais familiar do que aquela utilizada pelo professor (González et al., 2023). A coavaliação, isto é, a avaliação entre pares proporciona assim situações potenciadoras de um impacto significativo nas aprendizagens dos alunos e no desenvolvimento da sua responsabilidade e autonomia (Santos, 2002).

Contexto e descrição da intervenção pedagógica

Este estudo foi desenvolvido numa escola pública que integra o programa Territórios Educativos de Intervenção Prioritária, no Porto, com um total de 32 alunos de duas turmas do oitavo ano de escolaridade, cada uma constituída por 16 alunos com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos. Para as distinguir, iremos utilizar as denominações turma 1 e turma 2. A turma 1 é constituída por dez alunos do sexo feminino e seis do sexo masculino, já a turma 2 é formada por nove alunos do sexo feminino e sete do sexo masculino. Na turma 1, os alunos demonstravam poucos hábitos de trabalho, pouco envolvimento e interesse, sendo que alguns alunos manifestavam por vezes uma postura e comportamento desadequados aos objetivos da aula. Em contrapartida, a turma 2 caraterizava-se pelo seu envolvimento e bom aproveitamento das aulas, existindo uma atitude competitiva entre alguns alunos que queriam sempre ser os melhores e mais participativos.

Nas primeiras aulas, apercebemo-nos da enorme resistência que os alunos exibiam quando lhes era pedido que explicassem a sua forma de pensar por escrito, o que nos motivou a intervir neste sentido. Assim surge o Correio Matemático (Figura 1), no qual através da partilha de cartas entre as turmas pretendíamos que fosse criada a oportunidade de os alunos aprimorarem a sua comunicação matemática escrita, interagindo com colegas e associando uma segunda vertente, a escrita de *feedback*.

Figura 1. Caixa do Correio Matemático.

A ideia base era propor aos alunos a resolução de quatro desafios matemáticos e a escrita/receção de quatro *feedbacks* correspondentes. Cada um destes quatro momentos envolviam a escrita da resolução do desafio na forma de carta e, posteriormente, a escrita do *feedback* a uma carta. Isto é, a cada aluno foi atribuído um amigo matemático de outra turma ao qual escreviam a carta, sendo que essa carta seria colocada na caixa do correio matemático e distribuída por mim ao destinatário. De seguida, esse amigo matemático escrevia o *feedback* à resolução que recebia, colocava-o no envelope e a mesma era novamente entregue ao seu autor. Desta forma, cada aluno resolvia o desafio, escrevia um *feedback* à resolução de um colega e recebia também um *feedback* à sua resolução (Figura 2). Posteriormente, os alunos tinham a oportunidade de realizar uma segunda fase do desafio, usufruindo do *feedback* recebido para que pudessem melhorar a sua primeira resolução. A seleção dos desafios fundamentou-se sempre no tópico matemático abordado nas aulas na altura da realização da tarefa. O primeiro desafio realizou-se em janeiro de 2024 e o último em maio de 2024.

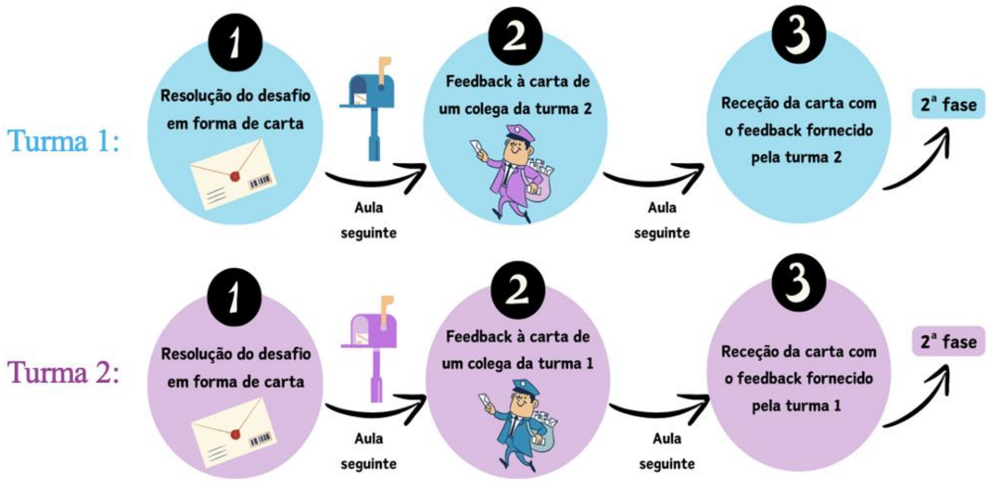


Figura 2. Etapas do Correio Matemático.

Quanto à escolha dos pares para a troca de *feedback*, procurámos variá-los em cada desafio, permitindo que os alunos tivessem contacto com diferentes formas de resolução e pudessem maximizar a aprendizagem, por exemplo, um aluno que apresentava uma resolução completa fornecer *feedback* a um colega que não apresentou justificações.

Relativamente ao material utilizado, em cada desafio, a cada aluno foi distribuído uma folha com o enunciado, uma folha de resposta para a carta, um envelope, um carimbo do Correio Matemático e um selo matemático. Este último era diferente para cada aluno, e retratava uma figura célebre da Matemática, com o intuito de despertar a curiosidade relativamente às suas descobertas e, em especial, à disciplina (Figura 3).

Figura 3. Esquema do aspeto final do envelope.

Metodologia

Este estudo seguiu uma metodologia de natureza qualitativa e caráter interpretativo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008), visando compreender de que modo o *feedback* entre pares contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita através da troca de cartas. A abordagem qualitativa tem uma dimensão naturalista uma vez que "o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 17).

A recolha de dados foi realizada em sala de aula e incluiu as cartas escritas pelos alunos com a resolução dos desafios, os *feedbacks* fornecidos pelos colegas, as segundas fases das cartas com a resolução dos desafios após receberem *feedback*, e inquéritos: por questionários e entrevistas. Para analisar os dados foram identificadas as principais dificuldades dos alunos ao nível da comunicação matemática escrita e as caraterísticas do *feedback* fornecido, com base na classificação dos autores Hattie e Timperley (2007). Selecionaram-se os 1.º e 3.º desafios, cujas resoluções se mostraram mais ilustrativas dos objetivos do estudo e do desempenho global das turmas. O questionário anónimo aplicado no final da intervenção pedagógica e as entrevistas, realizadas com sete alunos e posteriormente transcritas, tiveram como objetivo compreender as perceções dos alunos sobre o *feedback* entre pares e analisar a sua perspetiva relativamente à evolução da sua comunicação matemática escrita. Por fim, destacamos que as produções escritas dos alunos foram identificadas por um código numérico de três dígitos, assegurando maior confidencialidade sem associação a nomes.

Apresentação de resultados relativos aos 1.º e 3.º desafios

Nesta secção, iremos apresentar alguns resultados obtidos através da análise dos dados recolhidos ao longo da intervenção pedagógica. Nesta comunicação, centrar-nos-emos exclusivamente no 1.º e no 3.º Desafios do Correio Matemático, destacando algumas resoluções, bem como os respetivos *feedbacks*.

Primeiro desafio do Correio Matemático

Para o primeiro desafio[28], optámos por uma tarefa que permitisse abordar os conteúdos das aulas naquele momento, neste caso as equações (Figura 4).

Figura 4. Enunciado do 1.º Desafio do Correio Matemático

Após analisar as cartas, verificámos assimetrias entre as realidades das duas turmas. Embora vários alunos não tenham conseguido obter a resposta correta ao problema, na turma 1 essa situação foi mais evidente (Tabela 2).

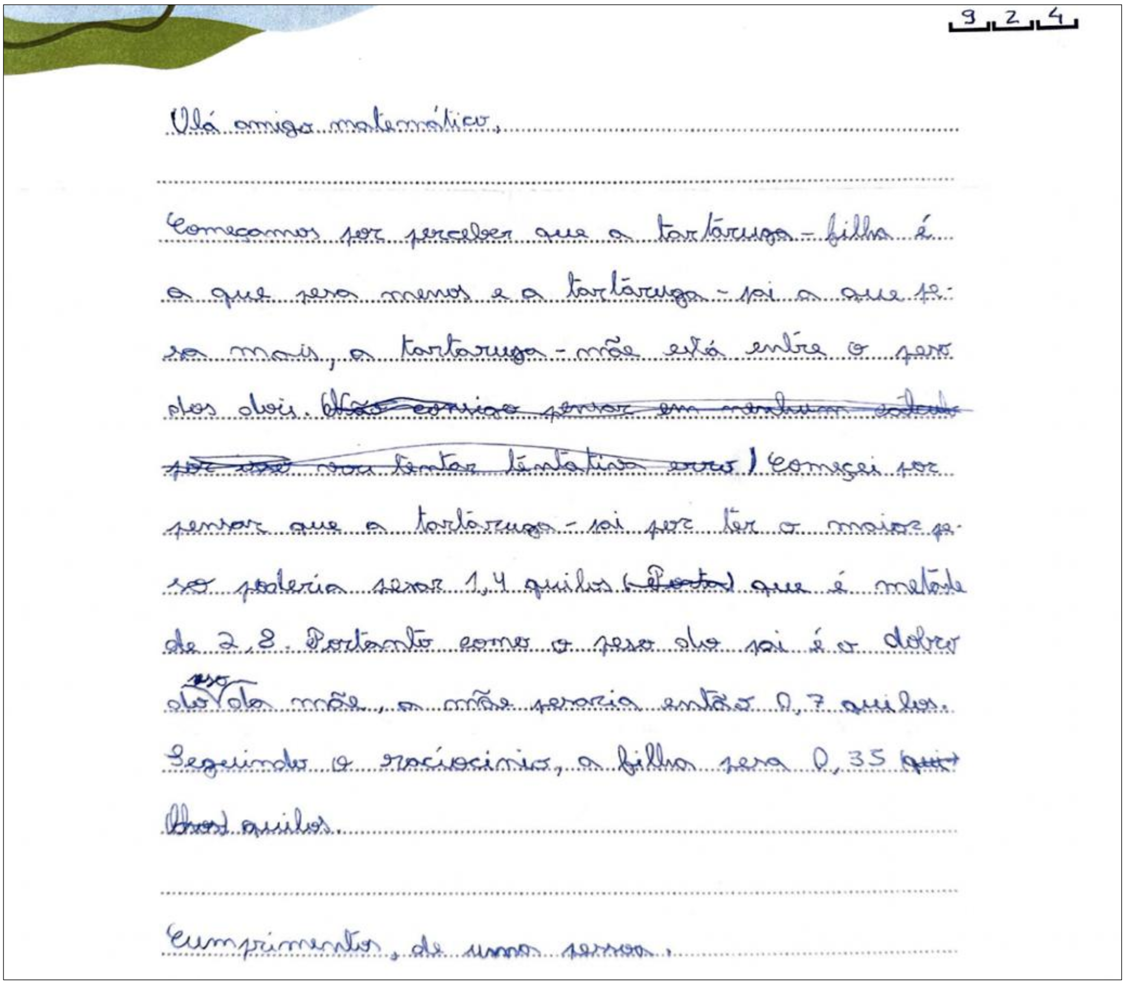
Tabela 2. Número de respostas corretas e incorretas de cada turma ao 1.º Desafio

	Resposta correta	Resposta incorreta
Turma 1	1	12
Turma 2	11	5

No que diz respeito às respostas incorretas, constatámos que os alunos ainda não eram capazes de retirar do enunciado um dado essencial: que a soma do peso das três tartarugas era 2,8 quilos, demonstrando assim dificuldades na interpretação dos resultados obtidos.

A resolução da Figura 5 reflete um exemplo disso uma vez que o aluno não teve em conta que os três pesos que obteve não somam 2,8 quilos. Apesar desse erro, o aluno reescreveu a informação da tarefa com as suas próprias palavras (Figura 5). Entretanto, o *feedback* produzido para esta resolução (Figura 6) forneceu pistas para que o aluno a pudesse melhorar.

[28] Adaptado de Agrupamento de Escolas Pedro Eanes Lobato, *Problema do Mês 2014-15*. https://www.agrupamentopedroeaneslobato.pt/out14.html

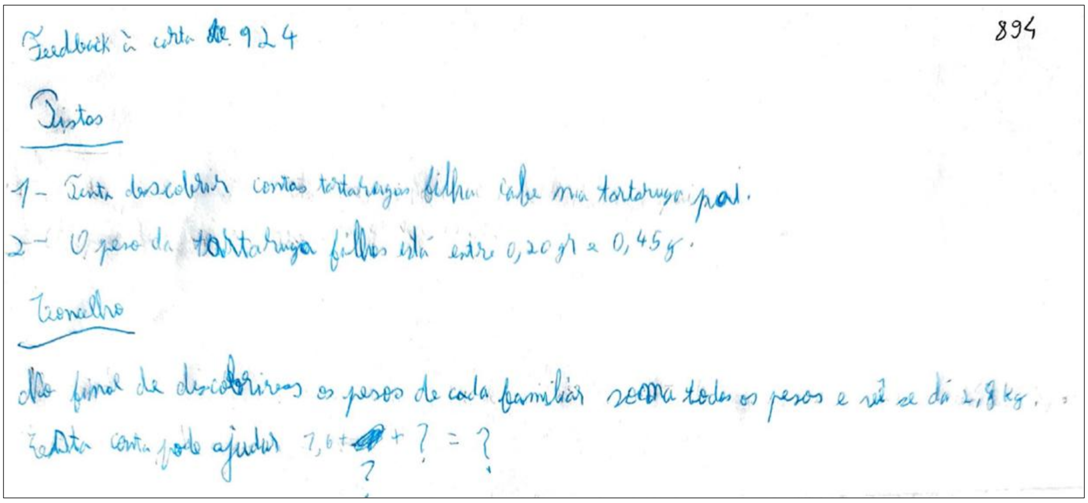

924

Olá amigo matemático,

Começamos por perceber que a tartaruga-filha é a que pesa menos e a tartaruga-pai a que pesa mais, a tartaruga-mãe está entre o peso dos dois. ~~Não consigo pensar em nenhum cálculo por isso vou tentar tentativa erro~~) Comecei por pensar que a tartaruga-pai por ter o maior peso poderia pesar 1,4 quilos (~~Porta~~) que é metade de 2,8. Portanto como o peso do pai é o dobro do peso da mãe, a mãe pesaria então 0,7 quilos. Seguindo o raciocínio, a filha pesa 0,35 ~~quil~~ ~~(?)~~ quilos.

Cumprimentos, de uma pessoa.

Figura 5. Carta do aluno 924 ao 1.º Desafio (1.ª fase)


Feedback à carta de 924 894

Pistas

1- Tenta descobrir contas tartarugas filhas cabe na tartaruga pai.

2- O peso da tartaruga filha está entre 0,20 g e 0,45 g.

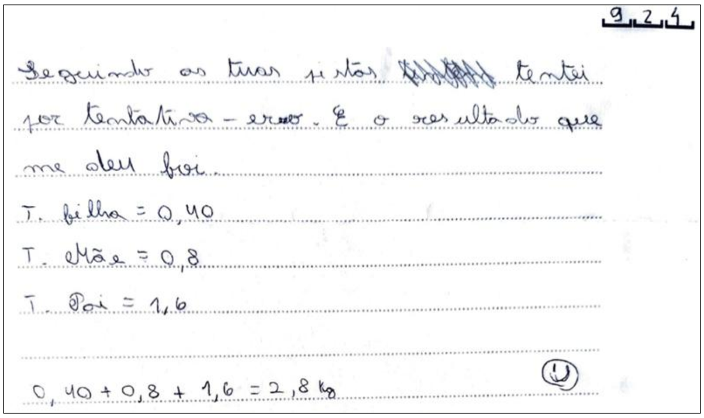
Conselho

No final de descobrires os pesos de cada família soma todos os pesos e vê se dá 2,8 kg.

Esta conta pode ajudar 7,6 + ? + ? = ?

Figura 6. *Feedback* à carta 924 do 1.º Desafio, pelo aluno 894

É de realçar que o autor deste *feedback* foi dos poucos alunos a resolver o problema usando uma equação, portanto na pista fornecida ao colega incentiva-o indiretamente a usar a mesma estratégia. Contudo, ao indicar o peso de uma das tartarugas, concede demasiada informação, levando o colega a apenas verificar quais poderiam ser o peso das outras duas tartarugas, sem explorar estratégias alternativas. De qualquer das formas, o aluno refaz o desafio seguindo as pistas e alcança a resposta correta numa segunda fase (Figura 7).


924

Seguindo as tuas pistas tentei por tentativa - erro. E o resultado que me deu foi.

T. filha = 0,40

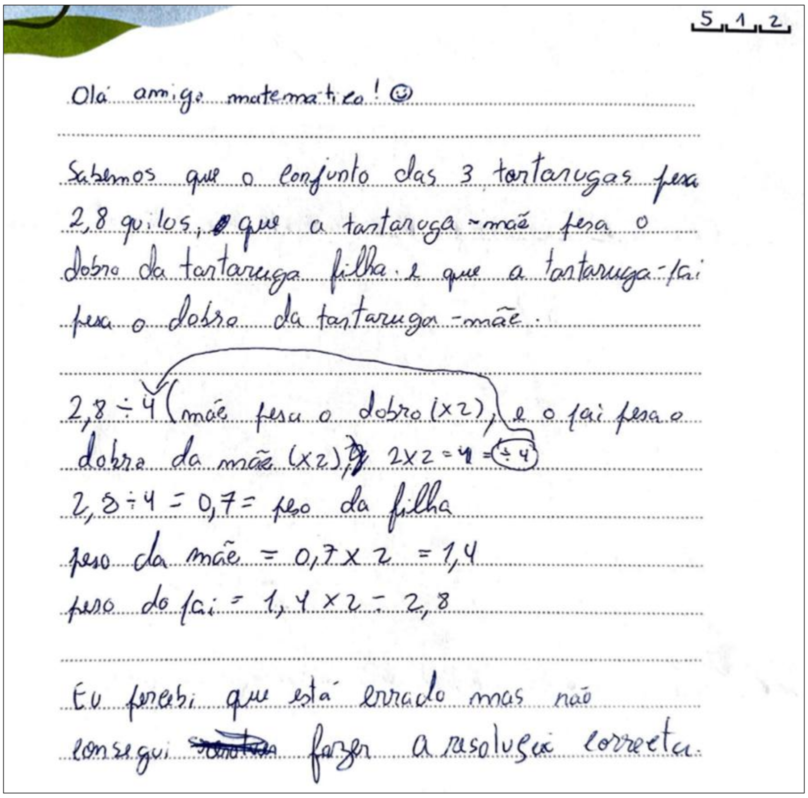
T. Mãe = 0,8

T. Pai = 1,6

0,40 + 0,8 + 1,6 = 2,8 kg ☺

Figura 7. Carta do aluno 924 ao 1.º Desafio (2.ª fase)

Decidimos também analisar a resolução de um outro aluno (Figura 8), que difere da anterior pelo facto de se ter apercebido de que a sua resolução não estava correta, mas não ter identificado o seu erro, impedindo-o assim de chegar a uma resposta certa.


512

Olá amigo matemático! ☺

Sabemos que o conjunto das 3 tartarugas pesa 2,8 quilos, que a tartaruga-mãe pesa o dobro da tartaruga filha. e que a tartaruga-pai pesa o dobro da tartaruga-mãe.

2,8 ÷ 4 (mãe pesa o dobro (x2), e o pai pesa o dobro da mãe (x2)) 2x2 = 4 = ÷ 4

2,8 ÷ 4 = 0,7 = peso da filha

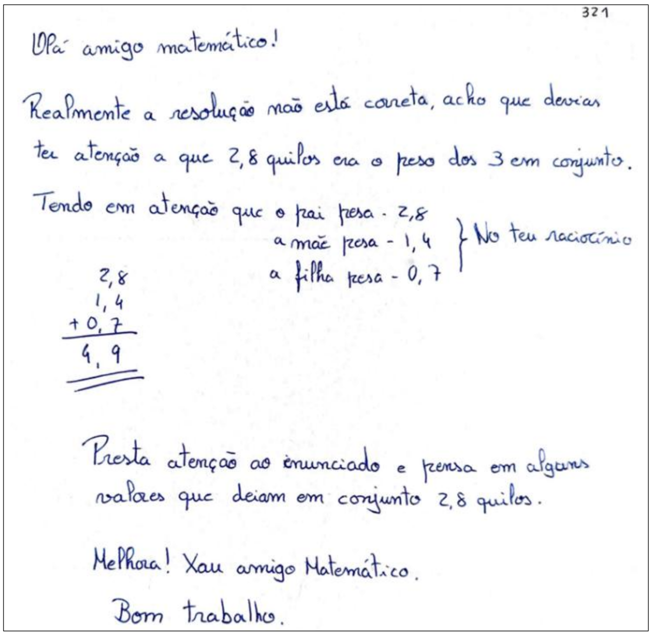
peso da mãe = 0,7 x 2 = 1,4

peso do pai = 1,4 x 2 = 2,8

Eu percebi que está errado mas não consegui fazer a resolução correta.

Figura 8. Carta do aluno 512 ao 1.º Desafio (1.ª fase)

Além disso, o aluno teve o cuidado de indicar o motivo pelo qual dividiu o peso total por 4, porém divide o peso total de 2,8 quilos não tendo em conta o peso da tartaruga-mãe (dobro da tartaruga-filha) e o da própria tartaruga-filha. O *feedback* que recebeu (Figura 9) destaca que a soma dos pesos não corresponde à mencionada no enunciado.


321

Olá amigo matemático!

Realmente a resolução não está correta, acho que devias ter atenção a que 2,8 quilos era o peso dos 3 em conjunto.

Tendo em atenção que o pai pesa - 2,8
a mãe pesa - 1,4 } No teu raciocínio
a filha pesa - 0,7

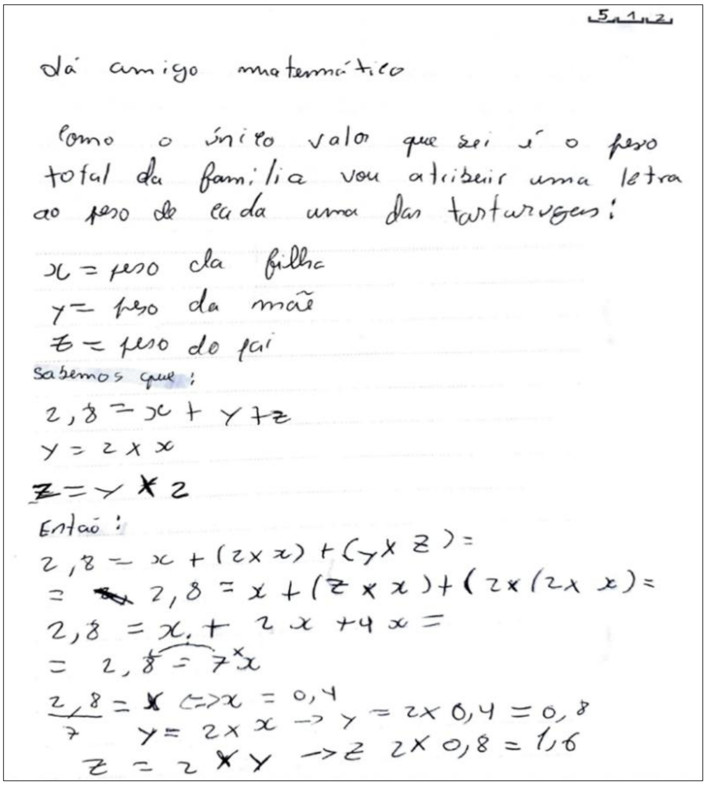
$$\begin{array}{r} 2,8 \\ 1,4 \\ +\,0,7 \\ \hline 4,9 \end{array}$$

Presta atenção ao enunciado e pensa em alguns valores que deiam em conjunto 2,8 quilos.

Melhora! Xau amigo Matemático.
Bom trabalho.

Figura 9. *Feedback* à carta 512 do 1.º Desafio, pelo aluno 321

Deste modo, o erro não foi corrigido diretamente, proporcionando ao aluno a oportunidade de refletir sobre a sua própria resolução. Este tipo de *feedback* permite desenvolver habilidades de resolução de problemas, fomentando a autonomia no próprio processo de aprendizagem. Ao não oferecer imediatamente a resposta correta, o *feedback* incentiva o aluno a rever o seu trabalho, identificando possíveis falhas e explorando novas abordagens de forma autónoma. Face a este comentário, o aluno decidiu alterar a sua estratégia e, numa segunda fase (Figura 10), resolver o desafio recorrendo a equações.


512

Olá amigo matemático

Como o único valor que sei é o peso total da família vou atribuir uma letra ao peso de cada uma das tartarugas:

x = peso da filha
y = peso da mãe
z = peso do pai

Sabemos que:

2,8 = x + y + z
y = 2 × x
z = y × 2

Então:

2,8 = x + (2 × x) + (y × z) =
= 2,8 = x + (z × x) + (2 × (2 × x) =
2,8 = x + 2x + 4x =
= 2,8 = 7x
2,8 / 7 = x <=> x = 0,4
y = 2 × x -> y = 2 × 0,4 = 0,8
z = 2 × y -> z 2 × 0,8 = 1,6

Figura 10. Carta do aluno 512 ao 1.º Desafio (2.ª fase)

Esta resolução (Figura 10) inclui incorreções no rigor matemático, uma vez que o aluno expõe uma sequência de igualdades em vez de usar o símbolo de equivalência para exprimir que as afirmações são logicamente equivalentes. Apesar disso, o aluno teve o cuidado de explicar as designações que utiliza, indicando o que cada letra denota. Ademais, interpretou as informações do enunciado e traduziu-as por meio de uma equação, obtendo a resposta correta.

De seguida, apresentamos a situação de um outro aluno que ilustra um caso distinto (Figura 11), representando aqueles cuja principal dificuldade não estava na resolução da tarefa, mas na organização dos seus processos. O aluno adotou uma estratégia adequada para abordar a questão, atribuindo à tartaruga-filha a incógnita x. Todavia, a forma como dispõe os cálculos e as informações na carta é confusa e desorganizada, dificultando a compreensão e o acompanhamento do seu pensamento. Este caso destaca a importância não apenas de entender e aplicar corretamente os conceitos matemáticos, mas também de desenvolver a comunicação escrita, de forma a transmitir as ideias de forma clara e ordenada.

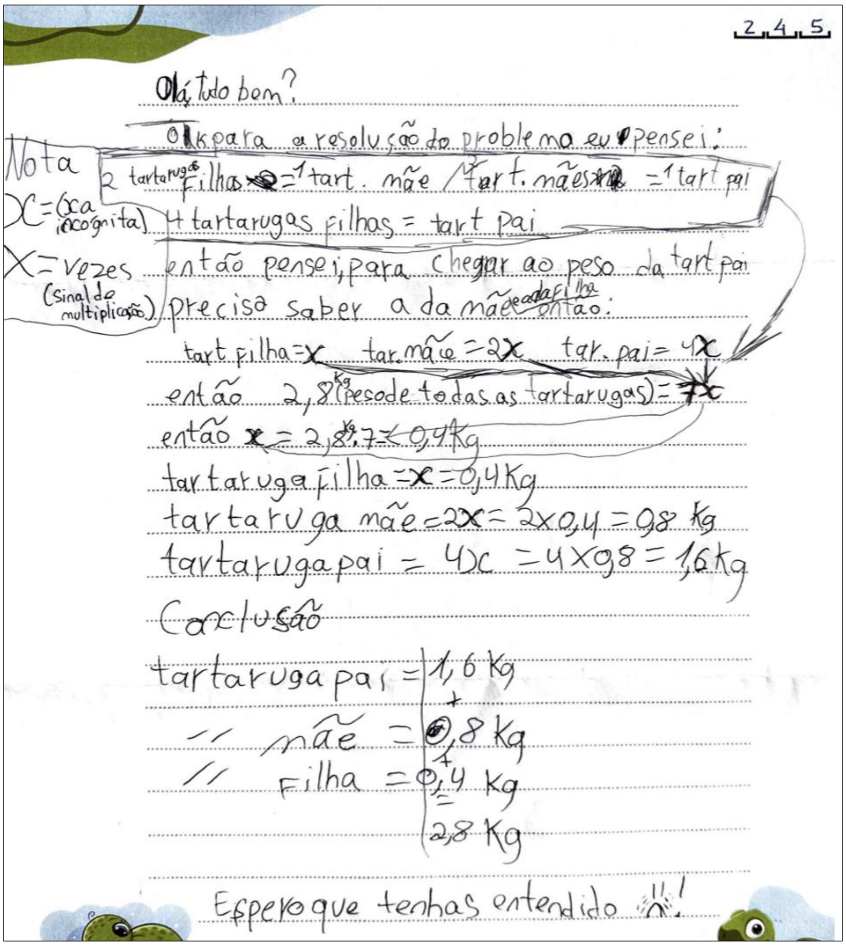
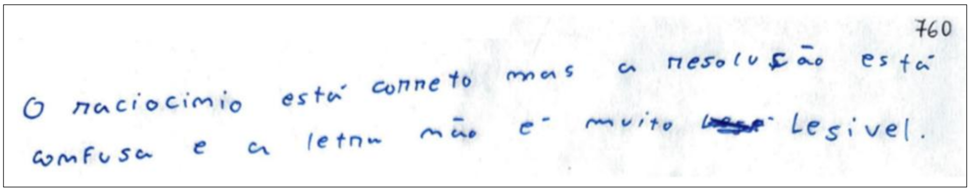

245
Olá, tudo bem?
Ok para a resolução do problema eu pensei:
Nota
2 tartarugas filhas = 1 tart. mãe / 1 tart. mãe = 1 tart pai
x = (x a incógnita)
4 tartarugas filhas = tart pai
× = vezes (sinal de multiplicação)
então pensei, para chegar ao peso da tart pai preciso saber a da mãe e da filha então:
tart filha = x   tar. mãe = 2x   tar. pai = 4x
então 2,8 kg (peso de todas as tartarugas) = 7x
então x = 2,8 : 7 = 0,4 kg
tartaruga filha = x = 0,4 kg
tartaruga mãe = 2x = 2×0,4 = 0,8 kg
tartaruga pai = 4x = 4×0,8 = 1,6 kg
Conclusão
tartaruga pai = 1,6 kg
// mãe = 0,8 kg
// filha = 0,4 kg
2,8 kg
Espero que tenhas entendido!

Figura 11. Carta do aluno 245 ao 1º Desafio (1ª fase)

O *feedback* recebido (Figura 12) destacou assim a necessidade de uma melhor organização e maior clareza, descrevendo a resolução como *confusa*, o que compromete a compreensão da resolução. Por outro lado, salienta um aspeto positivo ao afirmar que o *raciocínio está correto*, demonstrando um foco no processo. No entanto, esse comentário inclui também elementos baseados em juízos de valor, não oferecendo qualquer sugestão de melhoria.

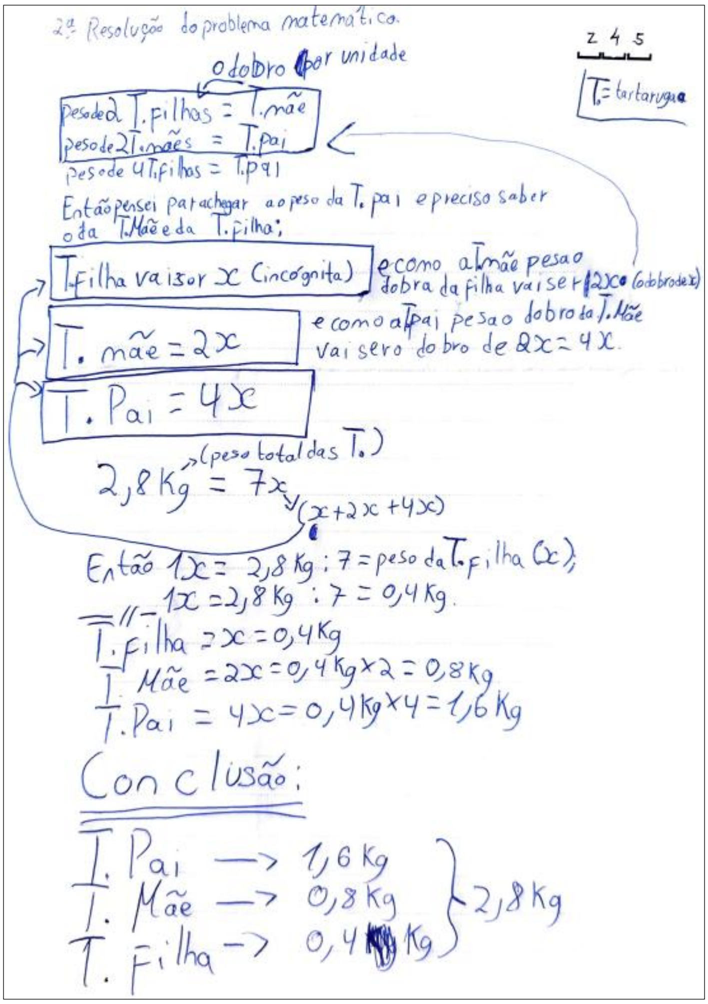


760

O naciocimio está conneto mas a nesolução está confusa e a letna não é muito ~~lesg~~ lesivel.

Figura 12. *Feedback* à carta 245 do 1.º Desafio, pelo aluno 760

Após ter refletido sobre o comentário recebido, o aluno decidiu melhorar a sua resolução numa segunda fase (Figura 13).



2.ª Resolução do problema matemático.

245

T. = tartaruga

o dobro por unidade

pesode2 T.filhas = T.mãe
pesode2 T.mães = T.pai
pesode 4 T.filhas = T.pai

Então pensei para chegar ao peso da T. pai e preciso saber o da T.Mãe e da T.filha;

T.filha vai ser x (incógnita) e como a T.mãe pesa o dobra da filha vai ser $2x$ (o dobro de x)

T. mãe $= 2x$ e como a T.pai pesa o dobro da T.Mãe vai ser o dobro de $2x = 4x$.

T. Pai $= 4x$

(peso total das T.)

$2{,}8$ Kg $= 7x$ $(x+2x+4x)$

Então $1x = 2{,}8$ Kg $: 7 =$ peso da T.filha (x);

$1x = 2{,}8$ Kg $: 7 = 0{,}4$ Kg.

T.filha $= x = 0{,}4$ Kg

T. Mãe $= 2x = 0{,}4$ Kg $\times 2 = 0{,}8$ Kg

T.Pai $= 4x = 0{,}4$ Kg $\times 4 = 1{,}6$ Kg

Conclusão:

T. Pai → $1{,}6$ Kg
T. Mãe → $0{,}8$ Kg
T. Filha → $0{,}4$ Kg

$2{,}8$ Kg

Figura 13. Carta do aluno 245 ao 1.º Desafio (2.ª fase)

Posteriormente, para compreender a reação do aluno ao *feedback* recebido, decidimos entrevistá-lo.

Professora: Consideras importante ter tido a oportunidade de melhorar a tua primeira resolução?

Aluno 245: Sim, a única coisa que eu não gostei foi melhorar a letra.

Professora: Ah, os comentários que recebeste?

Aluno 245: Sim, porque algumas pessoas não tinham muito bem o que dizer sobre a resolução, porque estava uma boa resolução, na minha opinião obviamente. E eles achavam que era a letra e isso é meio mau para mim, porque o que eu queria fazer era

	evoluir a minha forma de pensar, mas também percebo que a caligrafia é importante.
Professora:	Quando dás *feedback* aos teus colegas, consideras importante identificar aquilo que já está bem feito?
Aluno 245:	Acho, porque se não parece que estamos num tom agressivo, só dizer o que está mal, depois não querem fazer, como toda a gente. Se fizermos alguma coisa por nós próprios vamos fazer a coisa de uma forma, mas se formos mandados, já sai uma forma não tão boa e acho que é um bocadinho assim, se nós começarmos a elogiar o que eles fizeram melhor, temos uma maior produtividade deles e também uma maior concentração no problema.

A entrevista revelou assim que o aluno valoriza a oportunidade de melhorar a sua resolução; no entanto, expressa descontentamento com o *feedback* focado na sua caligrafia e salienta a importância de fornecer comentários construtivos, que reconheçam os pontos fortes da resolução.

Terceiro desafio do Correio Matemático

O terceiro desafio (Figura 14) foi adaptado de Ponte et al. (2009) e incidiu sobre o tópico Funções e incluiu a representação gráfica de uma função linear traduzindo uma relação de proporcionalidade direta do tipo $y = ax$ $(a > 0)$ e uma função afim não linear do tipo $y = ax + b$.

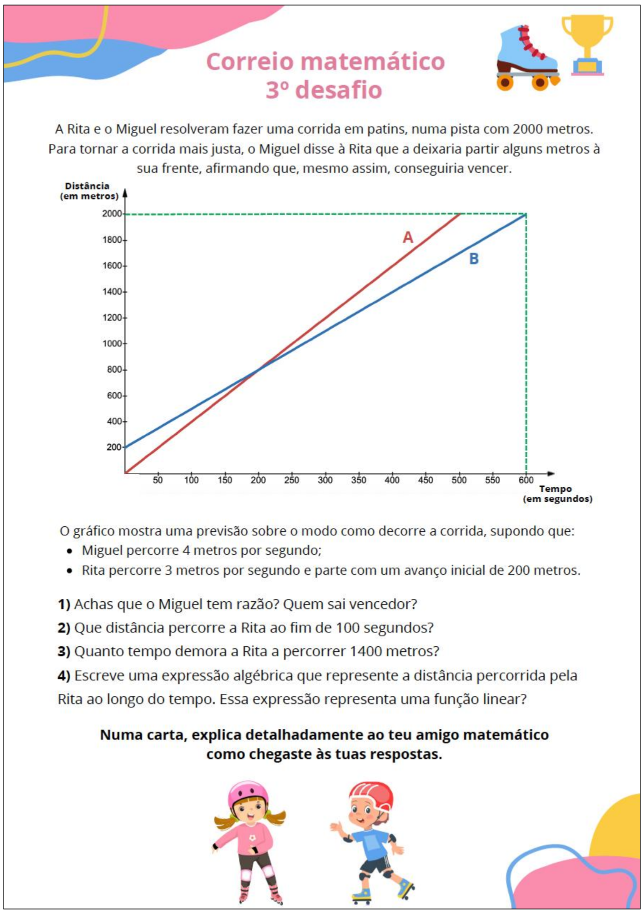
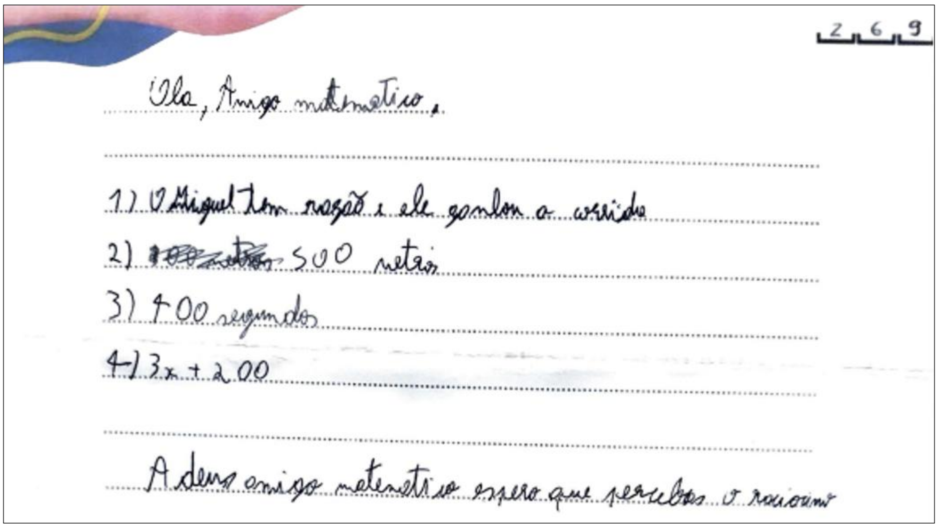


Figura 14. Enunciado do 3.º Desafio do Correio Matemático

Os alunos podiam procurar algumas respostas através da leitura do gráfico, porém não o conseguiam fazer com muita precisão e, portanto, podiam optar por recorrer a uma expressão algébrica, uma tabela ou à tradução matemática das informações.

Na Figura 15 podemos observar uma resolução que apresenta respostas coerentes de acordo com a sua interpretação da tarefa, contudo possui várias lacunas ao nível da justificação e clareza. O aluno limita-se a escrever respostas concisas e diretas, sem evidenciar o processo e raciocínio matemático subjacentes às suas respostas. A ausência de explicação limita a capacidade de o colega seguir a sua forma de pensar e de identificar falhas ou possíveis áreas de melhoria.


269

Ola, Amigo matematico,

1) O Miguel tem razão e ele ganhou a corrida

2) 500 metros

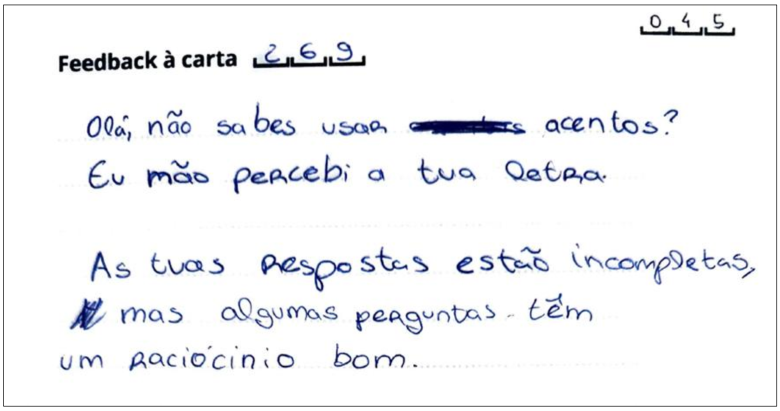
3) 400 segundos

4) 3x + 200

Adeus amigo matematico espero que percebas o raciocinio

Figura 15. Carta do aluno 269 ao 3.º Desafio (1.ª fase)

Diante desta resolução, o amigo matemático da outra turma escreveu o *feedback* ilustrado na Figura 16.


045

Feedback à carta 269

Olá, não sabes usar acentos?
Eu não percebi a tua letra.

As tuas respostas estão incompletas,
mas algumas perguntas têm
um raciocínio bom.

Figura 16. *Feedback* à carta 269 do 3.º Desafio, pelo aluno 045

Este *feedback* foi escrito de uma forma que pode ser interpretada como desmotivadora para quem o recebe. Os primeiros comentários *não sabes usar acentos? Eu não percebi a tua letra* podem ser vistos como julgamentos sobre o aluno e podem provocar sentimentos de frustração, tendo foco na pessoa. Embora tenha identificado um ponto válido relacionado com a legibilidade da letra, o modo como foi expresso não foi cuidadoso e pode ter um impacto negativo. A segunda parte, embora positiva ao reconhecer um bom raciocínio em algumas respostas, sendo focada na produção do aluno, carece de uma orientação construtiva para o aluno melhorar a sua resolução. Além disso, não aborda um aspeto importante: o aluno não refere se a expressão algébrica representa ou não uma função linear.

Esta situação ressalta a importância de termos cuidado com a linguagem utilizada ao comentar as produções escritas de outros, especialmente no contexto educacional. Assim, o *feedback* deve ser construtivo e empático, para que o destinatário entenda claramente o que precisa ser melhorado e se sinta motivado para o fazer. Tal não aconteceu, uma vez que o aluno não entregou uma segunda fase da resolução deste desafio.

Perceções dos alunos acerca do Correio Matemático

Após a realização dos quatro desafios, foi implementado um questionário anónimo recorrendo ao *Google Forms*, composto por questões abertas e fechadas. Os alunos foram inicialmente solicitados a avaliar a experiência do Correio Matemático em termos de satisfação geral. Das 30 respostas obtidas, 12 alunos avaliaram a experiência com o nível 5 – Gostei muito, e 11 com o nível 4 – Gostei.

No que diz respeito à utilidade do *feedback* entre pares, um aspeto crucial avaliado foi a utilidade deste tipo de experiência em comparação com a resolução de uma tarefa sem *feedback*. A maioria considerou o *feedback* entre pares mais útil, sendo que numa das entrevistas, um aluno expressou a seguinte opinião:

> Aluno 245: Eu acho que o *feedback* foi mais útil, porque o *feedback* ajudou muito, porque não é só o nosso ponto de vista sobre aquele problema. Temos outra pessoa que tem outro ponto de vista, outra resolução e que se nós estivermos empancados ou que não estamos a conseguir raciocinar, a outra pessoa pode-nos ajudar, pode conseguir completar o que nos falta para termos um melhor desempenho.

No questionário foi também colocada a questão *A partir da atividade do Correio Matemático, sentes que evoluíste de alguma forma no modo como justificas as tuas respostas e comunicas o teu pensamento?*, sendo para nós a mais importante uma vez que avaliar a evolução dos alunos num período tão breve é bastante complexo. Dos 30 alunos inquiridos, apenas sete referem que não sentiram evolução. A partir das entrevistas pude compreender de forma mais profunda o motivo dessa evolução, ou falta dela.

> Aluno 093: Eu antes era só sim ou não e agora vou pensando de vez em quando e justifico melhor.
> Professora: O que achas que teve mais impacto nisso?
> Aluno 093: A explicação do amigo matemático.

Um outro aluno destacou ainda um outro aspeto, quando questionado sobre se sentia alguma evolução:

> Aluno 045: Sim, mas ao mesmo tempo não. Porque, por exemplo, eu já sabia mais ou menos como fazer, mas também ajudou-me em certas partes que eu não sabia escrever de maneira matemática.

Em suma, o aluno não sentiu evolução na capacidade de resolução de problemas, mas sim em termos de expressar as suas ideias de forma matemática, melhorando assim ao nível da linguagem matemática.

Conclusões

Tendo por base a recolha de dados realizada, apresentamos agora as principais conclusões às três questões estabelecidas inicialmente.

Quais as principais dificuldades dos alunos na passagem do seu pensamento para a forma escrita?

As principais dificuldades encontram-se relacionadas com três aspetos: (i) interpretação; (ii) ausência de explicação; e (iii) falta de organização e clareza. Ao nível da interpretação, os alunos evidenciaram dificuldades relacionadas com dois níveis, a compreensão do enunciado e a atribuição de significado ao próprio resultado obtido. De facto, muitas vezes os alunos seguem corretamente os passos algorítmicos para chegar à solução, contudo não compreendem o que esse resultado realmente representa. Esta situação deixa ainda mais clara a importância de não focar a matemática na resolução mecânica de tarefas pois é fundamental que os alunos desenvolvam a capacidade de contextualizar os seus resultados, promovendo uma compreensão mais profunda e prática dos conceitos matemáticos (NCTM, 2017).

A ausência de explicação, foi desde logo uma das dificuldades sentidas em ambas as turmas. Todavia, vários alunos indicaram terem evoluído neste aspeto, podendo esta evolução estar associada ao facto de terem comentado as resoluções de colegas, sentindo a necessidade de lhes solicitar explicações adicionais e assim compreenderem que para as suas próprias resoluções precisam explicar o seu pensamento de forma mais detalhada.

A falta de organização e clareza foi mais evidente nos alunos que geralmente conseguiam obter a resolução correta, realçando a necessidade de incentivar os alunos a exporem o seu pensamento de forma organizada para que outros a possam acompanhar.

Quais as principais caraterísticas do feedback fornecido pelos alunos?

Os alunos demonstraram que a maior dificuldade em dar *feedback* relacionou-se com a resistência em não corrigir diretamente o erro do colega. Além disso, foi confirmada a ideia defendida por Hattie e Timperley (2007) de que o *feedback* focado na tarefa é o mais comum. Foi também possível constatar que os comentários focados na pessoa foram pouco eficazes e, consequentemente, os alunos que os recebiam não sabiam como alterar as suas respostas (Santos, 2008). Realçamos ainda o cuidado demonstrado por alguns alunos em, mesmo na presença de algumas fragilidades, elogiar aquilo que o colega tinha feito bem, com o intuito de lhes fornecer confiança.

De que modo o feedback entre pares influencia a evolução da comunicação matemática escrita dos alunos?

Ao colocarem-se no lugar do professor, os alunos começam a entender a necessidade de uma comunicação clara do seu pensamento, principalmente ao se depararem com a dificuldade de entender o raciocínio por detrás de uma resolução, levando-os a solicitar uma explicação mais detalhada. Deste modo, percebem igualmente que para as suas próprias resoluções teriam de ser mais claros. Ao explicarem o seu pensamento, os alunos reavaliam e consolidam o seu próprio conhecimento (NCTM, 2017).

Referências

Amado, J. (Ed.) (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

Barbosa, A., & Vale, I. (2019). Tens correio! A comunicação escrita e o feedback na aula de matemática. *Revista Interacções*, *15*(50), 109–123. https://doi.org/10.25755/int.18792

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto Editora.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais da matemática para o ensino básico*. Direção-Geral da Educação (DGE). https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação – Guia para auto-aprendizagem* (2.ª ed.). Universidade Aberta.

Crespo, S. (2003). Using math pen-pal letters to promote mathematical communication. *Teaching Children Mathematics*, *10*, 34–39.

Dias, S., & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros dos alunos? O *feedback* regulador. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp. 133–143). SEM-SPCE.

Fialho, I. (2022). Avaliar para melhorar aprendizagens e resultados. *Revista Diversidades*, *59*, 7–11. https://pt.calameo.com/read/006440681dcd1e28f0ace

Gielen, S., Peeters, E., Dochy, F., Onghena, P., & Struyven, K. (2010). Improving the effectiveness of peer feedback for learning. *Learning and Instruction*, *20*(4), 304–315. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.08.007

Goma, J. L. S., Manrique, A. L., & Martinho, M. H. (2020). A comunicação matemática escrita de futuras professoras dos anos iniciais do ensino fundamental envolvendo o pensamento algébrico. *Quadrante*, *29*(2), 47–67. https://doi.org/10.48489/quadrante.22571

Gonçalves, A. (2024). *Correio Matemático: feedback e a partilha de cartas como promotores da comunicação matemática escrita*. [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]. https://hdl.handle.net/10216/161117

González, P., Díaz, J., & Martín, D. (2023). Peer assessment processes in a problem-solving activity with future teachers. *EURASIA Journal of Mathematics, Science, and Technology Education*, *19*(4), em2245. https://doi.org/10.29333/ejmste/13057

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81-112.

Kollar, I., & Fischer, F. (2010). Peer assessment as collaborative learning: A cognitive perspective. *Learning and Instruction*, *20*(4), 344–348. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.08.005

Lima, L., & Cosme, A. (2018). Ensinar, aprender e avaliar como processos integrados na produção de saberes numa aula orientada pela metodologia de resolução de problemas. *Revista de Educação, Ciência e Cultura*, *23*(2), 123–136. https://doi.org/10.18316/recc.v23i2.4478

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em geometria. *Educação e Matemática*, *149*, 34–38.

NCTM. (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). *Álgebra no ensino básico*. ME-DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Graça-Martins, M. E., & Oliveira, P. M. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada. Porquê, o quê e como? In P. Abrantes, & F. Araújo (Coords.). *Reorganização Curricular do Ensino Básico. Avaliação das Aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 77–84). Ministério da Educação - DEB

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp. 11–35). SEM-SPCE.

Santos, L. (2017). O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: algumas notas. *Educação e Matemática*, *144-145*, 53–58.

Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), *O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503–539). Climepsi.

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, *149*, 13–16.

Posters

CONFLICTOS COGNITIVOS EN EL CÁLCULO DE PORCENTAJES EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO DE CASO

COGNITIVE CONFLICTS IN PERCENTAGE CALCULATION IN PRIMARY EDUCATION: A CASE STUDY

Ane Izagirre

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

ane.izagirre@ehu.eus

Izaskun Baro

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

izaskun.barro@ehu.eus

Iera Arrieta

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

iera.arrieta@ehu.eus

Resumo: Esta comunicación presenta el tipo de error cometido por el alumnado de 5º de Educación Primaria (10-11 años) en el cálculo de porcentajes en un problema contextualizado en el huerto escolar. Con tal fin, se realiza un estudio exploratorio en el cual se utiliza el estudio de caso como diseño de investigación; en este trabajo se analiza la producción de un/a estudiante en particular. Para dicho análisis se consideran los conflictos cognitivos de tipo: representacional, conceptual, y procedimental. Se han identificado los conflictos cognitivos de tipo conceptual y representacional: el/la estudiante muestra dificultad para establecer la relación de proporcionalidad correctamente y se observa que prescinde por completo del signo de la igualdad.

Palabras-clave: porcentaje, proporción, educación primaria, huerto.

Abstract: This paper presents the type of error made by students in the 5th year of Primary Education (10-11 years old) when calculating percentages in a problem contextualised in the school garden. To this end, an exploratory study is carried out using the case study research design; this work analyses the production of one particular student. For this analysis, the following type of cognitive conflicts are considered: representational, conceptual, and procedural. In this study conceptual and representational conflicts are identified: the student in the analysis has difficulty in establishing the proportionality relationship correctly and it is also observed that the student completely disregards the sign of equality.

Keywords: percentage, proportion, primary education, garden.

Introducción

El porcentaje es un concepto de conocimiento público y es muy importante dentro de la alfabetización matemática (Machado y Gutiérrez, 2008). A pesar de que la utilización del porcentaje sea habitual, resulta ser un concepto difícil de comprender y aplicar (Burgos y Godino, 2019). Ya en la década de los noventa Lembke y Reys (1994) señalaban como posibles razones de esta dificultad que el porcentaje está estrechamente vinculado con la fracción, la razón y la proporción, que resultan ser las nociones más complejas de la aritmética básica y se sigue manteniendo como indica Martínez-Juste (2022).

Por todo ello, el interés de este trabajo se centra en analizar los conflictos cognitivos de un/a estudiante de 5º de Educación Primaria (en adelante EP) en el cálculo de porcentajes en un problema contextualizado en el huerto escolar. En concreto, la pregunta de investigación es la siguiente: ¿Qué tipo de conflicto cognitivo muestra el/la estudiante de 5º de EP en el cálculo de porcentajes?

Marco conceptual y antecedentes

El porcentaje es la proporción que toma como referencia el número 100 (Segovia y Rico, 2011). Su expresión está formada por un número *n* y el símbolo % que se denota *n* %. Burgos y Godino (2019) llevaron a cabo un estudio sobre los porcentajes en un aula de 6º de EP y concluyen que el tratamiento que se le otorga al porcentaje es puramente algorítmico y carente de sentido. En esta misma línea Machado y Gutiérrez (2008) realizan una investigación con el alumnado de magisterio y observan que el porcentaje no es comprendido conceptualmente, sino que se asocia a una operación algebraica. Si ampliamos la mirada a la Educación Secundaria Obligatoria (en adelante ESO), Mendoza y Block (2010) señalan que las dificultades que muestra el alumnado están vinculadas con las nociones de razón, fracción, y operador multiplicativo decimal.

Método

La investigación se ha llevado a cabo desde un paradigma interpretativo y se enmarca dentro de las investigaciones de corte cualitativa (Leavy, 2022). Se realiza un estudio exploratorio en el cual se utiliza el estudio de caso como diseño de investigación.

La elección del problema de aula se ha realizado tras el análisis de las respuestas de dos profesoras de 5º de EP por medio de una entrevista semi-estructurada.

En la investigación han participado 15 estudiantes (8 niñas y 7 niños) de 5º de EP (10-11 años) de una escuela pública de San Sebastián (Comunidad Autónoma Vasca). La profesora les plantea la siguiente pregunta: ¿Cuál es el porcentaje de cada verdura plantada en el huerto? La profesora nos proporcionó las producciones del alumnado y en este póster, en concreto, se analiza la producción de un/a alumno/a. Mencionar que la lengua en la que aprende el alumnado es el euskara por lo que las respuestas mostradas están en dicho idioma.

Categorización de los errores

Se consideran los tipos de conflictos cognitivos establecidos por Burgos y Godino (2019): representacionales (uso inapropiado del lenguaje), conceptuales (aplicación inapropiada de conceptos) y procedimentales (desarrollo erróneo de conceptos).

Resultados

En este apartado se analiza la resolución del estudiante A13. En la Tabla 1 se puede ver la proporción que define y la solución final, es decir, el porcentaje para cada verdura. A la hora de definir las proporciones intercambia la parte con el porciento eludiendo así su sentido y dando lugar a un error de tipo conceptual. Además, se observa que prescinde por completo del signo de la igualdad, mostrando así un error de tipo representacional.

Tabla 1. Las proporciones establecidas por el/la estudiante A13.

Verdura	**Cantidad de cada verdura en la huerta**	**Expresión de la proporción**	**La solución: el Porcentaje**
Achicoria	3	$\frac{100}{3}$ — $\frac{54}{x}$	2,62% txikoria
Baba Guisantes	4	$\frac{100}{4}$ — $\frac{54}{x}$	2,46% ilarrak 2,46% babak
Borraja	5	$\frac{100}{5}$ — $\frac{54}{x}$	2,7% borrajak
Coliflor Berza Brócoli	6	$\frac{100}{6}$ — $\frac{54}{x}$	3,24% azalore, Azak eta Brokoli
Patata	20	$\frac{100}{20}$ — $\frac{54}{x}$	10,8% patatak
Total	54		30,76 %

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

En este trabajo se han analizado los conflictos cognitivos que presenta un/a alumno/a en la resolución de un problema de porcentajes. Los conflictos cognitivos identificados en las proporciones establecidas por el estudiante A13 son los errores de tipo conceptual y representacional. Respecto al primer tipo de error, al igual que apuntan Burgos y Godino (2019), el estudiante muestra dificultad para establecer la relación de proporcionalidad correctamente. En cuanto al error representacional encontrado, este pertenece a la inexistencia del signo de la igualdad entre las fracciones. La falta del signo de igualdad entre ecuaciones es un error habitual y existen numerosos trabajos al respecto que apuntan que un gran número del alumnado no ha desarrollado la comprensión del signo de igualdad y remarcan la necesidad de trabajar su significado desde principios de Educación Primaria (Prediger, 2010).

Hasta donde conocen las autoras, son escasas las investigaciones que analizan el porcentaje en EP. En este trabajo se analiza un solo caso por lo que el estudio invita a considerar nuevas preguntas de investigación con una muestra más amplia.

Agradecimientos

Trabajo financiado por el Proyecto de Investigación Hezkuntza23/01 del GV/EJ y por el Grupo de Investigación GIU21/031 de la UPV/EHU.

Referencias

Burgos, M., y Godino, J. D. (2019). Conflictos semióticos de alumnos de primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (223-232). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/23/ActasXXIIISEIEM.pdf

Leavy, P. (2022). *Research design: Quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based and community-based participatory research approaches*. Guilford Publications.

Lembke, L. O., y Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics education*, *25*(3), 237-259. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.3.0237

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid]. Repositorio de la Universidad de Valladolid: https://uvadoc.uva.es/handle/10324/52863

Machado, A.M., y Gutiérrez, M.P. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación*, *17*(1), 59-69. https://helvia.uco.es/bitstream/handle/10396/3007/Maz%20y%20Gutierrez.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Mendoza, T., y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13*(4), 177-190. https://relime.org/index.php/relime/article/view/298/261

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 73-93. https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-009-9119-y

Segovia, I., y Rico, L. (2011). *Matemáticas para maestros en Educación Primaria*. Pirámide.

PROPOSIÇÃO DE UM MAPEAMENTO SOBRE APRENDIZAGEM DO CAMPO ARITMÉTICO E METODOLOGIAS DE INVESTIGAÇÃO EM TESES ESPANHOLAS

PROPOSITION OF A MAPPING ON LEARNING IN THE ARITHMETIC FIELD AND RESEARCH METHODOLOGIES IN SPANISH THESES

José Wrigell

Universidade Federal de São Carlos, Brasil / Universidad de Extremadura, Espanha

jwrigell@gmail.com

Klinger Teodoro Ciríaco

Universidade Federal de São Carlos, Brasil

klinger.ciriaco@ufscar.br

Ana Caballero-Carrasco

Universidad de Extremadura, Espanha

acabcar@unex.es

Resumo: Apresentamos a proposta de uma investigação, tipo mapeamento, em teses espanholas, cujo objetivo é o aprofundamento de referenciais teórico-metodológicos de pesquisas sobre aprendizagens de crianças no campo aritmético. Neste intuito nos questionamos: que percursos metodológicos podemos adotar para o desenvolvimento de pesquisas que visam compreender como ocorre a aprendizagem matemática das crianças no início da escolarização, bem como que instrumentos de produção de dados são adequados para um estudo dessa natureza? A metodologia apresenta os momentos de identificação, quantificação, inventariação e análise. Em termos de resultados, espera-se que a pesquisa contribua para a sistematização de fundamentos teóricos e metodológicos referentes ao estudo sobre a aprendizagem matemática.

Palavras-chaves: metodologias de investigação, pensamento aritmético, educação matemática, anos iniciais.

Abstract: We present the proposition of an investigation, like mapping, in Spanish theses, whose objective is to deepen the theoretical-methodological references of research on children's learning in the arithmetic field. To this end, we ask ourselves: what methodological paths can we adopt to develop research that aims to understand how children's mathematical learning occurs at the beginning of schooling, as well as which data production instruments are suitable for a study of this nature? The methodology presents the moments of identification, quantification, inventory and analysis. In terms of results, it is expected that the research will contribute to the systematization of theoretical and methodological foundations relating to the study of mathematical learning.

Keywords: research methodologies, arithmetic thinking, maths education, early years.

Introdução

No Brasil, há uma vasta produção de conhecimento acerca dos processos que envolvem o desenvolvimento de habilidades numéricas em crianças e seus processos de aprendizagem em contextos diversificados, grande parte desta reside no campo dos estudos do numeramento/letramento matemático. Tais estudos, muitas vezes situados no campo social, exploram a necessidade de a escola construir relações entre a dita "Matemática do Cotidiano" e a "Matemática Acadêmica" (Carraher; Carraher; Schiemann, 1982; Rabelo, 1995; Toledo, 2002, Fonseca, 2009; Ortigão; Santos, 2018), sendo esta última a que se apresente nos moldes do modelo escolar, ou seja, no currículo matemático.

No entanto, apesar dos esforços há décadas no campo investigativo, algo ainda permanece em aberto nessa discussão e leva-nos a indagar: que percursos metodológicos podemos adotar para o desenvolvimento de pesquisas que visam compreender como ocorre a aprendizagem matemática das crianças no início da escolarização, bem como quais instrumentos de produção de dados são adequados para um estudo dessa natureza?

Na perspectiva de busca por respostas à questão supracitada, a partir da interlocução com o Departamento de Didática das Ciências Experimentais e Matemáticas, na Faculdade de Educação e Psicologia da Universidade de Extremadura (UEx, Espanha), nos propomos a realizar uma pesquisa, tipo mapeamento, em teses espanholas, que objetiva o aprofundamento em referenciais teórico-metodológicos da investigação de aprendizagens de crianças no campo aritmético, no início da escolarização.

Como objetivos específicos anunciamos: estabelecer parcerias com pesquisadores espanhóis, em especial da Faculdade de Educação e Psicologia da UEx-Badajoz; identificar, caracterizar e analisar teses espanholas, dos últimos dez anos (2014-2024), com o foco nas metodologias de investigação sobre a aprendizagem das crianças em aritmética, com ênfase nas operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão); participar de ações de investigação em *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemáticas*; e compartilhar experiências no grupo de investigação e levantar a tendência investigativa presente nos trabalhos.

Enquadramento teórico

Parafraseando Jean de Salisbury (pensador político, humanista e católico, autor das obras "*Policraticius*" e "*Metalogicon*"), ao falar de Bernard de Chartres (filósofo platônico francês, que dedicou-se a conciliar os pensamentos de Platão e Aristóteles) no livro *Metalogicon*, nós podemos ver mais e mais longe do que nossos predecessores, não por termos uma visão mais aguçada ou uma maior altura, mas sim, por sermos levantados e carregados sobre sua estatura gigantesca. O ser levantado e carregado faz referência ao conhecimento produzindo por tantos e que agora se dispõe e oferece a possibilidade de irmos além. Poupart, Pires, Groulx, Deslaurirs e Mayer (2008, p. 134) enaltecem este movimento quando afirmam que a "[...] prática se formula sobre uma concepção do conhecimento considerado como cumulativo, segundo o qual o progresso de um serve de partida para o outro".

O mapeamento de teses pode nos indicar tendências e preferências por temáticas, locais de profusão de pesquisa, participantes envolvidos e pessoas que mais se dedicam ao seu estudo. Os dados obtidos revelam, para além das questões quantitativas, reflexões qualitativas sobre a produção do conhecimento, como se configura e, principalmente, quem orienta os caminhos percorridos pela pesquisa.

Há de se registrar a oportunidade de conhecer os recursos, técnicas e instrumentos envolvidos no ato de pesquisar e produzir conhecimento na Espanha, no campo da Educação Matemática. No entanto, Romanowski e Ens (2006) chamam nossa atenção para as limitações da realização de estados da arte, por apresentarem resumos com uma variedade de formatos, sendo até mesmo sucintos, confusos, sem informações sobre o tipo de pesquisa, procedimentos de produção de dados, falta de clareza nos objetivos e desordem metodológica.

Ferreira (2002) nos alerta sobre a ilusão de estarmos, ao termos contato com as pesquisas, recontando a história do conhecimento destacado, em especial aqueles apresentados em resumos, situação sinalizada anteriormente. Assim, é preciso ir além e interrogar que conexões foram e podem ser formadas para extrapolar a superficialidade dos indexadores acadêmicos.

Abordagem metodológica

Conforme Ferreira (2002), o primeiro momento do trabalho de mapeamento consiste em identificar e quantificar as produções com os descritores selecionados, em um processo de exploração e seleção. O segundo momento é marcado pelo inventário que consiste em descrever as teses.

A exploração consiste em pesquisar em bancos de dados digitais e meios físicos, caso estejam disponíveis, os marcadores que evidenciem a história das produções acadêmicas (Ferreira, 2002), utilizando os descritores "pensamento aritmético", "crianças", "operações matemáticas", "aprendizagem matemática" e "cálculo mental", combinados com filtros de seleção: campo da Educação, Psicologia, Ciências Humanas, Educação Matemática; Didática e afins; anos iniciais do Ensino Fundamental ou similares; e ano de defesa ou publicação.

A descrição dos dados será realizada em tabelas e quadros, separadas pelos descritores e com legendas para melhorar o entendimento, a fluidez e a experiência de aprendizagem. Será descrito: título; autor; ano de publicação; instituição de ensino superior; orientador; programa de pós-graduação; natureza da pesquisa; instrumentos utilizados; e participantes.

A etapa de análise terá como estratégia a leitura integral e o fichamento dos trabalhos selecionados, no intuito de identificar e registrar objetivos, contextos e forma de produção de dados, buscando compreender que percursos metodológicos foram recorridos para o desenvolvimento da investigação de mestrado e/ou doutorado, bem como quais instrumentos de produção de dados para o estudo.

Resultados esperados e relevância social e científica da proposta

De modo geral, espera-se que a pesquisa contribua para a sistematização de fundamentos teóricos e metodológicos referentes ao estudo sobre a aprendizagem matemática de crianças no início da escolarização para compreensão dos entraves, armadilhas, avanços e perspectivas do campo da Educação Matemática.

Um dos impactos centrais da relevância social e científica entendemos ser o de dar visibilidade e reunir indicadores que demonstrem quais caminhos/instrumentos são mais adequados para compreensão de como as crianças pensam e aprendem Matemática no início de sua vida escolar.

Agradecimentos

Ressaltamos que esta investigação é financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior - PDSE (Edital nº 06/2024) e pelo Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional e a Junta da Extremadura, Projeto GR21093, Grupo de Investigação Ciberdidact.

Referências

Carraher, T., Carreher, D., & Schliemann, A. (1982). Na vida dez, na escola zero. *Cadernos de Pesquisa*, *42*, 79-86. https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/1552.

Ferreira, N. S. A. (2002). As pesquisas denominadas "estado da arte". *Educação & Sociedade*, *23*(79), 257-272. https://www.scielo.br/j/es/a/vPsyhSBW4xJT48FfrdCtqfp/abstract/?lang=pt.

Fonseca, M. C. F. R. (2009). Conceito(s) de numeramento e relações com o letramento. In *Educação matemática, leitura e escrita: Armadilhas, utopias e realidade* (pp. 47-60). Mercado das Letras.

Ortigão, M. I. R., Santos, M. J. C., & Lima, R. (2018). Letramento em Matemática no PISA: O que sabem e podem fazer os estudantes? *Zetetiké*, *26*(2), 375-389. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8650093.

Poupart, J., Pires, A., Groulx, L. H., Deslauriers, J., & Mayer, R. (2008). *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Vozes.

Rabelo, E. H. (1995). *Produção e interpretação de textos matemáticos: um caminho para um melhor desempenho na resolução de problemas*. [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas]. Repositório da Faculdade de Educação. https://hdl.handle.net/20.500.12733/1582463.

Romanowski, J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. *Diálogo Educacional*, *6*(19), 37-50. https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/24176

Toledo, M. E. R. O. (2002). Numeramento e escolarização: O papel da escola no enfrentamento das demandas matemáticas cotidianas. In M. C. F. R. Fonseca (Ed.), *Letramento no Brasil habilidades matemáticas: Reflexões a partir do INAF 2002* (pp. 91-106). Instituto Paulo Montenegro.

O PAPEL DA ROBÓTICA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO BÁSICO

THE ROLE OF ROBOTICS IN LEARNING GEOMETRY: A TEACHING EXPERIENCE IN THE FIRST YEAR OF PRIMARY EDUCATION

Catarina Vasconcelos Gonçalves

Escola Superior de Educação - Instituto Politécnico de Viana, Portugal (ESE-IPVC)

catarinavasconcelosgoncalves@gmail.com

Ana Margarida Carvalho

Instituto Europeu de Estudos Superiores de Fafe (IEES)

Ana.carvalho@cloud.iees.pt

Resumo: Este trabalho faz parte de uma investigação em paralelo com prática supervisionada que tem como objetivo estudar o papel da robótica na aprendizagem da matemática na Geometria, no 1.º ciclo. O estudo foi realizado numa turma do 1.º ano, em que foram abordados a identificação e decomposição de figuras geométricas, com o Tangram e com tetraminós. A metodologia adotada foi mista e os instrumentos de recolha de dados foram grelhas de observação das sessões educativas com robôs e as tarefas realizadas pelos alunos. Os resultados indicam que a robótica aumentou o envolvimento dos alunos, melhorando a sua compreensão dos conceitos matemáticos. Concluiu-se que, apesar dos desafios, a robótica educativa é uma ferramenta valiosa no ensino da matemática.

Palavras-chave: robótica educativa, geometria, pensamento computacional.

Abstract: This work is part of na investigation in parallel with supervised practice that aims to study the role of robotics in learning mathematics in Geometry in the 1st cycle. The study was carried out in a 1st year class, in which the identification and decomposition of geometric figures were adressed, with Tangram and Tetraminoes. The metodology adopted was mixed and the data collection instruments were observation grids of the educational sessions with robots and the tasks carried out by the students. The results indicate that robotics increased student engagement, improving their understanding of mathematica, concepts. It was concluded that, despite the challenges, educational robotics is a valiable tool in teaching mathematics.

Keywords: educational robotics, geometry, computational thinking.

Introdução

A matemática desempenha um papel crucial na formação inicial dos alunos e a integração de tecnologias no processo educativo desta disciplina tem se mostrado uma estratégia eficaz (António & Garbossa, 2023). Através da robótica é possível tornar a aprendizagem mais interativa e prática, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e promovendo um maior envolvimento dos alunos nas atividades matemáticas. Assim, com esta investigação pretende-se avaliar o impacto da robótica na compreensão de conceitos geométricos, identificando os benefícios e os desafios desta abordagem pedagógica.

Enquadramento teórico

A aprendizagem da Matemática nos primeiros anos é fulcral, ou mesmo, *fundamental* (Ma, 1999). Ma (1999) descreve a matemática dos primeiros anos como *básica*, referindo que a matemática do ensino básico é composta por dois principais ramos da matemática: aritmética e geometria elementares, base da disciplina. Neste trabalho, irá estudar-se a aprendizagem de conceitos geométricos por alunos do 1.º ano, com recurso à robótica.

Segundo Fischbein (1993), os conceitos geométricos são complexos e especiais, na medida em que têm uma natureza dual – figural e conceptual. Para se colmatar esta complexidade dos conceitos geométricos e valorizar a sua importância na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos, neste trabalho trabalhou-se estes conceitos com recurso à robótica.

Segundo Marques e Ramos (2017), as vantagens da robótica educativa são: motivação; estímulo à criatividade e à iniciativa; raciocínio lógico; resolução de problemas; desenvolvimento de pensamento abstrato; construção do conhecimento e sua aplicação prática.

Metodologia

A presente investigação, desenvolvida em paralelo com a prática de ensino supervisionada, no Concelho de Cabeceiras de Basto, com 22 crianças, das quais 18 são do género masculino e quatro do feminino, com idades entre os 6 e os 7 anos, irá utilizar uma metodologia mista (Tashakkori & Creswell, 2007) para responder à questão: “De que forma a robótica pode promover a aprendizagem de conceitos geométricos, de alunos do 1.º ano?”.

Uutilizaram-se como instrumentos de recolha de dados: grelhas de observação direta das sessões educativas com tapetes pedagógicos e os robôs utilizados Bee-Bot (Figura 1) e Doc e as tarefas realizadas pelos alunos sobre tangran e tetraminós.

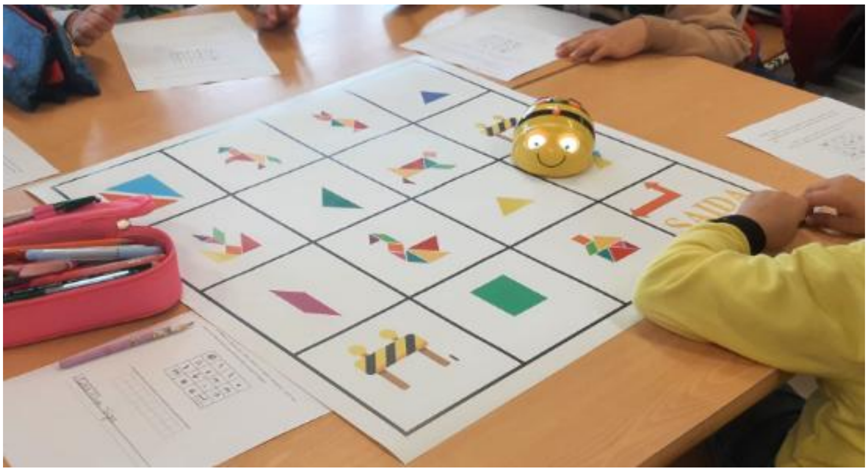


Figura 1. Realização da atividade sobre Tangram com tapete pedagógico e robô Bee

A observação das atividades proporcionou dados sobre a interação dos alunos com os robôs, o seu nível de interesse e envolvimento, bem como as dificuldades matemáticas e/ou com robôs. A grelha de observação tinha quatro categorias para avaliar o desempenho dos alunos: *Não Adquirido*, *Em Aquisição*, *Adquirido* e *Não Observado*.

As tarefas realizadas tinham como objetivos: identificar e diferenciar formas geométricas do tangram e dos tetraminós que permitiram avaliar o desempenho matemático dos alunos participantes.

Análise e discussão de resultados

Apresenta-se de seguida a Tabela 1 com um resumo dos dados recolhidos.

Tabela 1. Síntese dos resultados do estudo

Habilidade	Adquirido	Em Aquisição	Não Adquirido	Não Observado
Exploração de Conceitos Matemáticos (reconhecimento de Formas Geométricas)	86 %	0 %	0 %	14 %
Aplicação de Raciocínio lógico	86 %	14 %	0 %	0 %
Utilização de robôs para resolver problemas	86 %	14 %	0 %	0 %
Compreensão e uso dos coman dos básicos de programação de robôs	86 %	9 %	0 %	5 %
Planeamento e programação de percursos utilizando a robótica	86 %	14 %	0 %	0 %

Fonte: Elaboração própria.

Na exploração de conceitos, a maioria dos alunos adquiriu o pretendido, no entanto 14%, três alunos não participaram na atividade e, por isso, o registo foi de “Não Observado” e a maioria dos alunos (86%) desenvolveram bem as suas capacidades de raciocínio.

Contudo, na competência de ajustes e melhorias, 9 alunos (41%) foram classificados como "Em Aquisição", sugerindo que muitos ainda estavam a desenvolver esta competência.

No desenvolvimento de habilidades tecnológicas, a maioria dos alunos (86%) mostraram uma boa compreensão e uso dos comandos básicos de robôs e boa competência no planeamento e programação de percursos.

Considerações finais

Com este estudo foi possível responder à questão de investigação orientadora e entender forma como a robótica pode promover a aprendizagem da matemática, em particular de conceitos geométricos, de alunos do 1.º ano.

Concluiu-se que a robótica teve um impacto significativo na motivação e envolvimento dos alunos na aprendizagem da matemática. A integração da robótica revelou-se uma abordagem eficaz para facilitar a compreensão de conceitos geométricos e desenvolver competências essenciais como raciocínio lógico e pensamento crítico.

Referências

António, E. R. J., & Garbossa, R. A. (2023). O uso da robótica para aprendizagem de matemática no ensino fundamental II. *Caderno Intersaberes*, *12*(44), 3-18.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*,139-162. http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689

Ma, L. (1999). *Saber e ensinar matemática elementar*. Gradiva.

Marques, J., & Ramos, V. (2017). Robótica educativa em Portugal – Estado da arte. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, *Extr. (12),* 1-5.

Tashakkori, A., & Creswell, J. W. (2007). Exploring the nature of research questions in mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research, 1*, 207-211.

TAREFAS DE PENSAMENTO COMPUTACIONAL NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA EM PORTUGAL

COMPUTATIONAL THINKING TASKS IN MATHEMATICS TEXTBOOKS IN PORTUGAL

Fábio Correia de Rezende

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

frezende@edu.usliboa.pt

Hélia Jacinto

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

hjacinto@ie.ulisboa.pt

Resumo: Este estudo investiga como o pensamento computacional (PC) é atualmente integrado nos manuais didáticos de matemática do 9.º ano em Portugal. Focando-se em três entre os manuais mais utilizados, a investigação explora o potencial das tarefas associadas ao ambiente de programação visual Scratch. Nesta pesquisa adota-se uma abordagem qualitativa, documental e descritiva. Os resultados preliminares, baseados na análise de um único projeto editorial, indicam uma baixa incidência de tarefas com potencial para o desenvolvimento do PC. Embora algumas tarefas mencionam o Scratch ou que incluem elementos visuais característicos não o garantam, outras existem que efetivamente potenciam a mobilização das cinco práticas de PC.

Palavras-chave: pensamento computacional, manual didático de matemática, tarefas de matemática.

Abstract: This study investigates how computational thinking (CT) is currently integrated into 9th grade mathematics textbooks in Portugal. Focusing on the three most widely used textbooks, the research explores the potential of tasks associated with the Scratch visual programming environment. This research adopts a qualitative, documentary, and descriptive approach. Preliminary results, based on the analysis of a single editorial project, indicate a low incidence of tasks with potential for the development of CT. Although some tasks that mention Scratch or include characteristic visual elements do not guarantee this, there are others that effectively enhance the mobilization of the five practices of CT.

Keywords: computational thinking, mathematics textbook, mathematics tasks.

Introdução

O pensamento computacional (PC) se destaca como uma capacidade *essencial para todos* e não apenas para os cientistas da computação. Tal como refere Wing (2021, p. 2), "à leitura, à escrita e à aritmética, devemos acrescentar o pensamento computacional à competência analítica de cada criança". Sobre a integração do PC em matemática, Azevedo e Maltempi (2020) destacam que essa relação é reforçada através da valorização de ideias, da resolução de problemas e da reflexão, e do desenvolvimento de soluções criativas, apontando ainda a importância da construção de estratégias, a compreensão de problemas locais e globais, ou a promoção do trabalho individual e coletivo.

Em Portugal, o Ministério da Educação tem vindo a executar iniciativas para o desenvolvimento do PC na educação em várias áreas disciplinares, por exemplo em TIC (Espadeiro, 2021). Mais recentemente, as Aprendizagens Essenciais em Matemática para o Ensino Básico (AEM) enfatizam a importância do PC no currículo de matemática, destacando o seu desenvolvimento de forma integrada pelas práticas de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração, que são "imprescindíveis na atividade matemática e dotam os alunos de ferramentas que lhes permitem resolver problemas, em especial relacionados com a programação (Canavarro et al., 2021, p. 3).

A investigação tem mostrado que os manuais influenciam significativamente as oportunidades de aprendizagem dos alunos ao fornecerem uma variedade de tarefas que podem promover diferentes competências. No entanto, o equilíbrio entre os tipos de tarefas é crucial, pois uma ênfase excessiva no cálculo em detrimento da argumentação e interpretação, pode limitar o pensamento matemático dos alunos (Gracin, 2018). Muitos professores dependem dos manuais para as atividades curriculares, o que pode gerar uma certa dependência e, potencialmente, reduzir a sua autonomia profissional (Viseu & Morgado, 2018). Contudo, também é sabido que, com frequência, os professores selecionam, modificam e implementam tarefas dos manuais escolares, o que é fundamental para o seu trabalho e influencia a dinâmica da sala de aula (Kaur & Chin, 2022). Assim, a escolha das tarefas pode refletir tanto as intenções didáticas dos professores como o seu alinhamento, com os objetivos de ensino e aprendizagem plasmados nas orientações curriculares.

Num estudo desenvolvido na Croácia, Gracin (2018) analisou as exigências apresentadas nas tarefas dos manuais de matemática para os alunos dos 6.º, 7.º e 8.º anos, com base em cinco dimensões: conteúdo, atividades matemáticas, níveis de complexidade, forma de resposta e características contextuais. Os resultados mostraram que aqueles manuais tendem a enfatizar atividades de cálculo, enquanto a argumentação e a interpretação, que são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático, estavam sub-representadas. Mais recentemente, Elicer et al. (2023) investigaram e compararam a integração do PC nos recursos curriculares de Matemática para o ensino básico (1.º ao 6.º ano), na Dinamarca e na Suécia. O objetivo foi analisar como os conceitos e ações do PC e da matemática são apresentados e combinados nas tarefas dos manuais. Para isso, os autores desenvolveram um *framework* de análise que permitiu categorizar e comparar as tarefas quanto aos conceitos envolvidos e às ações de PC que os alunos são convidados a realizar (como seguir instruções, programar ou explicar procedimentos). O estudo revelou diferenças significativas entre os dois países, tanto nas abordagens adotadas quanto nos conceitos de PC mais enfatizados nas tarefas analisadas.

Embora o interesse pelo PC esteja a crescer, poucos são os estudos que analisam de forma sistemática a presença e a abordagem deste conceito em manuais didáticos de matemática, especialmente no que diz respeito às tarefas aos alunos. Esta proposta de investigação insere-se num recorte de uma tese de doutoramento que tem como objetivo compreender o panorama da integração do PC na educação básica no Brasil e em Portugal. Com esta comunicação, pretende-se apresentar uma faceta desse trabalho, focada na análise das tarefas apresentadas nos manuais de Matemática do 9.º ano, em Portugal, que visam explicitamente o desenvolvimento do PC.

Aspetos metodológicos

Este estudo adota uma abordagem qualitativa, documental e descritiva (Silva & Menezes, 2005). Pretende-se realizar análise das tarefas nos manuais do 9.º ano, em Portugal, que é o último ano do ensino básico, com vista a identificar aquelas que são explicitamente associadas ao desenvolvimento do pensamento computacional e compreender o seu potencial para promover essa capacidade no âmbito das AEM (Canavarro et al., 2021).

Neste estudo, pretende-se analisar os três manuais didáticos mais adotados pelos professores de Matemática portugueses, designados por Projeto A, B e C (versões do professor). Dado que o trabalho ainda se encontra numa fase inicial, optou-se por selecionar as tarefas explicitamente associadas ao ambiente de programação visual Scratch. Com base nos estudos de Elicer et al. (2023) e de Gracin (2018), está a ser desenvolvido um quadro para analisar as tarefas dos manuais escolares, atualmente em fase de teste e refinamento, para investigar de forma sistemática o potencial de desenvolvimento de pensamento computacional nessas propostas. Assim, para a análise das tarefas matemáticas presentes nos manuais escolares, utilizou-se um instrumento compreensivo que abrange cinco dimensões críticas: i) *Conhecimento matemático*, que se refere aos conhecimentos específicos para realizar as tarefas; ii) *Atividade matemática*, inclui cálculo e operações, representações e modelação, interpretação, argumentação e raciocínio; iii) *Nível de complexidade*, analisa a profundidade do conhecimento e das capacidades necessárias, diferenciadas em aplicação direta de conhecimentos básicos, estabelecimento e manipulação de conexões, e reflexão; iv) *Forma de resposta*, distingue entre resposta fechada, resposta aberta, e escolha múltipla; v) *Contexto* classifica a situação proposta na tarefa como intramatemática, realista ou autêntica; e vi) *Práticas de PC*, incluindo abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração.

Resultados preliminares

No Projeto A identificaram-se 17 tarefas que contêm alusão explícita ao ambiente de programação visual Scratch, sendo que oito são disponibilizadas no manual do aluno e nove estão integradas numa brochura de apoio ao trabalho do professor.

Dentre as oito tarefas que integram o manual do aluno e que cumpriam os critérios para serem consideradas neste estudo, destacou-se uma tipologia de tarefas que apenas evoca a mobilização de conhecimento matemático apesar de mencionar ou aludir ao ambiente de programação Scratch. Este caso é exemplificado pela tarefa apresentada na Figura 1. Apesar de a tarefa incluir linguagem e elementos gráficos do ambiente de programação, a sua resolução centra-se no reconhecimento das razões trigonométricas no triângulo retângulo e das funções inversas necessárias para determinar um certo ângulo a partir destas. Deste modo, a resolução deste exercício não aparenta contribuir para o desenvolvimento de PC dos alunos.

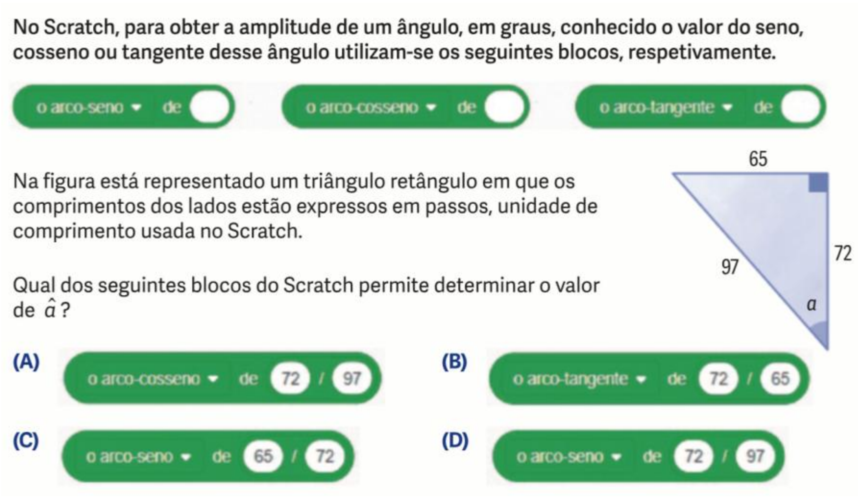


Figura 1. Tarefa alusiva ao tópico “razões trigonométricas”

Numa outra tipologia de tarefas encontram-se propostas de trabalho integradas em diferentes tópicos matemáticos, como por exemplo, *Probabilidades*. A tarefa apresentada na Figura 2 surge integrada no conteúdo Álgebra e no tópico *Expressões algébricas, equações e inequações*.

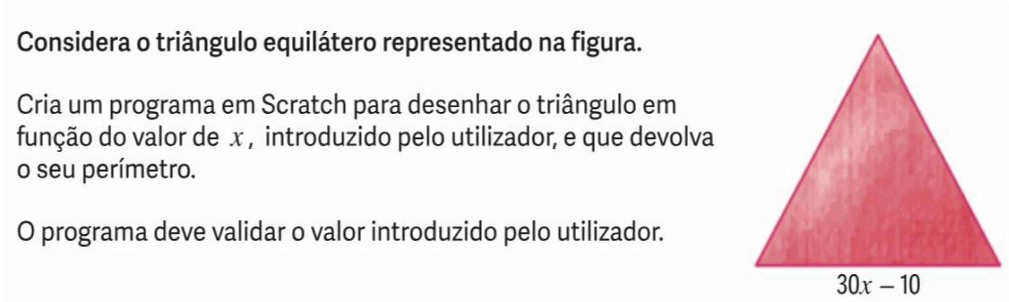


Figura 2. Tarefa alusiva ao tópico “expressões algébricas”

Para resolver esta tarefa os alunos têm de mobilizar conhecimentos de geometria (e.g., triângulo equilátero, perímetro) e álgebra (e.g., expressões algébricas) e envolvem-se numa atividade de modelação que requer o estabelecimento de conexões e reflexão, produzindo uma resposta aberta. O contexto é intramatemático, já que não evoca aspetos da realidade ou da experiência do aluno.

A tarefa de desenvolver um programa em Scratch para representar um triângulo equilátero baseado num determinado valor introduzido pelo utilizador, para calcular o seu perímetro, requer a mobilização das várias práticas de pensamento computacional. A *abstração* permite focar a atenção nos elementos fundamentais da situação problemática, tais como como calcular o lado do triângulo a partir da expressão $30x-10$ e reconhecer que, sendo equilátero, todos os lados do triângulo são iguais. A *decomposição* permite dividir a tarefa em partes menores: entrada, processamento e saída de dados, por meio do cálculo dos lados, perímetro e representação do triângulo. O *reconhecimento de padrões* permite identificar que a uniformidade dos lados simplifica o cálculo do perímetro e permite a reutilização de blocos de código para operações repetitivas. A *algoritmia* está na base do desenvolvimento de um algoritmo sequencial que processa a entrada, executa cálculos, realiza a representação e apresenta resultados (saídas). Por fim, a *depuração* é crucial para garantir a funcionalidade do programa, permitindo a identificação e correção de erros, seja na entrada de dados, no processo de cálculo e na saída dos resultados.

Considerações finais

Os resultados preliminares deixam antever uma baixa incidência de tarefas destinadas ao desenvolvimento do PC nos livros didáticos portugueses para a matemática do 9.º ano. No Projeto A identificaram-se 17 tarefas que mencionam o ambiente de programação visual Scratch. Apesar de referenciarem o ambiente Scratch, algumas tarefas concentram-se predominantemente no uso de conhecimento matemático. Em contraste, existem também tarefas com potencial para fomentar efetivamente o PC que se destacam pela sua natureza desafiadora e pela oportunidade para a mobilização das práticas como abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração.

Este estudo, ainda preliminar e focado num único manual, prevê o refinamento do *framework* de análise e a expansão do estudo para incluir outros manuais. Embora seja crucial investigar como essas tarefas são aplicadas em sala de aula e avaliar o seu contributo para o desenvolvimento do PC nos alunos, os manuais têm uma influência significativa na prática pedagógica dos professores pelo que se torna relevante examinar a forma como os conceitos matemáticos e de PC são apresentados e integrados nas tarefas propostas, de modo a promover um desenvolvimento equilibrado das competências dos alunos.

Referências

Azevedo, G. T., & Maltempi, M. V. (2020). Processo de aprendizagem de matemática à luz das metodologias ativas e do pensamento computacional. *Ciência & Educação (Bauru)*, *26*, e20061.

Canavarro, A. P. (Coord.), Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais para o ensino básico*. Direção Geral de Educação. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Elicer, R., Tamborg, A. L., Bråting, K., & Kilhamn, C. (2023). Comparing the integration of programming and computational thinking into Danish and Swedish elementary mathematics curriculum resources. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *11*(3), 77-102.

Espadeiro, R. G. (2021). O pensamento computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5-10.

Gracin, G. D. (2018). Requisitos em livros didáticos de matemática: Uma análise de cinco dimensões de exercícios e exemplos de livros didáticos. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1003–1024. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849

Kaur, B., & Chin, S. L. (2022). Nature of mathematics tasks and what teachers do. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *46*, 101169.

Silva, E. L., & Menezes, E. M. (2005). *Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação (4ª. edição)*. Universidade Federal de Santa Catarina.

Viseu, F., & Morgado, J. C. (2018). Textbooks in the mathematics curriculum management: What is the role for the teacher? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*, 1152-1176.

Wing, J. M. (2021). Pensamento computacional. *Educação e Matemática*, *162*, 2-4.

GRUPO DE DISCUSSÃO 4

A INCLUSÃO E A DIVERSIDADE NA PROMOÇÃO DE UMA MATEMÁTICA PARA TODOS NO SÉCULO XXI

INCLUSION AND DIVERSITY IN PROMOTING MATHEMATICS FOR ALL IN THE 21ST CENTURY

Alexandra Sofia Rodrigues

CICS.NOVA; Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, UIED, Portugal

alexsofiarod@gmail.com

Ana Santiago

Escola Superior de Educação de Coimbra - Instituto Politécnico de Coimbra, CICS.NOVA, Portugal

asantiago@esec.pt

Diversidade e inclusão são dois conceitos interrelacionados e presentes no quotidiano das escolas e das salas de aula. Com a imigração para Portugal, motivada por múltiplos fatores, especialmente em grandes centros populacionais, as turmas são atualmente constituídas por alunos de diferentes nacionalidades, coexistindo no mesmo espaço diferentes culturas e diferentes perspetivas sociais.

Para a UNESCO (2019) todo o estudante é importante e tem igual importância. Reconhecendo as dificuldades de colocar em prática esta mensagem, esta admite que o desenvolvimento de políticas inclusivas e equitativas requer o reconhecimento de que nas escolas as dificuldades surgem também pela forma como se organizam os ambientes educativos, os ambientes de aprendizagem e as metodologias implementadas para aprender e ensinar (UNESCO; 2019).

Em Portugal, a publicação do Decreto-Lei n.º 54/2018, coloca no centro da atividade da escola o currículo e as aprendizagens dos alunos, alinhadas com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al, 2017), afastando a ideia de que é necessário categorizar para intervir. A educação inclusiva está associada à valorização da diversidade dos alunos nas escolas, na diferenciação pedagógica no sistema de ensino português e no reconhecimento das contribuições que todos os elementos da comunidade escolar trazem para os ambientes educativos, independentemente das suas origens, caraterísticas ou capacidades (Pappámikail et al., 2022).

As políticas de educação podem influenciar e apoiar práticas inclusivas, estabelecendo o direito igual de cada indivíduo à educação, e "delineando as formas de ensino, apoio e liderança que lançam as bases para uma educação de qualidade para todos" (UNESCO; 2019, p. 12).

Este grupo de discussão está organizado em torno de quatro temas, definidos de acordo com as comunicações recebidas: (i) a formação matemática para a cidadania; (ii) o regime jurídico da educação inclusiva; (iii) as relações éticas e multiculturais e (iv) o trabalho colaborativo entre professores e investigadores.

As duas comunicações que se inserem no primeiro tema abordam aspetos relacionados com a importância da educação para uma formação cidadã. Carvalho e Silva, refere a importância da “Matemática para a cidadania” que é trabalhada no currículo do ensino secundário português, de forma inovadora pelo facto de os próprios conteúdos matemáticos servirem de suporte ao desenvolvimento da cidadania ativa. Por sua vez, Pimenta, Santiago e Rodrigues, num estudo empírico com alunos do 4.º ano de escolaridade defendem que, num contexto inclusivo de aprendizagem, é possível aplicar tarefas que promovam o desenvolvimento de competências de educação financeira e de sensibilização para a sustentabilidade dos alunos.

O segundo tema inclui uma comunicação. Vicente e Lima, num estudo dirigido a alunos do 2.º ciclo do ensino básico, procuram compreender de que forma o Regime Jurídico da Educação Inclusiva em vigor (Decreto-Lei n.º 54/2018), nas aulas de Matemática, se relaciona com uma aprendizagem efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes inscritas nas Aprendizagens Essenciais da disciplina.

As duas comunicações que se enquadram no terceiro tema, focam as relações éticas e multiculturais na escola. Pinto reconhece que a hegemonia da matemática no sistema educacional brasileiro contrasta com as necessidades de uma escola e formação de professores indígenas no Brasil, referindo a importância de respeitar as especificidades culturais problematizando a tensão entre uma matemática para todos presente nos currículos escolares e as práticas de formação de professores indígenas no Brasil. Por sua vez, Silva e Braga também refletem sobre a importância de considerar a diversidade cultural na sala de aula, mais especificamente no que concerne à inclusão da cultura afro-brasileira e indígena no currículo escolar.

No último tema, destaca-se a importância do trabalho colaborativo em educação. Oliveira e Lima, procuram compreender de que modo o trabalho colaborativo docente contribui para práticas pedagógicas inclusivas, na intervenção com alunos com medidas seletivas e no desenvolvimento das Aprendizagens Essenciais de Matemática. Finalmente Silva, Ciríaco e Ponte, abrangendo diferentes níveis de ensino (do 1.º ao 3.º ciclo), procuram explorar historicamente o impacto de grupos colaborativos portugueses na área de Educação Matemática, na senda de compreender de que forma o trabalho colaborativo entre professores influencia o seu desenvolvimento profissional e contribui para a melhoria das suas práticas pedagógicas.

A atividade deste grupo de discussão será desenvolvida, procurando analisar, discutir e refletir em conjunto as principais ideias presentes nas comunicações apresentadas. Procurando uma melhor compreensão das temáticas da inclusão e diversidade, tão abrangentes e presentes nas nossas escolas. A discussão dará especial atenção a questões como:

- O que significa Matemática para todos? É importante ou desejável?
- Como lidar com especificidades étnicas e culturais, respeitando a diversidade e a inclusão?
- Qual o papel do trabalho colaborativo para a melhoria das práticas pedagógicas? E de práticas pedagógicas inclusivas?

No momento, o currículo e o desenvolvimento curricular estão no centro das práticas educativas inclusivas, que promovem a equidade e respeitam a diversidade cada vez maior nas salas de aula do século XXI. Desta forma, continuar a investigação em educação matemática tendo em vista percursos diferenciados e inclusivos para os alunos assumirá, no futuro, contornos cada vez mais importantes e significativos no campo da educação matemática.

Referências

Martins, G. O.; Gomes, C. A. S., Brocardo, J. M. L., Pedroso, J. V., Carrillo, J. L. A., Silva, L. M. U., Encarnação, M. M. G. A., Horta, M. J. V. C., Calçada, M. T. C. S., Nery, R. F. V., *& Rodrigues, S. M. C. V. (2017). Perfil* dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Ministério da Educação /Direção-Geral da Educação https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Pappámikail, L., Beirante, D., & Cardoso, I. (2022). Conjunto de Materiais: Educação Inclusiva. Diversidade, Equidade e Inclusão. Ministério da Educação /Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EInclusiva/diversidade_equidade_e_inclusao_2022.pdf

Presidência do Conselho de Ministros. (2018). "Decreto-Lei n.º 54/2018". Diário da República 1ª série, 129 (julho): 2918-2928. https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/decreto-lei/54-2018-115652961

UNESCO (2019). Manual para garantir inclusão e equidade na educação. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000370508.locale=en

Comunicações

MATEMÁTICA PARA A CIDADANIA NO ENSINO SECUNDÁRIO
MATHEMATICS FOR THE CITIZEN IN SECONDARY EDUCATION

Jaime Carvalho e Silva
University of Coimbra, Department of Mathematics, CMUC, Portugal
jaimecs@mat.uc.pt

Resumo: No mundo atual, em que a UNESCO declara que "tudo o que fazemos é baseado em alguma estrutura matemática", o Ensino Secundário, fazendo parte da escolaridade obrigatória, deve desenvolver nos alunos as competências que se tornam indispensáveis nesse nosso mundo. Autores como Arzarello, Skovsmose e Steen têm avançado com propostas de modernizar o currículo de Matemática reforçando a componente de Cidadania no Ensino da Matemática. Quando o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* indica que os alunos devem adquirir competências que lhes permitam "o exercício de uma cidadania plena, ativa e criativa", o que devem as disciplinas de Matemática do Ensino Secundário fazer para suportar essa cidadania? As novas Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática para o Ensino Secundário foram lecionadas em turmas piloto a partir de 2023/2024 e generalizadas com início no ano letivo de 2024/2025. Argumenta-se que estas novas AE destacam, como uma das ideias inovadoras deste novo currículo, a "Matemática para a cidadania" que é trabalhada com uma abordagem inovadora pelo facto de os próprios conteúdos matemáticos servirem de suporte privilegiado ao desenvolvimento da cidadania ativa. Os conteúdos escolhidos foram os modelos matemáticos de processos eleitorais, a análise matemática de modelos financeiros e a literacia estatística. Os objetivos de aprendizagem de cada um destes temas nas novas AE promovem competências que são indispensáveis para o exercício de uma cidadania ativa e, nas "Ações Estratégicas de Ensino do Professor", são sugeridas diversas vias para as concretizar na sala de aula, e que reforçam a dimensão da cidadania. Sendo prematuro avaliar o verdadeiro impacto desta abordagem lançam-se algumas ideias que permitem pensar que o impacto é positivo.

Palavras-chave: matemática para o cidadão, cidadania ativa, modelos matemáticos de processos eleitorais, literacia estatística.

Abstract: In our world where UNESCO states that "everything we do is based on some mathematical structure", secondary education, as part of compulsory education, must develop in students the skills that become indispensable in our world. Authors such as Arzarello, Skovsmose and Steen have advanced proposals to modernize the mathematics curriculum by reinforcing the Citizenship component in Mathematics Teaching. When the *Profile of students at the end of compulsory education* indicates that students must acquire skills that allow them to "exercise full, active and creative citizenship", what should mathematics courses for secondary education do to support this citizenship? The new Essential Learning (EL) in Mathematics for secondary education were taught in pilot classes from 2023/2024 and generalized starting in the 2024/2025 school year. It is argued that these new EL highlight as one of the innovative ideas of this new curriculum "Mathematics for citizenship", which is approached with an innovative approach because the mathematical contents themselves serve as a privileged support for the development of active citizenship. The chosen topics were mathematical models of electoral processes, mathematical analysis of financial models and statistical literacy. The learning objectives of each of these topics in the new EL promote skills that are essential for the exercise of active citizenship and, in the "Strategic Actions for Teacher Education", several ways to implement them in the classroom are suggested, which reinforce the dimension of citizenship. As it is premature to assess the true impact of this approach, some ideas are put forward that suggest that the impact is positive.

Keywords: mathematics for the citizen, active citizenship, mathematical models of electoral processes, statistical literacy.

Introdução

Matemática para Todos foi o tema de um grupo temático no 5º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME), que decorreu em Adelaide em 1984. No relatório publicado pela UNESCO (Damerow, 1984), é preconizada "(…) a mudança para o ensino básico universal nos países em desenvolvimento, a mudança para o ensino secundário universal nos países industrializados" (Damerow, 1984, p. 3).

Esta recomendação já não é suficiente no mundo atual. Com efeito, no documento da UNESCO "*MATHEMATICS FOR ACTION Apoiar a tomada de decisões baseadas na ciência*" (Dhersin et al., 2022), argumenta-se que "Tudo o que fazemos é baseado em alguma estrutura matemática" e que "a matemática está a tornar-se uma ferramenta cada vez mais preciosa para os decisores". Esta publicação também pretende mostrar "(...) como a matemática está no centro das políticas baseadas em evidências que os governos de todo o mundo adotam regularmente para resolver uma questão socioeconómica ou ambiental específica" (Dhersin et al., 2022, p. xv).

No mesmo documento, recomenda-se que:

> A educação matemática desenvolve competências de resolução de problemas e de pensamento crítico que podem ser transferidas para novas situações e uma série de campos ocupacionais. A educação matemática é importante para o desenvolvimento de cidadãos reflexivos e críticos que podem lidar com as exigências matemáticas da vida quotidiana (Dhersin et al., 2022, p. 15).

O apelo para "desenvolver cidadãos reflexivos e críticos que podem lidar com as exigências matemáticas da vida quotidiana", independentemente dos países e dos níveis educacionais, é um apelo para um currículo matemático para todos os alunos de todos os países, um pouco diferente do que temos hoje.

Vários estudos internacionais apontam para se incluir no ensino da Matemática, temas que usualmente se designam por "literacia matemática" para os cidadãos melhor entenderem o mundo à sua volta. O investigador William H. Schmidt e a sua equipa defendem que literacia matemática deve incluir

> (...) conhecimento de procedimentos estatísticos e raciocínio estatístico (baseado principalmente na probabilidade) que é cada vez mais importante na tomada de decisões informadas relacionadas com o mundo do trabalho, bem como como decisões pessoais sobre saúde, finanças familiares, opções de escolaridade e apresentação de declarações fiscais, mas também questões sociais, como as alterações climáticas, as taxas de inflação, as políticas de imposto sobre o rendimento e os orçamentos dos países. (Schmidt et al., 2022, p. 6)

A importância do desenvolvimento de competências amplas na educação dos jovens é discutida pelo menos desde o desenho do programa PISA e da reforma dinamarquesa KOM. Argumenta-se que "a aquisição de um determinado assunto por parte dos jovens, como a matemática" deve promover a sua "capacidade de navegar com sucesso como indivíduos e cidadãos numa sociedade multifacetada como resultado da sua escolaridade obrigatória" (Niss, 2015, p. 53).

Enquadramento

Vários autores têm avançado com propostas de modernizar o currículo de Matemática onde, por um lado, existe a preocupação de desenvolver competências importantes nos alunos, mas por outro lado também há uma dimensão importante do ponto de vista social. Iremos referir três: Ferdinando Arzarello com "*La Matematica per il Cittadino*", Ole Skovsmose com a *Educação Matemática Crítica* e Lynn Arthur Steen com a sua *Literacia Quantitativa*.

Em 2000 a *União Matemática Italiana*[29] nomeou uma comissão, coordenada pelo investigador Ferdinando Arzarello e constituída por matemáticos, investigadores e professores, para preparar uma nova proposta de novo currículo para o ensino básico e secundário que refletisse as novas necessidades da sociedade no início do novo século (Arzarello, 2001). Essa proposta teve o título significativo de "*La Matematica per il Cittadino*" e até 2006 desenvolveu documentos de base para lecionação e avaliação e promoveu um grande programa de formação de professores de Matemática. Este trabalho foi continuado no projeto "m@t.abel (*Matematica di base con e-learning*)" e influenciou grandemente o atual currículo das escolas italianas.

Ole Skovsmose foi agraciado pelo ICMI em 2024 com o prémio Hans Freudenthal. O ICMI reconheceu o desenvolvimento da "*Critical Mathematics Education*" em que se defende que "a matemática e a educação matemática estão enraizadas nas estruturas históricas, culturais, políticas e económicas da sociedade" e assim o ensino da Matemática atualmente deve ser fundamentalmente diferente, abrindo novas possibilidades para o estudante a favor da justiça social e abordando a Matemática de forma crítica em todas as suas formas e aplicações (Skovsmose, 2020).

Lynn Arthur Steen (1941-2015) foi um defensor acérrimo do ensino da Matemática como literacia para o nosso tempo, preconizando desde muito cedo o estudo dos métodos eleitorais por ser importante "compreender como os diferentes procedimentos de votação (por exemplo, segunda volta, aprovação, pluralidade, preferencial) podem influenciar os resultados eleitorais" num contexto de educação para a Cidadania (Steen, 2001).

Muitos outros autores têm feito diferentes tipos de propostas no sentido de reforçar a componente de Cidadania no Ensino da Matemática, nos documentos curriculares e na formação de professores.

Matemática e Cidadania

Num pequeno texto publicado na revista "Educação & Matemática" em 2001, Paulo Abrantes, a propósito de um gráfico enganador publicado por uma das maiores associações de matemáticos do mundo, escreve que "a Matemática, como qualquer outra disciplina, tem tudo a ver com a educação para cidadania!"

John Allen Paulos, autor do livro "'Inumerismo: o Analfabetismo Matemático e as suas Consequências", escreve que existe "uma incapacidade de lidar confortavelmente com as noções fundamentais de número e do acaso, [que] atormenta muitos cidadãos que, de outra forma, estariam bem informados" (Paulos, 2001).

Estamos num século em que a cada passo que damos encontramos a matemática: nas notícias com muitas tabelas e gráficos nem sempre fáceis de ler, nas instruções para tomar

[29] Em Itália a UMI-União Matemática Italiana abrange tanto os investigadores matemáticos com os educadores matemáticos como os professores de Matemática, tendo tomado muitas iniciativas dirigidas à melhoria do currículo e da formação dos professores de Matemática.

medicamentos, nas instruções para preencher formulários fiscais e também para entender questões importantes como a evolução do sistema económico, a eficácia das vacinas ou as alterações climáticas.

Precisamos claramente que todos os jovens estudantes, antes de terminarem o Ensino Secundário, contactem de forma produtiva o que alguns designam por “literacia quantitativa”. Uma das razões é que os jovens terminam o ensino secundário por volta dos 18 anos, idade em que, na maioria dos países, são chamados a votar para eleger os seus representantes locais e nacionais (e supranacionais como é o caso do Parlamento Europeu na União Europeia).

Salientamos ainda que, num mundo globalizado como o nosso, onde a informação circula a alta velocidade, qualquer limitação na preparação escolar prejudica o poder de intervenção dos jovens, tanto nas associações de jovens ou estudantes como na sua intervenção geral como cidadãos plenos.

Matemática Eleitoral

No nosso tempo as votações e as eleições são cada vez mais um tema de discussão e todas as organizações e todos os países realizam algum tipo de eleições. Podemos de algum modo considerar que o tema das eleições é um tema privilegiado para entender as relações da Matemática com a nossa vida social, de um modo que suscita de forma natural reflexão e análise crítica. Nalguns casos há mesmo referendos em vários países onde se propõe a mudança do sistema de eleição de representantes e deputados. A respeitadíssima Associação SEDES, fundada em 1970, produziu em 2018 um documento com uma proposta de mudança do sistema eleitoral português, que não tem suscitado qualquer debate entre nós (SEDES, 2018).

Nas novas Aprendizagens Essenciais para o Ensino Secundário (Carvalho e Silva et al., 2023a), no Tema “Modelos matemáticos para a cidadania”, subtema “Modelos matemáticos nas eleições/método de borda” um dos objetivos de aprendizagem é “Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva” e outro é “Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda)”. Estes objetivos foram concretizados nas Turmas Piloto que funcionaram em 2023/2024 por meios de tarefas de carater exploratório que se encontram compiladas em Coletâneas de Tarefas (GTDCPMES, 2024). Na coletânea relativa a este tema encontramos uma tarefa que se baseia num artigo de um economista da Universidade do Minho publicado num semanário de grande circulação onde certos modelos matemáticos eleitorais são apresentados e discutidos (Figura 1).

Tarefa 4

Muitas voltas numa só

Analisa o texto "Muitas voltas numa só" de Luís Aguiar-Conraria, professor de Economia da Universidade do Minho.

Muitas voltas numa só

Numa eleição, se temos de escolher entre sete, porque é que só damos opinião sobre um? Eis um método alternativo...

Figura 1. Tarefa baseado num artigo do *Expresso*, de 17 fev. 2023

Eu próprio tenho feito algumas intervenções públicas sobre as eleições onde a Matemática desempenha um papel primordial, que não foram planeadas, mas surgiram de forma natural em reação a outros textos ou intervenções (Figura 2).

Figura 2. *Observado*r, 15 jun. 2024

Num artigo publicado no jornal digital *Observador*, em resposta a um artigo que sugeria que a disciplina de Matemática poderia passar a ser opcional no Ensino Secundário, usei a importância da comparação entre os métodos de D'Hondt e de Sainte-Laguë para realçar a relevância para a Democracia da capacidade entender o significado matemático de tal diferença.

> O método usado é o chamado Método de Hondt, que foi desenhado pelo advogado e professor de Direito Civil e de Direito Fiscal na Universidade de Gent, Bélgica, Victor Joseph Auguste D'Hondt, no século XIX. Ele foi um ardente defensor da **representação proporcional**, tendo mesmo criado a *Association Réformiste Belge pour l'Adoption de la Representation Proportionnelle* em 1881.
>
> É este um método justo? O matemático francês e ativista da Resistência na II Guerra Mundial André Sainte-Laguë (1882-1950), num artigo escrito em 1910, achava que não e defendia **que o método de Hondt favorecia os grandes partidos e prejudicava os pequenos partidos**. Podemos chegar

facilmente a essa conclusão comparando a percentagem de votos obtidos pelos partidos com a percentagem de mandatos obtidos.

Podemos aplicar o Método de Sainte-Laguë ao caso das recentes Eleições Europeias em Portugal e os 21 maiores quocientes obtidos por este método dariam 7 mandatos ao PS, 7 mandatos à AD, 2 mandatos ao CHEGA, 2 mandatos à IL, 1 mandato ao BE, 1 mandato à CDU e **1 mandato ao LIVRE** (Carvalho e Silva, 2024a).

Isto quer dizer que os partidos a quem são atribuídos mandatos variam com o método utilizado, não sendo matematicamente possível dizer se um é melhor do que outro. O importante é perceber que ambos os métodos têm certas características que poderemos achar mais ou menos relevantes atendendo ao contexto de cada situação. Se queremos favorecer os maiores partidos para facilitar a constituição de maiorias de governo poderemos preferir o método de D'Hondt, se achamos que o Parlamento Europeu, como não elege um governo, fica mais rico com uma maior diversidade de ideias debatidas, então o método de Sainte-Laguë será mais aconselhável.

No jornal regional *Diário de Coimbra* publiquei um outro artigo chamando a atenção para o facto de a proposta de criação de Círculos Uninominais em substituição dos atuais Círculos Eleitorais ligados aos distritos, que elegem vários deputados em cada círculo, iria contrariar a atual representação proporcional que está determinada pela Constituição da República Portuguesa (Figura 3).

10 | 30 AGO 2023 | QUARTA-FEIRA

Opinião

A ILUSÃO DOS CÍRCULOS UNINOMINAIS

JAIME CARVALHO E SILVA
PROFESSOR UNIVERSITÁRIO

É verdade que o sistema uninominal é usado em vários países. Contudo, a sua aplicação deixa muito a desejar. O sistema uninominal não parece garantir só por si, a qualidade dos eleitos

Figura 3. *Diário de Coimbra*, 30 agosto 2023

Na revista de professores "A Página da Educação" publiquei um terceiro artigo intitulado "Controvérsias Eleitorais" que discute uma proposta de um partido com uma modificação substancial do sistema eleitoral português (Figura 4).

Figura 4. Página da Educação, nº 223, 2024

Havendo propostas diferentes em relação aos métodos a aplicar qual a posição que cada um poderá ter? Por exemplo:

> Por exemplo, o partido Iniciativa Liberal defendeu em outubro de 2023 que nas eleições para a Assembleia da República deveria haver um “círculo de compensação de 40 deputados”, ou seja, apenas 230-40=190 deputados seriam eleitos pelo método atual e os 40 deputados restantes seriam eleitos a partir dos votos que não tinham ainda sido traduzidos em deputados. Que diferença faz isso? Se este método “misto” tivesse sido aplicado nas eleições de 2022, os partidos CDS e RIR teriam eleito deputados (Carvalho e Silva, 2024b).

Mais uma vez verificamos que a mudança do método usado implica a eleição de deputados de mais partidos, alargando a amplitude de ideias representadas na Assembleia da República portuguesa.

Todos os exemplos referidos aparecem em meios de comunicação social com uma circulação mais ou menos considerável e dirigidos aos cidadãos em geral. Todos os cidadãos deveriam ser capazes de ler, interpretar e formar a sua própria opinião sobre as ideias apresentadas.

Recomendações

Num documento publicado em 2020 com recomendações para a melhoria do ensino da Matemática, encomendado pelo Ministério da Educação português, recomenda-se que o currículo de Matemática deveria respeitar vários princípios entre os quais o da *Relevância*:

> as orientações curriculares devem ser de tal modo que envolvam todos os alunos numa Matemática à qual atribuam significado. A Matemática precisa de ser percecionada pelos alunos como valiosa, quer para a sua formação pessoal, quer para o desenvolvimento global do mundo, sendo imprescindível o reconhecimento da sua importância, utilidade e poder. Destaca-se o papel das conexões internas da Matemática e das conexões desta com o mundo real e múltiplas áreas de saber, nomeadamente as associadas às culturas dos alunos (Carvalho e Silva et al, 2020, p. 294).

Uma grande porção dos jovens estudantes não entende que a matemática seja ou venha a ser relevante na sua vida, sendo que alguns alunos escolhem não estudar de todo Matemática no Ensino Secundário. A questão que se coloca é a de saber se é possível organizar um currículo a nível do Ensino Secundário que consiga mudar a perceção dos estudantes?

A cidadania nas Novas Aprendizagens Essenciais para o Ensino Secundário

As novas Aprendizagens Essenciais (AE) para o Ensino Secundário destacaram como uma das ideias inovadoras deste novo currículo a "Matemática para a cidadania":

> O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos (Carvalho e Silva et al, 2023a, p. 2).

Esta ideia está em total consonância com o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* onde se estabelece que os alunos devem envolver-se "em projetos de cidadania ativa" (Martins et al., 2017, p. 27) e devem adquirir competências que lhes permitam "o exercício de uma cidadania plena, ativa e criativa na sociedade da informação e do conhecimento em que estamos inseridos" (Martins et al., 2017, p. 10).

Mas as novas AE de Matemática pretendem ir mais longe devido à "crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual" e por isso definem uma estratégia em que

> (...) estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 2).

Estas considerações aparecem de forma idêntica nas AE de Matemática A, Matemática B (Carvalho e Silva et al., 2023b) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais (Carvalho e Silva et al., 2023c).

Assim, o que aparece como verdadeiramente inovador nestas AE é o facto de os próprios conteúdos matemáticos servirem de suporte privilegiado ao desenvolvimento de uma cidadania ativa. Temas como os modelos matemáticos eleitorais, os modelos matemáticos financeiros e a literacia estatística constituem então uma oportunidade privilegiada para levar os alunos a trabalhar ferramentas matemáticas que fornecem uma base para o exercício da sua própria cidadania ativa.

Os temas considerados nas novas AE são os que constam da Tabela 1.

Tabela 1. Modelos matemáticos para a cidadania.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	
Modelos matemáticos nas eleições	Maioria simples Maioria absoluta Método de Borda
Modelos matemáticos na partilha	Método de Hondt Método de St. Laguë
Modelos matemáticos em finanças	Matemática nos salários Matemática na poupança e no crédito

Fonte: (Carvalho e Silva et al, 2023a, p. 13-15).

Os objetivos de aprendizagem incluem, no primeiro tema da Tabela 1, “Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais”, no segundo tema “Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais” e no terceiro tema “Identificar a progressividade do IRS e a relevância dos escalões”. Todos estes objetivos desenvolvem competências que são indispensáveis para o exercício de uma cidadania ativa.

Nas “Ações Estratégicas de Ensino do Professor” são sugeridas diversas vias para os professores concretizarem os Objetivos de Aprendizagem, que reforçam a dimensão da cidadania. Por exemplo, no primeiro tema é sugerido nas novas AE que se promova “a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais que valorizem a existência de uma segunda volta, como é o caso da eleição do Presidente da República de Portugal, nomeadamente a referência à eleição presidencial de 1986” (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 13).

No segundo tema é sugerido que se proponha “a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo, as eleições europeias de 1987” (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 14).

No terceiro tema é sugerido que se analise “a rentabilidade de diferentes depósitos a prazo, durante um prazo predefinido, recorrendo à folha de cálculo e ao uso de simuladores disponíveis na Internet” (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 16).

A Estatística também tem um lugar importante nos conhecimentos matemáticos necessários a todos os cidadãos. As novas AE dão um lugar de destaque ao estudo da Estatística, conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2. Estatística.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	
Problema estatístico	Variabilidade
População, amostra e variável	Fases de um procedimento estatístico
Dados univariados	Dados quantitativos discretos ou contínuos Organização de dados Histograma Medidas de localização Medidas de dispersão Propriedades das medidas
Dados bivariados	Dados quantitativos Diagrama de dispersão Coeficiente de correlação linear Reta de regressão – variável independente ou explanatória – variável dependente ou resposta. Gráfico de linhas

Fonte: (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 20-25).

Os objetivos de aprendizagem no tema de Estatística incluem aspetos onde a cidadania está obviamente envolvida. Por exemplo:

> Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam

> diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 20).

Nas "Ações Estratégicas de Ensino do Professor" do tema de Estatística também são sugeridas diversas vias para os professores concretizarem os Objetivos de Aprendizagem, que reforçam a dimensão da cidadania. Por exemplo:

> Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da Direção Geral de Saúde (https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf), relacionando o "peso" e a "estatura" com a "idade" (Carvalho e Silva et al., 2023a, p. 23).

Tudo o que foi referido para as AE de Matemática A é igualmente válido para as AE de Matemática B (Carvalho e Silva et al., 2023b) e para as AE dos módulos de Matemática para os Cursos Profissionais (Carvalho e Silva et al., 2023c).

Conclusão

A estratégia de educação para a cidadania delineada nestas novas AE terá um impacto positivo nos alunos? Esta é uma questão que se deverá estudar, mas temos dois indicadores que nos levam a pensar que sim.

Em primeiro lugar, nas turmas piloto que decorreram no ano letivo 2023/2024 em 20 escolas secundárias de tipologia muito variada, os alunos corresponderam positivamente a um início de ano letivo com o tema de "Modelos matemáticos para a cidadania", conforme os testemunhos informais recolhidos junto dos professores das turmas piloto.

Em segundo lugar, uma das principais novidades da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, que data de 2001, foi o do aparecimento dos modelos matemáticos de processos eleitorais. Esta disciplina, mesmo sendo opcional, tem sido frequentada por muitos milhares de alunos ao longo dos anos e alguns têm deixado testemunhos significativos. Um desses testemunhos indica o seguinte:

> Conhecer diferentes sistemas eleitorais, perceber os mecanismos que estão por detrás de cada sufrágio, compreender por que é que é diferente a eleição de um Presidente da República da de um deputado ou de um presidente da câmara, e por que é que o que se passa em Portugal é distinto do que acontece em Inglaterra ou nos Estados Unidos, tudo isso é matemática, tudo isso é matemática aplicada à leitura da realidade de todos os dias, tudo isso é relevante para a formação integral de qualquer aluno (Cruchinho, 2021).

Claro que temos de lamentar que nem todos os alunos do Ensino Secundário tenham oportunidade de estudar os temas mencionados, pela importância que esse estudo assume. Levanta-se então a questão de perceber a razão pela qual não será obrigatório para TODOS os alunos no Ensino Secundário pelo menos uma das opções de estudo da disciplina de Matemática. Mas essa é uma outra discussão, o do reconhecimento político da importância de uma Matemática para Todos no Ensino Secundário.

Para terminar, seria interessante investigar que tipo de impacto nos alunos irão ter estas alterações curriculares. Com que tipo de visão da matemática irão os alunos ficar? O testemunho antes citado será comum entre os alunos? Como verão os alunos a Matemática na sua relação com a realidade? Irão ficar mais habilitados para analisar criticamente a realidade que vão enfrentando?

Agradecimentos

Partially supported by the Centre for Mathematics of the University of Coimbra (funded by the Portuguese Government through FCT/MCTES, DOI 10.54499/UIDB/00324/2020).

Referências

Abrantes, P. (2001). Matemática e Cidadania, *Educação e Matemática, 62*, 9.

Arzarello, F. (2001). *Matematica 2001, Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media).* XXII Convegno UMI-CIIM. Ischia 15-17 novembre 2001.

Carvalho e Silva, J. (coord.), Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. Direção Geral da Educação, Ministério da Educação.

Carvalho e Silva, J. (coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023a). *Aprendizagens Essenciais, 10º ano, Ensino Secundário, Matemática A.* Ministério da Educação.

Carvalho e Silva, J. (coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023b). *Aprendizagens Essenciais, 10º ano, Ensino Secundário, Matemática B.* Ministério da Educação.

Carvalho e Silva, J. (coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023c). *Aprendizagens Essenciais, Matemática, Cursos Profissionais*. Ministério da Educação.

Carvalho e Silva, J. (2023). A ilusão dos círculos uninominais, *Diário de Coimbra*, 30 agosto 2023.

Carvalho e Silva, J. (2024a). Matemática e Democracia, *Observador*, 15 junho 2024. https://observador.pt/opiniao/matematica-e-democracia/

Carvalho e Silva, J. (2024b). Controvérsias Eleitorais, *Página da Educação, 223*, 68.

Cruchinho, C. (2021). O que nos trouxe de novo a disciplina de MACS? Blogue *Harmonices Mundi*. https://hmciencias.blogspot.com/search/label/MACS

Damerow, P., Dunkley, M. E., Nebres, B. F., & Werry, B. (Eds.). (1984) *Mathematics for All - Problems of cultural selectivity and unequal distribution of mathematical education and future perspectives on mathematics teaching for the majority*. Division of Science Technical and Environmental Education, UNESCO.

Dhersin, J. S., Kaper, H., Ndifon, W., Roberts, F., Rousseau, C., & Ziegler, G. M. (Eds.). (2022). *Mathematics for action: Supporting science-based decision-making*. UNESCO.

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário (GTDCPMES) (2024). *Coletânea de tarefas das turmas piloto - Modelos matemáticos nas eleições e na partilha (Matemática A 10.º ano)*. Ministério da Educação. https://aem.dge.mec.pt/pt/recursos/ensino-secundario

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In K. Stacey, & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy* (pp. 35-55). Springer.

Paulos, J. A. (1991). *Inumerismo: A analfabetismo matemático e as suas consequências*. Publicações Europa-América.

SEDES (2018). *PROPOSTA. Reforma eleitoral em Portugal*. Lisboa, 19 de Janeiro de 2018.

Skovsmose, O. (2020). Critical mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition) (pp. 154-159). Springer.

Steen, L. A. (2001). *MATHEMATICS and DEMOCRACY*, *The Case for Quantitative Literacy*, Prepared by the National Council on Education and the Disciplines.

MATEMÁTICA INCLUSIVA E RELEVANTE: UM CAMINHO PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR

INCLUSIVE AND RELEVANT MATHEMATICS: A PATH TO SCHOOL'S FINANCIAL EDUCATION

Corália Pimenta

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro, Instituto Politécnico de Coimbra, ISEC – Portugal

coraliapimenta@gmail.com

Ana Santiago

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, CICS.NOVA Portugal

asantiago@esec.pt

Alexandra Sofia Rodrigues

CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, UIED – Portugal

alexsofiarod@gmail.com

Resumo: A promoção da Educação Financeira Escolar é essencial para formar uma sociedade crítica, informada e responsável, que capacite os jovens para compreender e interagir de forma consciente e reflexiva. Conceitos como poupança, gestão de orçamento e consumo responsável e sustentável contribuem para o desenvolvimento de competências que se revelam úteis ao longo da vida e fomentam o questionamento perante os contextos sociais, económicos e políticos. A Matemática pode desempenhar um papel crucial na formação de cidadãos capazes de questionar e gerir as suas finanças pessoais, promovendo a aquisição dessas competências na sala de aula, num ambiente interdisciplinar e inclusivo. Este artigo analisa o desempenho de alunos do primeiro ciclo, constituída por alunos do 4.º ano de escolaridade, durante a realização de uma tarefa que inclui a resolução de um problema. O estudo tem como objetivo investigar de que forma os alunos interpretam o problema, que conhecimentos de matemática mobilizam e que decisões tomam, tendo em conta a aplicação de princípios de sustentabilidade. Adotou-se uma abordagem qualitativa, inserida num paradigma interpretativo, com a análise de um estudo de caso. Os resultados evidenciam que os alunos se envolveram ativamente na resolução da tarefa, revelando capacidade de reflexão, de resolução do problema e uma comunicação eficaz das suas ideias. Verificou-se ainda que neste contexto, que contemplava alunos com dificuldades de aprendizagem, foi possível promover uma compreensão do problema, trabalhar a sustentabilidade e assegurar a participação de todos.

Palavras-chave: matemática para todos, educação financeira escolar, sustentabilidade, resolução de problemas.

Abstract: Promoting Financial Education in schools is essential to developing a critical, informed, and responsible society, empowering young people to understand and interact consciously and reflectively. Concepts such as saving, budget management, responsible and sustainable consumption contribute to developing skills that prove useful throughout life and foster questioning within social, economic, and political contexts. Mathematics can play a crucial role in preparing citizens capable of questioning and managing their finances, promoting the acquisition of these skills in the classroom in an interdisciplinary, inclusive, and accessible environment. This purpose of this article is to analyse the performance of primary school students, specifically fourth-grade students, as they complete a task that includes solving a problem. The study aims to investigate how students interpret the problem, what mathematical knowledge they apply, and what decisions they make, considering the application of sustainability principles. A qualitative approach within an interpretative paradigm was adopted, with the analysis of a case study. The results show that the students actively engaged in the task, demonstrating reflection, problem-solving skills, and effective communication of their ideas. Additionally, in this context, which included students with learning difficulties, it was possible to promote a comprehensive understanding of the problem, address sustainability, and ensure everyone's participation.

Keywords: mathematics for all, school’s financial education, problem solving.

Introdução

Um dos objetivos da Agenda 2030 para Portugal é aumentar significativamente o número de jovens e adultos com qualificações relevantes para serem cidadãos interventivos no século XXI. Dotar os alunos de competências e conhecimentos que promovam a sua autoconfiança e uma aprendizagem contínua é crucial para a qualidade da sua contribuição à sociedade (European Commission, 2021; Rodrigues, 2018). O domínio das disciplinas é essencial para a aquisição de competências (Vinão, 2007), que se desenvolvem e integram saberes (Almeida, 2021; Santiago, 2021), evoluem em nome e conteúdo (Matos et al., 2019) e promovem o desenvolvimento de cidadãos e profissionais do século XXI (Rodrigues, 2015).

A escola acolhe um número crescente de alunos com motivações, interesses e ritmos de aprendizagem diversos, ao mesmo tempo que se foca em formar jovens capazes de enfrentar os desafios do século XXI (Torres et al., 2016). Torna-se essencial agir para preservar a natureza e garantir a dignidade humana, assegurando a aquisição de valores e competências (conhecimentos, capacidades e atitudes) que promovam decisões responsáveis e fundamentadas. Documentos como o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017), a *Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania* (Monteiro et al., 2017) e as *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) e *Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023) contribuem para um currículo inclusivo, democrático e inovador, visando o desenvolvimento de competências e múltiplas literacias para responder às exigências de um mundo em constante mudança (Monteiro et al., 2017). A União Europeia (EU) definiu prioridades estratégicas para assegurar uma educação de qualidade, inclusiva e acessível a todos os alunos, independentemente da sua origem socioeconómica, sublinhando a importância da educação financeira como competência essencial para a vida, preparando os jovens para se tornarem cidadãos responsáveis e conscientes das dinâmicas económicas e políticas que os envolvem.

Um dos documentos que define estas prioridades é o Quadro Estratégico para a Cooperação Europeia no Domínio da Educação e Formação, denominado por *Education and Training 2020* (ET 2020). Embora forneça diretrizes abrangentes para a educação na UE, as metas mais recentes estão integradas no *Plano de Ação para a Educação Digital 2021-2027* e no *Programa Erasmus+*, que também promovem competências financeiras e digitais. A Recomendação do Conselho sobre Competências-Chave para a Aprendizagem ao Longo da Vida (2018) é igualmente relevante, ao definir a literacia financeira como uma competência fundamental a ser promovida nos sistemas educativos. Estes documentos sublinham a importância da literacia financeira como parte de uma formação integral, preparando os cidadãos europeus para os desafios económicos e sociais futuros.

Este artigo analisa o comportamento dos alunos durante a realização de uma tarefa que mobiliza competências de educação financeira, uma vez que o problema conduz ao imperativo de adquirir materiais escolares no início de um novo ano letivo, avaliando se aplicam práticas de economia circular, se são influenciados pela publicidade ou escolhas de terceiros, se distinguem entre o necessário e o supérfluo, e se conseguem relacionar despesas com rendimentos no processo de decisão. Procuramos compreender o impacto do confronto com estas questões através de uma tarefa prática, que inclui jogos didáticos e a resolução de um problema de aplicabilidade real, no contexto da compra de materiais escolares, coincidindo com o regresso às aulas. Este estudo tem como objetivo investigar de que forma os alunos abordam o problema proposto, que conhecimentos de matemática mobilizam e que decisões adotam, tendo em conta que se pretende que adotem princípios de sustentabilidade.

Adicionalmente, exploramos o papel da disciplina de Matemática no desenvolvimento da educação financeira em contexto escolar.

Na análise das resoluções apresentadas, foram considerados os conhecimentos, capacidades e atitudes adquiridos pelos alunos, resultantes da mediação e interação estabelecida no grupo. A experiência foi realizada em contexto de sala de aula, utilizando um estudo de caso, e a temática abordada emergiu da experiência adquirida no âmbito de um projeto de promoção da Educação Financeira.

Revisão de literatura

Educação Financeira Escolar para Todos

A educação financeira escolar começou a ganhar relevância global nas últimas décadas do século XX, mas o seu reconhecimento formal como prioridade educacional intensificou-se no início do século XXI, especialmente após a crise financeira de 2008. Esta crise expôs a falta de literacia financeira da população, agravando os impactos da recessão. Considerou-se que uma melhor educação financeira poderia ter mitigado esses efeitos, ao melhorar a compreensão dos riscos financeiros e evitar práticas prejudiciais, como o endividamento excessivo. Desde então, organizações internacionais, como a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económicos (OCDE), têm promovido a educação financeira como uma competência essencial para todos os cidadãos. Em 2012, esta preocupação refletiu-se no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), ao incluir, pela primeira vez, a questão da literacia financeira.

As mudanças socioeconómicas, como o crescimento da economia global, a digitalização dos serviços financeiros e o aumento da responsabilidade individual na gestão de finanças pessoais, tornaram urgente que os cidadãos adquiram conhecimentos financeiros para tomar decisões informadas e responsáveis. Em resposta, governos e organizações internacionais têm criado programas específicos para promover a educação financeira nas escolas. A União Europeia, por exemplo, reconheceu a literacia financeira como uma das competências-chave para a aprendizagem ao longo da vida, na Recomendação do Conselho de 2018, integrada em várias iniciativas (Conselho da União Europeia, 2018).

A escola é vista como o ambiente propício para o desenvolvimento de competências em literacia financeira, permitindo que todos os alunos, independentemente do seu contexto social ou económico, adquiram ferramentas para analisar criticamente, avaliar e tomar decisões conscientes nas situações do dia-a-dia. Além disso, a educação financeira escolar contribui para a redução da desigualdade social e económica, preparando os jovens para uma gestão responsável das suas finanças, tendo também efeito nas suas famílias (Dias et al, 2013). Uma definição de educação financeira foi estabelecida pela OCDE, especialmente através da sua Rede Internacional de Educação Financeira (INFE). A OCDE tem desempenhado um papel crucial no desenvolvimento de diretrizes globais para a educação financeira e na promoção da sua relevância.

> Educação Financeira é o processo pelo qual os consumidores financeiros/ investidores melhoram a sua compreensão sobre os conceitos e produtos financeiros e, através da informação, instrução e/ou aconselhamento objetivos, desenvolvam as habilidades e a confiança para tomar consciência de riscos e oportunidades financeiras, para fazer escolhas informadas, saber onde buscar ajuda e tomar outras medidas eficazes para melhorar a sua proteção e o seu bem-estar financeiro. (OCDE, 2005a, p. 26)

Embora a OCDE não apresente uma definição única para educação financeira escolar, aborda a questão de forma significativa na sua estratégia para a educação financeira, enfatizando a importância de iniciar o processo desde os primeiros anos de escolaridade. A Rede Internacional de Educação Financeira (INFE) da OCDE propôs diretrizes para a inclusão da educação financeira nos currículos escolares. O documento Diretrizes para a Educação Financeira nas Escolas (OCDE, 2012) é uma referência importante, onde a educação financeira escolar é vista como “O processo de capacitar os estudantes, desde a infância, com conhecimentos e competências que lhes permitam gerir eficazmente os seus recursos financeiros, tomar decisões informadas e, consequentemente, contribuir para o bem-estar financeiro a longo prazo” (p. 14).

Alguns investigadores têm apresentado definições e abordagens mais detalhadas sobre a educação financeira escolar. Da Silva et al. (2024) enfatizam que:

> (…) educar financeiramente pode ser entendido como prover o estudante com habilidades e competências que façam com que este sujeito seja um leitor do cenário econômico em que se encontra inserido e atuando (p. 125).
> Um novo consumidor deve nascer dessa educação, um indivíduo-consumidor que saiba ler, refletir e interpretar o contexto social, econômico, político e tome suas decisões amparadas por conhecimentos proporcionadas pelas ações em cenários para investigação. Assim, a Educação Financeira (EF) em nosso entendimento epistemológico transcende largamente a Matemática Financeira (MF). Enquanto a MF se preocupava em habilitar os estudantes a realizar cálculos matemáticos presentes em situações financeiras, sem se preocupar em contextualizar cenários econômicos reais e que gerassem discussões além dos cálculos e dos resultados obtidos, com a EF o objetivo vai além dessa habilitação proposta pela MF (Silva et al., p. 126).

Santiago et al. (2018) questionam se “no ambiente escolar, o ensino de educação financeira deverá ter como foco finanças pessoais ou haveria algo mais a tratar?” (p. 212), “um currículo de educação financeira para a escola deveria discutir temas tão específicos como aqueles apresentados nos exemplos de itens do PISA ou deveria discutir temas mais gerais na direção de educar financeiramente os estudantes?” (p. 213), “é possível esperar que, a partir do ensino formal, os estudantes desenvolvam habilidades, mudem comportamentos e atitudes e assumam atitudes e valores?” (p. 213).

Relativamente à proposta da OCDE de educar financeiramente a população, estes investigadores consideram que essa terá resultados importantes para as nações e para o futuro dos estudantes, mas que se deve repensar a formação desejável para ser introduzida na escola.

No entanto, a Educação Financeira Escolar ultrapassa uma análise apenas matemática e económica das situações em contexto, abrangendo também aspetos não matemáticos que visam promover uma formação cidadã, crítica, política e ambiental (Hartmann et al., 2024).

O desenvolvimento da literacia financeira pode melhorar a capacidade para analisar, gerir e planear situações que envolvam dinheiro, incrementar o nível de conhecimentos financeiros da população e promover comportamentos financeiros sustentáveis.

Educação Financeira Escolar em Portugal

Portugal, acompanhando os movimentos internacionais, iniciou o desenvolvimento de uma estratégia de Educação Financeira. Desde 2008, o Banco de Portugal (BdP) recebeu competências específicas de supervisão comportamental, assumindo um papel relevante nesta área. Em 2011, o Conselho Nacional de Supervisores Financeiros criou o *Plano Nacional de Formação Financeira (PNFF)*, com o objetivo de elevar o nível de conhecimentos financeiros da população e promover comportamentos financeiros adequados. Este plano propõe uma visão integrada de projetos de formação e a colaboração entre as partes interessadas, visando aumentar o bem-estar da população e a estabilidade do sistema financeiro (BdP, CMVM & ISP, 2011).

O PNFF estabeleceu cinco objetivos: melhorar conhecimentos e atitudes financeiras; apoiar a inclusão financeira; desenvolver hábitos de poupança; promover o uso responsável do crédito e fomentar hábitos de precaução. Definiram-se também cinco áreas de atuação: estudantes do ensino básico e secundário, universitários, trabalhadores, grupos vulneráveis e população em geral (BdP, CMVM & ISP, 2011). Através do portal www.todoscontam.pt, o PNFF oferece conteúdos sobre finanças pessoais, simuladores, bibliotecas, eventos, notícias e um boletim informativo.

Os estudantes do ensino básico e secundário são uma área de atuação do plano, resultando numa parceria com o Ministério da Educação e Ciência (MEC). Em julho de 2013, o PNFF e o MEC elaboraram o *Referencial de Educação Financeira (REF)*, um documento orientador para a implementação da Educação Financeira em contextos educativos e formativos (Dias et al, 2013). O REF abrange o Ensino Pré-escolar, Básico, Secundário e a Educação e Formação de Adultos, visando o desenvolvimento da educação financeira em cidadania e gestão de projetos. Deve ser abordado, a par com a *Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania*, de forma obrigatória, em pelo menos dois ciclos do ensino básico (Monteiro et al., 2017), promovendo a formação pessoal e social dos alunos.

O papel da Matemática no desenvolvimento da Educação Financeira Escolar

A resolução de problemas de Matemática contextualizados, fundamentados em situações do dia-a-dia, é crucial para o desenvolvimento da educação financeira nas escolas. Esta abordagem permite aos alunos compreender conceitos abstratos e reconhecer sua aplicabilidade no quotidiano, promovendo uma aprendizagem significativa. Ao enfrentarem situações de avaliação de necessidades, gestão de poupanças e elaboração de orçamentos, os estudantes são desafiados a aplicar o pensamento matemático, desenvolvendo competências essenciais para o futuro. A Matemática, enquanto disciplina estruturante do raciocínio lógico e quantitativo, oferece as ferramentas necessárias, incluindo espírito crítico, para a compreensão destas questões (OCDE, 2017). Rodrigues e Pimenta (2017) sublinham a importância de trazer as vivências dos alunos para a sala de aula, promovendo a reflexão conjunta sobre os desafios atuais. Este processo pode passar pela resolução de problemas, que podem alinhar-se com as necessidades e interesses pessoais dos alunos, valorizando a tomada de decisões assertivas. As investigadoras sublinharam que, embora os alunos tenham uma base de conhecimento, muitos ainda enfrentam dificuldades na aplicação prática desses conceitos, o que indica a necessidade de uma abordagem pedagógica mais eficaz na educação financeira.

Lusardi e Mitchell (2014) argumentam que o ensino da Educação Financeira deve incluir situações práticas e problemas do dia-a-dia, pois isso aumenta a retenção do conhecimento e a capacidade de transferência para o mundo real. Mandell (2009) sugere que a integração da educação financeira no currículo escolar, com ênfase em problemas aplicados, pode melhorar as atitudes dos jovens em relação ao consumo e à poupança, preparando-os para decisões financeiras complexas na vida adulta. Além disso, uma abordagem baseada na resolução de problemas reais pode aumentar a motivação e o interesse dos alunos pela Matemática, devido à sua aplicabilidade direta no quotidiano, promovendo um maior envolvimento e uma relação mais positiva com a disciplina (Boaler, 2015).

Por sua vez, a OCDE afirma que a resolução desta tipologia de problemas tem potencialidade, não somente para desenvolver competências matemáticas nos estudantes, como também para promover uma cidadania mais consciente e responsável, à medida que aprendem a avaliar riscos e a tomar decisões conscientes.

Em suma, a articulação entre a Matemática e a Educação Financeira pode promover o desenvolvimento de competências matemáticas e de literacia financeira, capacitando os alunos para a gestão de recursos e a tomada de decisões, competências que se perpetuarão ao longo de toda a sua vida. A integração de problemas reais no ensino de Matemática pode contribuir para a formação de cidadãos informados e críticos, capazes de interagir de forma responsável com o contexto económico. A utilização de problemas matemáticos contextualizados em questões financeiras do quotidiano pode ser uma estratégia pedagógica eficaz para promover a Educação Financeira nas escolas. Este enfoque pedagógico, alinhado com as recomendações da OCDE (2012) nas Diretrizes para a Educação Financeira nas Escolas, enfatiza a importância de uma abordagem prática e contextualizada para melhorar a compreensão financeira dos jovens.

Opções e procedimentos metodológicos

Nesta investigação, adotou-se uma abordagem qualitativa com um paradigma descritivo interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), fundamentada num estudo de caso. O estudo foi realizado, no início do ano letivo do ano letivo 2024/25, numa escola do primeiro ciclo de um agrupamento de ensino público, envolvendo 10 alunos do 4.º ano de escolaridade, com a intenção de se alargar, numa fase posterior, no âmbito de um projeto de Educação Financeira, esta e outras tarefas, a outras turmas e escolas. Propôs-se uma tarefa que incluiu a dinamização de jogos didáticos digitais, para motivar os alunos e aferir os seus conhecimentos e práticas de consumo, em particular no que respeita à compra de materiais escolares. Envolveu ainda a resolução de um problema de contexto real, que pretendeu estimular a reflexão e a tomada de decisões conscientes, tendo em consideração as necessidades e contexto socioeconómico. As tarefas, projetadas de modo a envolver toda a turma na dinâmica da sala de aula, foram implementadas em duas sessões de trabalho, de 90 minutos, e incluíram a apresentação das resoluções e a discussão em turma.

Na análise dos registos recolhidos – dos alunos (RA) e da professora (RP) – consideraram-se os conhecimentos dos alunos nas áreas de Matemática e Educação Financeira. Para uma análise aprofundada, selecionaram-se alguns excertos das resoluções apresentadas, as que melhor expuseram a situação proposta e que descreveram o conhecimento e o raciocínio dos alunos, mas que também pelas suas particularidades podem ser úteis para melhorar a ação do docente e promover a aprendizagem dos alunos. Os dados foram recolhidos através de técnicas de recolha não documental – inquirição e observação direta (Bryman, 1988) – e documental, incluindo o registo do desempenho e das questões levantadas pelos alunos em sala (RP), a resolução apresentada pelos mesmos (RA) e a apresentação dos resultados (RP).

Neste estudo, para a construção da situação problema, considerámos o preconizado para o primeiro ciclo no *Referencial de Educação Financeira* português, associando a temática à resolução de problemas e à sustentabilidade, contextualizada através das atividades desenvolvidas no projeto Eco-Escolas.

Desenho da tarefa

As campanhas publicitárias relacionadas com o regresso às aulas, que ocorrem durante o verão, quando os alunos ainda estão de férias, são cada vez mais preocupantes. Em Portugal, estas campanhas são massivamente difundidas nos meios de comunicação, incentivando o consumo sem promover a reutilização ou a economia circular. A insistente promoção de produtos novos, desde material escolar a vestuário, leva frequentemente as famílias a adquirirem itens desnecessários, descartando materiais em bom estado. Este ciclo de consumo excessivo não só fomenta uma cultura de descartabilidade, como também agrava desigualdades sociais, pressionando pais e alunos a comprarem produtos mais caros e recentes.

Este tipo de publicidade contradiz os esforços das escolas em áreas como sustentabilidade e responsabilidade social, especialmente nas que desenvolvem projetos de educação para a cidadania e educação financeira. Dado que as crianças são particularmente vulneráveis à publicidade e influenciam significativamente as decisões de compra das famílias, decidimos criar a tarefa descrita a seguir, com o intuito de contrariar esta tendência.

A tarefa proposta, intitulada "Regresso à Escola", foi concebida para ser trabalhada em turmas heterogéneas, tanto a nível socioeconómico e cultural, como em termos de aquisição de aprendizagens. Esta tarefa integra diversas abordagens e metodologias, promovendo a reflexão e a comunicação através de uma atividade prática, que teve início na primeira semana do ano letivo, com uma atividade lúdica, incluindo jogos interativos, como palavras cruzadas, *quizzes* (figura 1) e a resolução de um problema (figura 2, figura 3).

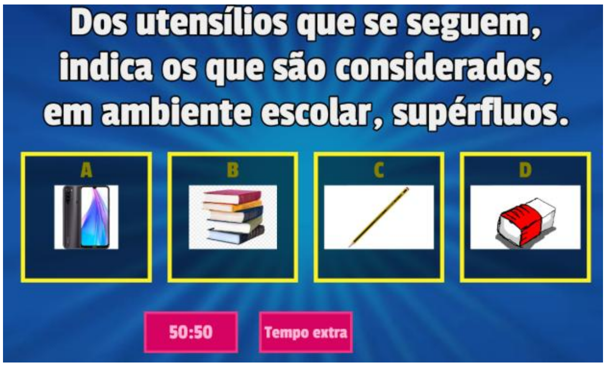


Figura 1. *Quizz* coletivo: conhecimento e práticas de consumo.

Regresso à Escola

Na semana passada, o Eduardo e a sua mãe planearam ir comprar os materiais necessários para a Escola.

A mãe pediu ao Eduardo que verificasse se já tinha alguns dos materiais pedidos pela professora e se esses estariam em bom estado.

Depois de fazer essa verificação, o Eduardo ajudou a mãe a fazer uma lista de materiais necessários. Nessa lista, acrescentaram o equipamento para a Educação Física, pois deram conta que nas férias o Eduardo tinha crescido imenso e que agora nada lhe servia. Consultaram depois alguns panfletos publicitários para decidirem onde comprar esses materiais.

Consulta os materiais pedidos pela professora, aqueles que o Eduardo já tem e que se encontram em bom estado, e indica quais terá de adquirir. De seguida, analisa o problema que te é colocado, em particular as possibilidades de escolha, e toma a decisão que consideras ser a melhor.
Fundamenta essa decisão, apresentando resultados e justificando as tuas ideias e escolhas.

Figura 2. Introdução do problema "Regresso à Escola".

Regresso à Escola

Depois de perceberem que material seria necessário, o Eduardo e a mãe pesquisaram quais as lojas que estariam a praticar os melhores preços. Chegaram à conclusão que as lojas A e B tinham as melhores opções e que os materiais eram de boa qualidade. Contudo, notaram que a loja A ficava mesmo ao lado da casa do Eduardo, mas a loja B ficava a mais de 5 km de distância, o que poderia pesar na decisão a tomar.
A deslocação para a loja B implicaria a viagem ida-e-volta de autocarro. O Eduardo tem passe gratuito, mas a mãe teria de pagar o bilhete, no total de 4€.
Observa os preços praticados nas lojas A e B e ajuda o Eduardo e a mãe a tomarem a decisão mais acertada.

Loja A

lápis de carvão: 1 €/unidade
caneta (qualquer cor): 1,5 €/unidade
borracha: 1,5 €/unidade
afiadeira: 2 €/unidade
cadernos A4: 3 €/unidade
12 lápis de cor: 2 €
12 marcadores: 3,5 €
resma de micas: 2,5 €
dossiê: 3 €/ unidade
fato de treino: 15 €
sapatilhas: 35 €

Loja B

lápis de carvão: 2 €/ 3 unidades
conjunto de canetas de 3 cores (inclui azul): 3 €/unidade
borracha: 2 €/unidade
afiadeira: 2,5 €/unidade
cadernos A4: 5 €/4 unidades
12 lápis de cor: 2,5 €
24 marcadores: 5 €
resma de micas: 3 €
dossiê: 4 €/ unidade
fato de treino: 20 €
sapatilhas: 30 €

Fonte: Autores (2024).

Figura 3. Resolução do problema "Regresso à Escola".

Este problema visou sensibilizar os alunos para a distinção entre o necessário e o supérfluo, demonstrando como pequenas despesas podem acumular-se num montante significativo. Enfatizou-se a importância de elaborar uma lista de necessidades e comparar ofertas antes de efetuar compras, mostrando que nem sempre a escolha aparentemente mais atrativa ou económica resulta em menor custo. A proposta resultou da experiência que as investigadoras têm tido na implementação de outras tarefas, baseando igualmente nas orientações transmitidas pelo Referencial e nos exemplos partilhados no Caderno de Educação Financeira para o 1.º ciclo. Para resolverem o problema, os alunos tiveram de interpretar conceitos de educação financeira, realizar contagens e estimativas, e desenvolver um plano de ação com base nos dados recolhidos.

Resultados e conclusões

Nesta secção serão apresentados alguns resultados da investigação, recorrendo aos registos da professora (RP) e os recolhidos das resoluções dos alunos (RA). As investigadoras começam por salientar o entusiasmo dos alunos nas atividades lúdico-práticas, como palavras cruzadas e *quizzes*. No entanto, realçam que alguns desconheciam o significado de "supérfluo" e que demonstraram pouca consciência sobre a pouca utilidade que certos materiais que adquirem, por vezes a elevado custo, possuem (RP).

Figura 4. Consciencialização das reais necessidades de consumo

Relativamente aos "materiais pedidos pela professora" (figura 4), o único impasse na escolha dos alunos envolveu a aquisição dos manuais e cadernos de atividades. Apenas um aluno sabia que os manuais eram gratuitos, sendo necessário adquirir apenas os cadernos de atividades, o que sugere que este tema pode não ser discutido em contexto familiar (RP).

A exploração do enunciado do problema (figura 3) gerou debate sobre a importância de planear compras, considerando a pesquisa prévia de lojas, por exemplo, através da internet ou publicidade, para identificar os melhores preços. Discutiu-se ainda que o mais barato nem sempre é a melhor opção, e que determinados pacotes, apesar de excederem as necessidades imediatas, podem ser mais vantajosos a longo prazo. Como exemplo, alguns alunos concluíram que, embora a professora tenha pedido apenas um lápis e o preço na loja A fosse mais baixo, seria mais económico comprar mais lápis na loja B, dado o uso contínuo durante o ano letivo. A resolução individual mostrou que outros alunos aplicaram raciocínios semelhantes para a compra de canetas e dos cadernos (RP).

A resolução dos alunos revelou curiosidades sobre a forma como interpretam a informação, organizam ideias e aplicam os conhecimentos adquiridos em Matemática. A figura 5 ilustra algumas dessas abordagens, que, embora nem sempre corretas, demonstram o conhecimento dos alunos. Verificámos, por exemplo, que embora não havendo dificuldades de compreensão ou cálculo por parte do aluno em questão, dificuldades na apresentação dos dados e a falta de atenção na envolvência desses durante o cálculo, conduziu a um resultado incorreto.

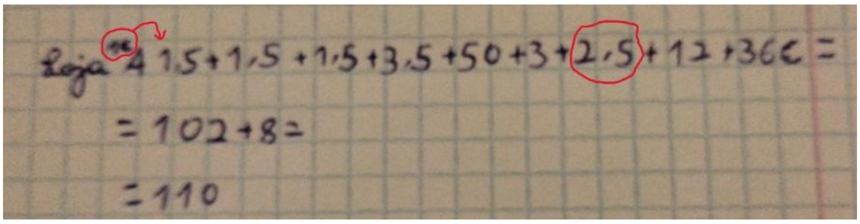


Figura 5. Despesas associada à loja A (RA)

De acordo com os registos do aluno, verificámos que identificou a lista de materiais essenciais (figura 4), mas que se esqueceu de registar na sua expressão numérica 3€, correspondentes ao dossiê ou aos cadernos. Por sua vez, no momento de cálculo, ao utilizar estratégias que aprendeu na sala de aula, realizou o cálculo[1], esquecendo de adicionar 2,5. Acrescenta-se que a representação de $12 + 36$, apresentada na expressão numérica da figura 5, foi posteriormente esclarecida pelo aluno, como sendo o valor monetário do caderno de atividades de Inglês (12€) e dos cadernos de Matemática, Português e Estudo do Meio ($3 \times 12 = 36$€). Como tal, o aluno não calculou a despesa associada à loja A e à compra dos cadernos, que seria de 115,50 €. Esclarece-se os valores dos cadernos de atividades foram estimados previamente, com o grupo turma. Nesta situação, o aluno interpretou a disciplina de Inglês como algo isolado, eventualmente por ser ministrada por outra docente.

$$1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 3{,}5 = (1 + 1 + 1 + 3) + (0{,}5 + 0{,}5) + (0{,}5 + 0{,}5) = 8 \quad (1)$$

Constatámos, ao analisar a resposta de outro aluno, respeitante às despesas associadas à loja B, que há entendimento na seleção dos materiais necessários, que são aplicadas estratégias de cálculo corretas, mas que o reduzido foco de atenção no momento de organizar os dados numa expressão numérica, promove igual desvalorização de dados enunciados.

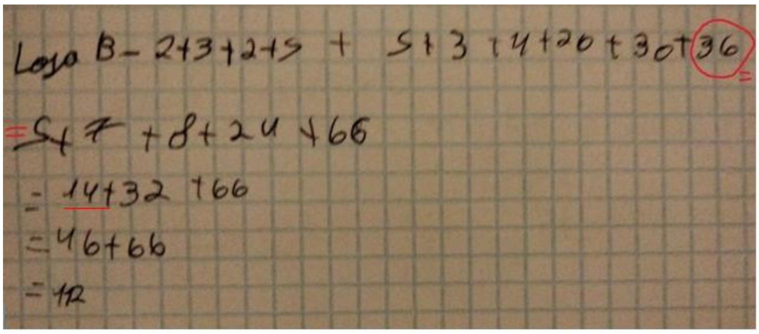


Figura 6. Despesas associada à loja B (RA)

Nesta resolução (figura 6), verificamos que o aluno não incluiu o valor de um dos cadernos de atividades, eventualmente o de Inglês, que também se esqueceu de associar a despesa de deslocação enunciada no problema (a mãe do Eduardo teria de pagar 4€ ao viajar no autocarro) e que cometeu um erro de cálculo. Assim, este aluno também não calculou corretamente a despesa, neste caso associada à loja B, a qual totalizaria de 126 €. Esta situação foi questionada durante a apresentação dos resultados, em contexto turma, percebendo-se claramente que, maioritariamente, os alunos desvalorizaram a despesa de transporte, como se o custo total apenas estivesse associado aos materiais que compraram.

Quando se procurou identificar que loja seria escolhida pelos alunos para efetuarem a compra dos materiais, verificámos, sobretudo através da exposição oral, pois revelaram dificuldade em expor por escrito as suas conclusões, que optariam pela loja B, sobretudo por apresentar um preço unitário mais baixo e de poderem ficar na posse de material para utilizar durante o ano letivo. Na globalidade, os alunos consideraram que embora os custos na loja B fossem mais elevados, a diferença compensaria. Nas figuras 7 e 8 podemos identificar algumas tentativas de exposição dessas ideias.

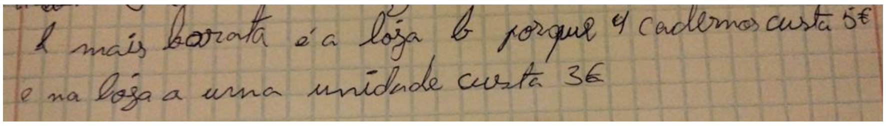


Figura 7. Conclusão do aluno A (RA)

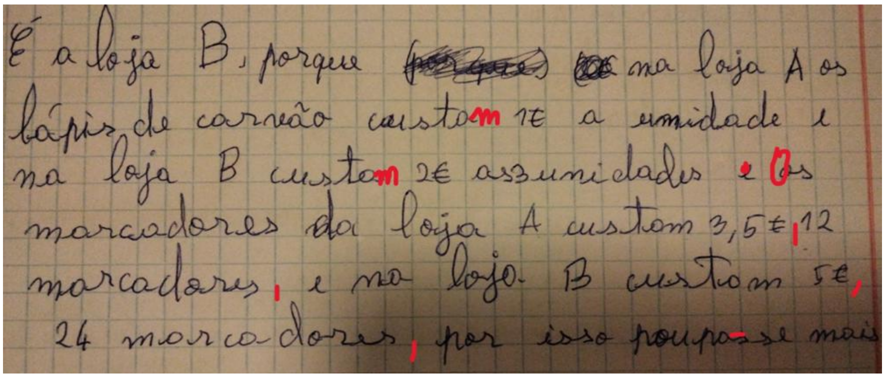


Figura 8. Conclusão do aluno B (RA)

Considerações finais

De acordo com os resultados e a análise da secção anterior, os alunos demonstraram grande entusiasmo na realização de tarefas não rotineiras, especialmente quando estas envolvem situações da sua vida quotidiana. Contudo, verificou-se que, apesar do aparente domínio do tema, o conhecimento real dos alunos acerca de questões como a necessidade de materiais escolares, a compra unitária ou em conjunto, e o impacto de despesas indiretas nos custos totais é limitado. Observou-se ainda que estes tópicos parecem ser geridos exclusivamente pelos familiares (pais), com os alunos a mostrar pouca consciência dos custos envolvidos nas suas necessidades escolares. Questionamo-nos se, no contexto real, não é também esta a situação que ocorre com as famílias e que, pesando nos orçamentos, coloca as pessoas em dificuldades que, à partida, não esperariam.

Na exploração deste tema, identificámos diversas interligações com questões de cidadania e sustentabilidade, sobretudo no que concerne à tomada de decisões informadas sobre a seleção dos materiais que seriam estritamente necessários. Esse processo incluiu a avaliação criteriosa das quantidades a serem adquiridas para suprir necessidades de curto e longo prazo, confrontando os custos e as potenciais poupanças. Além disso, possibilitou, aos alunos, desenvolver uma compreensão ampliada sobre como determinadas escolhas, aparentemente mais económicas, poderiam acarretar gastos adicionais indiretos. Esta análise comparativa permitiu que os alunos constatassem que nem sempre a opção aparentemente mais barata se traduz na mais vantajosa, revelando a importância da reflexão crítica e da tomada de decisões conscientes. A matemática desempenhou um papel fundamental na abordagem destas questões, uma vez que os conhecimentos mobilizados permitiram aos alunos avaliar e tomar decisões informadas e responder adequadamente ao desafio proposto.

Importa ainda salientar que, neste contexto heterogéneo de alunos, incluindo alguns com dificuldades de aprendizagem, foi possível promover uma compreensão abrangente do problema e assegurar a participação de todos. Estes resultados sugerem que é possível trabalhar a Educação Financeira, no contexto escolar, de forma acessível e inclusiva.

Concluímos que este desafio deve ser ampliado a outros grupos, permitindo uma maior disseminação da Educação Financeira Escolar, abrangendo temas mais amplos. Espera-se que, além de desenvolverem competências nesta área, os alunos possam modificar comportamentos e adotar atitudes mais responsáveis.

Referências

Almeida, M. C. (2021). Recompondo o ensino da análise infinitesimal nos liceus (1948-1953). *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *9*(3) https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.13008.

BdP (2012). *Inquérito à Literacia Financeira da População Portuguesa 2010*. (Departamento de Supervisão Bancária) http://clientebancario.bportugal.pt/pt-PT/Publicacoes/InqueritoLiteraciaFinanceira/Biblioteca%20de%20Tumbnails/S%C3%ADntese%20dos%20resultados%20do%20Inquérito%20à%20Literacia%20Financeira.pdf. Acesso em: 6 de outubro de 2024

BdP, CMVM & ISP (2011). Plano Nacional de Formação Financeira 2011-2015: Linhas de orientação. Lisboa. http://www.cmvm.pt/CMVM/Cooperação%20Nacional/Conselho%20Nacional%20de%20Supervisores%20Financeiros/Documents/Plano%20Nacional%20de%20Formação%20Financeira.pdf.

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* Jossey-Bass.

Bogdan, R., & Bilken, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Bryman, A. (1988). *Quality and quantity in social research*. Unwin Hyman.

Canavarro A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M. & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos*. *Ensino básico. Matemática*. DGE, ME.

Carvalho e Silva, J. (coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais, Matemática, Ensino Secundário*. DGE, ME.

Conselho da União Europeia. (2018). *Recomendação do Conselho sobre Competências-Chave para a Aprendizagem ao Longo da Vida*. Jornal Oficial da União Europeia, C 189/01.

Da Silva, A. M., Bastos, R. R., & de Oliveira, R. (2024). Educação Matemática Escolar no século XXI: A formação de estudantes e professores de educação básica. *Perspectivas de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática*, 89.

Dias, A., Oliveira, A., Pereira, C., Abreu, M. T., Alves, P., Basto, R., Silva, R. & Narciso, S. (2013). *Referencial de Educação Financeira*. Ministérios da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/referencial-de-educacao-financeira

European Commission (2021). *Education and Training Monitor 2021. The future of education in the EU. Trends in education in the EU*. https://op.europa.eu/webpub/eac/education-and-training-monitor-2021/en/chapters/foreword.html#foreword.

Hartmann, A. L., Baroni, A. K., Domingos, A., & Maltempi, M. (2024). A Educação Financeira no Brasil e em Portugal: Percursos e reflexões sobre as propostas voltadas à Educação

Básica e Secundária. *Quadrante, 33*(1), 112–132. https://doi.org/10.48489/quadrante.35191

Lusardi, A., & Mitchell, O. S. (2014). The economic importance of financial literacy: Theory and evidence. *Journal of Economic Literature, 52*(1), 5–44.

Mandell, L. (2009). The impact of financial education in high school and college on financial literacy and subsequent financial decision making. *In A. Lusardi (*Ed.), *Overcoming the saving slump: How to increase the effectiveness of financial education and saving programs* (pp. 257–279). University of Chicago Press. https://doi.org/10.7208/chicago/9780226497105.001.0001

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnacão, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção Geral da Educação (DGE). https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Matos, J. M., Rodrigues, A., & Candeias, R. (2019). A formação profissional em escolas primárias e em escolas normais primárias portuguesas (1844-1926). *Educação*, *42*(2), 178-188. https://doi.org/10.15448/1981-2582.2019.2.33830.

Monteiro, R. (Coord.), Ucha, L., Alvarez, T., Milagre, C., Neves, M. J., Silva, M., Prazeres, V., Diniz, F., Vieira, C., Gonçalves, L. M., Araújo, H. C., Santos, S. A., & Macedo, E. (2017). *Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania.* República Portuguesa.

Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE). (2005). *Improving financial literacy: Analysis of issues and policies.* OCDE Publicações. http://www.browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/product/2105101e.pdf.

OCDE (2005). *Recommendation on principles and good practices for financial education and awareness.* Direção de Assuntos Financeiros e Empresariais, OCDE. http://www.oecd.org/finance/financial-education/35108560.pdf.

OCDE (2012). *Diretrizes para a Educação Financeira nas Escolas*. OCDE. https://www.oecd.org/education/financial-education-in-schools.pdf

OCDE. (2017). *PISA 2015 Results (Volume IV): Students' Financial Literacy*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264270282-en

Resolução 2021/C 66/01 da União Europeia. (2021). *Jornal Oficial da União Europeia: C 66*. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32021G0226(01)&from=EN

Rodrigues, A. S. C. (2015). *A matemática no ensino profissional. Os programas e as representações dos professores*. [Tese de doutoramento, Universidade da Beira Interior, Covilhã].

Rodrigues, A., & Pimenta, C. (2017). Literacia Financeira – construção do conhecimento matemática. Uma experiência de ensino com alunos do 12.º ano de escolaridade. In FISEM, Federación Española de Sociedades de Professores de Matemáticas (Eds). *Libro de Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. (pp. 74-84). FESPPM.

Rodrigues, A. (2018). Ensino profissional: educar para o futuro. In A, Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (org,). *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 8-18). APM.

Santiago, A. E. E., Domingos, A. M. D., & da Silva, A. M. (2018). Literacia financeira no programa internacional para avaliação de estudantes. *Instrumento: Revista de Estudo e Pesquisa em Educação*, *20*(2), 207-215.

Santiago, A. (2021). A abordagem da subtração nos manuais das Escolas Normais Primárias e do Ensino Primário, no início do século XX. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 12*(5), 1-18. https://doi.org/10.26843/rencima.v12n5a07

Torres, A., Figueiredo, I. L., Cardoso, J. Pereira, L. T., Neves, M. J., & Silva, R. (2016). *Referencial de Educação para o Desenvolvimento – Educação Pré-Escolar, Ensino Básico e Ensino Secundário*. Ministério da Educação.

União Europeia**.** (2010). *Quadro estratégico para a cooperação europeia no domínio da educação e formação (ET 2020).* Jornal Oficial da União Europeia, C 119/2.

Posters

MATEMÁTICAS E ESCOLA EM TENSÃO: REFLEXÕES ANTROPOLÓGICAS AMERÍNDIAS

MATHEMATICS AND SCHOOL IN TENSION: AMERINDIAN ANTHROPOLOGICAL REFLECTIONS

Thiago Pedro Pinto

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

thiago.pinto@ufms.br

Resumo: A hegemonia da Matemática no sistema educacional brasileiro contrasta com as necessidades de uma escola e formação de professores indígenas no Brasil. Nossas reflexões se pautam em antropologias ameríndias, destacando o multinaturalismo de Eduardo Viveiros de Castro, que desafia a visão ocidental ao propor que a natureza não é única, mas múltipla, e que as epistemologias indígenas oferecem formas diferentes de compor o mundo. Pesquisas sobre a formação de professores indígenas apontam a importância de respeitar ritos, temporalidades e epistemologias próprias desses povos, evitando o epistemicídio que tem ocorrido historicamente. Essas práticas revelam uma matemática em tensão com a tradição ocidental, exigindo um novo olhar sobre o ensino e sobre a Matemática que respeite as especificidades culturais. Deste modo este texto problematiza a tensão entre uma Matemática universal e eurocentrada presente nos currículos escolares e as práticas ocorridas nestes espaços outros.

Palavras-chave: filosofia da matemática, antropologia, formação de professores.

Abstract: The hegemony of mathematics in the Brazilian educational system contrasts with the needs of Indigenous schools and teacher education in Brazil. Our reflections are grounded in Amerindian anthropologies, highlighting Eduardo Viveiros de Castro's multinaturalism, which challenges the Western view by proposing that nature is not singular but multiple, and that Indigenous epistemologies offer different ways of composing the world. Research on Indigenous teacher education highlights the importance of respecting the rites, temporalities, and epistemologies of these peoples, avoiding the historical epistemicide. These practices reveal a mathematics in tension with Western tradition, demanding a new perspective on teaching and on mathematics that respects cultural specificities. This text, therefore, problematizes the tension between a universal, Eurocentric mathematics in school curricula and the practices that emerge in these other contexts.

Keywords: philosophy of mathematics, anthropology, teacher training.

A Matemática no Sistema Educacional Brasileiro

O que conhecemos hoje por Matemática é um acúmulo de conhecimento que contou com a participação de pessoas e povos que foram desaparecendo e sendo esquecidos ao longo da história, cristalizando uma visão hegemônica e eurocêntrica do conhecimento matemático. Os livros de História da Matemática presentes nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil destacam a participação de outras civilizações, mas mantendo o foco em nomes brilhantes responsáveis pelos grandes saltos no conhecimento. Esta Matemática sistematizada e agregada de poucos nomes vai se reproduzindo e se instalando de modo quase homogêneo nas escolas de educação básica brasileira. Podemos destacar a atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Base Nacional Comum para a formação de professores (BNC – Formação).

Tal estruturação não deixa brechas para outros modos de conceber a(s) matemática(s) e as relações sociais e subjetivas que se estabelecem com ela – e aqui nosso ponto de discussão. A concepção cartesiana de conhecimento produz uma cisão entre corpo e mente, entre o conhecimento científico e o contexto em que se conhece. A visão que é possível ter um mesmo conhecimento Matemático abordado de formas diferentes é muito presente. Por outro lado, autores como Lins (1999) apostam em um conhecimento matemático arraigado em crenças, objetos simbólicos e campo semântico específico. De modo semelhante, apoiados no pensamento de Ludwig Wittgenstein (1999), podemos situar o conhecimento matemático como uma prática linguística ancorada em formas de vida e que não são nem legitimados, nem deslegitimados por outros jogos de linguagem (Pinto, 2009). Esta perspectiva se afasta da possibilidade de um conhecimento universal e impessoal, como presente nas normativas brasileiras.

Contribuições da Antropologia Ameríndia

Estas últimas perspectivas se enquadram no que pode ser chamado de multiculturalismo moderno, ou seja, múltiplos conhecimentos, múltiplas epistemologias para um mundo que está posto – um mesmo objeto e diversas abordagens teóricas. Ao entrarmos em contato com perspectivas ameríndias, seja com Eduardo Viveiros de Castro (2021), seja com pesquisas voltadas à formação de professores (de Matemática) indígenas no Brasil (Bondarczuk, 2018, 2024; Nascimento, 2024) a partir da metodologia da História Oral, temos a experiência do estranhamento de nossas próprias concepções de conhecimento, de corpo, de natureza, de tempo e de territorialidade – e nesse estranhamento reside a antropologia de Viveiros de Castro.

A inversão da perspectiva ameríndia se dá com o multinaturalismo (Viveiros de Castro, 2021), ao invés de tomar a natureza como única para todos, ela é tomada com múltipla. Viveiros de Castro destaca tal diferença no encontro com os espanhóis nas Antilhas em 1500: enquanto os navegadores buscavam compreender se havia alma naqueles corpos, se eram então humanos, os que ali já estavam buscavam compreender qual a natureza daqueles humanos que habitavam corpos tão próximos e, ao mesmo tempo, tão distantes. Nesta perspectiva, todos os seres são humanos, mas se encontram em diferentes estados de natureza: o jaguar vê cerveja onde nós vemos sangue, assim como os porcos veem um salão cerimonial onde vemos um barreado e assim por diante - estes são humanos percebendo o mundo a sua volta tal como nós e nos veem como outros animais. O que vemos depende de que estágio da natureza nos encontramos, em outras palavras, a ontologia não é fixa, ela depende diretamente de quem está a olhar – como a Matemática ocidental pode lidar com uma ontologia cambiante?

Da mesma forma, para povos como os Tupis daquela época, a visão sobre si está intimamente ligada ao que o outro vê. O que o inimigo vê de você ou de seu grupo proporciona uma experiência importante de autoconhecimento, manifesta mais radicalmente nos rituais canibalescos, onde se pode experimentar a visão do outro sobre si a partir de um elaborado ritual de tomar a posição do outro pela sua ingestão (Viveiros de Castro, 2021).

Ao nos interessarmos pela formação de professores no Brasil percebemos que na grande maioria dos espaços fora dos grandes centros, esta se dava de modo muito diverso, muitas vezes, contrária ao que previam as leis e normativas, especialmente no século passado - estamos aqui falando de pesquisas de caráter historiográfico, especialmente aquelas que se utilizam da História Oral como metodologia de pesquisa. Estas especificidades nos chamavam a atenção para o quão diverso poderia ser este cenário mais complexo e o quando ainda poderíamos descobrir olhando para programas específicos como os de licenciatura à distância, educação do campo ou para os povos originários.

Em 2016 embarcamos em uma primeira experiência investigativa com povos indígenas (Bondarczuk, 2018) buscando compreender os diversos movimentos de um curso específico para eles e que tinha entre suas habilitações a Matemática. Encontramos ali a rigidez de uma universidade que pretendia manter uma grade curricular muito semelhante a de seus cursos regulares, pouco flexível às demandas epistemológicas e ontológicas destes povos. Estas comunidades não queriam o homem branco ensinando matemática para suas crianças, mas sim, alguém de seu povo que, além de saber dar exemplos cotidianos, soubesse respeitar seus ritos, crenças e conhecimentos ancestrais.

Já com Bondarczuk (2024) pudemos investigar uma diversidade de cursos voltados para a formação de professores indígenas no estado de Mato Grosso do Sul. Em seu trabalho algo importante que merece destaque é o agenciamento dos corpos indígenas por entidades humanas e não humanas. Entre seus entrevistados está Cícero Henrique Figueiredo, que investe de seu cocar-colar não como um enfeite, um adorno, mas com um modo de trazer para aquela entrevista seus ancestrais, não no sentido metafórico, mas, de fato, neste sentido, seu corpo se transforma, não estamos mais a falar apenas com Cícero, mas sim com toda sua família/etnia que já não habita corporalmente este espaço a não ser através dele (Bondarczuk, 2024).

Nascimento (2024) se depara com os marcadores de tempo. Ao contrário do branco ocidental que tem o tempo como algo absoluto (dentro dos limites da teoria da relatividade), onde uma aula tem 50 minutos, onde uma atividade está programada para ser feita em um dia, para alguns povos indígenas, determinados eventos, em especial os da natureza não se associam com horas-relógio, seguindo o sol e o canto dos pássaros, e na execução de uma atividade escolar, por exemplo, o que determina o seu tempo é o fim dela, não as horas predeterminadas (Nascimento, 2024).

Aspectos como os relatados aqui nos impõe inúmeras questões sobre como fazer, produzir ou moldar matemática(s) que sejam adequadas a tais contextos. Como dar possibilidade de acesso destas populações à matemática ocidental sem contribuir com o epistemicídio que vem ocorrendo desde seu contato com o homem branco? Como lidar com corpos que se alteram e são agenciados por atores humanos e não-humanos? De todo modo, o que nos parece claro é que não se trata de uma mera transposição didática ou a busca de melhor ensinar determinado conteúdo matemático, apontamos para a necessidade de matemáticas outras, para epistemologias e também ontologias outras no espaço escolar.

Referências

Bondarczuk, V. S. (2018). *Percursos e histórias sobre a formação de professores na licenciatura intercultural indígena "povos do Pantanal" na UFMS* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande].

Bondarczuk, V. S. (2024). *Formação de professores indígenas em Mato Grosso do Sul: Um estudo sobre as lutas, culturas e identidades* [Tese de doutorado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande].

Brasil. Conselho Nacional de Educação. (2019). Resolução CNE/CP n. 2, de 20 de dezembro de 2019. *Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação).* MEC. http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=135951-rcp002-19&category_slug=dezembro-2019-pdf&Itemid=30192

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. MEC.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In M. A. V. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas* (pp. 75-94). Rio Claro.

Nascimento, A. M. S. (2024). *Olhares sobre o movimento de criação dos cursos de formação de professores em licenciaturas indígenas e do primeiro mestrado indígena do país, na Unemat*]Tese de doutorado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande].

Pinto, T. P. (2009). *Linguagem e educação matemática: Um mapeamento de uso na sala de aula* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro]. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91078/pinto_tp_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Schliemann, A. L. (2015). *Na vida dez, na escola zero* (16ª ed.). Cortez.

Viveiros de Castro, E. (2021). *Metafísicas canibais: Elementos para uma antropologia pós-estrutural*. UBU n-1.

Wittgenstein, L. (1999). *Investigações filosóficas* (3ª ed.). Abril Cultural.

A APLICAÇÃO DO REGIME JURÍDICO DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE CASO NO 2º CICLO DO ENSINO BÁSICO

THE APPLICATION OF THE INCLUSIVE EDUCATION'S LEGAL GUIDELINES WITHIN THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS: A CASE STUDY IN YEARS 5 AND 6

Ricardo Machado Vicente

Doutorando em Educação – Instituto de Educação da Universidade Lusófona, Portugal

ricardvicente@gmail.com

Louise Lima

Faculdade de Ciências, Universidade do Porto

Universidade Lusófona, CeiEd - Centro de Estudos Interdisciplinares em Educação e Desenvolvimento, Portugal

louise.lima@fc.up.pt

Resumo: Ainda pouco desenvolvida em Portugal, a Educação Matemática Inclusiva é um domínio da Educação Matemática centrado nas práticas de ensino-aprendizagem-avaliação da disciplina e focado nos conceitos de equidade, diferenciação e inclusão. Neste sentido, este poster apresenta uma investigação doutoral em desenvolvimento, cujo objetivo é compreender de que forma o Regime Jurídico da Educação Inclusiva em vigor, implementado nas aulas de Matemática, se relaciona com uma aprendizagem efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes inscritas nas Aprendizagens Essenciais da disciplina. Assim, realizaremos o estudo com professores de Matemática e alunos de turmas do 2º Ciclo do Ensino Básico. O desenho de investigação assenta numa abordagem qualitativa com recurso ao método de estudo de caso.

Palavras-chave: educação matemática, inclusão, equidade, diferenciação.

Abstract: Inclusive Mathematics Education is a field of Mathematics Education, centered on teaching-learning-assessment practices in Mathematics and focused on the concepts of equity, differentiation and inclusion, that is still underdeveloped in Portugal. In this regard, this poster relates to an ongoing doctoral research, in which the main goal is to understand how the current Inclusive Education´s legal guidelines, applied in Mathematics' lessons, relates to the effective learning of the knowledge, skills and attitudes outlined in the subject´s programmes of study. Consequently, we intend to conduct a qualitative case study research with years 5 and 6 teachers and their pupils.

Keywords: mathematics education, inclusion, equity, differentiation.

Introdução

Em 2007, após publicação em Portugal do livro *Princípios e normas para a matemática escolar* (NCTM, 2000), intensificou-se no nosso país, entre todos os envolvidos no ensino da Matemática, uma profunda discussão e reflexão em torno deste conjunto de recomendações, fundamentadas na crença de que todos os alunos podem e devem aprender matemática. Nele são apresentados seis princípios "que deverão orientar uma Educação Matemática de elevada qualidade" (Santos, 2003, p. 13), entre os quais o da equidade, na perspetiva da excelência na educação matemática para todos.

Os dez anos seguintes foram bastante profícuos no que diz respeito às questões da inclusão, equidade e diferenciação, no campo da Educação em geral e da Matemática em particular. Neste contexto, em 2018 surgem em Portugal três documentos de fundamental importância na persecução do objetivo maior de uma educação de qualidade para todos: as *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico* (revistas em 2021 e para aplicação faseada a partir do ano letivo 2022/2023), o *Regime Jurídico da Educação Inclusiva*, alicerçado no Decreto-Lei 54/2018, de 6 de julho e alterado pela Lei 116/2019, e ainda o *Regime de Autonomia e Flexibilidade Curricular*, plasmado no Decreto-Lei 55/2018, de 6 de julho. Estes documentos, complementares na ação, constituem-se como poderosas ferramentas de trabalho. A primeira exclusivamente ao serviço dos professores de Matemática e as restantes ao serviço de todos os docentes, incluindo os de Matemática.

Seis anos volvidos, importa perceber de que forma as escolas e os docentes se têm apropriado deste conjunto de instrumentos importa refletir acerca do processo de ensino-aprendizagem-avaliação desenvolvido nas aulas de Matemática, tendo em conta as potencialidades e dificuldades vivenciadas após a implementação destes normativos legais, focados na inclusão e equidade. Assim se justifica a investigação doutoral em desenvolvimento, explicitada nas secções seguintes.

A Investigação em desenvolvimento

Pergunta de Partida

Para a realização desta investigação definimos a seguinte pergunta de partida: Considerando as práticas pedagógicas desenvolvidas na aula de Matemática**,** de que forma o regime jurídico da Educação Inclusiva em vigor se relaciona com uma aprendizagem significativa dos conhecimentos, capacidades e atitudes inscritas nas Aprendizagens Essenciais de Matemática?

Motivações e pertinência

A experiência enquanto docentes de Matemática e de Educação Especial e a escassez de estudos que articulem estes dois campos do saber (Educação Matemática e Educação Inclusiva) são as duas principais razões que nos impulsionaram a seguir este caminho. A compreensão da relação existente entre estas duas áreas de estudo, da prática pedagógica mobilizada no sentido de a concretizar e a simplificação de procedimentos, mais eficientes e eficazes, com impacto no trabalho dos professores de Matemática justificam a sua pertinência. Acreditamos que os resultados desta investigação poderão ajudar a melhorar a prática letiva dos docentes de Matemática e contribuir para o sucesso de todos os alunos à disciplina, favorecendo desta forma a construção de uma escola ainda mais inclusiva.

Objetivos

Por forma a chegarmos a uma ou várias respostas para a pergunta de partida colocada, delineamos os seguintes objetivos específicos: (1) Compreender a perceção dos atores educativos sobre a mobilização das Medidas de Suporte à Aprendizagem e Inclusão (MSAI), considerando cada nível de intervenção, (2) Analisar a perceção dos professores sobre as estratégias/ opções metodológicas de ensino-aprendizagem-avaliação mais ajustadas, tendo em conta cada nível de intervenção, (3) Identificar o contributo da utilização de um instrumento específico de avaliação da implementação das MSAI na avaliação das aprendizagens dos alunos e (4) Analisar a perceção dos alunos sobre as estratégias que os professores utilizam para que eles possam aprender Matemática. Os objetivos acima enumerados são os da investigação doutoral em fase inicial de desenvolvimento, pelo que, apesar de diversos, demonstram uma relação entre si que nos parece importante apresentar.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa, no quadro do paradigma de investigação interpretativo. Recorre ao método de estudo de caso, de caráter explanatório e intrínseco. O uso do estudo de caso na nossa investigação em particular é justificado pela necessidade de compreender em profundidade a relação entre as MSAI propostas e o desenvolvimento das aprendizagens essenciais na disciplina de Matemática. Parece-nos a mais adequada para (1) observar e analisar, detalhada e contextualmente, as dinâmicas e interações entre alunos, professores e o ambiente de aprendizagem, (2) para entender como as MSAI são implementadas e adaptadas nas práticas diárias de ensino e (3) conhecer os seus efeitos específicos no progresso dos alunos.

Participantes

O estudo envolve a participação de cerca de 80 alunos de quatro turmas do 2º ciclo (duas turmas do 5.º e duas turmas do 6.º ano de escolaridade) e os respetivos professores de Matemática (um que leciona as duas turmas de 5.º ano e outro que leciona as duas turmas de 6.º ano) de um Agrupamento de Escolas do Grande Porto. Também um elemento da Equipa Multidisciplinar de Apoio à Educação Inclusiva participará neste estudo.

Métodos de Recolha de Dados

Nesta pesquisa, recorreremos aos seguintes procedimentos de recolha de dados: (1) Observação Participante; (2) Observação Não-Participante; (3) Entrevistas semiestruturadas; (4) Questionário e (5) Recolha de Fontes Documentais, por considerar que são aquelas que melhor respondem à prossecução dos objetivos delineados. De salientar que as observações incidirão sobre as práticas pedagógicas inclusivas mobilizadas pelos docentes, mais concretamente sobre a sua pertinência e eficácia na aprendizagem dos alunos. As entrevistas serão aplicadas aos dois professores de Matemática e ao professor da Educação Especial e o questionário aplicado aos alunos com o intuito de analisar a perceção destes atores acerca eficácia das estratégias/ opções metodológicas de ensino-aprendizagem-avaliação adotadas. Um instrumento de avaliação das MSAI, criado pelos investigadores para o efeito, será também utilizado como forma de melhor compreender a relação entre as medidas mobilizadas e as aprendizagens realizadas.

Métodos de Análise de Dados

Na nossa investigação, recorreremos à análise de conteúdo como técnica principal para a interpretação dos dados, alinhada ao quadro teórico que orienta o estudo. Esta abordagem será aplicada a diferentes fontes, nomeadamente entrevistas, questionários, observações e outros documentos relevantes, permitindo identificar padrões e categorias relevantes para a compreensão do caso em estudo, à luz dos pressupostos teóricos. Também a análise temática será aplicada aos dados recolhidos, relacionando-os entre si e com o referencial teórico usado, em complementaridade com a análise de conteúdo.

Previsões

A investigação já foi iniciada, encontrando-se neste momento na fase de realização das entrevistas aos docentes. É nossa expectativa que os resultados possam contribuir para uma melhor compreensão da relação entre a aplicação do Regime Jurídico da Educação Inclusiva e os resultados obtidos pelos alunos a Matemática. Acreditamos que uma avaliação eficaz das MSAI mobilizadas é fundamental para a adoção de práticas mais inclusivas, conducentes a uma melhoria das aprendizagens.

Referências bibliográficas

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho de 2018. Diário da República, 1.ª série, n.º 129.

Decreto-Lei nº 55/2018 de 6 de julho de 2018. Diário da República, 1.ª série, n.º 129.

Lei n.º 116/2019, 13 setembro. Diário da República n.º 176/2019, Série I. Ministério da Educação, 2019.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM (documento original publicado em 2000).

Santos, L. (2003). A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: Uma análise sucinta. *Quadrante*, *12*(1), 7–20. https://doi.org/10.48489/quadrante.22761

O LUGAR DAS RELAÇÕES ÉTNICO-RACIAIS NA AULA DE MATEMÁTICA
THE PLACE OF ETHNIC-RACIAL RELATIONS IN MATHEMATICS CLASS

Carla Regina Mariano da Silva
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil
carla.silva@ufms.br

Bianca Silva Braga
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil
bianca.braga@ufms.br

Resumo: O texto aborda a importância de uma educação matemática que contemple a diversidade de conteúdos ensinados, questionando quais grupos e conhecimentos têm sido excluídos. No Brasil, a Lei Nº. 10.639/2003 – torna obrigatório o ensino da história e cultura afro-brasileira e africana em todas as escolas brasileiras – e a Lei Nº. 11.645/2008 – altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) para tornar obrigatória a inclusão da história e cultura afro-brasileira e indígena no currículo escolar – buscam inserir temáticas étnico-raciais e relativas aos povos originários no currículo escolar, embora sua implementação enfrente desafios. A pesquisa discutida no texto explora práticas pedagógicas que integram essas temáticas nas aulas de matemática. O embasamento teórico incluí obras que representam a potencialidade da comunidade afrodescendente na problematização de uma educação para todos. Propõe-se reflexões sobre o lugar das questões étnico-raciais no contexto escolar, questionando a existência de uma matemática universal.

Palavras-chave: diversidade étnico-racial, educação matemática, políticas educacionais.

Abstract: The text addresses the importance of a mathematical education that contemplates the diversity of contents taught, questioning which groups and knowledge have been excluded. In Brazil, Law No. 10.639/2003 - makes it mandatory to teach Afro-Brazilian and African history and culture in all Brazilian schools - and Law Nº. 11.645/2008 - amends the Law of Guidelines and Bases of National Education (LDB) to make mandatory the inclusion of Afro-Brazilian and indigenous history and culture in the school curriculum - seek to insert ethnic-racial themes and related to the original peoples in the school curriculum, although its implementation faces challenges. The research discussed in the text explores pedagogical practices that integrate these themes into math classes. The theoretical basis included works that represent the potential of the Afro-descendant community in the problematization of an education for all. Reflections are proposed on the place of ethnic-racial issues in the school context, questioning the existence of a universal mathematics.

Keywords: ethnic-racial diversity, mathematics education, educational policies.

Introdução

Na história das políticas educacionais, a proposta de uma educação para todos, que contemple a diversidade de gênero, raça e classe em nível mundial, está presente em diversos documentos internacionais dos últimos anos (ONU, 1948; Unesco, 1990; ONU, 2015; Cabral & Gehre, 2020). Esse é certamente um dos desafios da sociedade que tem sido debatido em eventos e conferências ao redor do mundo e sinaliza os esforços para garantir uma educação de qualidade para todos. Especificamente na Educação matemática, há a preocupação com o acesso efetivo à matemática.

O que todos esses movimentos parecem nos dizer é que, se existe a necessidade de garantir uma educação (matemática) para todos, é porque muitos ainda não têm acesso a esse direito básico. As exclusões e a permanência à margem de muitos ampliam e reafirmam as desigualdades educativas existentes e nos fazem questionar não apenas quem tem sido colocado de fora, mas também quais conteúdos têm sido privilegiados em detrimento de outros. Ou seja, de que matemática estamos falando quando propomos uma matemática para todos no século XXI?

Em termos de políticas educacionais, no Brasil, temos, nos últimos anos, duas leis que buscam interferir diretamente no currículo escolar, tornando obrigatório o ensino de questões étnico-raciais no contexto escolar. A Lei Federal Nº. 10.639/2003, que torna obrigatório o ensino da história e cultura afro-brasileira e africana em todas as escolas brasileiras e a Lei Nº. 11.645/2008, que altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) para tornar obrigatória a inclusão da história e cultura afro-brasileira e indígena no currículo escolar. Em seu artigo 26, a Lei Nº. 10.639/2003, estabelece que "Nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio, oficiais e particulares, torna-se obrigatório o ensino sobre História e Cultura Afro-Brasileira" (Brasil, 2003). Está previsto que esses conteúdos sejam ministrados em todo o currículo escolar. Além disso, em 2008, a Lei 11.645 amplia o previsto, incluindo a história dos povos indígenas brasileiros, ou povos originários, como conteúdo obrigatório.

Ainda que exista força de lei, estudos demonstram que há diferentes cenários na implementação do que é previsto. Marques (2014) realizou uma pesquisa em escolas públicas de Mato Grosso do Sul, Brasil, e identificou que a falta de formação específica dos docentes e a dificuldade em abordar as diferenças estão entre os desafios para a efetivação da lei no contexto investigado, embora haja avanços em algumas regiões.

Assim, este texto tem como objetivo promover discussões sobre o lugar das temáticas étnico-raciais em aulas de matemática, motivadas por uma pesquisa em desenvolvimento que visa investigar práticas pedagógicas relacionadas ao ensino de História e Cultura Afro-Brasileira durante as aulas de matemática no contexto educacional de Mato Grosso do Sul, Brasil.

Referencial teórico-metodológico

Partindo do pressuposto de que não há espaço escolar neutro (Freire, 2021; Kilomba, 2019), afirmamos que o que se ensina (conteúdo) e como se ensina (as práticas docentes) têm o poder de determinar conceitos como conhecimento e ciência. Juntamo-nos a Kilomba (2019, p. 50) para questionar: "Qual conhecimento está sendo reconhecido como tal? E qual conhecimento não está? Qual conhecimento tem feito parte das agendas acadêmicas? E qual conhecimento não faz?"

Além disso, concordamos com Gonzalez (2020, p. 186) ao afirmar que "Estamos cansados de saber que nem na escola nem nos livros onde mandam a gente estudar se fala da efetiva contribuição das classes populares, da mulher, do negro e do índio na nossa formação histórica e cultural. Na verdade, o que se faz é folclorizar todos eles." Além disso, em paralelo com Guerrero Arias (2010, p. 85) é preciso que "cambiemos la mirada colonialista, exótica, folklórica y etnocéntrica a la que nos acostumbró el poder, que nos hacia verlos como pueblos primitivos, salvajes, de aborígenes suspendidos en tiempos pré-históricos".

Desse modo, a presença de questões étnico-raciais nas aulas de matemática se justifica não apenas pela diversidade de matemáticas existentes, mas também pela valorização da cultura afro em um contexto em que mais da metade da população (55%) é negra (Brasil, 2022). Ainda que fossem em menor número, o fato de se verem representados como uma população que produz e produziu conhecimento matemático pode trazer benefícios à autoestima de crianças negras, o oposto do que ocorre quando o foco está apenas no fato de que seus antepassados foram pessoas escravizadas (Bento, 2022).

Buscando aprofundar a presença do que prevê a Lei Nº. 10.639/2003 nas aulas de matemática, a pesquisa a que esse texto se refere se utiliza da História Oral, na produção de narrativas que, longe de serem exemplos ideais do que se fazer em sala de aula, criam horizontes de possibilidades, ou seja, criam "um campo de possibilidades compartilhadas, reais ou imaginárias" (Porteli, 1996, p. 8).

Em suma, ao utilizarmos a História Oral como metodologia, buscamos construir narrativas que ampliem a visão sobre a matemática, reconhecendo sua diversidade e a contribuição de diferentes culturas. Assim, "A História Oral surge, então, como uma das possibilidades de preencher essas lacunas. É preciso diversificar as versões, considerando vários pontos de vista", como afirma Garnica & Gomes (2020, p. 21). Com isso, destacamos que esse enfoque não apenas enriquece o aprendizado dos estudantes, mas também valoriza as experiências e saberes dos professores envolvidos.

Discussão dos dados

Em fase de produção de dados, realizamos uma primeira entrevista com uma professora de matemática que, há dez anos, desenvolve atividades relacionadas a questões étnico-raciais em suas aulas. Nesse caso específico, as atividades eram de cunho estatístico, com a produção de entrevistas com a comunidade escolar sobre a raça com a qual se identificam, seguida pela produção de gráficos. Para além das questões estatísticas, a atividade serviu para discutir *bullying*, preconceitos e racismo. Sendo um contexto escolar majoritariamente negro, os estudantes se sentiram pertencentes a essa realidade, segundo a professora, e tiveram papel central na atividade, enquanto ela atuou apenas como mediadora.

Conclusões iniciais

Ao pensar em uma matemática para todos no século XXI, buscamos tornar públicas práticas docentes que estejam vinculadas ao trabalho de questões étnico-raciais nas aulas de matemática como forma de valorizar a cultura dos antepassados de grande parte da população brasileira, além de questionar a ideia de uma matemática única e universal. A obrigatoriedade do ensino dessas temáticas, prevista por lei há mais de vinte anos, reconhece a importância de tratar tais assuntos. O desafio, no entanto, é fazer com que aconteçam atividades em sala de aula de forma contínua e não apenas em datas comemorativas ou ocasiões pontuais. Especificamente na matemática, práticas que envolvem tratamentos estatísticos, tal qual citado pela professora entrevistada, são relativamente comuns. Nos questionamos, no entanto, se esse é o lugar das questões étnico-raciais nas aulas de matemática e em quais outros momentos têm se efetivado práticas a favor da temática.

Referências

Bento, M. A. S. (2022). *O pacto da branquitude*. Companhia das Letras.

Brasil. (2003). Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003. Altera a Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira", e dá outras providências. Diário Oficial da União.

Brasil. Instituto Brasileira de Geografia e Estatística. (2022). Censo demográfico de 2022. https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2023-12/censo-2022-populacao-parda-supera-branca-pela-1a-vez.

Cabral, R., & Gehre, T. (Eds.). *Guia Agenda 2030: Integrando ODS, Educação e Sociedade*. Lucas Fúrio Merala.

Freire, P. (2021). *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra.

Garnica, A. V. M., & Gomes, M. L. M. (2020). *Educação Matemática e Diversidade*(s) [recurso eletrônico] / Harryson Júnio Lessa Gonçalves (Org.). Editora Fi.

Gonzalez, L. (2020). *Por um Feminismo Afro-Latino-Americano: Ensaios, Intervenções e Diálogos.* Zahar.

Guerrero Arias, P. (2010). *Corazonar. Una antropología comprometida con la vida: Miradas otras desde Abya-Yala para la decolonización del poder, del saber y del ser* (1ª ed.). Editorial Abya-Yala.

Kilomba, G. (2019). *Memórias da plantação: Episódios de racismo cotidiano* (2ª ed.). Cobogó.

Marques, E. de S. (2014). Educação e relações étnico-raciais no Brasil: As contribuições das leis 10.639/2003 e 11.645/2008 para a decolonização do currículo escolar. Revista de Educação Pública, 23(53/2), 553-571. https://periodicoscientificos.ufmt.br. Acesso em 15 de julho de 2024.

ONU. (1948). *Declaração Universal dos Direitos Humanos*. Nações Unidas.

ONU. (2015). *Objetivos de Desenvolvimento Sustentável* (ODS). Nações Unidas.

Portelli, A. (1996). A filosofia e os fatos: Narração, interpretação e significado nas memórias e nas fontes orais. *Tempo, 1*(2), 59-72.

Unesco. (1990). *Declaração mundial sobre educação para todos*. Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura.

TRABALHO COLABORATIVO: PROFESSORES TITULARES DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E DE EDUCAÇÃO ESPECIAL

COLLABORATIVE WORK: PROFESSORS OF MATHEMATICS AND SPECIAL EDUCATION

Susana Oliveira

Universidade Lusófona

susysuoliveira@gmail.com

Louise Lima

Faculdade de Ciências, Universidade do Porto

Universidade Lusófona, CeiEd - Centro de Estudos Interdisciplinares em Educação e Desenvolvimento, Portugal

louise.lima@fc.up.pt

Resumo: Este poster apresenta uma investigação doutoral em fase inicial de desenvolvimento que pretende compreender de que modo o trabalho colaborativo docente contribui para práticas pedagógicas inclusivas na intervenção com alunos que detêm medidas seletivas. Especificamente, pretende-se identificar as principais dificuldades dos docentes de matemática e de Educação Especial e as práticas de trabalho colaborativo mais favoráveis à implementação das medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão em estreita articulação com a flexibilidade curricular. Igualmente, pretende-se compreender as suas perceções e analisar o trabalho colaborativo entre pares na promoção do desenvolvimento das aprendizagens essenciais de matemática nos alunos com necessidades educativas.

Palavras-chave: trabalho colaborativo, educação inclusiva, medidas educativas de suporte à aprendizagem e à inclusão.

Abstract: This poster presents doctoral research in the initial phase of development that aims to understand how collaborative teaching work contributes to inclusive pedagogical practices in intervention with students who have selective measures. Specifically, the aim is to identify the main difficulties faced by mathematics and Special Education teachers and collaborative work practices that are most favourable to the implementation of measures to support learning and inclusion in close conjunction with curricular flexibility. Likewise, the aim is to understand their perceptions and analyse collaborative work between peers in promoting the development of essential mathematics learning in students with educational needs.

Keywords: collaborative work, inclusive education, educational measures to support learning and inclusion.

Introdução

Reconhecendo o progresso e os novos desafios colocados ao sistema educativo no âmbito da Educação Inclusiva, apresenta-se a fase inicial de desenvolvimento de uma investigação realizada no contexto do Doutoramento em Educação da Universidade Lusófona. Tal considera o trabalho colaborativo entre os docentes de matemática e de

Educação Especial que intervêm com alunos que usufruem de medidas seletivas de suporte à aprendizagem e à inclusão (MSSAI). De modo a conferir o acesso ao currículo em abordagem multinível, procedendo a adequações curriculares não significativas, os referidos docentes gerem e adequam o mesmo, entre si em estreita interação no quotidiano. De tal forma, promovem-se multiliteracias fundamentadas na premissa do desenvolvimento de competências essenciais e multidimensionais do século XXI, à luz do plasmado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017).

Assim, pretende-se investigar como professores titulares da disciplina de matemática (TDM) e docentes de Educação Especial (EE) podem colaborar de forma a contribuírem para o desenvolvimento integral de todos e cada um dos alunos, atendendo às suas necessidades. Desta forma, o objeto de investigação incide no trabalho colaborativo a partir dos pressupostos da Educação Inclusiva.

No contributo para a melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem e consecutivo desenvolvimento de aprendizagens essenciais,

> no caso da filosofia inclusiva, o papel do professor titular de turma deve conciliar-se com o papel do professor de educação especial, (…) para que todos eles em colaboração possam desenhar estratégias que promovam o sucesso escolar. (Correia, 2008, p. 17)

O trabalho colaborativo entre docentes TDM e de EE na intervenção com alunos que beneficiam de MSSAI implica uma efetiva diferenciação pedagógica, que adequa metodologias e estratégia ajustadas ao perfil de aprendizagem de cada discente na implementação conjunta de medidas específicas. Isto é, a partir dos pressupostos da Educação Inclusiva, promove-se o desenvolvimento de opções metodológicas e estratégias adequadas à promoção de aprendizagens significativas para todos e cada um dos alunos.

Neste sentido, o trabalho colaborativo entre docentes pressupõe a partilha de experiências, conhecimentos e saberes, dos quais o saber fazer (Silva, 2013). Por conseguinte, assenta numa cultura de colaboração fundamentada na interação, partilha de ideias e reflexão sistemática conjunta sobre as práticas em prol da consecução de objetivos coletivos predeterminados (Martins, 2016; Silva, 2013). Neste entendimento, uma sustentada cultura de colaboração fomenta o desenvolvimento profissional docente com repercussões evidentes na proficiência da ação educativa e melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem, desencadeando processos de mudança e inovação educativa (Abelha & Machado, 2018; Macedo, 2016).

No caso específico do currículo da disciplina de matemática, importa garantir percursos académicos diferenciados, de modo a envolver todos os alunos e fomentar a sua participação na promoção do sucesso educativo (NCTM, 2014). Desta forma, promove-se uma mentalidade de crescimento que adequa práticas pedagógicas às dificuldades intrínsecas dos discentes e valoriza o raciocínio de todos, implementando o reforço positivo de contributos determinados, com o intuito de incentivar a participação e a realização matemática (Boaler, 2011). Isto, implica que os docentes TDM e de EE colaborem entre si no desenvolvimento de boas práticas de ensino da matemática, potenciando o pensamento de ordem superior e a qualidade da cognição discente (Boaler & Staples, 2008; Burris et al., 2008; Lubienski, 2006).

Problemática

A necessidade de (re)pensar e (re)vitalizar um processo educativo inclusivo, implica a implementação de pedagogias dinâmicas baseadas no trabalho colaborativo desempenhado em parceria docente. Um trabalho colaborativo que se demonstre promotor de interação e partilha num novo paradigma educativo, exigindo professores com preparação para as inquestionáveis e irreversíveis mudanças.

Numa escola plural é inegável a diversidade de discentes em sala de aula, constatando-se emergente implementar metodologias e estratégias pedagógicas que se configurem ajustadas a cada perfil de aprendizagem, bem como, adequar o currículo concertado em ambientes diversificados, de acordo com a Flexibilidade Curricular (Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho) conferida na promoção de um processo de ensino e aprendizagem inclusivo (Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, alterado pela Lei 116/2019, de 13 de setembro).

Por conseguinte, de modo a garantir que a escola é para todos e, em simultâneo, para cada um, o papel de todos os professores é fundamental. Sendo particularmente indispensável uma colaboração permanente entre os docentes, de forma a promover a inclusão numa escola dependente, fundamentalmente, do empenho e das convicções de todos os envolvidos no processo (Unesco, 1994).

Metodologia

Para dar resposta a esse desafio, a investigação doutoral em fase inicial de desenvolvimento, assenta numa abordagem qualitativa, à luz de um paradigma qualitativo (Amado, 2014). Deste modo, visa-se compreender a contribuição do trabalho colaborativo docente no desenvolvimento de práticas pedagógicas inclusivas na intervenção com alunos que usufruem de medidas seletivas. Concretamente, pretende-se conhecer as perceções dos docentes TDM e de EE e analisar o trabalho colaborativo entre estes pares na promoção do desenvolvimento de aprendizagens essenciais nos alunos com necessidades educativas. Visa-se, ainda, identificar as principais dificuldades dos docentes e práticas de trabalho colaborativo mais favoráveis à implementação das medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão em estreita articulação com a flexibilidade curricular.

Neste sentido, serão realizados inquéritos por questionário e entrevistas aos docentes de TDM e de EE, complementadas por observação direta não participante e análise documental. As entrevistas irão permitir compreender em profundidade os dados recolhidos pelo questionário. Sendo que o questionário será aplicado a todos os docentes TDM e de EE que intervenham com alunos que usufruem de MSSAI do Agrupamento X em estudo, contabilizando 35 docentes (10 EE e 25 TDM). As entrevistas serão realizadas a 10 professores selecionados de acordo com a sua experiência profissional na intervenção com discentes MSSAI, estes incluirão 5 docentes TDM e 5 de EE. Serão, sempre, garantidos os princípios éticos de respeito, desistência de participação, consentimento livre e informado, entre outros definidos na Carta Ética da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (Baptista et al., 2021).

O processo de recolha de dados permitirá indagar como o mencionado trabalho entre pares contribui para o sucesso educativo dos alunos que usufruem de MSSAI na consecução de uma educação verdadeiramente inclusiva. Posteriormente, permitirão analisar os dados recolhidos através da técnica de análise de conteúdo.

Conclusões e expetativas

Atendendo à relevância do trabalho colaborativo entre os professores TDM e de EE, espera-se contribuir com o desenvolvimento de culturas de colaboração que possam promover a aprendizagem significativa da matemática de todos e cada um dos alunos.

Referências

Abelha, M., & Machado, E. A. (2018). Supervisão, colaboração e formação: Relato de uma experiência com docentes de um agrupamento TEIP. In E. A. Machado & J. C. Sousa (Eds.), *Formação contínua de professores em Portugal - De ontem para amanhã* (pp. 119–135). De Facto Editores.

Amado, J. (Coord.) (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação* (2.ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Baptista, I. (Coord.), Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. C., & Pais, S. C. (2021). *Instrumento de regulação ético-deontológica. Carta ética* (2ª ed.). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Boaler, J. (2011). Mudando a vida dos alunos através do descontrole das salas de aula de matemática urbana. *Revista de Educação Matemática Urbana, 4*(1), 7-4.

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Criando futuros matemáticos através de uma abordagem de ensino equitativa: O caso da Railside Scholl. *Registo da Faculdade de Professores, 110*(3), 45-608.

Burris, Corbett, C., Wiley, E., Welner, K., & Murphy, J. (2008). Responsabilidade, rigor e detracking: Efeitos de realização de abraçar um currículo desafiador como um bem universal para todos os alunos. *Registo da Faculdade de Professores, 110*(3), 571-607.

Correia, L. (2008). *A escola contemporânea e a inclusão de alunos com NEE: Considerações para uma educação com sucesso*. Porto Editora.

Lubienski, S. T. (2006). Pesquisa, reforma e equidade na Educação Matemática dos EUA. In N. S. Nasir & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 10–23). Teachers College Press.

Macedo, L. (2016). *Observação colaborativa de aulas e conhecimento profissional: Um estudo numa escola secundária*. [Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro]. http://hdl.handle.net/10773/18393

Martins, A. (2016). *O poder da colaboração na (re)construção do conhecimento profissional docente: um estudo em contexto*. [Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro]. http://hdl.handle.net/10773/18475

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnacão, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Ministério da Educação/Direção Geral da Educação (DGE). https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

NCTM (2014). *Princípios para Ações. Garantindo o sucesso matemático para todos.* National Council of Teachers of Mathematics.

Silva, M. D. O. (2013). A importância da observação de aulas no processo de avaliação de desempenho docente: conceções de professores. *Gestão E Desenvolvimento, 21,* 321-344. https://doi.org/10.7559/gestaoedesenvolvimento.2013.254

Unesco (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais.* Instituto de Inovação Educacional.

Referências legislativas

Lei n.º 116/2019, 13 de setembro. Diário da República n.º 176/2019, Série I. Ministério da Educação. Primeira alteração, por apreciação parlamentar, ao Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, que estabelece o regime jurídico da educação inclusiva.

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. Diário da República n.º 129/2018, Série I de 2018-07-06. Ministério da Educação. Estabelece o regime jurídico da educação inclusiva.

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho. Diário da República nº 129, I Série A. Ministério da Educação. Estabelece o currículo dos ensinos básico e secundário e os princípios orientadores da avaliação das aprendizagens.

A PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA A PARTIR DA COLABORAÇÃO: CENÁRIOS E PERSPECTIVAS DE GRUPOS PORTUGUESES

RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION FROM COLLABORATION: SCENARIOS AND PERSPECTIVES OF PORTUGUESE GROUPS

Danielle Abreu Silva

Universidade Federal de São Carlos, Brasil

danielleabreu@estudante.ufscar.br

Klinger Teodoro Ciríaco

Universidade Federal de São Carlos, Brasil

klinger.ciriaco@ufscar.br

João Pedro Mendes da Ponte

Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Palavras-chave: educação matemática, formação de professores, grupos colaborativos, história oral.

Keywords: mathematics education, teacher training, collaborative groups, oral history.

Introdução

Apresentamos a proposta do projeto de estágio de doutoramento intercalar, em desenvolvimento, no Instituto de Educação (IE) da Universidade de Lisboa (ULisboa) com ênfase no aprofundamento em referenciais teórico-metodológicos sob coorientação de estágio do professor Emérito João Pedro Mendes da Ponte. A pesquisa tem como objetivo explorar a história e o impacto de grupos colaborativos portugueses na área de Educação Matemática. Pretende-se entender como o trabalho em grupo influencia o desenvolvimento profissional dos professores e aprimora suas práticas pedagógicas. Para isso, será realizado um levantamento de teses defendidas nos últimos 10 anos no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-ULisboa), abrangendo diferentes níveis de ensino (do 1.º ao 3.º ciclo). A ideia é identificar teses que tenham produzido dados em colaboração com grupos de Estudo de Aula em Educação Matemática, analisando como esses contextos formativos colaborativos contribuem para a formação e prática dos docentes. Com as teses selecionadas, entraremos em contato com os autores para convite à participação voluntária na pesquisa e, após o aceite os doutores serão convidados a narrarem a história da produção das suas teses buscando levantar aspectos que demarcam e quais foram os desafios.

Diante disso, compreendemos que a "[...] *história oral* é uma forma específica de discurso: *história* evoca uma narrativa do passado; *oral* indica um meio de expressão [...]" (Portelli, 2001, p. 10, *destaque do autor*).

Enquadramento teórico

No Brasil, existem grupos colaborativos de professores que atuam em diversas áreas, incluindo a Educação Matemática, com o objetivo de promover o desenvolvimento profissional por meio de práticas de colaboração e troca de experiências. Em Portugal, por sua vez, destaca-se o Estudo de Aula (*Lesson Study*), que é uma modalidade de formação de professores focada na sua prática profissional, realizada por meio de dinâmicas colaborativas e reflexivas, profundamente enraizadas na cultura profissional docente (Baptista et al., 2014).

No cenário brasileiro, autores como Ciríaco (2016) buscaram explorar a vertente de grupos colaborativos com uma perspectiva em Educação Matemática em suas investigações. Tais pesquisas evidenciam as potencialidades e limitações do trabalho coletivo, permitindo afirmar que constituir um trabalho colaborativo não é uma tarefa fácil. Ao encontro com essas limitações do espaço colaborativo, Muniz et al. (2021) apresentam uma narrativa da experiência que não deu certo vivida pela primeira autora durante sua investigação de mestrado ao tentar implementar uma proposta de formação e constituir um grupo de estudos com características colaborativas em uma escola pública municipal de tempo integral no noroeste paulista. Isso nos faz refletir acerca dos contextos colaborativos, seus limites, desafios e as perspectivas futuras. No nosso ponto de vista, essas dificuldades são um caminho importante a ser explorado.

Logo, em pesquisas de doutoramento, de natureza qualitativa com as que a primeira autora perspectiva investigar em sua tese, investigar as histórias que emergem dos grupos colaborativos brasileiros, torna-se relevante contribuição para a comunidade de educadores matemáticos e fazer uma interlocução com o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa é uma oportunidade ímpar para também compreender o cenário português.

Esse processo dialoga com a perspectiva de Morais e Garnica (2016) que destacam que, ao narrar uma história, os indivíduos se posicionam em uma espacialidade, ligada a vivências e transformações. Assim, os sujeitos se reinventam e recriam esses espaços com base em suas experiências.

Abordagem metodológica

O estudo que propomos realizar é de natureza qualitativa e a abordagem metodológica que mais se aproxima para a produção de dados necessária à compreensão do objeto é, para o momento, a História Oral. "Um dos interesses da Educação Matemática no trabalho com narrativas é o caráter interativo das entrevistas que as estruturam" (Silva & Souza, 2007, p. 153).

Inicialmente será realizado um levantamento de teses do Instituto de Educação defendidas na última década que abarque diferentes contextos formativo e discutem a temática na área da "Educação" e "Educação Matemática" desenvolvidas em Estudos de Aula. Após a seleção dos trabalhos, será feito contato com os pesquisadores portugueses que desenvolveram essas teses. Eles serão convidados a participar de uma entrevista com dois objetivos principais: primeiro, aprofundar, por meio da História Oral, a compreensão sobre a trajetória de investigadores portugueses que trabalharam com colaboração em estudos de aula em Matemática nos primeiros anos e quais foram as dificuldades encontradas para a realização da pesquisa; e segundo, investigar de que maneira o trabalho em grupo contribui para o desenvolvimento profissional dos professores e promove o aprimoramento de suas práticas pedagógicas.

Nesta investigação, a História Oral é compreendida como um "[...] método que valoriza, cria e mobiliza narrativas orais como fontes (historiográficas) para a pesquisa em (história da) educação matemática" (Silva & Silva, 2019, p. 163).

Resultados esperados e contribuições

Espera-se que a partir da análise abrangente das teses, e das narrativas possamos evidenciar os sentidos e experiências das ações no solo brasileiro e português, bem como a troca de experiências e práticas que poderão enriquecer o entendimento mútuo e contribuir para o aprimoramento contínuo da educação em ambos os países, fortalecendo as bases para colaborações futuras.

Referências

Baptista, M., Ponte, J. P. D., Velez, I., & Costa, E. (2014). Aprendizagens profissionais de professores dos primeiros anos participantes num estudo de aula. *Educação em Revista*, *30*(4), 61-79. https://www.scielo.br/j/edur/a/r5HSHHXgLYMSqbDryGqpWWs/abstract/?lang=pt

Ciríaco, K. T. (2016). *Professoras iniciantes e o aprender a ensinar Matemática em um grupo colaborativo*. [Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente/SP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/139512

Muniz, B. M., Ciríaco, K., & Gonçalves, H. J. L. (2021). Quem acredita sempre alcança: Limites e perspectivas do trabalho colaborativo em Educação Matemática na escola de tempo integral em um projeto de investigação. *Com a Palavra, o Professor*, *6*(14), 118-145. http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/594

Morais, M. B., & Garnica, A. V. M. (2016). Da duração situada: Um estudo sobre historiografia, espaço e Educação Matemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *11*, 77-95. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11nespp77

Portelli, A. (2001). História oral como gênero. Trad. Maria Therezinha Janine Ribeiro. *Projeto História*, (22). https://revistas.pucsp.br/index.php/revph/article/view/10728

Silva, H., & de Souza, L. A. (2007). A história oral na pesquisa em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 20(28), 139-162. https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221871008.pdf

Silva, H., & Silva, M. S. (2019). Movimentos das narrativas na Educação Matemática brasileira e o lugar da História Oral. *Revista Brasileira de Pesquisa (Auto)Biográfica*, *4*(10), 161–179. https://www.revistas.uneb.br/index.php/rbpab/article/view/5818

GRUPO DE DISCUSSÃO 5

O CONHECIMENTO DO PROFESSOR E A MATEMÁTICA PARA TODOS NO SÉCULO XXI

MATHEMATICS TEACHER KNOWLEDGE FOR ALL IN THE 21ST CENTURY

Helena Rocha

EDUNOVA.ISPA, CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal

hcr@fct.unl.pt

Zaira Ortiz-Laso

Universidad de Cantabria, Espanha

zaira.ortiz@unican.es

Oferecer matemática a todos no século XXI envolve diversos intervenientes, incluindo os alunos, os professores, o currículo e a sociedade como um todo. A matemática contemporânea deve estar alinhada com as exigências e os desafios que a sociedade irá enfrentar nos próximos anos. Neste sentido, os currículos educativos devem especificar os conhecimentos e as competências matemáticas necessárias para que os alunos matriculados em qualquer das etapas da escolaridade obrigatória (ensino básico e secundário) possam abraçar o seu futuro académico e profissional. Neste contexto, o papel do professor torna-se essencial, pois é ele o responsável por interpretar o currículo e instruir os alunos. Esta responsabilidade enfatiza a importância da sua formação, tanto inicial como contínua.

Neste artigo, discutimos aspetos da formação de professores relacionados com a matemática para todos no século XXI. Cientes das múltiplas dimensões deste tema, optámos por nos debruçar sobre aquelas que emergem dos temas abordados neste grupo de discussão: o conhecimento profissional docente e a integração da tecnologia na era digital.

Conhecimento profissional dos professores no século XXI

A maioria dos estudos sobre o conhecimento profissional foi influenciada pelo trabalho pioneiro de Shulman (1986), com ênfase em duas dimensões: o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Ter conhecimento profissional aprofundado passa por realizar ações como interpretar o currículo (Gueudet et al., 2024; Ortiz-Laso et al., 2025), identificar pontos fortes e fracos de materiais e recursos (Jacinto & Carreira, 2023; Ortiz-Laso et al., in press; Zorrilla et al., 2024), elaborar tarefas e planificar aulas (Rocha, 2020; Trgalová & Tabach, 2024), planear discussões em sala de aula (Duarte et al., 2025), interpretar em sala de aula as respostas dos alunos a tarefas ou questões (Biza et al., 2007; Fernández et al., 2014) e elaborar feedback com base nas competências dos alunos (Ayalon & Wilkie, 2020; Biza et al., 2007).

O conhecimento profissional é amplamente influenciado por atributos que não pertencem unicamente ao indivíduo, mas emergem do contexto cultural em que se desenvolve

(Andrews, 2011; Rocha, 2025). Neste sentido, o conhecimento profissional é o resultado de influências sociais, culturais e institucionais que orientam a prática letiva dos professores (Rocha, 2020). Isto motivou os participantes deste grupo de trabalho a investigar o conhecimento dos professores enquanto membros de uma comunidade, onde a troca de ideias, a colaboração e a reflexão entre pares, com os alunos ou com especialistas em educação matemática contribuem para o enriquecimento do conhecimento profissional. Especificamente, três das sete propostas (Martins; Miguens et al.; Rama et al.) foram desenvolvidas em programas de desenvolvimento profissional com professores em exercício em diferentes estágios educacionais, nos quais a colaboração com investigadores na área da educação matemática constitui comummente um pilar fundamental da formação, uma vez que são eles os responsáveis por definir e direcionar a formação.

No âmbito de um programa de formação contínua, Martins investiga as necessidades formativas de dois professores portugueses do 1.º ciclo do ensino básico, centrando-se sobretudo na incorporação da inovação na sua prática letiva, na utilização da tecnologia e na aquisição de conhecimentos curriculares. Estas necessidades orientam a formação para a aquisição de conhecimentos curriculares e matemáticos, bem como para o planeamento de tarefas matemáticas com recurso à tecnologia. No que diz respeito ao conhecimento, Martins salienta que o pensamento computacional, recentemente incorporado no currículo de matemática português, não é reconhecido como uma componente do conhecimento matemático que pode ser desenvolvida através da programação tangível (mTiny). Isto evidencia limitações no conhecimento dos professores sobre o currículo e a matemática a ensinar. No que diz respeito ao planeamento de tarefas, o autor salienta que o design colaborativo de tarefas enriquece a variedade de conteúdos matemáticos promovidos.

Também no âmbito de um programa de formação contínua, Miguens et al. analisam como uma professora do 1.º ano desenvolve a sua compreensão do pensamento computacional ao conceber, com o apoio de um investigador, uma aula baseada na investigação, bem como ao implementá-la. Após o planeamento e implementação, os investigadores observam que a professora consolida o seu conhecimento sobre o pensamento computacional, demonstrando compreensão da maioria das suas dimensões. Destacam também o progresso no desenvolvimento da sua compreensão do ensino do pensamento computacional em matemática, refletido nas mudanças na seleção das tarefas a atribuir aos alunos; enquanto no início tendia a optar por exercícios, no final do programa de formação, optou por problemas e tarefas baseadas na investigação. De facto, a aula planificada incluía uma tarefa exploratória que exigia que os alunos trabalhassem em grupo e incentivava a identificação de padrões e competências algorítmicas.

No âmbito de um outro programa de formação contínua, Pinto Rama et al. exploram as práticas de ensino de uma professora portuguesa de matemática do 8.º ano, enquanto esta concebe, implementa e reflete sobre uma atividade investigativa e orientada por dados para promover o pensamento computacional através do Scratch. Rama et al. demonstram que o contexto colaborativo, que incluiu quatro professores, levou ao desenvolvimento de conhecimento didático sobre atividades de pensamento computacional. No estudo, os autores fornecem evidências de como o professor mobiliza o conhecimento, por exemplo, organizando a ordem dos blocos de operadores na descrição da tarefa e relacionando os blocos de operadores com as dimensões do pensamento computacional formuladas por Wing (2006).

Aceitar a perspectiva da construção social do conhecimento docente significa também comprometer-se a proporcionar formação de qualidade em programas de formação inicial. Neste sentido, duas das sete propostas (Reis et al., Plazas-Naranjo et al.) produziram resultados com abordagens variadas. Enquanto a investigação de Reis et al. diagnostica o conhecimento dos professores sobre determinados conteúdos matemáticos, a investigação de Plazas-Naranjo et al. revê tarefas profissionais já implementadas nos programas de formação não só para mobilizar conhecimentos matemáticos, mas também conhecimentos didáticos.

Após investigar o conhecimento matemático de 13 professores brasileiros de matemática do ensino fundamental e médio sobre os conceitos de frações e números racionais, Reis et al. concluíram que é necessário enfatizar os aspetos conceptuais e relacionais durante a formação. Esta recomendação foi feita após identificar que alguns professores têm dificuldade em fornecer uma definição de fração, enquanto as suas definições de números racionais são, por vezes, inconsistentes com as apresentadas nos manuais escolares, mesmo quando se trata de professores com formação universitária em Matemática e que realizaram unidades curriculares onde estas definições foram formalmente abordadas.

Plazas-Naranjo et al. realizaram um estudo bibliométrico sobre tarefas na formação inicial de professores de matemática para a educação pré-escolar (0 aos 6 anos) e o ensino básico (6 aos 12 anos), visando a construção de conhecimento matemático e didático. Estes autores centram-se na investigação de Espanha e Portugal, revelando que os modelos mais utilizados nestes dois países são o MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge de Carrillo et al., 2018) e o OSA (Onto-semiotic approach de Godino et al., 2007), ambos inspirados no trabalho de Shulman (1986). Além disso, concluem que a maioria das tarefas é utilizada para analisar os conhecimentos desenvolvidos ou mobilizados pelos futuros professores do ensino básico, existindo uma escassez de tarefas direcionadas para a educação de infância.

Integração da tecnologia na era digital

A resposta às mudanças sociais do século XXI impulsionou uma transformação do conhecimento docente, que é atualmente concebido por uma parte significativa da comunidade de investigação como uma dimensão mais dinâmica, complexa e sensível ao contexto. A necessidade de refinar e redefinir o conhecimento profissional levou ao surgimento de um corpo significativo de investigação focada nos desafios da era digital e da equidade (Chapman et al., 2022). Neste grupo de discussão, as propostas apresentadas centraram-se sobretudo nos desafios da era digital ligados à utilização das tecnologias.

O professor do século XXI deve ser capaz de fomentar nos seus alunos atitudes e competências que os habilitem a enfrentar os desafios futuros de uma sociedade globalizada e altamente mediada pela tecnologia (Diego-Mantecón et al., 2022; Rocha, 2020). Estes desafios incluem questões sociais e ambientais interligadas, como epidemias, alterações climáticas, insegurança hídrica e alimentar, contaminação química e migração (Coles et al., 2023). Na sala de aula de matemática, tais desafios podem ser enfrentados através da resolução de problemas não rotineiros, caracterizados pela ausência de procedimentos previamente conhecidos, pela necessidade de recorrer a ferramentas tecnológicas e pelo tratamento de conteúdos contextualizados em temas como os referidos.

Os problemas não rotineiros, que devem ser abordados em diferentes etapas da educação (Yeung et al., 2024), têm o potencial de desenvolver competências dos alunos, como o raciocínio matemático, o pensamento computacional e a modelação (Canavarro et al., 2021; Niss & Hojgaard, 2019, Rocha & Babo, 2024). Para que tal aconteça, é essencial que os professores tenham conhecimentos profissionais sobre como desenvolver estas competências; no entanto, mesmo os professores com vários anos de experiência parecem não possuir esse conhecimento (Ortiz-Laso et al., 2023). Ao mesmo tempo, a incorporação das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem exige conhecimentos específicos sobre a sua utilização e integração pedagógica de ferramentas como o software de geometria dinâmica (Jacinto & Carreira, 2023; Trgalová & Tabach, 2023), a realidade aumentada (Sua et al., 2021), a impressão 3D (Diego-Mantecón et al., 2022; Tejera et al., 2025), a calculadora gráfica (Rocha, 2020) e inteligência artificial (Bernardi et al., 2025; Ortiz-Laso et al., in press). Como muitos dos estudos de investigação mencionados demonstraram, os professores têm dificuldade em ensinar matemática através da tecnologia.

Neste grupo de trabalho, três propostas combinaram a matemática e a tecnologia (Coelho & Rocha; Martins, Rama et al.). As duas propostas anteriormente apresentadas (Martins; Rama et al.), para além de fazerem parte de programas de educação contínua, partilham o objetivo de desenvolver conhecimento profissional principalmente ligado ao pensamento computacional. Apesar de ambas as propostas utilizarem programação, os recursos utilizados diferem; enquanto a proposta de Martins se centra na programação tangível com o mTiny, a proposta de Rama et al. promove a programação baseada em ecrãs através da plataforma Scratch. A proposta de Miguens et al., embora também aborde o pensamento computacional, explora-o numa perspetiva analógica e não incorpora tecnologia digital. A elevada presença de propostas que abordam o pensamento computacional (três em sete) pode estar relacionada com a sua recente incorporação no currículo português (Canavarro et al., 2021; Ng et al., 2024). O interesse dos investigadores deste país pelo pensamento computacional reflete-se também no lançamento de um número temático na revista Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática (Ng et al., 2024) da Associação de Professores de Matemática, que inclui cinco contributos de autores portugueses.

O interesse em combinar tecnologia e matemática realça a necessidade de estruturas de conhecimento profissional para orientar o design e a análise de tarefas durante a formação inicial e continua. Dentro desta linha teórica, destaca-se o contributo de Rocha, investigando as semelhanças e diferenças entre os três modelos mais utilizados em estudos sobre conhecimento profissional focados na integração da tecnologia: TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge* de Misha e Koehler, 2006), PTK (*Pedagogical Technology Knowledge* de Thomas e Hong, 2013) e KTMT (*Knowledge for Teaching Mathematics with Technology* de Rocha, 2020). Estas semelhanças e diferenças (por exemplo, na nomenclatura ou na conceção de domínios do conhecimento) levam a investigadora a desenvolver o *Modelo Global*, aplicando-o à análise do conhecimento profissional dos professores.

A resolução de problemas não rotineiros envolve muitas vezes não só o uso da matemática e da tecnologia, mas também de outras disciplinas, como as ciências, a engenharia ou as artes. Esta perspetiva, que consiste em combinar conhecimentos, competências e atitudes, ganhou relevância através das abordagens STEM ou STEAM e foi incorporada nos currículos de muitos países. É de notar que não existe consenso sobre quantas disciplinas precisam de ser implementadas numa aula de STEM ou STEAM (Stohlmann, 2019; Toma & García-Carmona, 2021). No entanto, acreditamos que para categorizar uma prática educativa como STEM ou STEAM, não basta abranger duas disciplinas. As propostas de Martins e de Rama et al. poderiam ser incluídas numa das duas abordagens, mas não apresentam evidência de abranger, por exemplo, a engenharia. Assim sendo, considerar estas duas práticas sob uma de duas abordagens implicaria uma utilização imprecisa das siglas STEM ou STEAM.

No contexto da educação integrada por disciplinas, o conhecimento profissional torna-se ainda mais complexo. Em termos apenas de conhecimento de conteúdos, a implementação de práticas educativas integradas requer não só o conhecimento de matemática, mas também o conhecimento das outras disciplinas que estão a ser integradas. Neste sentido, a formação de professores apresenta um desafio, pois não se trata apenas de compreender as diferentes disciplinas, mas também de desenvolver a capacidade de conceber e implementar problemas não rotineiros que liguem as disciplinas de forma significativa. Esta dificuldade reflete-se também no campo da investigação, onde foi identificada uma falta de atenção ao conhecimento profissional. Especificamente, Yang e Ball (2024), após uma revisão de catorze artigos sobre tarefas STEM desenvolvidas em programas de formação, concluem que o conhecimento profissional das disciplinas envolvidas é raramente avaliado como resultado da formação.

Neste grupo de trabalho, a proposta de Coelho e Rocha aborda especificamente o conhecimento profissional durante a implementação de tarefas que envolvem a matemática, a tecnologia e as ciências. Especificamente, a sua proposta investiga a forma como dois professores do ensino secundário mobilizam o seu conhecimento profissional e enfrentam barreiras na implementação de práticas interdisciplinares. Na sua investigação, as práticas interdisciplinares envolvem as disciplinas de ciências (física), tecnologia (calculadora gráfica) e matemática (funções). Considerando o APCK (Application and Pedagogical Content Knowledge de Rocha, 2019), os autores concluem que os professores estabelecem ligações entre disciplinas, demonstram flexibilidade na implementação ao nem sempre promovê-las ao mesmo tempo durante o desenvolvimento de um tópico e variam os tipos de representações matemáticas. Além disso, identificam barreiras como a falta de recursos, a especialização do conhecimento e o apoio institucional limitado.

Considerações finais

Este grupo de trabalho explorou diversas dimensões do conhecimento profissional dos professores de matemática, incluindo a incorporação de tecnologia. É de salientar que um número considerável de contributos envolveu professores em exercício, destacando o interesse em alcançar um impacto na prática profissional a curto prazo. Foi ainda dada atenção a aspectos fundamentais, como a formação inicial de professores e o desenvolvimento de modelos teóricos de conhecimento profissional. Além disso, a relevância das competências recentemente incorporadas no currículo de matemática, impulsionada pelas mudanças sociais e tecnológicas, gerou contributos focados no pensamento computacional, percebido como uma das competências essenciais no ensino da matemática no século XXI.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado por fundos nacionais espanhóis por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033, através do financiamento de Projeto PID2021-122326OB-I00, e parcialmente financiado por fundos nacionais portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia que financiou o projeto TecTeachers (2022.03892.PTDC).

Referências

Andrews, P. (2011). The cultural location of teachers' mathematical knowledge: Another hidden variable in mathematics education research? In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 99-118). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_7

Ayalon, M., & Wilkie, K. J. (2020). Developing assessment literacy through approximations of practice: Exploring secondary mathematics pre-service teachers developing criteria for a rich quadratics task. *Teaching and Teacher Education*, *89*, 103011. https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.103011

Bernardi, M. L., Capone, R., Faggiano, E., & Rocha, H. (2025). Generative AI in mathematics education: Pre-service teachers' knowledge and implications for their professional development. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2490104

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 301-309. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9043-y

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, P., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chapman, O., Chitera, N., Climent, N., Dindyal, J., & Sztajn, P. (2022). Mathematics teacher education should be responsive to a rapidly changing world. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 69-85). PME.

Coles, A., Solares-Rojas, A., & le Roux, K. (2024). Socio-ecological gestures of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *116*(2), 165-183. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10318-4

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., & Blanco, T. F. (2022). Implementing STEM projects through the EDP to learn mathematics: The importance of teachers' specialization. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning* (pp. 399-415). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_17

Fernández, C., Callejo, M. L., & Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 407-424. http://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1235

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics*, *39*(1), 127-135. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Gueudet, G., Pepin, B., & Rezat, S. (2024). Meta-resources: Supporting the design of mathematics teaching and learning. In *Handbook of digital resources in mathematics education* (pp. 935-968). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_36-1

Jacinto, H., & Carreira, S. (2023). Knowledge for teaching mathematical problem-solving with technology: An exploratory study of a mathematics teacher's proficiency. *European*

Journal of Science and Mathematics Education, *11*(1), 105-122. https://doi.org/10.30935/scimath/12464

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: Global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 273-292. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9347-9

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Ng, O., González-Calero, J. A., & Jacinto, H. (2024). Advancing research and practice in integrating computational thinking in mathematics education. *Quadrante*, *33*(2), 1-10. https://doi.org/10.48489/quadrante.39744

Ortiz-Laso, Z., Diego-Mantecón, J. M., Tejera, M., & Sua, C. (in press). Designing tasks for STEAM projects with artificial intelligence from a school mathematics perspective. In F. Munzu, Ş. Gökçearslan, & Z. Lavicza (Eds.), *AI in action: Transformative pathways in STEM teaching and learning*. Springer.

Ortiz-Laso, Z., Saorín, A., Bernabeu, M., & Fernández, C. (2025). Pre-service primary school teachers' curricular noticing: Interpreting a sequence of activities about 3D. In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME14). Free University of Bozen-Bolzano e ERME.

Rocha, H. (2019). Interdisciplinary tasks: Pre-service teachers' choices and approaches. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A.S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado & M. H. Martinho (Eds.), *Proceedings of the ATEE Winter Conference "Science and mathematics education in the 21st century"* (pp. 82-93). ATEE e CIEd.

Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM – Mathematics Education*, *52*(7), 1381-1396. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01195-1

Rocha, H. & Babo, A. (2024). Problem-solving and mathematical competence: A look to the relation during the study of Linear Programming. *Thinking Skills and Creativity*, *51*, 1-14. Article 101461. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101461

Rocha, H. (2025). Knowledge to teach Mathematics with technology: The Global Model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *56*(8), 1494-1512. https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2483488

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Stohlmann, M. (2019). Three modes of STEM integration for middle school mathematics teachers. *School Science and Mathematics*, *119*(5), 287-296. https://doi.org/10.1111/ssm.12339

Sua, C., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3D y realidad aumentada: alineando puntos en el espacio. In P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 579-586). SEIEM.

Tejera, M., Galiç, S., & Lavicza, Z. (2025). 3D modelling and printing in teacher education: A systematic literature review. *Journal for STEM Education Research*, 1-32. https://doi.org/10.1007/s41979-025-00147-2

Toma, R. B., & García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(1), 65-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Thomas, M., & Hong, Y. (2013). Teacher integration of technology into mathematics learning. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, *20*, 69-84.

Trgalová, J., & Tabach, M. (2024). Pre-service teachers' development of digital resource design capacity. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(4), 651-665. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01554-2

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Yang, K. L., & Ball, L. (2024). STEM teacher education programs for preservice and in-service secondary mathematics teachers: A review study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *27*(2), 185-207. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09557-0

Yeung, G. W., Ng, O., & Zhang, Y. (2024). Young children's embodied computational thinking developed with touchscreen mathematics applications. *Quadrante, 33*(2) 11-35. https://doi.org/10.48489/quadrante.37071

Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P., & Fernández, C. (2024). Mirar profesionalmente los materiales curriculares: coherencia entre interpretar y decidir. In N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en educación matemática XXVII* (pp. 537-544). SEIEM.

Comunicações

O PROJETO PEQUENOS MATEMÁTICOS: CONHECIMENTO DIDÁTICO DE DUAS PROFESSORAS DE 1.º CICLO

PEQUENOS MATEMÁTICOS PROJECT: THE DIDACTICS KNOWLEDGE OF TWO ELEMENTARY TEACHERS

Sónia Martins

Departamento de Matemática, FCEE-UMa e CIE-UMa, Portugal

soniam@staff.uma.pt

Resumo: Este estudo tem como principal objetivo compreender o conhecimento didático de duas professoras de 1.º Ciclo do Ensino Básico, mobilizado durante o processo formativo oferecido pelo Projeto Pequenos Matemáticos. Atendendo a esse propósito, foi importante nesta investigação atender às necessidades formativas identificadas pelas professoras no início do projeto, aos tipos de conhecimento didático mobilizados pelas professoras durante o processo formativo e às características do processo formativo que se mostraram relevantes para o desenvolvimento desse conhecimento. Utilizou-se uma análise descritiva e interpretativa à planificação de uma tarefa para a aula de matemática, conduzida nas sessões de trabalho do projeto. Para analisar os dados, recorreu-se à conceptualização de conhecimento didático do professor que ensina Matemática. Os resultados indicam que as necessidades formativas das professoras se relacionam com o conhecimento curricular e com o desenvolvimento de uma cultura de sala de aula onde se equaciona o uso de tecnologias. O processo formativo mostrou-se dialogante com o fazer em sala de aula das professoras, traduzindo-se num ambiente reflexivo promotor do seu desenvolvimento profissional, em particular de diferentes vertentes do seu conhecimento didático.

Palavras-chave: formação de professores, conhecimento didático, pequenos matemáticos, robótica educativa.

Abstract: The main purpose of this study is to understand the didactics knowledge of two primary school teachers, mobilized during the training process provided by the project "Pequenos Matemáticos". In line with this aim, it was important to consider the training needs identified by the teachers at the beginning of the project, the types of didactics knowledge mobilized by the teachers during the teacher's education, and the characteristics of the training process that were relevant for the development of this knowledge. A descriptive and interpretative analysis was conducted about the planning of a task, carried out during the project's work sessions. To analyze the data, the idea of didactics knowledge of teachers who teach mathematics was used. The results indicate that the teachers' training needs were related to curricular knowledge and the development of a classroom culture that considers the use of technology. The training process was shown to be in dialogue with the teachers' classroom practice, creating a reflective environment that fostered their professional development, particularly in different aspects of their didactics knowledge.

Keywords: teacher education; didactics knowledge, pequenos matemáticos; educational robotics.

Introdução

Uma revisão acerca das formas como o professor pode desenvolver-se profissionalmente, permite aferir que o desenvolvimento profissional docente apresenta um conjunto de modalidades de formação que varia de acordo com os contextos, objetivos e conteúdos que se procuram desenvolver. Em qualquer dos casos, como refere Sowder (2007), o desenvolvimento profissional assume-se como um processo que deve atender às reais necessidades dos professores.

O Projeto Pequenos Matemáticos, com início de trabalhos no ano letivo 2022-2023 surgiu de um convite encetado por duas professoras de 1.º Ciclo de uma escola da RAM a uma investigadora do Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira para que existisse um processo de consultadoria científica e pedagógica a um projeto de escola, já em curso nas suas turmas.

Durante o primeiro ano letivo, a investigadora trabalhou de forma próxima com estas duas professoras procurando conhecer o seu ambiente escolar e compreender as suas reais necessidades formativas, por forma a criar um contexto que se mostrasse adequado ao seu desenvolvimento profissional, nomeadamente à construção e reconstrução do seu conhecimento didático (Ball et al., 2008; Ponte, 1999, 2012; Ponte & Oliveira, 2002; Shulman, 1986,1987). Nesse ano letivo foram redigidos e formalizados os protocolos de cooperação entre a escola e o referido centro de investigação, foram desenhadas as duas primeiras fases da investigação e, no ano letivo seguinte, iniciou-se o processo formativo desenvolvido no projeto.

As práticas investigativas do projeto Pequenos Matemáticos incidem em duas vertentes. Por um lado, a compreensão da trajetória formativa das professoras e, por outro, a análise da aprendizagem matemática dos seus alunos, quando envolvidos nas tarefas matemáticas implementadas no projeto. Este artigo centra-se na primeira destas dimensões, tendo como principal objetivo compreender o conhecimento didático de duas professoras de 1.º Ciclo do Ensino Básico, mobilizado durante o processo formativo oferecido pelo Projeto Pequenos Matemáticos, quando planificam uma tarefa matemática. Com base neste objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação: i) Que necessidades formativas são identificadas pelas professoras? ii) Que tipos de conhecimento didático mobilizaram as professoras, quando envolvidas no processo formativo oferecido pelo Projeto Pequenos Matemáticos? Quais as características do processo formativo oferecido pelo projeto que se mostraram relevantes para esse desenvolvimento?

No domínio da construção ou reconstrução do conhecimento profissional do professor, a reflexão intencional (Schön, 1983) representa uma prática fulcral, na medida em que permite ao professor questionar os seus procedimentos, as suas crenças e a sua visão geral sobre o ensino. O processo formativo do projeto Pequenos Matemáticos, privilegia práticas de natureza reflexiva, nas quais o professor em formação tem a oportunidade de identificar problemáticas e desafios emergentes, pensar sobre as ocorrências em sala de aula, refletir sobre as suas ações e aumentar as oportunidades de aprendizagem, suas e dos seus alunos. Para tal, assume particular importância o trabalho colaborativo, com a investigadora e com os seus pares, no qual a reflexão, tanto teórica como empírica, sobre situações da prática docente conduz a uma dinâmica cíclica de reflexão-planificação-ação-reflexão. A planificação de tarefas para a aula de matemática e posterior reflexão acerca da sua implementação, constitui um aspeto central no processo formativo do projeto Pequenos Matemáticos.

Enquadramento teórico

A formação contínua de professores que ensinam matemática tem sido objeto de investigação nas últimas décadas, sendo discutidos diferentes modelos que sustentam um entendimento acerca das diferentes dimensões do conhecimento profissional neste domínio (Ball et al., 2008; Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002; Ponte, Quaresma, & Branco, 2012; Serrazina, 2013; Santana, Ponte & Serrazina, 2020).

Ball, Lubienski e Mewborn (2001), debruçando-se sobre a investigação produzida sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática, destacam duas abordagens nucleares. A primeira considera o conhecimento do conteúdo matemático, essencial para se poder ensinar. A segunda, centrada no conhecimento dos professores, constrói-se a partir da primeira, incidindo qualitativamente no conhecimento de como o conteúdo matemático deve ser representado, de como os alunos aprendem e de possíveis dificuldades evidenciadas. Esta segunda abordagem destaca o conhecimento profissional numa vertente mais prática, situada, orientada para a ação. Nesta linha toma-se como referência o contributo oferecido por Shulman (1986), para quem o conhecimento profissional articula o domínio do conhecimento científico matemático e o domínio pedagógico do conteúdo, constituindo este último uma elaboração pessoal do professor quando se encontra no processo de transformar em ensino o conteúdo matemático aprendido no seu percurso formativo.

Fundamentado nos estudos realizados na formação inicial e contínua de professores, Shulman (1986) propôs três categorias teóricas de conhecimento, presentes no desenvolvimento profissional do professor: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. No ano seguinte, o mesmo autor (Shulman, 1987) desdobrou em sete, as categorias que compõem o conhecimento profissional: a) o conhecimento do conteúdo que será objeto de ensino; b) o conhecimento pedagógico geral, com especial referência aos princípios e estratégias mais abrangentes de gestão e organização da sala de aula; c) o conhecimento do currículo, respeitante ao conhecimento do professor para selecionar e organizar os programas, bem como os meios que dispõe para isso; d) o conhecimento pedagógico do conteúdo que é uma combinação especial entre conteúdo e pedagogia, típico do professor; e) o conhecimento dos alunos e das suas características; f) o conhecimento dos contextos educacionais, que engloba desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até as características das comunidades e das suas culturas; e, por fim, g) o conhecimento do contexto e dos fins, propósitos e valores educativos.

No conjunto das sete categorias enunciadas por Schulman (1987) destaca-se o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, uma vez que o autor propõe esta categoria como a mais provável para distinguir entre o conhecimento do conteúdo de um especialista numa determinada área e o conhecimento de um professor dessa área. A forma natural como um professor, em particular um professor de matemática, conduz um processo de aprendizagem, a flexibilidade com que trata o conteúdo e o ajuste deste ao nível de conhecimento dos seus alunos, bem como a seleção do estilo mais adequado às condicionalidades do ambiente, denotam os padrões de conhecimento pedagógico de conteúdo de um professor especialista (Shulman, 1987).

Investigações recentes ampliam o *conhecimento pedagógico de conteúdo* trazendo à discussão aspetos não anteriormente contemplados, tais como, os conhecimentos e crenças sobre os objetivos de ensinar a disciplina, a orientação para o ensino das ciências ou o conhecimento da avaliação ou das representações do conhecimento matemático a ensinar (Vollmer & Klette, 2023). Este debate sobre acréscimos ou especificações tem sido contínuo.

Ponte (1999), apresenta uma perspetiva de conhecimento profissional docente fortemente ancorado na prática letiva, essencialmente orientado para a ação. O conhecimento profissional docente, designado por Ponte (1999) por *conhecimento didático*, desdobrase em quatro domínios: (1) conhecimento dos conteúdos de ensino, incluindo as suas conexões internas e externas e as suas formas de raciocínio, de argumentação e de validação, (2) conhecimento do currículo, incluindo as grandes finalidades e objetivos e a sua articulação vertical e horizontal; (3) conhecimento do aluno, dos seus processos de aprendizagem, interesses, necessidades e dificuldades mais comuns, assim como dos fatores culturais e sociais que podem impactar, de forma positiva ou negativa, o seu desempenho escolar; (4) conhecimento do processo de ensino, no que se refere à preparação, condição e avaliação da sua prática letiva.

Pires (2006) adverte-nos que, a par do conhecimento da matemática, do conhecimento do contexto educativo e do conhecimento pedagógico e do didático, também importante é o conhecimento que o professor faz de si próprio. Este é o domínio do conhecimento profissional que se relaciona com o que o professor sabe de si mesmo como pessoa e como professor de Matemática, e incide nas suas capacidades de relação pessoal com os outros, nos seus próprios sentimentos ou emoções e no sentido ético da profissão.

Pires (2006) apresenta-nos uma conceção de conhecimento didático muito semelhante à apresentada por Ponte (1999), enfatizando, contudo, o conhecimento dos materiais curriculares. Para Pires (2006), o conhecimento didático distribui-se por cinco (sub)domínios principais que o enformam e estruturam: (i) o conhecimento da Matemática enquanto disciplina escolar; (ii) o conhecimento dos alunos, designadamente, as suas necessidades, dificuldades ou conceções próprias; (iii) o conhecimento do currículo e programas de Matemática; (iv) o conhecimento dos materiais curriculares, como os materiais manipuláveis, tecnológicos e de escrita, especialmente, os manuais escolares; e (v) o conhecimento do processo instrucional, compreendendo a preparação, a condução e a avaliação de todo o ciclo da prática letiva.

Um enfoque no conhecimento dos materiais curriculares, enquanto subdomínio essencial do conhecimento profissional do professor, caracteriza o trabalho de Pires (2006). Contudo, se assumirmos que no processo instrucional o professor necessita, em particular, ponderar que materiais e/ou artefactos melhor se prestam ao processo de ensino e de aprendizagem matemática, parece-nos excedente este subdomínio do conhecimento didático apontado pelo autor.

As vertentes apontadas por Ponte e Oliveira (2002) revelam-se igualmente relevantes para caraterizar o conhecimento didático do professor de matemática, ou seja, “a parte do conhecimento profissional chamado a intervir directamente na prática lectiva” (p. 152). Na mesma linha de Pires (2006), os autores reforçam que o conhecimento didático, sendo orientado para situações da prática, relaciona-se de forma estreita com diversos aspetos do conhecimento da vida quotidiana do professor, como o conhecimento do contexto (escola, comunidade e sociedade) e o conhecimento de si próprio.

Na figura seguinte resumimos as vertentes do conhecimento didático do professor, avançadas por Ponte e Oliveira (2002), facultando alguns indicadores sobre a sua natureza.

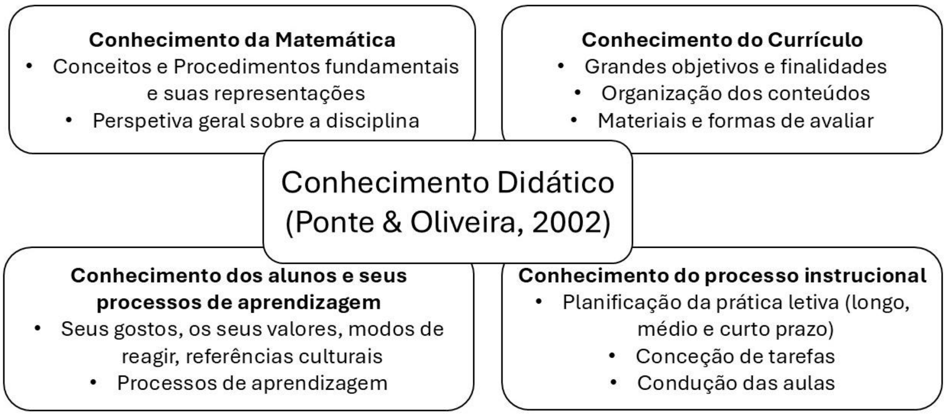


Figura 1. Conhecimento didático (Ponte & Oliveira, 2002, esquema da autora).

Também com quatro dimensões caracterizantes do conhecimento didático, destaca-se o modelo proposto por Ponte (2012). Apesar de semelhante a outros modelos apresentados, o autor destaca o seu caráter distintivo, em parte pela existência de um núcleo central, o conhecimento da prática letiva.

Figura 2. Dimensões do conhecimento didático (Ponte, 2012).

Ponte (2012) defende que, com o apoio das outras dimensões, é no âmbito do conhecimento da prática letiva que se tomam opções cruciais que orientam todo o processo de ensino. O autor adverte-nos que um aspeto diferenciador deste modelo reside no facto de não se conceber a possibilidade de separar as dimensões umas das outras e, embora tente diferenciá-las, enfatiza que todas elas estão de alguma forma presentes na atividade do professor quando ensina matemática.

Mais recentemente, o modelo de *conhecimento didático disciplinar* (Vollmer, 2021; Vollmer & Klette, 2023), expande o conceito tradicional de conhecimento profissional docente, ampliando as fronteiras do *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Schulman, 1987). Enquanto o modelo de Shulman coloca a enfase no conhecimento integrado que os professores precisam ter para ensinar um conteúdo de forma eficaz, o que inclui o entendimento de como adaptar o conteúdo ao nível de compreensão dos alunos e responder às suas dificuldades, o presente modelo propõe o c*onhecimento didático disciplinar* como um conceito mais abrangente e reflexivo que enfatiza a relação entre o conteúdo e o desenvolvimento educacional integral dos alunos. Esta abordagem considera não apenas as estratégias pedagógicas, mas também o papel do conteúdo na formação pessoal e cultural dos estudantes, algo que vai além da adaptação didática, sendo considerados os aspetos pessoais, ou seja, o valor formativo do conteúdo, ajudando o aluno a desenvolver não apenas conhecimentos, mas também valores, atitudes e uma compreensão crítica do mundo.

Metodologia

Nesta secção descreve-se, numa primeira fase, o contexto formativo desenvolvido no Projeto Pequenos Matemáticos. Posteriormente, dedica-se uma subsecção aos procedimentos metodológicos que sustentam o presente estudo.

O contexto formativo

O projeto Pequenos Matemáticos, desenvolvido desde o ano letivo 2022-2023 numa escola Básica com Pré-escolar da Madeira, resultou de um contacto inicial efetuado por uma professora da referida escola à investigadora para que pudesse suportar um processo de consultadoria científica ao mesmo. A professora já havia trabalhado com a investigadora num projeto de formação contínua de professores de Matemática e considerou que esta parceria seria uma mais-valia para o aprimoramento das práticas letivas das professoras envolvidas no projeto, muito em particular neste domínio.

Após uma primeira fase de encontros informais e estabelecimento de protocolos de cooperação, o processo formativo iniciou-se no ano letivo 2023-2024, com as duas professoras titulares das duas turmas de 3.º ano de escolaridade da escola. Gradualmente, nos anos letivos seguintes, o projeto visa incluir a participação de mais anos de escolaridade e de mais turmas da escola.

No projeto Pequenos Matemáticos, são desenvolvidas atividades de diferentes naturezas: atividades de formação: em sessões de trabalho realizadas com as professoras envolvidas e a consultora científica; atividades em sala de aula, com as turmas, e atividades de investigação. As atividades investigativas, apesar de serem desenvolvidas em grande parte pela investigadora, assumem a colaboração das professoras envolvidas. A definição do problema em estudo foi feita de forma partilhada, o *design* do processo formativo que visa contribuir para a sua solução foi conjuntamente construído e as professoras participam ativamente da reflexão conjunta acerca da sua eficácia, sendo participantes ativos na validação da investigação.

As sessões de formação decorrem quinzenalmente na escola, com a duração de duas horas. Essas sessões desenvolvem-se em torno das seguintes ações: análise e discussão de orientações curriculares e diretrizes ministeriais; discussão e reflexão acerca de conteúdos matemáticos e suas conexões, bem como dos temas transversais, nomeadamente, avaliação das aprendizagens matemáticas dos alunos, comunicação matemática, representações matemáticas, resolução de problemas na aula de matemática, materiais e recursos para a aula de matemática, dinâmicas e metodologias de trabalho na aula de matemática, aprendizagem da matemática numa abordagem STEAM, entre outros. Também nestas sessões são planificadas tarefas para a aula de matemática e posterior reflexão acerca da sua implementação. As atividades em sala de aula incidem na implementação das tarefas discutidas e construídas nas sessões de formação, as quais podem contar com a presença e colaboração da consultora científica. A investigação que aqui se discute está inserida nas atividades investigativas desenvolvidas pela consultora científica do projeto e centra-se na trajetória formativa das duas professoras que iniciaram o projeto, aqui designadas por P1 e P2.

Opções metodológicas na investigação

O estudo apresentado possui uma natureza interpretativa que se concretiza através da modalidade de *design research* (Gravemeijer & Cobb, 2013), na qual são implementados sucessivos ciclos de *design,* ao longo do desenvolvimento do processo formativo no projeto Pequenos Matemáticos.

Focada em contextos educacionais reais, a metodologia de *design research* envolve a colaboração entre investigadores e participantes para resolver problemas identificados em práticas específicas e, ao mesmo tempo, gerar conhecimentos teóricos sobre esses problemas. O *design research* valoriza a complexidade dos ambientes educacionais e adapta-se dinamicamente a eles, permitindo a criação de soluções mais eficazes e contextualizadas para problemas emergentes.

A presente investigação de cariz intervencionista foca-se essencialmente na compreensão das vertentes do conhecimento didático evidenciadas pelas professoras participantes no projeto Pequenos Matemáticos (Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002), sendo a intervenção pensada e implementada em ciclos iterativos de *design*, visando responder ao seguinte objetivo de investigação: Compreender o conhecimento didático de duas professoras de 1.º ciclo do Ensino Básico, mobilizado durante o processo formativo oferecido pelo projeto Pequenos Matemáticos, quando planificam uma tarefa matemática. Com base neste objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação: i) Que necessidades formativas são identificadas pelas professoras? ii) Que tipos de conhecimento didático mobilizaram as professoras, quando envolvidas no processo formativo oferecido pelo Projeto Pequenos Matemáticos? Quais as características do processo formativo oferecido pelo projeto que se mostraram relevantes para esse desenvolvimento?

O processo investigativo que aqui se discute contempla quatro fases. Na primeira, os participantes, investigadora e professoras, identificaram o problema, e, com base na revisão da literatura, levantaram as questões de investigação e focos de atuação. Numa segunda fase, desenhou-se o processo formativo, visando solucionar a problemática identificada. O *design* da intervenção apresenta uma explícita conexão entre o contexto particular onde é desenvolvida e os diálogos com a literatura existente. Na terceira fase encetaram-se os ciclos iterativos, formados pelo *design*, implementação, análise e *re-design*. Na última fase, é efetuada uma reflexão com o intuito de se produzir princípios de *design* e melhoria na implementação do processo formativo. No ano letivo 2023-2024 iniciaram-se os ciclos de *design*, sendo os dados aqui analisados referentes a duas interações, com a duração de aproximadamente 4 meses.

A recolha de dados apoiou-se nas técnicas de observação participante e de análise documental. A observação foi realizada de forma direta, focada nas atitudes exibidas, conhecimentos manifestados e capacidades postas em prática pelas professoras. Os suportes de recolha de dados foram as notas de campo (NC) produzidas pela investigadora (quer em sessões de formação, como na participação em atividades de sala de aula) e os documentos de trabalho produzidos pelas professoras participantes e a investigadora durante o processo formativo. Os dados recolhidos no momento de planificação e implementação de tarefas matemáticas, assumiu particular relevância nesta investigação, pelos motivos que a seguir se descrevem.

O conhecimento didático das professoras foi entendido tendo por base o modelo proposto por Ponte (2012), com aportes trazidos do trabalho de Ponte e Oliveira (2002). Segundo este modelo, o cerne do conhecimento didático reside no conhecimento que o professor possui da prática letiva. Este conhecimento inclui o processo de planificação de longo e médio prazo e de cada aula. Implica também o desenho das tarefas, das ações de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor. Neste sentido, os dados recolhidos relativamente ao trabalho das professoras nas dimensões acima descritas foram significativos para a compreensão do objeto em estudo. Neste artigo, em particular, analisa-se o processo de planificação por parte das professoras de uma tarefa matemática. Outras produções científicas da autora são dedicadas à análise de dados recolhidos em sala de aula, aquando da implementação das tarefas.

Na presente investigação foram tomadas como categorias de análise as dimensões do conhecimento didático (Ponte, 2012, Ponte & Oliveira, 2002), presentes na Tabela 1. Para cada categoria foram identificadas unidades de análise, tendo por base o enquadramento teórico e o objetivo do estudo. A análise das evidências das diferentes categorias foi realizada qualitativamente, atendendo à significância das ocorrências de cada unidade de análise.

Tabela 1. Categorias e unidades de análise.

Conhecimento Didático	
Categorias	Unidades de Análise
Conhecimento da Matemática	- Como utilizam vocabulário e procedimentos matemáticos - Importância dada ao conteúdo conceptual e às capacidades matemáticas transversais - Visão geral sobre a matemática que ensinam
Conhecimento dos alunos e da aprendizagem	- Como contemplam os interesses dos alunos - Como antecipam reações e comportamentos dos alunos -Como compreendem as dificuldades e formas de aprender dos alunos
Conhecimento do Currículo	- Que aspetos priorizam no currículo - Como relacionam os materiais didáticos com o seu potencial para a aprendizagem matemática
Conhecimento da Prática letiva	- Como criam tarefas para a aula de matemática - Cultivam uma cultura de aprendizagem na sala de aula - Usam diferentes formas de organizar o trabalho do aluno

Resultados

Numa fase inicial do projeto (NC, janeiro a abril 2023) foi importante refletir com as professoras P1 e P2 acerca das suas expetativas relativamente ao trabalho no projeto Pequenos Matemáticos, procurando compreender as suas necessidades formativas. As primeiras sessões, dedicadas à escrita conjunta do projeto para formalização do protocolo de cooperação, foram essenciais para recolher dados sobre este aspeto.

As necessidades formativas e o conhecimento didático

Ambas as professoras manifestaram que sentiam necessidade de inovar a sua prática. Apesar de expressarem valorizar práticas assentes na resolução de problemas, na dinamização de jogos e desafios, no uso de materiais manipuláveis e de incentivarem a discussão e o confronto de ideias, sentiam que não estavam a corresponder às necessidades dos seus alunos. Expressaram que a grande maioria dos seus alunos, além de evidenciar lacunas relevantes no conhecimento conceptual matemático, evidenciava pouca autonomia, fraco espírito crítico e baixa criatividade.

As professoras evidenciaram também que no ano letivo seguinte estariam a lecionar o 3.º ano de escolaridade onde, pela primeira vez, eram implementadas as novas aprendizagens essenciais de matemática (Canavarro et al., 2021) e que sentiam precisar de apoio nesse sentido. Sabiam que tinham existido mudanças, mas não sabiam muito bem quais e como operacionalizá-las.

Outro aspeto salientado foi a necessidade de adquirirem conhecimento no uso de tecnologias. A escola estava a equipar um MakerSpace e ambas as professoras expressaram não se sentir capazes de incluir os materiais lá existentes nas suas práticas letivas. Em particular, a Professora P1 evidenciou que se sentia muito pouco à vontade com o uso de tecnologias. Acrescentou ainda que a colega, P2, apoiava-a habitualmente em tarefas nas quais precisava usar o computador. Também assumiu que frequentemente, em aula, os alunos ajudavam-na quando usava o computador em alguma projeção ou recurso digital do manual. A professora P2 expressou gostar de usar tecnologias e sentir-se à vontade com o seu uso, contudo, nunca trabalhou com as tecnologias presentes no MakerSpace, e não sabia como tirar partido das mesmas.

Os momentos de auscultação das necessidades formativas das professoras mostraram evidências de diferentes aspetos do seu conhecimento didático. No que se refere ao *conhecimento da matemática*, ambas as professoras a concebem numa vertente bastante abrangente, na qual o conhecimento conceptual, a resolução de problemas, o desafio e a argumentação e comunicação matemática assumem igual relevância. Aspetos do *conhecimento dos seus alunos e seus processos de aprendizagem* foram também evidenciados. As professoras assumiram possuir fragilidades no seu *conhecimento curricular,* no que se refere ao conhecimento das novas orientações curriculares e ao uso de tecnologias.

Conhecimento da Matemática e do Currículo

Atendendo ao evidenciado pelas professoras, decidiu-se que o processo formativo começaria por dar particular atenção ao uso de uma ferramenta tecnológica, neste caso, robôs, equacionando-se a metodologia de ensino que suportaria a prática letiva com o seu uso.

A primeira sessão de formação decorreu na sala onde estava alojado o equipamento de robótica, a sala MakerSpace, uma sala equipada com mobiliário facilmente reconfigurável e diferentes tecnologias, tais como quadro interativo, kits de robótica, kits experimentais de ciências, impressoras 3D, entre outros.

As professoras foram unânimes em considerar positivo o facto de a sala possuir todas as condições para os alunos poderem trabalhar em grupo, mas consideraram que as cadeiras com rodinhas dariam aso a distrações e rodopios (NC, 18 de out. 2023). P2 explicou que a sala estava a ser usada pela primeira vez nesse ano letivo e que os professores poderiam requisitá-la para lecionar naquele espaço. Quando questionadas se já a haviam requisitado, sorriram e P2 exclamou: "Não, mas vamos já requisitá-la para as nossas reuniões consigo" (NC, 18 de out. 2023).

A primeira sessão no MakerSpace foi particularmente reveladora da forma como as professoras se sentiam neste espaço. Não conheciam os materiais ali existentes, nem conseguiam prever como tirar partido desses recursos, mas conseguiam prever como se sentiriam os seus alunos. Era unânime para as professoras que os seus alunos adorariam ter aula ali, que o mobiliário daria aso a distração e que as tecnologias, nomeadamente a robótica, seriam certamente uma grande motivação para os alunos.

Nesta mesma sessão partilharam que tinham conhecimento que as novas aprendizagens essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) apelavam ao uso destes materiais, contudo, expressaram não ser capazes de os usar, nem estarem conscientes de que 'matemática' conseguiriam ensinar com a robótica. O facto de procurarem motivar os seus alunos e tornarem as suas aulas mais atrativas era um motivo forte para quererem incluir este tipo de recurso nas suas práticas, mais do que propriamente um possível reconhecimento do seu potencial para a aprendizagem matemática dos seus alunos. Procurando explorar este aspeto, e redefinir o conhecimento didático das professoras na *dimensão curricular e da prática letiva*, a investigadora propôs que se explorasse o robô MTiny (https://www.youtube.com/watch?v=dJNWBR7Dn3o&t=3s).

A investigadora explicou que esta poderia ser uma boa forma de P1 e P2 iniciarem o trabalho com robôs, pois a programação deste robô é feita de forma analógica, recorrendo a blocos de código físicos, sem recurso a um *software* de programação. Esta opção adveio do facto de a professora P1 assumir que não se sentia confortável com o uso de tecnologias, associando essa lacuna à sua idade e aos seus anos de serviço (NC, 18 e 31 de out. 2023).

A investigadora explicou o funcionamento do robô e dos blocos de código, propondo às professoras explorarem-no livremente. Observou-se que P2 não demonstrava qualquer tipo de inibição, sendo a sua manipulação acompanhada de afirmações do tipo: *"Como se carregam as baterias?" "Podemos colocar os robôs a falarem uns com os outros?" "Para que servem estes marcadores?" "Adoro estas coisas (referindo-se à tecnologia)" "Ao usar em aula é bom termos alguns carregados, pois todos quererão mexer"*. A professora P2 apresentava um posicionamento distinto, expressando *"precisar de tempo, muito tempo para explorar"*. As reações foram do tipo: *"Se eu quiser comprar um robô destes para me preparar bem, é muito caro?" "Tenho de vir para a escola preparar-me muito bem! E tu vens comigo. Está no momento de eu começar a usar estas coisas"* (NC, 18 de out. 2023).

Ambos os posicionamentos expressos pelas professoras evidenciam aspetos relevantes dos seus *conhecimentos curriculares e da prática letiva*, nomeadamente a forma como se assumem profissionalmente no que se refere ao uso de tecnologias. P2 assume-se como alguém que gosta de tecnologias, sente-se à vontade e muito motivada para as incluir na sua prática. P1 não se sentia assim. Expõe as suas fragilidades e os seus medos, contudo, assume uma postura aberta à aprendizagem, responsabilizando-se por se esforçar por aprender.

Após o momento de exploração do robô pelas professoras, a investigadora questionou como equacionariam usar este recurso nas suas aulas, e qual o contributo para a aprendizagem matemática dos seus alunos. P1 referiu de imediato que *"o robô é excelente para os miúdos analisarem trajetos e coordenadas. Fiz um exercício de um labirinto e tinha miúdos com muitas dificuldades"*. P2 concordou, acrescentando que os alunos *"ao colocarem as peças [blocos de código] e experimentarem com o movimento do robô, estão a lidar com muitos conceitos de orientação espacial e lateralidade. Tenho alunos com muitas dificuldades neste tópico"*. As professoras P1 e P2 pareciam, neste momento, já reconhecer no robô algum potencial para a aprendizagem Matemática, estando este reconhecimento alinhado com o conhecimento que fazem dos seus alunos, das suas necessidades e processos de aprendizagem. Contudo, observou-se que as professoras não foram capazes de estabelecer conexões entre a programação do robô e outras componentes do conhecimento matemático, por exemplo, o pensamento computacional (Canavarro et al., 2021). Este aspeto evidenciou fragilidades das professoras no conhecimento *da matemática a ensinar*, vertente do seu conhecimento didático.

Conhecimento da Prática Letiva

Na sessão seguinte deu-se início à planificação de uma tarefa, visando o uso do robô MTiny. A investigadora começou por questionar sobre a possibilidade de, na programação do robô para um determinado trajeto, os alunos estarem a experienciar processos de, por exemplo, tentativa e erro, práticas de depuração ou de criação de algoritmos. O diálogo estabelecido trouxe evidências de que as práticas características do pensamento computacional, nomeadamente as descritas nas orientações curriculares (Canavarro et al., 2021), não eram familiares para as professoras, denotando possibilidades futuras de trabalho formativo, visando o desenvolvimento do conhecimento quer do currículo, quer da matemática a ensinar de ambas as professoras.

As professoras decidiram que a tarefa a ser planificada deveria visar a aprendizagem de coordenadas (NC, 2 de nov. 2023). Sugeriram o robô movimentar-se numa maquete composta por uma malha quadriculada, sendo as posições na malha identificadas por coordenadas. Este era um conteúdo novo para os seus alunos e as professoras consideraram que o robô seria benéfico para a sua aprendizagem.

A ideia inicial das professoras seria uma tarefa na qual o robô assumiria várias personagens. De acordo com as máscaras presentes no kit de robótica, consideraram que seria motivador para os alunos que o robô pudesse ser uma galinha, um cão, etc. Cada personagem corresponderia a um grupo de alunos, que teria desafios para cumprir. Os desafios seriam situações problemáticas, atribuídas aos grupos à medida que o robô se deslocasse na malha quadriculada, procurando desviar-se de obstáculos[30]. Os grupos teriam de partilhar as estratégias usadas e as soluções encontradas para os desafios. Esta ideia foi construída pelas professoras num processo criativo conjunto. Quando questionadas sobre a natureza dos desafios, as professoras expressaram que poderiam ser ligados aos números, à geometria, entre outros.

O *conhecimento da prática letiva* mobilizado pela criação desta tarefa, exibiu evidências de como as professoras conceptualizam a matemática escolar e a organização do trabalho do aluno em sala de aula. Apesar de terem intenção de que esta fosse uma tarefa para aprender coordenadas no plano, abriram espaço para que a prática letiva, além de focada neste aspeto conceptual, estivesse aberta à resolução de problemas, contemplando o desenvolvimento de capacidades transversais relevantes. Também revelavam valorizar o trabalho em grupo, a discussão de estratégias e o trabalho em equipa.

Ao refletirem sobre a dinâmica de trabalho nos grupos, P1 expressou que *"Basta um [aluno] abrir a boca e todos vão querer o mesmo animal. Os nossos alunos são assim"* ao que P2 acrescentou: "*São pouco críticos. Querem sempre fazer igual, querem o que outro também tem ou está a fazer. É sempre um problema na sala de aula."*. Perante este diálogo a investigadora sugeriu se poderia ser benéfico fazer uma votação individual a ver que personagem escolheriam (NC, 21 nov. 2024). P1 manifestou-se logo, considerando uma boa ideia e expressou que deveriam aproveitar para tratar os dados das respostas estatisticamente. P2 concordou.

[30] Em momentos formativos posteriores constatou-se que a criação da maquete e programação das trajetórias dos robôs, constituiu um momento rico para a apropriação pelas professoras dos significados das práticas de pensamento computacional (Canavarro et al., 2021).

Quando questionadas se estavam preocupadas pelo facto de estarem a adiar o trabalho com o robô, ou se desviarem do conceito matemático que pretendiam trabalhar inicialmente (coordenadas no plano), ambas assumiram que isso não era problema. Expressaram que o trabalho com o robô poderia esperar e a sua planificação a médio prazo não era rígida. Consideraram que este era um bom contexto para trabalharem com os alunos o tratamento de dados.

Para que a primeira parte da tarefa, dedicada à estatística, não se 'desligasse' do uso do robô, surgiu a ideia de que os alunos votariam individualmente no robô representativo da turma, e que a máscara usada pelo Mtiny seria representativa do robô escolhido.

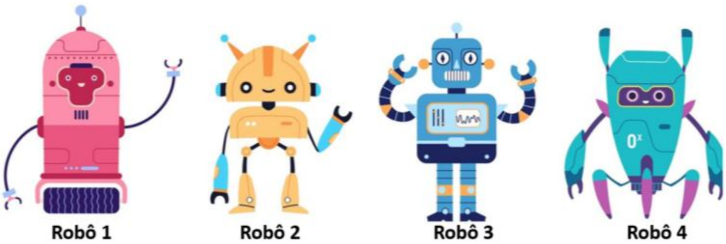


Figura 3. Robôs colocados em votação em cada turma.

A partir deste momento observou-se que a planificação da tarefa assumiu uma natureza diferente. O foco principal na planificação da tarefa deixou de ser a inclusão do robô Mtiny enquanto agente motivador para o aluno, para ser a inclusão do Mtiny numa tarefa com um contexto mais abrangente. O robô Mtiny, passaria a ser o robô papão (https://drive.google.com/file/d/1ggMDbgt9iR9zwcS8pI-kiSLw-mjoBycQ/view?usp=sharing) de cada uma das turmas e seria esse enredo que iria orientar o trabalho matemático dos alunos em sala de aula.

Conclusões

O conhecimento didático do professor de Matemática (Ponte & Oliveira, 2002, Ponte, 2012) assume quatro vertentes, que podem ser mobilizadas com foco no desenvolvimento profissional do professor. Antes do processo formativo, as professoras exteriorizaram necessidades formativas que se prendiam, muito em particular, com o conhecimento curricular e com o desenvolvimento de uma cultura de sala de aula na qual os artefactos tecnológicos presentes na escola pudessem ser incluídos de forma significativa nas suas práticas letivas. O processo formativo contemplou a auscultação das necessidades das professoras, sendo que a planificação de uma tarefa se manifestou um campo rico para a mobilização de diferentes vertentes do seu conhecimento didático, a nível curricular, da matemática que ensina, dos seus alunos e da sua prática letiva.

No projeto Pequenos Matemáticos o processo formativo mostrou-se dialogante com o professor, com o seu fazer em sala de aula e com a mobilização de conhecimentos (Santana et al., 2020), assumindo-se fundamental a reflexão contínua e a ação colaborativa das professoras, traduzindo-se num ambiente promotor do seu desenvolvimento profissional, a partir de situações e problemas reais das suas práticas vividas e partilhadas.

Ao invés de se sugerirem ou prescreverem abordagens didáticas, o processo formativo conduzido no projeto Pequenos Matemáticos abre espaço para que as professoras planifiquem as suas próprias abordagens e reflitam sobre as questões principais que enformam a atividade matemática emergente da sua prática letiva. Nesta base, foi possível identificar que as abordagens planificadas resultaram do conhecimento que as professoras faziam da matemática que pretendiam ensinar, do conhecimento das suas necessidades e das necessidades dos seus alunos, do contexto em que atuam e da cultura de aprendizagem matemática de sala de aula que desenvolvem e/ou procuram desenvolver. Em termos formativos, permitir que as professoras perspetivassem e refletissem sobre a sua própria prática letiva abriu espaço para que o conhecimento didático se reconfigurasse num processo no qual cada uma das professoras não foi assumida como *objeto* de formação, mas sim como *sujeito* da formação (Ponte, 2012).

Referências

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp 433-456). American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). SLO.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE* (pp. 59-72). SPCE.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a05

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, *11*(2), 145-163.

Pires, M. V. (2006). A construção do conhecimento profissional: Um estudo com três professores. In *Atas do XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Associação de Professores de Matemática (edição em CD-ROM).

Santana, E., Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2020). Conhecimento didático do professor de matemática à luz de um processo formativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 89-109. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a05

Serrazina, M. L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da matemática. *Da Investigação às Práticas*, *3*(2), 75-97. https://doi.org/10.25757/invep.v3i2.34

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Information Age Publishing Inc. & NCTM.

Vollmer, H. J. (2021). Bildung as the central category of education? Didactics, subject didactics and general subject didactics in Germany. In E. Krogh, A. Qvortrup, & T. S. Graf (Eds.), *Didaktik and curriculum in ongoing dialogue* (pp. 137–163). Routledge.

Vollmer, H. J., & Klette, K. (2023). Pedagogical content knowledge and subject didactics – An intercontinental dialogue? In F. Ligozat, et al. (Eds.), *Didactics in a changing world* (Transdisciplinary Perspectives in Educational Research, 6). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20810-2_2

ENSINO DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO CONTEXTO COLABORATIVO DE UM ESTUDO DE AULA

TEACHING COMPUTATIONAL THINKING IN THE COLLABORATIVE CONTEXT OF A LESSON STUDY

Gláucia Pinto Rama

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

glauciarama@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Marisa Quaresma

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

maquaresma@ie.ulisboa.pt

Resumo: Este artigo tem como objetivo abordar o conhecimento da prática letiva de Lara, uma professora de Matemática do 8.º ano, através da sua participação num estudo de aula. O *Scratch* apoiou o trabalho desenvolvido no estudo de aula como uma ferramenta de ensino para promover as práticas do pensamento computacional. A investigação é qualitativa e interpretativa, com design de observação participante. Quatro professoras de Matemática e a primeira autora, como facilitadora, participaram neste estudo de aula. O estudo de aula decorreu no ano letivo de 2023/24, em que foram planeadas três aulas de investigação relativas ao pensamento computacional, lecionadas por Lara. As sessões deste processo formativo foram organizadas em quatro etapas: definição do problema, planeamento das aulas de investigação, concretização da aula de investigação e reflexão pós-aula. Os resultados mostram que o contexto colaborativo deste processo de formação de professores conduziu à mobilização do conhecimento da professora relativamente à planificação e condução de uma aula de investigação. As suas ações e as dos alunos contribuíram para aprendizagens efetivas dos intervenientes.

Palavras-chave: pensamento computacional, *scratch*, prática letiva, colaboração, estudo de aula.

Abstract: This paper aims to address the knowledge of the teaching practice of Lara, a grade 8 mathematics teacher, through her participation in a lesson study. Scratch supported the work carried out in the lesson study as a teaching tool to promote computational thinking practices. The research is qualitative and interpretive with participant observation design. Four mathematics teachers and the first author, as a facilitator, participated in this lesson study. The lesson study took place in the 2023/24 academic year, in which three research lessons were planned regarding the topic of computational thinking, taught by Lara. The sessions of this teacher education process were organized into four stages: problem definition, research lessons planning, research lesson's concretization and post-lesson reflection. The results show that the collaboration carried out in this teacher education process led to the mobilization of the teacher's knowledge regarding the planning and lead of the research lesson. Her actions and those of the students contributed to the effective learning.

Keywords: computational thinking, *scratch*, teaching practice, collaboration, lesson study.

Introdução

Bocconi et al. (2022) divulgaram um estudo no qual, entre 29 países europeus, 25 introduziram conceitos básicos de ciência da computação em seus currículos, dando grande destaque ao desenvolvimento do pensamento computacional (PC) e sugerindo o *Scratch* como uma das principais formas de o explorar. Este estudo aponta ainda que recrutar e formar professores para integrar o desenvolvimento do PC nas práticas educacionais é um grande desafio para ministérios e instituições de formação de professores.

Ponte e Oliveira (2002) indicam diversas vertentes do conhecimento profissional dos professores de Matemática, em que um aspeto particularmente relevante para este estudo é o conhecimento diretamente relacionado com a prática docente, uma forma de conhecimento em ação (Schön, 1983). O estudo de aula permite o desenvolvimento desse conhecimento nas várias áreas exigidas pelas orientações curriculares, como o PC. Este artigo apresenta o estudo de caso de Lara, uma professora de Matemática participante em um estudo de aula em que *o Scratch* foi usado para dar suporte ao ensino de PC. O nosso objetivo é saber como o conhecimento didático do PC foi desenvolvido na planificação e condução da tarefa de aula exploratória. Foram analisadas as fases de planificação, aula de investigação e reflexão pós-aula para identificar a sua evolução profissional.

Enquadramento teórico

Wing (2006) apresenta o PC como uma capacidade matemática, envolvendo cinco práticas fundamentais: abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração. Esta capacidade mostra grande potencial para ser explorada no ensino da Matemática nos próximos anos devido à estreita relação da resolução de problemas matemáticos com o PC (Wing, 2006). Shute et al. (2017) descrevem o PC como sendo semelhante ao pensamento matemático, já que utiliza resolução de problemas e justificação. Procurando explorar esse campo, Barcelos et al. (2018) apresentam uma revisão de literatura, envolvendo o período 2008-2017, com o objetivo de identificar relações entre Matemática e computação. Os autores descobriram que as atividades didáticas dos estudos analisados estavam relacionadas com conteúdos matemáticos, utilizando diversas ferramentas computacionais. Afirmam que há um grande potencial no desenvolvimento de conceitos computacionais e utilização de ferramentas virtuais que apoiam o ensino de Matemática. Koehler & Mishra (2009) descrevem o TPACK com o conhecimento didático integrado a uma tecnologia. Os autores estendem o conhecimento didático que o professor considera para o ensino da matemática. Referem que o conhecimento didático do professor pode ser estendido para incluir tecnologias compatíveis às suas necessidades no ensino.

Pelo seu lado, segundo Moreno-León et al. (2017), com o *Scratch* é possível estabelecer roteiros partindo de projetos simples e chegando a projetos complexos. Os autores indicam que o desempenho dos alunos nesta capacidade mostra-se elevado, tendo em vista as características do *software*, em particular, o seu aspeto visual atrativo e a sua fácil manipulação. Os autores enfatizam, ainda um aspeto de grande importância para o ensino da Matemática que a utilização do *Scratch* permite: trabalhar as práticas do PC por meio dos seus comandos, servindo de ponte para o desenvolvimento desta capacidade. A

Tabela 1 especifica a relação direta que os comandos do *Scratch* possuem com as práticas do PC, bem como a evolução do nível de proficiência consoante à sua utilização.

Tabela 1: Práticas do PC e uso dos comandos do *Scratch*

Práticas do Pensamento Computacional	**1. Nível Básico**	**2. Nível em Desenvolvimento**	**3. Nível Proficiente**
Decomposição	Mais de um código e mais de um ator Dois códigos na bandeira verde	Dois códigos para determinada tecla ou atores clicados Os meus blocos	Dois códigos no recebimento da mensagem, ou vídeo ou microfone, ou na troca de plano de fundo
Reconhecimento de padrões	Variáveis: criar uma variável	Controlo: repetir … vezes; repete para sempre Variáveis: criar uma lista Organizar sequências de blocos com os mesmos objetivos e diferentes variáveis	Controlo: até que… repete Controlo: uso de clones
Abstração	Aparência Procedimentos: construção dos blocos com algoritmos	Som Movimento Procedimentos: construção dos blocos com algoritmos	Procedimentos: construção dos blocos com algoritmos
Algoritmia	Sensores Operadores: adição; subtração; multiplicação; divisão Controlo: pára tudo Definição da sequência de blocos	Controlo: se…; se…então; se…então…senão… Operadores: maior, menor ou igual	Operadores: …e…; …ou…; é falso que… Controlo: espera até que…
Depuração	Eventos: quando alguém clicar em bandeira verde; quando alguém clicar em ti; quando pressionar a tecla…	Eventos: quando o cenário mudar para…; quando receberes a mensagem…	Eventos: quando o valor do sensor…

Fonte: Moreno-Leon (2017); Canavarro et al. (2021).

Existe um escasso número de investigações que utilizaram *Scratch* no ensino de Matemática e ainda menos estudos utilizando o estudo de aula para professores interessados em aprender sobre esse tema. Sendo o PC uma nova capacidade no currículo de Matemática em Portugal, é de esperar que existam poucas investigações sobre este assunto até o momento. Desenvolver conhecimento das práticas do PC, especificamente ao usar *o Scratch*, tornou-se um tópico relevante nos processos de formação de professores de Matemática. Para isso, é importante expandir o conhecimento da prática docente, que fundamenta as ações do professor na conceção ou seleção de tarefas e na sua execução em sala de aula, e lhes dá segurança, permitindo que os professores atuem de acordo com sua identidade profissional, exercendo suas preferências e prioridades. Os processos formativos de professores podem influenciar significativamente a prática docente ao promover o desenvolvimento do conhecimento didático, a melhoria da comunicação matemática e a colaboração dos professores, bem como a atenção ao grau de desafio das tarefas propostas e à organização dos alunos na aula (Copur-Gencturk & Papakonstantinou, 2016; Ponte & Oliveira, 2002).

O estudo de aula é um processo de formação profissional de professores que tem demonstrado contribuir para a transformação da prática de ensino por meio do desenvolvimento do conhecimento e da competência docente (Ponte et al., 2016). Fujii (2018) afirma que o estudo de aula apoia os professores no desenvolvimento de conhecimento sobre como ensinar aos alunos não apenas conteúdos, mas também processos de pensamento para que se tornem pensadores independentes. Dando grande atenção aos processos de preparação, análise e reflexão sobre a prática docente, este autor valoriza especialmente a resolução de problemas nas tarefas propostas nas aulas de investigação. Ele ressalta que promover o ensino por meio da resolução de problemas cultiva hábitos mentais dos alunos em termos da maneira como pensam e de suas atitudes em relação a obter uma solução matemática. Dado que o desenvolvimento do PC envolve formular e solucionar problemas, torna-se perfeitamente compatível com as tarefas propostas nas aulas de investigação do estudo de aula. Essas aulas geralmente seguem a estrutura: (i) apresentação da tarefa; (ii) trabalho autônomo dos alunos; e (iii) discussão coletiva (Fujii, 2018).

Metodologia

A metodologia adotada é um estudo de caso qualitativo, seguindo o paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) com design de observação participante (Jorgensen, 1989), com a primeira autora como facilitadora. As participantes são quatro professoras de Matemática do 8.º ano do 3.º ciclo do ensino básico de uma escola pública de Lisboa, onde decorreram as cinco primeiras sessões de trabalho e as aulas de investigação, sendo as restantes sessões conduzidas por *Zoom*. O objeto de estudo desta comunicação é o desenvolvimento do conhecimento do didático do PC, de Lara, que possui 26 anos de serviço. A sua formação inclui um mestrado em Matemática para o Ensino e uma licenciatura em Matemática. Lara foi escolhida para este estudo de caso porque lecionou as três aulas de investigação, participando intensivamente no estudo de aula. Esta pesquisa baseou-se nos princípios e diretrizes éticas relevantes, e todos os nomes apresentados são pseudónimos.

A recolha de dados usou os seguintes procedimentos: duas entrevistas semiestruturadas, uma antes e uma depois do estudo de aula; observação direta das sessões de estudo de aula, incluindo as aulas de investigação; e recolha documental das tarefas produzidas durante o estudo da aula. As informações da observação direta foram recolhidas por meio de anotações em um diário de bordo, gravações áudio de todas as sessões de estudo da aula e gravações vídeo das aulas de investigação. Usando análise de conteúdo (Bardin, 1979), os dados foram explorados indutivamente, especialmente em situações que refletiam o conhecimento profissional que Lara desenvolveu para a conceção e condução da terceira aula de investigação sobre práticas de ensino de PC. Com base nas gravações vídeo e áudio e suas transcrições, bem como nos planos de aula, foram selecionados episódios concentrando-se em três atividades, das quais emergiram subatividades:

(i) Planificação da tarefa da aula de investigação: seleção e conceção de uma tarefa usando *Scratch*:
   a. Enunciado
   b. Ordem dos blocos
   c. Representação de categorias em blocos

(ii) Integração dos alunos no processo de aprendizagem promovido pela aula de investigação:
  a. Apresentação
  b. Trabalho autônomo
  c. Discussão em classe

(iii) Reflexões pós-aula de investigação sobre a prática letiva vivenciada:
  a. Colaboração entre os professores antes da aula
  b. Colaboração entre os alunos e Lara durante a aula
  c. Colaboração entre os professores após a aula

O estudo de aula ocorreu no ano letivo de 2023/24 e seguiu as etapas indicadas por Ponte et al. (2016): definição do objetivo do estudo, planificação da aula de investigação, ensino e observação da aula e reflexão pós-aula. Foram realizadas 12 sessões de trabalho, cada uma com duração aproximada de 2 horas. Na primeira sessão, as participantes definiram que a meta de aprendizagem para os alunos do 8.º ano era desenvolver práticas de PC com base em tarefas exploratórias em *Scratch*, dentro do tema Dados do currículo. Para isso, nesta sessão e nas quatro seguintes, as professoras aprofundaram seus conhecimentos de PC realizando tarefas e analisando e discutindo artigos relacionados para compreender esse conhecimento específico, bem como para aprimorar sua prática de ensino. As tarefas analisadas nessas sessões foram propostas pela facilitadora. Na sexta sessão, com base no conhecimento desenvolvido nas sessões anteriores, as professoras elaboraram planos para três aulas. As tarefas propostas para as aulas de investigação foram selecionadas e adaptadas pelas professoras, de acordo com as necessidades que identificaram. Após cada aula de investigação, houve uma discussão detalhada sobre a aula lecionada, com base na leitura dos resumos de cada aula, visionamento de recortes de vídeos das aulas, especialmente da discussão coletiva, e observações críticas por uma das participantes que esteve em todas as aulas de investigação. O objetivo dessas discussões era verificar se o objetivo de aprendizagem dos alunos havia sido alcançado de acordo com o plano de aula, como haviam sido solucionados eventos imprevistos e que melhorias deveriam ser feitas no próximo plano de aula de investigação. A última sessão também se analisou como as professoras desenvolveram conhecimento sobre o ensino do PC com o apoio do *Scratch* ao longo do processo formativo.

Tabela 2. Etapas do Estudo de Aula

Identificar o problema	· Apresentar o estudo de aula aos professores participantes (Ponte et al., 2016) e decidir a calendarização das sessões. · Analisar as Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al, 2021) do respetivo ano letivo, particularmente no domínio do PC e decidir quais serão os tópicos matemáticos a abordar. · Resolver e analisar tarefas referentes ao PC com o uso do *Scratch*.
Planificação das aulas de investigação	. Refletir em como a colaboração entre o grupo dos professores está contribuindo no desenvolvimento do conhecimento didático e específico do PC (Boavida & Ponte, 2002; Richit & Ponte, 2019). . Explorar e analisar as ferramentas do *Scratch* com o objetivo de entender as principais características do *software* e suas funcionalidades, relacionando com as práticas do PC segundo as Aprendizagens Essenciais (Moreno-León et al., 2017). · Elaborar três planos de aulas com uma tarefa de matemática que favoreça o desenvolvimento das práticas do PC, por meio do *Scratch*. Explicitar as estratégias para as possíveis resoluções e antecipação de dificuldades dos alunos. Organizar o tempo de cada aula em três fases: apresentação, trabalho autônomo e discussão coletiva. Indicar também nos planos de aulas as

	referências das tarefas elaboradas, os conteúdos, os domínios e os descritores das metas curriculares. · Preparar o processo de observação de aula, explicitando o papel do observador nas aulas de investigação.
Aulas de investigação	· Lecionar três aulas para uma turma do 8.º ano do ensino básico, tendo como base os planos de aulas elaborados nas sessões anteriores em que um professor de Matemática leciona enquanto outros participantes observam cada uma destas aulas; em cada aula há uma tarefa com o objetivo de aprendizagem do PC sob o foco em resolução de problemas com o apoio do *Scratch*.
Discussão pós-aula **Revisão dos planos das próximas aulas** **Reflexão final**	· Discussão aprofundada sobre a aula de investigação concretizada, comparando com as planificações elaboradas. As aulas de investigações e as discussões pós-aula são intercaladas. · Visionamento de recortes dos vídeos da aula de investigação que aconteceu na sessão anterior e discussão sobre as principais dificuldades dos alunos, a eficácia da tarefa escolhida e as estratégias que os alunos usaram para suas resoluções. · Reflexão sobre aspetos positivos e negativos dos planos de aulas anteriormente elaborados, indicando possíveis modificações para o aperfeiçoamento da próxima aula de investigação. · Reflexão sobre o desenvolvimento da prática letiva dos professores proporcionado pela formação no contexto de um estudo de aula.

Resultados

Damos atenção especial à mobilização do conhecimento profissional de Lara durante a planificação, a realização e a reflexão da terceira tarefa dado ser este o ponto culminante do estudo de aula, pois contribuíram para o desenvolvimento do seu conhecimento didático.

Planificação da tarefa

A elaboração do enunciado para a tarefa da terceira aula de investigação foi feita por todas as professoras participantes. Além de compartilharem o seu conhecimento didático sobre tarefas exploratórias durante as sessões, elas também o fizeram ao conversar informalmente quando estavam em seus locais de trabalho. Analisaram as tarefas propostas para as aulas de investigação e escolheram o tópico que queriam trabalhar com antecedência, para que na sessão de trabalho seguinte a facilitadora trouxesse possíveis tarefas compatíveis com seus objetivos de ensino. Na sexta sessão, Lara destacou o programa que calculava a média aritmética:

> Lara: E a segunda [tarefa] é muita gira, porque já vem no intuito daquilo que se espera fazer com o PC, que é, no fundo, já lhes dar o programa e depois pensar em perguntas sobre o programa e elaborar um pouco mais o programa dentro do conteúdo em si. (sessão 6)

O enunciado desta tarefa foi construído para a segunda aula de investigação e, mais tarde, evoluiu para a média ponderada. As professoras direcionaram o objetivo da tarefa para que os alunos se identificassem com ela, ao calcular sua nota final em Matemática do ano letivo. Decidiram que os alunos deveriam construir um programa que calculasse sua média ponderada final de acordo com os critérios de avaliação estabelecidos para esta disciplina. As seguintes variáveis da fórmula algébrica já conhecidas pelos alunos na solução de lápis e papel deveriam ser criadas e inseridas nos blocos de operadores:

"MÉDIA dos TESTES", "MÉDIA dos MINITESTES", "N.º de TESTES", "N.º de MINITESTES" e "MÉDIA FINAL". Da mesma forma, as notas dos Testes, Mini Testes, Observação de Aulas (OA) e Avaliação Oral (AO) determinariam variáveis de "SOMA dos TESTES", "SOMA dos MINITESTES", OA e AO, respetivamente, para o cálculo de suas médias localizadas.

O conhecimento dos professores sobre o design das tarefas foi mobilizado quando eles organizaram a ordem dos blocos no enunciado da tarefa. Para facilitar o aprendizado dos alunos sobre como usar as variáveis *do Scratch,* as professoras decidiram que o programa deveria ser totalmente construído, mas dividido em blocos que seguissem um padrão de algoritmos semelhante aos blocos imediatamente acima. Havia dois conjuntos de blocos no enunciado: no primeiro agrupamento, a média ponderada final era calculada; ao lado, o segundo agrupamento convertia esta média calculada em níveis de 1 a 5. Como Lara queria que o maior número possível de alunos fosse desafiado a aproveitar todos os momentos da aula, os que completassem a parte desfocada do conjunto de blocos posicionados no lado esquerdo do guião tinham de fazer o mesmo no lado direito:

> Lara: Até porque tu tens ali grupos a várias velocidades. O fato de nós termos um plano de um grau de dificuldade mais complexo e de um plano mais razoável, digamos assim, permite-se, porque tu tens o complexo, permite-te depois afinar-se em tempo real e passar para o outro … Se precisarem só alguns, pois precisam só alguns. (sessão 10)

Ao utilizar os comandos *do Scratch* (dentro das categorias movimento, aparência, som, eventos, controle, sensores, operadores, variáveis e blocos) para a conceção desta tarefa, os professores desenvolveram o conhecimento das práticas do PC:

- Reconhecimento de padrões: a ordem do enunciado foi organizada de modo que os alunos reconhecessem que as variáveis que eles criassem nos blocos de espaços desfocados ("SOMA dos MINITESTES", "N.º de MINITESTES", "MÉDIA dos MINITESTES" e AO) tivessem a mesma finalidade que aquelas imediatamente acima dessas lacunas ("SOMA dos TESTES", "N.º de TESTES", "MÉDIA dos TESTES" e OA) e, portanto, os blocos apagados também deveriam ser estruturados como seus blocos superiores, a fim de obter a média ponderada final representativa dos critérios de avaliação reais; ao usar "repete … vezes" para fazer as perguntas ao usuário para que ele inserisse as diferentes notas das avaliações;
- Algoritmia: ao usar o comando "repete … vezes" na categoria controlo, ao usar o comando "pergunta … e espera pela resposta" na categoria sensores e ao utilizar os comandos "… x …, … / …, … + …, … < …" na categoria operadores; organizando esses blocos com as informações que o usuário fornece em "pergunta … e espera resposta", para que sejam corretamente inseridas nas variáveis criadas para os operadores calcularem suas médias; usando "se... então... senão" na categoria controlo para classificar a média final obtida em um nível organizado de 1 a 5;
- Abstração: usando o comando "diz", pois não interfere no funcionamento do código; focando na construção e organização dos blocos com os algoritmos necessários para resolver o problema ("… x …, … / …, … + …, … < …" na categoria operadores, repete … vezes"

na categoria controlo, "pergunta … e espera pela resposta" na categoria sensores), sem se preocupar com informações irrelevantes;

- Decomposição: calculando a média independentemente das notas de Testes, Mini Testes, Observação de Aulas (OA) e Avaliação Oral (AO) para obter a média final ponderada desses resultados; e
- Depuração: verificando por meio do bloco "Quando alguém clica na bandeira verde" se o código executa a tarefa corretamente.

A mobilização do conhecimento didático das professoras para a definição do objetivo de aprendizagem, o desenho e a elaboração do enunciado da tarefa indicam o desenvolvimento do conhecimento didático sobre as práticas de PC, ampliando o seu conhecimento didático sobre design de tarefas. Ao relacionar os blocos usados nas categorias *do Scratch* com abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração, regista-se evolução do nível de proficiência nas práticas de reconhecimento de padrões, algoritmia e abstração, passando do básico para em desenvolvimento (Tabela 1). A Figura 1 expõe esta evolução, comparando as três tarefas elaboradas pelas professoras sob as mesmas circunstâncias neste estudo de aula.

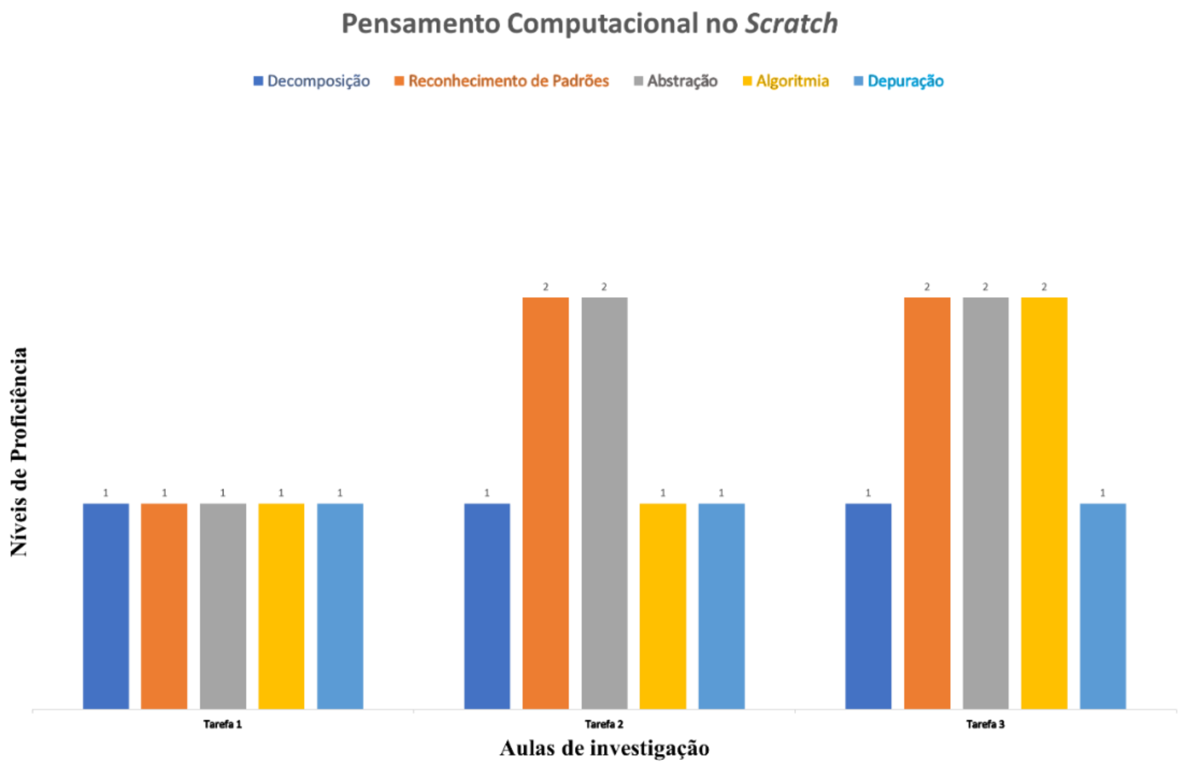


Figura 1. Desenvolvimento das práticas do PC no *Scratch.*

O enunciado da terceira tarefa passou por três versões, adaptadas pela facilitadora com opções de escolha, para atender aos objetivos de aprendizagem determinados pelas professoras, chegando à representação final (Figura 2).

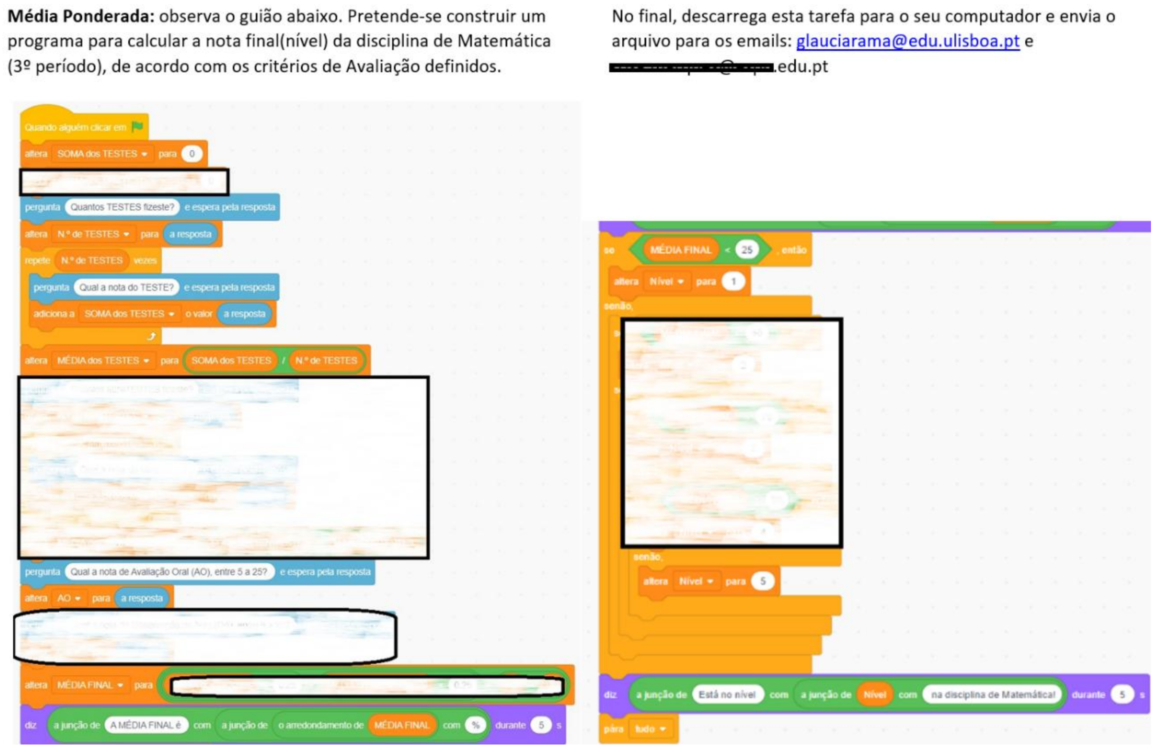


Figura 2. Tarefa para a 3.ª aula de investigação.

Aula de investigação

Na apresentação da tarefa, Lara entregou a cada par de alunos o enunciado. Explicou que os alunos tinham de desenvolver um algoritmo no *Scratch* que calculasse a média ponderada em Matemática, de acordo com os critérios conhecidos. Lara mobilizou o seu conhecimento profissional sobre a dinâmica de uma aula de investigação ao conduzir os alunos a participar durante a aula. Questões previstas durante as sessões anteriores do estudo de aula levaram Lara à mobilização do seu conhecimento em ação sobre condução de tarefas, apoiando-a a induzir a participação dos alunos. As respostas dos alunos indicaram que suas notas de Observação de Aula (OA) e Avaliação Oral (AO) sempre variam de 5 a 25, portanto não havia necessidade de as ponderar. Eles recordaram que o número de Mini Testes era sempre o dobro do número de Testes, exigindo variáveis específicas para esses parâmetros. E, finalmente, recordaram que a classificação final ia de 0 a 100, havendo necessidade de um cálculo para satisfazer a proporcionalidade de 25% que a média dos Testes e Mini Testes compunham na média final.

Durante o trabalho autônomo dos alunos, Lara também utilizou o seu conhecimento em ação sobre a condução da aula exploratória, perguntando-lhes individualmente que variáveis compõem a média e como cada uma delas é calculada. Essas perguntas, planeadas com antecedência nas sessões do estudo de aula, ajudaram os alunos a identificar as variáveis que deveriam ser criadas para representar todos os critérios de avaliação necessários para o cálculo da nota final. Eles também reconheceram padrões entre as práticas de PC ao perceberem que as variáveis “MÉDIA dos MINITESTES”, “SOMA dos MINITESTES” e “N.º de MINITESTES”, tinham a mesma finalidade que as variáveis “MÉDIA dos TESTES”, “SOMA dos TESTES” e “N.º de TESTES”. O mesmo ocorreu com as variáveis Observação de Aula (OA) e Avaliação Oral (AO). Além disso, essa orientação levou os alunos a organizar os blocos contendo os operadores que calcularam a média ponderada final, empregando as variáveis criadas para representar todos os critérios de avaliação aplicados.

Na discussão coletiva, conduzida por Lara de acordo com o plano, três alunos apresentaram soluções diferentes, finalizando com um resumo feito por ela das principais ideias abordadas e dos objetivos alcançados. Lara seguiu o plano colocando questões desafiadoras, para que mais alunos participassem. Eles analisam diferentes soluções que abordam o uso correto do reconhecimento de padrões aplicado ao cálculo da média ponderada e o rigor matemático necessário para que o algoritmo execute corretamente:

> Lara: Criamos então duas rotinas, uma para a média dos Testes e outra para a média dos Mini Testes. Faria sentido fazer uma rotina única para a média dos Testes e Mini Testes?
>
> João: Eu acho que não, mas se tivesse o mesmo número de Testes e Mini Testes, dava para fazer.
>
> Lara: Mas para quem fez a operação final com todos os cálculos, foi diferente da expressão numérica que estudamos para o cálculo da média? Ou seja, numa expressão numérica quais são as prioridades?
>
> Pedro: Multiplicações e divisões.
>
> Lara: O programa está a respeitar isso?
>
> Tiago: Sim, para isso eu pus primeiro as contas de multiplicação e depois as de adição.

A estrutura da aula de investigação privilegiou a integração dos alunos para que pudessem desenvolver práticas de PC: quando a professora apresenta a tarefa com análise dos procedimentos envolvidos na solução; quando os alunos resolvem a tarefa de forma autônoma; quando o professor orienta a discussão coletiva sobre os diferentes métodos de resolução; e, por fim, quando a professora sintetiza o conteúdo estudado, enfatizando como os alunos construíram suas ideias nas diferentes soluções discutidas. Seu conhecimento profissional foi mobilizado nas sessões do estudo de aula para a planificação de questões desafiadoras para a condução de todos os momentos da aula de investigação, reforçando seu conhecimento didático na condução de aulas exploratórias, mas desenvolvendo-o para o ensino do PC.

Reflexão pós-aula de investigação

Na entrevista final, Lara enfatizou como a colaboração entre as professoras contribuiu para a planificação da tarefa apoiar a professora de forma eficiente, ajudando-a a reconhecer a importância desse trabalho:

> Lara: O grupo fez toda a diferença para a escolha das tarefas e sinto-me muitíssimo orgulhosa do trabalho que nós fizemos devido à coerência. Acho que foi algo pensado e consistente. Quando nós tínhamos as sessões com a resolução de tarefas, isso teve um propósito, foi dar-nos algum conforto, ideias, possibilidades para aquilo que seria depois a construção destas tarefas. Eu sozinha nunca tinha chegado a isto. Houve uma evolução, até nos próprios códigos que nós utilizámos, na própria rotina da programação. Eu não conseguia construir um conjunto de tarefas com esta qualidade, com esta consistência. Acho que as coisas tiveram um encaminhamento lógico com um propósito, na medida certa, no tempo certo, e foi uma coisa construída em grupo, que sempre resulta melhor do que sendo uma pessoa sozinha a pensar. Mesmo, gostando de trabalhar em grupo, às vezes acho que sozinha aprendo

> mais rápido. Contudo, reconheço que quando somos obrigados a partilhar, de facto, o trabalho fica muito melhor.

Ainda na entrevista final, Lara constatou que ensinar PC não era completamente novo para ela, dado que resolver problemas em Matemática envolve práticas semelhantes às práticas de PC trabalhadas no *Scratch.* Sua experiência profissional em planear e conduzir tarefas exploratórias influenciou o planeamento de suas aulas, com diferentes antecipações de soluções e questões desafiadoras, de modo que a discussão na aula pudesse ser enriquecida com a participação e colaboração de vários alunos, da mesma forma que já acontecia em suas aulas de resolução de problemas. Essa reflexão induziu Lara a perceber como seu conhecimento didático a favoreceu a cumprir o plano para a terceira aula:

> Lara: Eu encontro semelhança do uso do *Scratch* com o ensino da Matemática porque muitas vezes temos um programa que funciona e é como ter um procedimento que resolve um problema. Mas depois, alguém que pensou em outro processo que é muito mais eficiente, mais limpo porque implica menos linhas de escrita, resolve mais diretamente o assunto. Isso acontece também na resolução de problemas. Muitas vezes nós temos procedimentos que nos conduzem à resposta, só que são procedimentos que valem, mas quando comparados com outros, são mais complicados. Acontece-nos muito em aula. Nós levamos a aula alinhada com uma determinada resposta, mas depois há um ou outro aluno que se lembra de algo que ninguém pensou, é válido ou é significativamente melhor. Comparamos procedimentos para escolher o que é mais eficiente. O *Scratch* expos isso à transparência quando tivemos a terceira aula.

Em sua entrevista final, Maria, que observou as aulas, também valorizou a abordagem de Lara sobre colaboração entre alunos, potenciando o objetivo didático desta tarefa:

> Maria: As questões e a forma como a Lara conduziu a coisa foi um fio condutor para se desenvolver o resto e para os miúdos concluírem as tarefas que estavam a fazer. Alguma dúvida que tivesse surgido no decorrer da programação os miúdos acabaram por perceber. Os que ainda não tinham concluído aquela primeira fase chegaram lá. Acho que isso foi importante e foi o que juntou os grupos todos para alcançarem o programa final. Porque havia ali uns que tinham uma coisinha que não tinham feito [ou] outra coisinha que não tinham concluído. E acho que isso foi importante.

Por fim, a colaboração ao longo do processo de formação das professoras também foi propícia para que Lara relatasse suas inseguranças sobre o uso *do Scratch*. A discussão pós-aula corroborou com essa situação, mas deixou-a ciente de que o uso do *Scratch* como nova ferramenta tecnológica no ensino pode ser bem feita se for cuidadosamente preparado por uma equipe dedicada e aplicado com o apoio do respetivo plano de aula, expandindo seus conhecimentos profissionais sobre condução e planeamento de tarefas em uma aula de investigação:

> Lara: Eu percebi isso agora; eu estava um bocado ansiosa. Ansiosa não é o termo, mas, sei lá, um bocado perplexa com a coisa. Pensei, ops, onde é que eu me fui meter? O que é que vai acontecer agora? Mas foi um trabalho muitíssimo apoiado. Fui eu, mas podia ter sido a Rita, podia ter sido a Joana, podia ter sido a Maria, podia ter sido qualquer uma de nós, porque foi um

> trabalho conjunto. Basicamente, foi só executar, dar seguimento àquilo que nós tínhamos definido em grupo.

Conclusão

Dada a necessidade dos professores terem conhecimento consistente das práticas de PC (Wing, 2006) para seu ensino, as diferentes fases deste estudo de aula contribuíram para o estudo aprofundado das participantes resultando no desenvolvimento desta competência (Ponte et al., 2016). Por meio da resolução e análise de tarefas nas sessões de identificação de problemas e planeamento de aulas, na primeira fase do estudo de aula, as professoras exploraram o *Scratch* nas ferramentas de movimento, aparência, som, eventos, controle, sensores, operadores, variáveis e blocos. A formação promoveu a mobilização de conhecimento didático adquirido ao longo da docência sobre resolução de problemas direcionando-o para o desenvolvimento do conhecimento do PC (Shute et al., 2017), a partir de recursos do *Scratch* (Moreno-León et al. 2017).

Na segunda fase do estudo de aula, as professoras mobilizaram o conhecimento obtido do PC nas sessões anteriores e ao longo de suas experiências profissionais, no que diz respeito às planificações e condução de aulas com tarefas exploratórias. Os objetivos e estruturação das sessões desta fase do estudo de aula impulsionaram a conceção das planificações das aulas de investigação e, no caso de Lara, à sua condução. Diferentes soluções para estas tarefas foram apresentadas pelos alunos nas discussões coletivas (Fujii, 2018), motivadas por perguntas desafiantes feitas em cada etapa da aula, conforme previsto nos planeamentos seguidos rigorosamente por Lara. Esta fase resultou no desenvolvimento do conhecimento didático sobre planificações e conduções de tarefas, devido ao direcionamento das sessões do estudo de aula à mobilização de conhecimentos adquiridos, organizando-os de forma eficiente para o ensino do PC. A terceira aula concretizada por Lara promoveu a participação dos alunos, levando-os ao desenvolvimento das práticas do PC, nomeadamente: reconhecimento de padrões, abstração e algoritmia, conforme indicado na Figura 1. Isso reforça e estende as perspetivas de Moreno-Leon et al. (2017) sobre a utilidade do *Scratch* em desenvolver o conhecimento do PC. Porém, o ensino do PC apoiado ao *Scratch* indica o desenvolvimento didático de Lara, segundo a conceitualização do TPACK, quando integra ao seu conhecimento didático, uma tecnologia.

O contexto colaborativo das sessões de reflexão pós-aula favoreceu a mobilização do saber em ação (Schön, 1983), para que também houvesse desenvolvimento profissional em termos de melhoria do planeamento da tarefa, das ações de Lara ao conduzir a aula e suas reflexões sobre ensino e aprendizagem eficazes de práticas do PC com o apoio do *Scratch*. As reflexões das professoras ajudaram-nas a entender que a colaboração em todas as etapas do estudo da aula foi fundamental para o êxito da aula de investigação, pois tratava-se de uma planificação voltada para potenciar a aprendizagem dos alunos (Richit & Ponte, 2019). Estudos posteriores poderão levar à compreensão de como desenvolver a competência de professores de outros níveis de ensino para trabalhar o PC com seus alunos e como tirar melhor partido dos materiais disponíveis.

Referências

Barcelos, T. S., Munoz, R., & Villarroel, R. (2018). Mathematics learning through computational thinking activities: A systematic literature review. *Journal of Universal Computer Science*, *24*(7), 815–845. https://www.researchgate.net/publication/326894640

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43–55). APM. http://hdl.handle.net/10451/4069

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagienė, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V., & Stupurienė, G. (2022). In A. I. Santos, R. Cachia, N. Giannoutsou, & Y. Punie (Eds.), *Reviewing computational thinking in compulsory education: State of play and practices from computing education*. Publications Office of the European Union. https://doi.org/10.2760/126955

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. DGE.

Copur-Gencturk, Y., & Papakonstantinou, A. (2016). Sustainable changes in teacher practices: A longitudinal analysis of the classroom practices of high school mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(6), 575–594. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9310-2

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Sage.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60–70. https://doi.org/10.1177/002205741319300303

Moreno-León, J., Harteveld, C., Román-González, M., & Robles, G. (2017). On the automatic assessment of computational thinking skills: A comparison with human experts. *Conference on Human Factors in Computing Systems Proceedings*, Part F127655, 2788–2795. https://doi.org/10.1145/3027063.3053216

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da Identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145–163. http://hdl.handle.net/10451/3167

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. *BOLEMA Mathematics Education Bulletin, 30*(56), 868–891. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01

Richit, A., & Ponte, J. P. (2019). A colaboração profissional em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. *BOLEMA Mathematics Education Bulletin, 33*(64), 937–962. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a24

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Avebury.

Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review, 22*, 142–158. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O CONHECIMENTO DO CONTEÚDO ESPECÍFICO MOBILIZADO POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM RELAÇÃO AOS CONCEITOS DE FRAÇÃO E NÚMERO RACIONAL

AN INVESTIGATION ON THE SUBJECT MATTER CONTENT KNOWLEDGE MOBILIZED BY MATHEMATICS TEACHERS RELATED TO THE CONCEPTS OF FRACTION AND RATIONAL NUMBER

Frederico da Silva Reis

Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil

frederico.reis@ufop.edu.br

António Guerreiro

Universidade do Algarve, Portugal

aguerrei@ualg.pt

Susana Fernandes

Universidade do Algarve, Portugal

sfer@ualg.pt

Resumo: Este trabalho apresenta uma investigação sobre o conhecimento do conteúdo específico mobilizado por professores de Matemática relacionado aos conceitos de fração e número racional. O referencial teórico-bibliográfico contemplou pesquisas sobre categorias de conhecimento do professor e definições de conceitos matemáticos, além de vislumbrar definições de fração e número racional. A investigação foi realizada com 13 professores brasileiros de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário (como se designa em Portugal), cursando um Mestrado Académico em Educação Matemática em uma universidade federal do Brasil. O principal instrumento de pesquisa foi um questionário composto por 20 questões relacionadas com Números Racionais e Irracionais, Enumerabilidade e Densidade, aplicado aos professores no início de uma disciplina de Conceitos de Análise e Topologia. A análise das respostas a 3 questões relacionadas com frações e números racionais revelou que poucos professores explicitaram conhecer suas definições formais, sendo que muitos professores apresentaram tais definições de forma implícita, ao relacionar e significar esses conceitos, porém, algumas vezes, com justificações inconsistentes ou incoerentes. As conclusões da investigação apontam fragilidades evidenciadas na mobilização do conhecimento do conteúdo específico dos professores de Matemática, particularmente, em seus aspetos conceituais e relacionais, bem como suscitam questionamentos plausíveis em relação ao lugar e ao papel das definições de conceitos matemáticos como componentes fundamentais na construção de tal conhecimento.

Palavras-chave: educação matemática no ensino superior, conhecimento do conteúdo específico, professor de matemática, fração, número racional.

Abstract: This work presents an investigation on the subject matter content knowledge related to the concepts of fraction and rational number mobilized by Mathematics teachers. The theoretical-bibliographical framework included research on categories of teacher knowledge and definitions of mathematical concepts, in addition to glimpsing definitions of fraction and rational number. The investigation was carried out with 13 Brazilian Mathematics teachers of the Basic and Secondary Education (at it is called in Portugal), attending an Academic Master's Degree in Mathematics Education at a federal university in Brazil. The main research instrument was a questionnaire composed of 20 questions related to Rational and Irrational Numbers, Enumerability and Density. The questionnaire was applied to the teachers at the beginning of a subject on Concepts of Analysis and Topology. The analysis of the answers to 3 questions related to fractions and rational numbers revealed that few teachers explained that they knew their formal definitions, and many teachers presented such definitions implicitly, when relating and giving meaning to these concepts, however, sometimes, with inconsistent or incoherent justifications. The conclusions of the investigation point to weaknesses evidenced in the mobilization of specific content knowledge of Mathematics teachers, particularly in its conceptual and relational aspects, as well as raising plausible questions in relation to the place and role of definitions of mathematical concepts as fundamental components in the construction of such knowledge.

Keywords: mathematics education in higher education, subject matter content knowledge, mathematics teacher, fraction, rational number.

Introdução

No mundo atual, caracterizado por processos globais de produção de tecnologias e pela rápida difusão de conhecimentos, escolarizados ou não, entendemos que a Matemática é uma poderosa lente para se ler e interpretar problemas e, dessa forma, pode contribuir para a formação da criticidade e da cidadania em todas as pessoas que vivem no presente século, nos mais variados lugares.

Nessa perspetiva, como educadores matemáticos, compreendemos que a construção do conhecimento matemático por meio dos processos de ensino e de aprendizagem assume um importante papel e, em sua essência, pode ser relacionada à formação dos professores responsáveis pelo ensino de Matemática, em todos os níveis de ensino.

Dentro desse contexto, no presente trabalho[31], objetivamos discutir um aspeto relevante na formação de professores de Matemática que é o conhecimento do conteúdo específico mobilizado por professores brasileiros dos Ensinos Básico e Secundário (como se designa em Portugal), particularmente, ao conceituar e relacionar fração e número racional.

Para tanto, inicialmente, fazemos uma síntese das ideias de alguns pesquisadores sobre os conhecimentos do professor e referenciamos algumas pesquisas sobre questões relativas a frações e números racionais; a seguir, apresentamos a investigação realizada, discutindo seus resultados e apontando para algumas conclusões.

Sobre o conhecimento do conteúdo específico

O debate em torno dos conhecimentos necessários para a formação de professores de Matemática tem sido travado por diversos pesquisadores e, em geral, inicia-se pelo questionamento da centralidade do conhecimento dos conteúdos matemáticos trabalhados nas diversas disciplinas oferecidas nos cursos de formação inicial:

> O conhecimento de conteúdo é, sem qualquer dúvida, um fator determinante para um futuro de sucesso de qualquer professor. É inquestionável que o conhecimento dos conteúdos presentes nas disciplinas de álgebra linear, de cálculo diferencial em IR^n, de cálculo integral em IR^n, de equações diferenciais, de análise complexa, de análise funcional, são imprescindíveis

[31] Produção bibliográfica associada ao projeto de pesquisa de Pós-Doutoramento do 1.º autor, desenvolvido na Universidade do Algarve, sob a supervisão dos 2.º e 3.º autores.

> para o desenvolvimento intelectual e para o amadurecimento matemático de qualquer futuro professor de Matemática. No entanto, o conhecimento (mesmo que intensamente explorado) desses conteúdos é necessário mas não suficiente para uma boa formação dos futuros professores para o exercício da atividade docente. (Fernandes & Conceição, 2013, p. 137)

Antes de discutirmos a importante questão suscitada pelas pesquisadoras, entendemos ser relevante explicitarmos nosso entendimento, adotado no presente trabalho, sobre os conhecimentos do professor.

Inicialmente, destacamos Shulman (1986) que, buscando investigar como os conhecimentos dos professores são construídos ou "combinados" para formarem uma base de conhecimentos, definiu / caracterizou três categorias de conhecimentos que formam, assim, uma "base para o ensino": o conhecimento do conteúdo específico (*subject matter content knowledge* ou, simplesmente, *content knowledge*); o conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical content knowledge*) e o conhecimento curricular (*curricular knowledge*).

O conhecimento do conteúdo específico ou, simplesmente, conhecimento do conteúdo relaciona-se à compreensão do professor sobre a estrutura da disciplina, incluindo as maneiras como ele entende o conhecimento que deverá ser objeto de ensino. É importante destacar que tal compreensão não se deve restringir a factos e conceitos relativos à disciplina, ou seja, não se trata apenas de um conhecimento factual ou conceitual de forma isolada, mas demanda também conhecer a organização dos princípios fundamentais de uma área de conhecimento e os processos de produção da área disciplinar em que o professor atua. Assim, o conhecimento do conteúdo específico intenta ser amplo, flexível e diversificado, envolvendo aspetos históricos, culturais, epistemológicos, conceituais e relacionais, não devendo ser:

> [...] apenas sintático (regras e processos relativos à manipulação e aplicação do conteúdo), mas sobretudo substantivo e epistemológico (relativo à natureza e aos significados dos conhecimentos, ao desenvolvimento histórico das ideias, ao que é fundamental e ao que é secundário, aos diferentes modos de organizar e explorar os conceitos e princípios básicos da disciplina, e às concepções e crenças que os sustentam e legitimam). Esse domínio profundo do conhecimento é fundamental para que o professor tenha autonomia intelectual para produzir o seu próprio currículo se constituindo efetivamente como mediador entre o conhecimento historicamente produzido e aquele – o escolar reelaborado e relevante socio-culturalmente – a ser apropriado / construído pelos alunos. (Fiorentini et al., 1998, p. 316)

Já o conhecimento pedagógico do conteúdo pode ser relacionado aos modos de se formular e se apresentar o conteúdo, de tal forma a torná-lo compreensível para os alunos. As diversas formas de comunicação do professor devem prever uma diversidade de alunos e, assim, serem flexíveis para incluir: explicações alternativas de conceitos e princípios, possíveis analogias, eventuais ilustrações, exemplos e contraexemplos, explanações e demonstrações acessíveis e didáticas. Nessa categoria de conhecimento, considera-se também a importância de o professor reconhecer os aspetos pedagógicos que facilitam ou dificultam a aprendizagem de um determinado conteúdo, os erros conceituais que os alunos apresentam com frequência e, principalmente, as implicações desses erros nos processos de aprendizagem.

Por sua vez, o conhecimento curricular refere-se ao conhecimento do conjunto de programas elaborados para o ensino, mas também engloba uma variedade de materiais instrucionais disponíveis para tais programas (livros-texto, propostas curriculares e materiais instrucionais tais como jogos pedagógicos, materiais para manipulação, vídeos, *softwares*, etc.). Nessa categoria de conhecimento, considera-se também os recursos didáticos que podem ser utilizados, o conhecimento das relações entre conteúdos e contextos, dentro da mesma disciplina ou até mesmo em outras disciplinas, e a familiaridade com os outros tópicos do conteúdo que já foram ou serão estudados na mesma disciplina, em anos anteriores e posteriores.

Outrossim, Ball, Thames e Phelps (2008) propuseram um "refinamento" das categorias de conhecimento definidas por Shulman (1986), por meio de uma teoria com base na prática profissional de professores de Matemática e, para tanto, assumiram que as diversas oportunidades que os professores têm para aprender Matemática em sua prática profissional podem ser relacionadas com a construção dos seus domínios de conhecimento matemático para o ensino: dentro da categoria do conhecimento do conteúdo específico, temos o conhecimento comum do conteúdo, o conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do conteúdo no horizonte; já dentro da categoria do conhecimento pedagógico do conteúdo, temos o conhecimento do conteúdo e dos alunos, o conhecimento do conteúdo e do ensino, e o conhecimento do conteúdo e do currículo. No presente trabalho, não detalharemos tais domínios pois, devido aos objetivos de nossa investigação, estaremos considerando o conhecimento do conteúdo específico, holisticamente, e não os seus domínios, particularmente.

Dessa forma, focaremos nosso olhar no conhecimento do conteúdo específico, assumindo, como Shulman (1986), que o domínio adequado de uma área de conhecimento – por exemplo, a Matemática – tendo em vista o ofício de ensiná-la, requer um domínio diferente daquele requerido para ser, por exemplo, um matemático e, a partir dessa premissa, ao professor é confiada uma responsabilidades especial relacionada com a construção do seu conhecimento do conteúdo, uma vez que este impacta os processos de ensino, particularmente, na comunicação daquilo que é essencial ou periférico nos diversos conteúdos específicos, e também de aprendizagem, particularmente, ao atuar como fonte primária da compreensão de tais conteúdos pelos alunos. Nessa perspectiva:

> Diante da diversidade dos alunos, o professor deve ter uma compreensão flexível e multifacetada, adequada à oferta de explicações diferentes dos mesmos conceitos ou princípios. Conscientemente ou não, o professor também transmite ideias sobre como a "verdade" é determinada numa área e um conjunto de atitudes e valores que influenciam notoriamente a compreensão do aluno. Essa responsabilidade demanda especialmente a profundidade de compreensão do professor das estruturas da matéria, assim como suas atitudes e entusiasmo em relação ao que está sendo ensinado e aprendido. Esses vários aspetos do conhecimento do conteúdo, portanto, são devidamente entendidos como uma característica central da base de conhecimento para o ensino. (Shulman, 2014, p. 208, grifos do autor)

Assumimos, também, que a mobilização do conhecimento do conteúdo específico por professores de Matemática contribui direta e centralmente para a interação com seus conhecimentos pedagógico e curricular, de forma complementar e não dicotómica (Reis, 2001), ou seja, as categorias de conhecimentos estão intimamente dependentes e relacionadas com os objetivos curriculares, com o que os professores ensinam, como ensinam e apoiam os alunos nos processos de aprendizagem matemática (Guerreiro, 2011), formando assim, de facto, uma base de conhecimentos para o ensino de Matemática.

Nesse contexto, investigaremos a mobilização do conhecimento do conteúdo específico perpassando pela análise de aspetos conceituais e relacionais entre conteúdos matemáticos nucleares que, certamente, são abordados em diversas disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática, pois são ensinados por professores que atuam nos Ensinos Básico e Secundário, como detalharemos a seguir.

Sobre frações e números racionais

Seja na abordagem teórica de um conceito matemático, no contexto de sua construção formal em cursos de Licenciatura em Matemática, ou seja, na abordagem pedagógica desse conceito matemático, no contexto da sua construção didática na sala de aula dos Ensinos Básico e Secundário, é irrefutável a importância das definições matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Incorporando com essa ideia, Zazkis e Leikin (2008) afirmam que:

> A definição de um conceito, uma vez determinado num currículo, influencia a abordagem do ensino de Matemática, a sequência de aprendizagem, o conjunto de teoremas e provas. Consideramos que definições de conceitos matemáticos, as estruturas subjacentes das definições e o processo de definição são componentes fundamentais do conhecimento do conteúdo específico dos professores de Matemática. [...] o conhecimento pessoal dos professores de definições matemáticas afeta (a) suas decisões curriculares em relação à forma como os conceitos matemáticos são ensinados, e (b) sua concepção pedagógica das maneiras pelas quais os alunos podem ou não aprender esses conceitos. (p. 132)

Observemos que, em certa medida, as pesquisadoras não somente apontam para o papel fundamental das definições na mobilização do conhecimento do conteúdo específico de professores de Matemática como também reafirmam sua interação e relação com seus conhecimentos pedagógico e curricular, como já havíamos assumido.

A partir de tais premissas, no contexto da investigação apresentada no presente trabalho, abordaremos, agora, os conceitos de fração e número racional, inicialmente, apresentando suas definições matemáticas e, sequencialmente, discutindo as relações possíveis entre tais conceitos partindo das definições estabelecidas.

Tradicionalmente, uma fração é definida como sendo “uma razão ou quociente entre dois números inteiros, sendo o denominador não nulo”, ou seja, da forma: p / q, com p e q inteiros e $q \neq 0$. Tal definição é apresentada em alguns livros de Matemática explicitamente (Crilly, 2011) ou implicitamente (Caraça, 1989; Conway & Guy, 1999), ao se identificar diretamente fração ou número fracionário com um número racional. Particularmente, poucos livros de Análise Real se preocupam em definir fração de forma explícita ou implícita (Ávila, 2006), sendo que alguns não o fazem nem sequer de forma implícita (Rudin, 1976; Lima, 2014; Guerreiro, 2008).

Cabe observar que alguns livros de Análise Real (Ferreira, 1990; Trench, 2013; Zakon, 2014) utilizam o termo fração para se referir a uma função racional (quociente entre dois polinómios, que são funções cujos domínios são todos os números reais), podendo levar à interpretação que seus autores, matemáticos puros, admitem “extensões” na definição de fração também como razão ou quociente, porém, entre dois números reais, ou seja, da forma: p / q, com p e q reais e $q \neq 0$. Entretanto, destacamos que tal definição não nos parece ser frequente, especialmente, em livros didáticos de Matemática utilizados nos Ensinos Básico e Secundário que, em geral, abordam esse conteúdo iniciando por uma comparação entre medidas inteiras.

Já em relação a um número racional, todos os livros anteriormente referenciados são unânimes em defini-lo como um número que pode ser escrito da forma: p / q, com p e q inteiros e q ≠ 0. Logicamente, os livros que definem fração da mesma forma indicam uma relação direta entre fração e número racional, ou seja, a partir de suas definições, concluímos que toda fração é um número racional e vice-versa.

Entretanto, essa relação direta não pode ser inferida em livros que não definem fração. Particularmente, um deles (Guerreiro, 2008) define número racional como uma fração da forma: p / q, com p e q inteiros e q ≠ 0, indicando claramente que todo número racional é uma fração, porém não explicitando se "vice-versa", isto é, não nos permitindo inferir se toda fração é, por sua vez, um número racional.

Também salientamos que, caso algum livro didático, mesmo que não o tenhamos identificado neste trabalho, defina explicitamente fração como sendo da forma: p / q, com p e q reais e q ≠ 0, devemos ressaltar que, assumindo tal definição, podemos concluir que nem toda fração pode ser considerada um número racional.

Assim, reafirmando o papel fundamental das definições na mobilização do conhecimento do conteúdo específico de professores de Matemática e considerando as definições e relações entre fração e número racional, anteriormente descritas, apresentamos, agora, os procedimentos de pesquisa que sustentaram metodologicamente a investigação realizada.

Apresentando os procedimentos metodológicos da investigação realizada

No atual sistema educacional do Brasil, os professores de Matemática que atuam na chamada Educação Básica brasileira, correspondente aos Ensinos Básico e Secundário portugueses, cursam a Licenciatura em Matemática, cuja duração varia de 4 a 5 anos, de acordo com a modalidade de ensino (presencial ou a distância). Após a graduação, os professores estão aptos a cursar o Mestrado em Educação Matemática ou até mesmo o Mestrado em Matemática (Pura), ainda que este seja normalmente destinado a concludentes do curso de Bacharelado em Matemática.

Nas últimas décadas, expandiu-se a oferta de Mestrados em Educação Matemática nas várias regiões brasileiras, que podem ser oferecidos nas modalidades académica ou profissional, de acordo com a proposta do curso em relação aos objetivos e público-alvo. Em geral, os mestrados académicos focam-se na formação de pesquisadores em Educação Matemática e não exigem experiência docente para ingresso no curso; já os mestrados profissionais focam-se na formação continuada de professores que já estão atuando em sala de aula, critério essencial para ingresso no curso.

Pela parte do 1.º autor do presente trabalho, como docente permanente / pesquisador / orientador de um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática brasileiro (Mestrado e Doutoramento Académicos), responsável por ministrar, nos últimos anos, uma disciplina de Conceitos de Análise e Topologia, foi apresentado um convite aos 13 alunos ingressantes no mestrado em 2024 para que, antes de iniciarem tal disciplina, respondessem a um questionário contendo 20 questões relacionadas a Números Racionais e Irracionais, Enumerabilidade e Densidade, tópicos a serem (re)estudados na referida disciplina, uma vez que eles já haviam estudado tais tópicos quando, certamente, cursaram Análise Real na sua graduação, uma vez que os conteúdos de Análise Real devem ser obrigatoriamente oferecidos em alguma(s) disciplina(s) integrante(s) da estrutura curricular de cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil (geralmente, denominada Análise Real, Análise Matemática, Conceitos de Análise, Fundamentos de Análise ou, ainda, Introdução à Análise).

Após recolhida a concordância dos mestrandos por meio de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, foi aplicado o questionário impresso que iniciava por recolher algumas informações relevantes acerca da formação académica e experiência docente dos 13 professores respondentes que, ainda assim, mantiveram-se no anonimato, pois não existiu identificação nominal.

Verificamos que 9 professores concluíram a Licenciatura em Matemática em 2023, ou seja, eram recém-graduados, 1 professor graduou-se em 2021, 1 em 2014, 1 em 1999 e 1 em 1991. Aqui, cabe observarmos que, nos últimos anos, há uma tendência de aumento no número de professores de Matemática recém-graduados que, logo após a graduação, ingressam em cursos de Mestrado, mas não podemos afirmar, com certeza, se desmotivados pela carreira docente em escolas da Educação Básica ou mesmo se motivados pela oferta, por parte das agências brasileiras de fomento à pesquisa, de bolsas de estudo para alunos de mestrados académicos.

Verificamos, ainda, que 5 professores possuíam experiência docente no Ensino Fundamental brasileiro, equivalente ao Ensino Básico português (sendo 1 professor com 1 ano de experiência, 1 com 2 anos, 2 com 25 anos e 1 com 33 anos). Esses mesmos 5 professores também possuíam experiência docente no Ensino Médio brasileiro, equivalente ao Ensino Secundário português (sendo 3 professores com 1 ano de experiência, 1 com 3 anos e 1 com 4 anos). Já os outros 8 professores não possuíam experiência docente, provavelmente, por se terem graduado em 2023 e, imediatamente, se terem matriculado no mestrado.

Ainda no início do questionário, foi indagado se eles cursaram Análise Real na graduação, sendo oferecidas as seguintes opções de resposta para marcação: Sim; Não; Não me recordo! Verificamos que 9 professores assinalaram “Sim” e 4 professores assinalaram “Não me recordo!”. Não podemos afirmar com certeza se estes últimos assim responderam por não identificarem claramente quais são os conteúdos estudados em Análise Real pois, como afirmamos anteriormente, trata-se de uma disciplina obrigatória em cursos de Licenciatura em Matemática brasileiros.

Na sequência do questionário, foi apresentada a seguinte instrução válida para as 20 questões a serem respondidas: Assinale (V) se Verdadeiro ou (F) se Falso, justificando brevemente! Entretanto, se realmente tiver dúvidas, por favor, deixe em branco! Foi explicado que as justificações deveriam ser sucintas, dentro das 3 linhas destinadas à justificação de cada questão, podendo conter resultados conhecidos, pequenas demonstrações ou contraexemplos apropriados. Também foi deixado claro que, em caso de dúvidas sobre a veracidade ou não de uma questão, caso realmente não fosse possível a elaboração de uma justificação minimamente coerente com uma eventual marcação assinalada, que se deixasse a questão em branco.

O questionário foi dividido em duas partes: a 1ª parte contendo 10 questões sobre Números Racionais e Irracionais, e a 2ª parte contendo 10 questões sobre Enumerabilidade e Densidade. A seguir, devido aos propósitos do presente trabalho, apresentamos e discutimos 3 questões integrantes da 1ª parte, cujo objetivo era, explicitamente, relacionar e, intrinsecamente, conceituar fração e número racional.

Apresentação e discussão de resultados

Focaremos, então, nas seguintes questões da 1ª parte do questionário:

3) ( ) $\frac{\pi}{2}$ é uma fração

4) ( ) Toda fração é um número racional

5) ( ) $\frac{\pi}{2}$ é um número racional

Na nossa expectativa de respostas, esperávamos que os professores assinalassem (F) na Questão 3, considerando que, tradicionalmente, uma fração é definida como sendo da forma: p / q, com p e q inteiros e q ≠ 0.

Assumindo tal definição de fração, esperávamos que os professores assinalassem (V) na Questão 4, uma vez que, consensualmente, também se trata da mesma definição de número racional, como sendo da forma: p / q, com p e q inteiros e q ≠ 0.

Entretanto, cabe observarmos que também prevíamos a possibilidade de os professores assinalarem (V) na Questão 3, desde que, explicitamente, justificassem que uma fração pode ser definida como sendo da forma: p / q, com p e q reais e q ≠ 0.

Não iremos aqui discutir se tal eventual definição para fração é ou não mais "correta" ou "adequada" do ponto de vista conceitual ou didático, mas o facto é que, caso fosse utilizada por algum respondente, este teria que, necessariamente, assinalar (F) na Questão 4, por uma questão de lógica com a definição utilizada para fração e considerando que a definição acima apresentada para número racional é consensual, como já destacamos.

Ainda na nossa expectativa de respostas, esperávamos que os professores assinalassem (F) na Questão 5, independentemente de suas respostas às Questões 3 e 4, uma vez que, notadamente, π é um número irracional e, ademais, poderia se justificar que o quociente ou a multiplicação de um número irracional por um número racional não nulo resulta em um número irracional.

Verificamos, assim, o seguinte conjunto de respostas às 3 questões acima apresentadas, assinaladas com V ou F (ou deixadas em branco) pelos 13 professores, aqui identificados aleatoriamente apenas por P1 a P13.

Tabela 1. Respostas às Questões 3, 4 e 5.

QUESTÃO	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
3	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
4	F		V	F	V	V		F	F	F	F	F	F
5	F	F	F	V			F	F	F	F	F	F	V

Fonte: Dados da Pesquisa.

Analisando os resultados a partir das opções assinaladas e das justificações apresentadas, procuramos categorizar, inicialmente, as respostas apresentadas pelos professores às Questões 3 e 4, de forma conjunta.

Em nossa análise, de entre os 3 professores que assinalaram (F) na Questão 3 e (V) na Questão 4, apenas um deles (P6) apresentou explicitamente definições de fração e número racional:

3) (F) Uma fração é um número na forma a / b, com a, b $\in \mathbb{Z}$ e b ≠ 0; $\pi \notin \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ π / 2 não é fração.

> **4)** (V) Por definição, um número racional é todo número que pode ser representado por uma fração.

Outros 2 professores não apresentaram explicitamente as definições de fração e número racional, entretanto, um deles (P5) apresentou “vários significados de fração”, destacando a impossibilidade de escrita / representação de um número irracional como fração:

> **3)** (F) Pois π é um número irracional, portanto, não conseguimos escrevê-lo em forma de fração.
>
> **4)** (V) De entre os vários significados de fração (medida, operador multiplicativo, razão, etc.), temos a parte de um todo; dessa forma, não é possível representar um número irracional como parte – todo.

Já de entre os 8 professores que assinalaram (V) na Questão 3 e (F) na Questão 4, apenas um deles (P11) apresentou explicitamente o que considera a definição de fração, ainda assim, após reconhecer que “não se recordava” de tal definição:

> **3)** (V) Não me recordo da definição de fração; considero como uma “divisão” entre números reais, então, $\pi/2$ é uma fração.
>
> **4)** (F) O exemplo $\pi/2$ é uma fração, mas não é um número racional, pois π é irracional.

Um professor (P9) referiu-se a um significado de fração e à definição de número racional, entretanto, utilizando uma notação inadequada para representar o conjunto dos números inteiros (ao invés da tradicional notação $\mathbb{Z}$), além de não ressaltar a condição $b \neq 0$:

> **3)** (V) Pois representa a parte de um todo.
>
> **4)** (F) Apenas frações da forma a / b tq $a, b \in I$.

Outros 3 professores referiram-se à fração como “divisão” e destacaram a possibilidade de uma fração resultar em um número irracional, sendo que um deles (P10) apresentou como “contraexemplo” exatamente o número $\pi / 2$:

> **3)** (V) Toda divisão pode ser escrita na forma de fração e, apesar da divisão $\pi / 2$ não ser exata, continua sendo divisão.
>
> **4)** (F) Se o resultado da fração for um número irracional, a fração será irracional. (Ex.: $\pi / 2$).

Ainda outros 3 professores apresentaram justificações inconsistentes ou incoerentes, sendo que um deles (P8) pareceu não reconhecer que uma dízima periódica é um número racional:

> **3)** (V) A fração possui o numerador e o denominador, sendo o denominador diferente de 0.
>
> **4)** (F) Porque podemos obter uma dízima periódica.

Por sua vez, 2 professores deixaram em branco a Questão 4, evidenciando não saberem relacionar fração e número racional, seja considerando a Questão 3 falsa (P2) ou verdadeira (P7), respetivamente, para as quais também apresentaram justificações inconsistentes ou incoerentes:

3) (F) Fração é uma divisão em partes iguais e π é um número irracional, logo não pode ser dividido em partes iguais.

3) (V) Porque ele é um número fracionário irracional.

Buscando, agora, categorizar as respostas apresentadas pelos professores à Questão 5, em nossa análise, de entre os 9 professores que assinalaram (F), em suas justificações, 7 deles simplesmente argumentaram que π é um número irracional. Entretanto, os outros 2 professores apresentaram justificações inconsistentes ou incoerentes, referindo-se a uma fração (P7) ou a um número inteiro (P8), respetivamente:

5) (F) Porque π/2 é um número irracional, pois ele possui uma fração.

5) (F) Porque ao dividirmos o numerador pelo denominador não obtemos um número inteiro.

Outros 2 professores assinalaram (V) na Questão 5 e, em suas justificações, obviamente, apresentaram justificações inconsistentes ou incoerentes, referindo-se a um número decimal (P4) ou impondo uma condição de validade (P13), respetivamente:

5) (V) É um número racional pois essa divisão resulta em um número decimal, o qual está contido no conjunto dos números racionais.

5) (V) A afirmativa é válida se, e somente se, $\pi \in IR$ / $\pi \neq 0$.

Ainda outros 2 professores deixaram em branco a Questão 5, evidenciando não saberem classificar π como um número racional ou irracional.

Das fragilidades evidentes aos questionamentos plausíveis

Se, por um lado, a análise das respostas apresentadas pelos 13 professores às 3 questões aqui focadas revela fragilidades evidentes na mobilização de seus conhecimentos de conteúdos específicos relacionados com fração e número racional, por outro lado, suscita questionamentos plausíveis relacionados com o modo como tais conhecimentos estão sendo construídos na formação inicial de um professor de Matemática.

Cabe recordar que todos os professores participantes de nossa investigação são mestrandos em Educação Matemática e, portanto, todos licenciados em Matemática, ainda que com experiências docentes bem diferenciadas, tanto no Ensino Básico como no Ensino Secundário. Assim, todos cursaram diversas disciplinas de Álgebra, Cálculo e, particularmente, Análise que, segundo Fernandes e Conceição (2013), certamente, contribuíram para o desenvolvimento intelectual e o amadurecimento matemático desses professores.

Outrossim, na perspetiva da construção de um conhecimento do conteúdo específico que, de acordo com Shulman (1986), deve contemplar aspetos históricos, culturais, epistemológicos, conceituais e relacionais, verificamos que os professores participantes de nossa investigação, de modo geral, não demonstraram mobilizar, notadamente, os aspetos conceituais e relacionais de / entre fração e número racional, ao menos de uma forma profunda que nos permita inferir sobre sua "autonomia intelectual" para a mediação necessária nos momentos de apropriação / construção dos conhecimentos matemáticos por seus (futuros) alunos, como preconizam Fiorentini et al. (1998).

Dentro dessa perspetiva, há que se considerar o lugar e o papel das definições de conceitos matemáticas como componentes fundamentais do conhecimento específico dos professores de Matemática, como defendem Zazkis e Leikin (2008) e, o que constatamos é que poucos professores participantes de nossa investigação demonstraram conhecer a (uma) definição formal de fração (lembrando que admitimos, até mesmo, a possibilidade de se apresentar uma definição diferente da tradicionalmente encontrada em alguns livros), sendo que alguns deles referiram-se a significados e interpretações por vezes inconsistentes ou incoerentes.

Também, de forma acentuada e grave, constatamos que a definição formal de número racional, na maior parte das respostas apresentadas pelos professores participantes de nossa investigação, não foi explicitada na forma tradicionalmente encontrada nos livros de Matemática, o que chama a atenção, particularmente, no caso de licenciados que estudaram disciplinas de Análise Real, nas quais tal definição é recorrente, por exemplo, ao se estudar os conteúdos de enumerabilidade e densidade de conjuntos numéricos nos números reais, conteúdos que, em geral, são abordados de forma rigorosa no que se refere a definições e demonstrações correlatas (Reis, 2009).

Porquanto, a partir de tais revelações e constatações, como professores formadores de professores de Matemática para os Ensinos Básico e Secundário, talvez seja bastante razoável questionar: Como temos contribuído para a mobilização do conhecimento do conteúdo específico por parte dos futuros professores na perspetiva de sua atividade docente? Considerando os diversos aspetos que o contemplam ou privilegiando um conhecimento factual ou conceitual de forma isolada? Temos em consideração que, quando da definição de um conceito, em sala de aula, ir-se-á influenciar diretamente a sequência de aprendizagem dos alunos? Isso tem nos levado a refletir sobre a abordagem do ensino de Matemática, incluindo o conjunto de teoremas e provas, subjacente às diversas teorias matemáticas?

Diante desses questionamentos, é importante ressaltar que não nos eximimos da tarefa de lhes dar respostas, ainda que não as tenhamos de forma imediata, o que não invalida sua busca constante aliada à necessidade de reflexão por parte de professores e educadores matemáticos comprometidos com a formação docente (Matos, 2018).

Considerações finais

No presente trabalho, objetivamos discutir o conhecimento do conteúdo específico mobilizado por professores de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário, no Brasil, por meio de uma investigação centrada nos aspetos conceituais e relacionais de / entre fração e número racional.

Não há como deixar de reconhecer, outrossim, eventuais limitações que nossa investigação carrega, especialmente, em seu delineamento de cunho metodológico. Entendemos que se trata de um limitado número de professores participantes, no sentido de que não podemos afirmar, com certeza, se os resultados seriam “proporcionalmente idênticos” caso tal número fosse maior, abrangendo, por exemplo, professores com um perfil diferenciado em termos de formação académica e experiência docente, ou ainda, se tivéssemos aplicado o referido questionário a professores de Matemática de Portugal.

Não obstante, também entendemos que os resultados apresentados e as conclusões aqui apontadas dizem respeito à mobilização do conhecimento do conteúdo específico relacionado com conteúdos matemáticos nucleares pois, de facto, são ensinados por professores que atuam nos Ensinos Básico e Secundário, ou seja, tais resultados e conclusões não se inserem apenas no contexto da formação de professores mas, em última análise, desembocam na sala de aula e, assim, podem ser ressignificados à luz dos processos de aprendizagem matemática, numa perspectiva muito próxima do que defendemos em relação à interação dialética do conhecimento do conteúdo com os conhecimentos pedagógico e curricular (Reis, 2001; Guerreiro, 2011).

Deste modo, como professores-pesquisadores e formadores de professores de Matemática, cabe-nos uma reflexão sobre a importância de se realizarem mais investigações relacionadas com diversos conteúdos matemáticos que revelem, em certa medida, eventuais inconsistências ou incoerências no conhecimento do conteúdo específico mobilizado por professores que, conscientemente ou não, assumem um importante papel na tarefa de levar a Matemática para todos.

Referências

Ávila, G. S. S. (2006). *Análise matemática para licenciatura*. Edgard Blücher.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Sá da Costa.

Conway, J. H., & Guy, R. K. (1999). *O livro dos números*. Gradiva.

Crilly, T. (2011). *50 ideias de Matemática que precisa mesmo de saber*. Dom Quixote.

Fernandes, S., & Conceição, A. C. (2013). Pré-cálculo e a formação inicial de professores de Matemática: Resultados preocupantes de um teste diagnóstico. *Revista Lusófona de Educação*, *25*(25), 135–155. https://revistas.ulusofona.pt/index.php/rleducacao/article/view/4384

Ferreira, J. C. (1990). *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Fiorentini, D., Souza Júnior, A. J., & Melo, G. (1998). Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. In C. M. G. Geraldi, D. Fiorentini, & E. M. Pereira (Orgs.), *Cartografias do trabalho docente: Professor(a) pesquisador(a)* (1ª ed., pp. 307–335), Mercado das Letras.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem de Matemática: Práticas no 1º ciclo do Ensino Básico*. [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/5494

Guerreiro, J. S. (2008). *Curso de Análise Matemática*. Escolar.

Lima, E. L. (2014). *Análise real: Funções de uma variável*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Matos, J. M. (2018). *A Matemática e seu ensino na formação de professores: Uma abordagem histórica*. Associação de Professores de Matemática e Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento da Universidade Nova de Lisboa.

Reis, F. S. (2001). *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. [Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas]. https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2001.206743

Reis, F. S. (2009). Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In M. C. R. Frota, & L. Nasser (Orgs.). *Educação matemática no ensino superior: Pesquisas e debates* (1ª ed., pp. 81–97), Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (2014). Conhecimento e ensino: Fundamentos para a nova reforma. *Cadernos Cenpec, 4*(2), 196–229. http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v4i2.293

Trench, W. F. (2013). *Introduction to real analysis*. Pearson Education.

Zakon, E. (2014). *Mathematical analysis*. The Trillia Group.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

TAREAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO

TASKS FOR DEVELOPING MATHEMATICS TEACHERS' KNOWLEDGE: A BIBLIOMETRIC ANALYSIS

Rocío Plazas Naranjo

Universidad de Huelva, España

rocio.plazas@ddcc.uhu.es

Nuria Climent Rodríguez

Universidad de Huelva, España

climent@uhu.es

Luis Carlos Contreras González

Universidad de Huelva, España

lcarlos@uhu.es

Resumen: Este trabajo describe un estudio bibliométrico en el que se analizan las publicaciones encontradas para una revisión sistemática futura sobre tareas en la formación inicial del profesorado de matemáticas. Se describe la planificación de la búsqueda, así como el proceso en la inclusión de los documentos obtenidos, siguiendo los pasos del protocolo PRISMA. Los resultados muestran una tendencia positiva en la última década con subidas y bajadas, diversidad de países en todo el mundo, así como diversidad de revistas que publican sobre este tema. También se analizan las colaboraciones entre países y las palabras clave de las investigaciones. Se estudia en más profundidad los estudios de España y Portugal en relación a los marcos teóricos del conocimiento del profesor utilizados, el contexto y el propósito principal de investigación.

Palabras clave: análisis bibliométrico, tareas, conocimiento matemático, formación inicial.

Abstract: This study analyses research identified for a future systematic review of tasks in teacher education aimed at developing mathematical knowledge. The search planning and the process of obtaining articles are described. The PRISMA protocol has been used for this. The results show a positive trend over the last ten years with some fluctuations, and highlight the diversity of countries and journals involved. In addition, collaborations between countries and keywords of studies have been analysed. In the studies of Spain and Portugal it has been studied in more detail aspects related with theorical framework of teacher knowledge, context and main purpose of the research.

Keywords: bibliometric analysis, tasks, mathematical knowledge, teacher education

Introducción

Un análisis bibliométrico se puede definir como un tipo de análisis que utiliza datos cuantitativos para determinar, a través de la estadística, las tendencias de investigación en un campo de conocimiento concreto (Aria & Cuccurullo, 2017). A través de este análisis se da respuesta a cuestiones sobre las tendencias de investigación a lo largo del tiempo, las instituciones o autores que más escriben sobre ese tema o los cambios o rumbos futuros, entre otras (Aria & Cucurullo, 2017). El análisis bibliométrico se puede considerar un paso previo a la realización de una revisión sistemática (Campina-Lopez et al., 2024) para comprender en profundidad la actividad científica en un campo concreto de estudio (Mokhnacheva & Tsvetkova, 2020).

El tema que aborda este estudio es conocer las investigaciones existentes en cuanto a fundamentación, estructura, diseño y, en su caso, desarrollo de tareas orientadas a la construcción de conocimiento del profesor de matemáticas en la formación inicial del profesorado de Educación Infantil y Educación Primaria.

El conocimiento del profesor de matemáticas es un campo de estudio con una amplia trayectoria donde convergen diferentes perspectivas y modelos. Muchas de ellas toman como referencia el trabajo de Shulman (1986), quien introdujo el constructo *pedagogical content knowledge* (PCK), para referirse a un tipo de conocimiento pedagógico del profesor que está indisolublemente ligado a la materia que se enseña. Entre los modelos desarrollados, considerando la diferenciación proveniente de Shulman de conocimiento del contenido y didáctico del contenido en Educación Matemática probablemente el de mayor repercusión internacional sea el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball et al. (2008). Junto a estos, se han desarrollado otras conceptualizaciones sobre el conocimiento que requiere el profesor de matemáticas tanto en Portugal (Ponte & Oliveira, 2002) como en España (Carrillo et al., 20018; Godino, 2009).

El equipo de investigación de la Universidad de Huelva que trabaja en el proyecto "Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK)" avanza en la línea de formar a los futuros profesores de matemáticas a través del diseño y experimentación de tareas formativas con el objetivo de desarrollar o movilizar su conocimiento especializado para enseñar matemáticas (Martín-Díaz & Climent, 2022). La implementación de tareas formativas en la formación inicial del profesorado de matemáticas, además, pretende estudiar cómo diferentes tareas, dependiendo de sus características, pueden desarrollar o movilizar conocimiento en los futuros profesores. Por ejemplo, en el estudio de Pascual et al. (2023), tras el uso de un vídeo extraído de una clase real, se refuerza la movilización de conocimiento didáctico del contenido en los futuros profesores.

Las tareas formativas que se implementan en la formación inicial pretenden, además, desarrollar la identidad profesional del profesor de matemáticas (Clarke et al. 2009; Oliveira, 2004). En la identidad profesional se incluye el conocimiento sobre la gestión de aula, métodos y materiales, el conocimiento en matemáticas relacionada con la enseñanza, así como las creencias sobre el aprendizaje (Clarke, 2009). Además, las tareas que se implementan tienen una función, una forma y un foco, así como un objetivo en relación con el aprendizaje esperado en los futuros profesores de matemáticas (Clarke, 2009).

Las tareas formativas pueden situarse en relación con tareas profesionales del profesor (Llinares, 2014), entendidas como las prácticas que realiza el profesor cuando enseña matemáticas en su aula (Joglar-Prieto et al., 2022).

Metodología

Este estudio forma parte de una investigación más amplia que pretende caracterizar las tareas formativas que se llevan a cabo en la formación inicial de futuros profesores de matemáticas de Educación Infantil y Educación Primaria y relacionar dichas características con el conocimiento que desarrollan los futuros profesores. Desde esa perspectiva, se pretende analizar los datos de los documentos encontrados para una posterior revisión sistemática respondiendo a las siguientes preguntas (Campina-Lopez et al., 2024):

- ¿Cuál es la evolución de este tema de investigación en un periodo de tiempo concreto?
- ¿Qué revistas escriben sobre ello? ¿En qué conferencias se presentan investigaciones sobre el tema?
- ¿En qué países se está abordando este tema de investigación?
- ¿Cuáles son las ideas clave de este tema de investigación?
- ¿En qué marcos teóricos se sitúan las investigaciones?
- ¿Cuál es el contexto de las investigaciones?
- ¿Cuál es su propósito principal?

Para dar respuesta a las tres últimas preguntas, nos situaremos en los documentos referidos a investigadores de Portugal y España. Para determinar los documentos que se van a analizar en este estudio se ha llevado a cabo una búsqueda en cuya primera fase de cribado de documentos se ha utilizado el protocolo PRISMA (según Sánchez-Serrano et al., 2022), así como referentes de otras revisiones sistemáticas en Educación Matemática como la realizada por Depaepe et al. (2013).

En primer lugar, se ha formulado la pregunta que guía la búsqueda de artículos: ¿Qué tareas se utilizan para la construcción de conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido matemático en la formación de docentes?

A continuación, se han seleccionado criterios de elegibilidad que permitan determinar la inclusión y exclusión de los documentos encontrados para analizarlos posteriormente; en nuestro caso, estos criterios han sido los siguientes:

- Cualquier metodología de estudio (cuantitativo y cualitativo).
- Tareas para la construcción de conocimiento matemático o construcción de conocimiento didáctico del contenido matemático (con el foco en el conocimiento).
- Que las tareas se describan con cierto detalle para que se puedan identificar sus características.
- En la formación inicial del profesorado y perteneciente a la formación de maestros de Educación Infantil o Educación Primaria.
- Artículos de revista, tesis y artículo en conferencia.
- Idiomas: español, inglés y portugués.

Tras de ello se ha planificado la metodología de búsqueda tomando decisiones sobre los siguientes aspectos (Campina-Lopez et al., 2024; Sánchez-Serrano et al., 2022) relacionados con las bases de datos, los descriptores y sus combinaciones. Las bases de datos utilizadas han sido *SCOPUS* y *WOS*. Se han determinado los descriptores a partir de la pregunta de búsqueda, usando el Tesauro de la *UNESCO* y *ERIC*. Estos descriptores han sido: *assignment, task, knowledge, mathematics, teacher education*. La frase de búsqueda fue: (assignment OR task) AND (knowledge AND mathematics) AND teacher education). Los campos de búsqueda fueron *Title, Abstract y Keyword*

Tras la búsqueda se seleccionan los estudios encontrados tal como muestra el diagrama de flujo de la Figura 1 (Sánchez-Serrano et al., 2022).

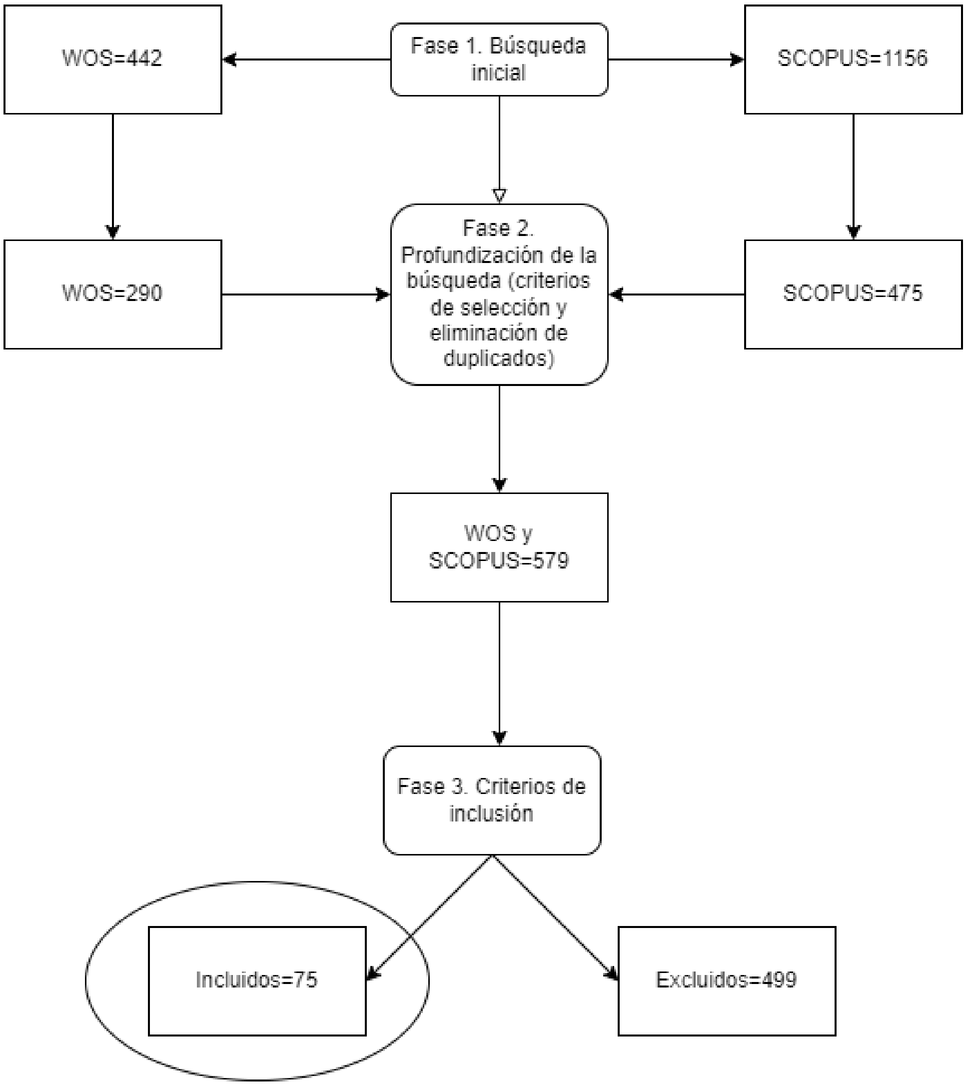


Figura 1. Diagrama de flujo de elaboración propia con Draw.io.

Finalmente, se han obtenido 75 documentos para realizar un análisis estadístico cuantitativo y extraer la información que responda a las preguntas anteriormente planteadas.

Resultados

El número de publicaciones entre los años 2014-2024 (Figura 2) ha estado en crecimiento desde el año 2014 teniendo el máximo de publicaciones en el año 2021 y 2022.

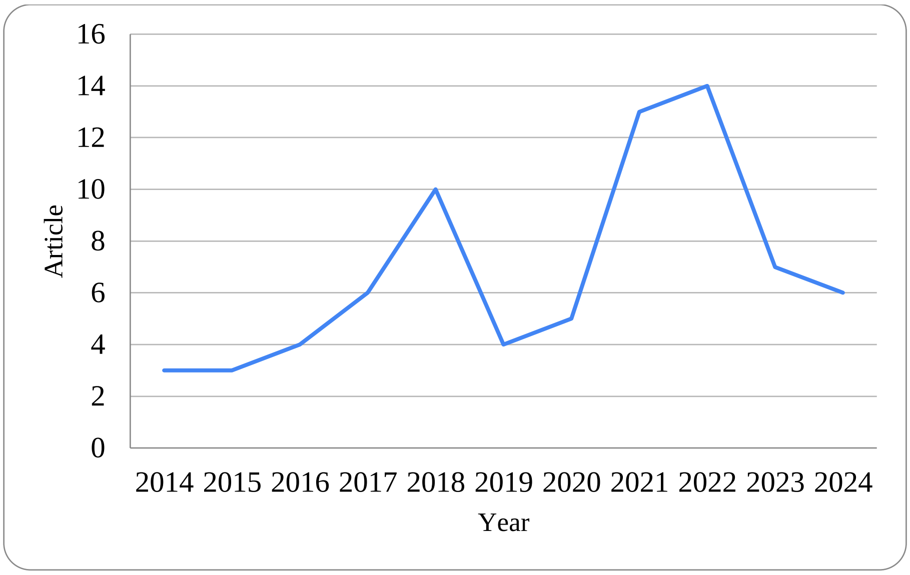


Figura 2. Gráfico de elaboración propia donde se representan la evolución de investigaciones del año 2014 al 2024.

Las revistas encontradas son muy numerosas y diversas, por tanto, se han recogido las revistas que tienen más de un artículo publicado (Figura 3). La revista *Acta Scientiae* es la que tiene más artículos publicados de los artículos encontrados, seguida de *Journal of Mathematics Teacher Education* y *ZDM- Mathematics Education.*

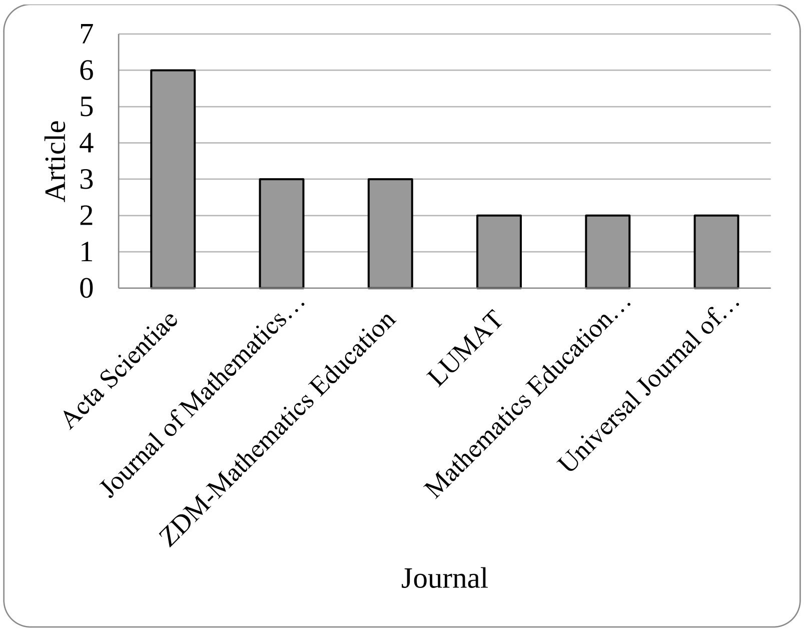


Figura 3. Relación artículos publicados en las revistas con más de un artículo publicado.

En cuanto a las publicaciones en congresos, la diversidad es menor (Figura 4) siendo el CERME el más destacable por cantidad de publicaciones.

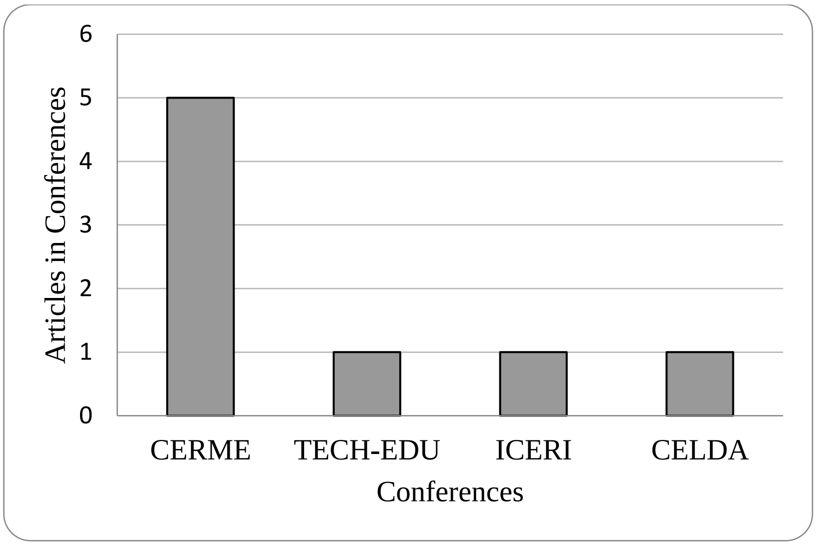


Figura 4. Artículos en conferencias.

Un total de 27 países investigan sobre el tema. Los países que realizan más publicaciones, en inglés, español o portugués, son (Figura 5) Estados Unidos seguido de España, Chile, Brasil, Alemania y Portugal.

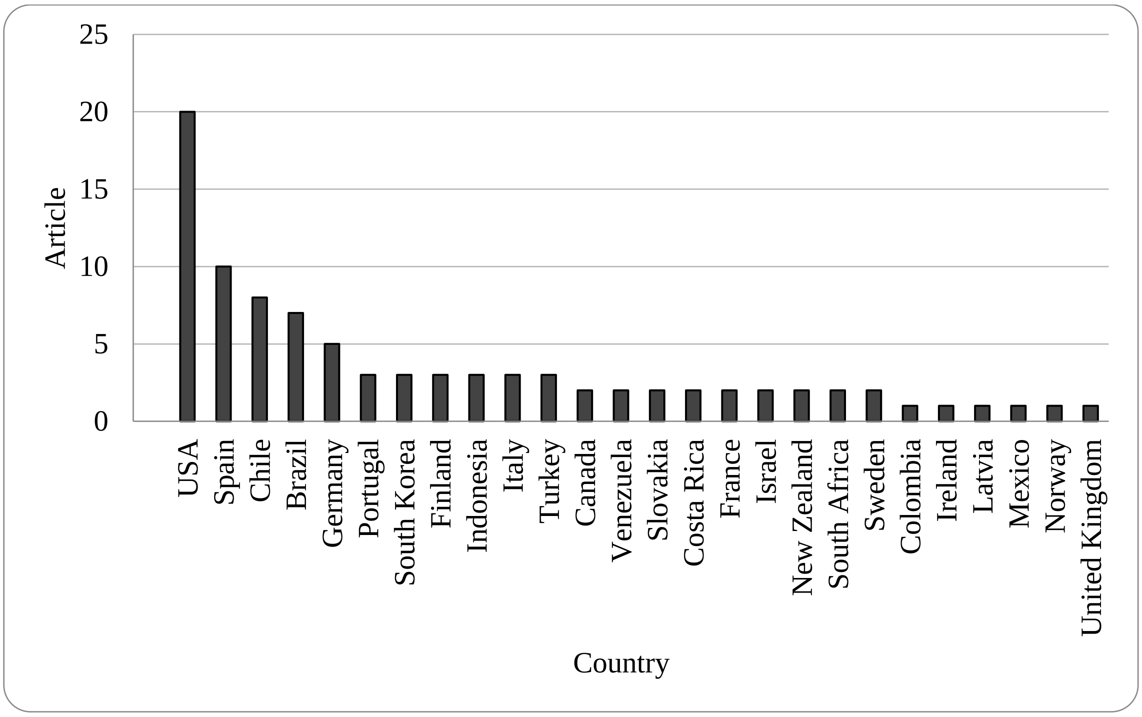


Figura 5. Publicaciones por países.

España destaca como país con el mayor número de colaboraciones que realiza con otros países con un total de 8 colaboraciones con 6 países (Figura 6).

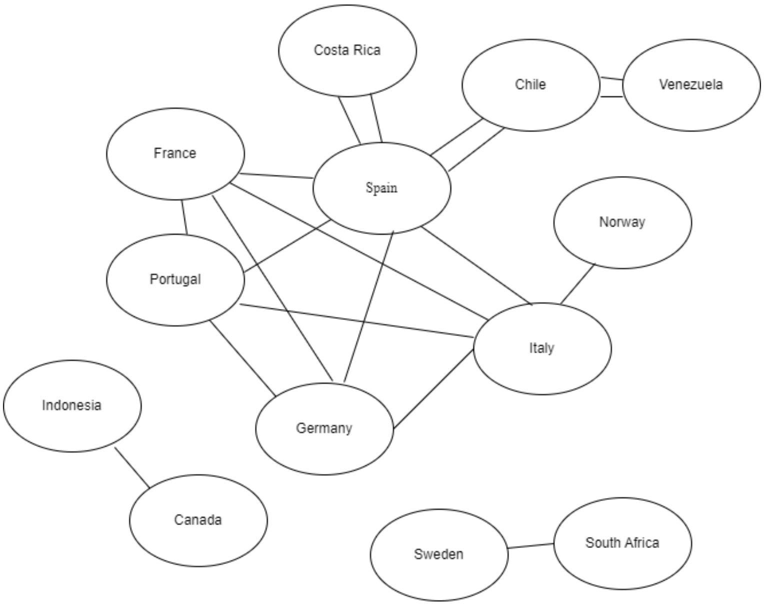


Figura 6. Colaboraciones entre países.

Las palabras clave extraídas de los documentos que aparecen tres veces o más se pueden observar en la Figura 7. Las tres más destacables son *teachers*, *knowledge* y *mathematics.*

Figura 7. Nube de las palabras clave elaborado con Atlas.ti.

Pasamos ahora a fijarnos en las publicaciones con autoría relativa a Portugal y España. En primer lugar, recogemos los resultados sobre los modelos teóricos desde los que estudian el conocimiento del profesor de matemáticas (Tabla 1).

Tabla 1. Modelos del conocimiento del profesor en artículos de España y Portugal.

Modelo del Conocimiento del profesor	Artículos	País
MKT (Ball et al., 2008)	1	España
TPACK (Koehler et al., 2009)	1	España y Portugal
MTSK (Carrillo et al., 2018)	4	España
OSA (Godino et al., 2007)	4	España
CM-EI (Alsina y Delgado-Rebolledo, 2022)	1	España

Ponte y Oliveira (2002)	1	Portugal
Sin modelo definido	1	Portugal

Estos artículos se refieren tanto a España o Portugal únicamente, como a ambos países en colaboración con otros. Los modelos del conocimiento del profesor utilizados en el uso de tareas en la formación inicial del profesorado en España y Portugal son internacionales, MKT (Ball et al., 2008) y su interpretación en el caso de consideración de la tecnología en la enseñanza (TPACK, Mishra y Koehler, 2006), y en una parte considerables de los casos conceptualizaciones de los propios equipos desarrolladas a partir de Shulman (CM-EI, Alsina y Delgado-Rebolledo, 2022; MTSK, Carrillo et al., 2018; OSA, Godino et al., 2007; Ponte y Oliveira, 2002;por orden de presencia). Un artículo prefiere no enmarcarse en ningún modelo en concreto, aunque aborda el estudio con influencias de Pedagogical Content Knowledge de Shulman (1986).

En cuanto al contexto de las investigaciones (Tabla 2), la mayoría de los estudios se han realizado en un contexto donde los participantes son maestros en formación pertenecientes al Grado de Educación Primaria. Seguido de estudios donde los participantes son maestros en formación de Educación Infantil y de estudios con maestros en formación de ambos grados.

Tabla 2. Contexto de los estudios de Portugal y España.

Contexto		N.º estudios	Estudios
Profesores en formación	Educación Primaria	9	Aké et al., 2014; Buforn et al., 2018; Burgos & Chaverri-Hernandez, 2022; Burgos & Godino, 2022; Burgos et al., 2024; Caviedes et al., 2022; Montes et al., 2024; Pascual-Martin, 2023; Valenzuela-Molina et al., 2021
	Educación Infantil	2	Alsina et al., 2023; Figueiredo et al., 2018
	Ambos	2	Colaco & Branco, 2016; Taranto et al., 2021

En la tabla 3 se agrupan los estudios según el propósito de investigación. La mayoría de los estudios pretenden analizar el desarrollo o movilización del conocimiento matemático y/o conocimiento para enseñar matemáticas de los profesores en formación al realizar una tarea formativa. Otros estudios describen el diseño e implementación de tareas formativas para profesores en formación. Un estudio se enfoca en examinar el impacto de una herramienta y otro estudio pretende categorizar tareas formativas.

Tabla 3. Propósito de los estudios de Portugal y España.

Propósito	N.º estudios	Estudios
Herramienta para tarea formativa	1	Taranto et al. 2021
Desarrollo/movilización de conocimiento especializado de los profesores en formación con una tarea formativa	8	Alsina et al., 2023; Buforn et al., 2018; Caviedes et al., 2022; Colaco & Branco, 2016; Figueiredo et al., 2018; Montes et al., 2024; Pascual-Martín et al., 2023; Valenzuela-Molina et al., 2021

Diseño e implementación de una tarea formativa para profesores en formación	3	Aké et al., 2014; Burgos & Chaverri-Hernández, 2022; Burgos & Godino, 2022
Categorización de tareas formativas	1	Burgos et al., 2024

Conclusiones

El análisis realizado muestra interés en el tema de investigación sobre tareas para el desarrollo de conocimiento matemático en la formación inicial de futuros profesores de matemáticas en los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria. Existe un aumento progresivo de investigaciones a lo largo de la última década, aunque con subidas y bajadas.

Numerosos países investigan sobre el tema. Se puede observar cómo el país que más publicaciones tiene sobre el tema, Estados Unidos, siendo España el segundo país con más investigaciones sobre el tema.

En cuanto a las ideas clave de las investigaciones coinciden en su mayoría con los términos de búsqueda empleados o con sus sinónimos. Se destaca que existen dos términos que aparecen en tres ocasiones cada uno, como son *fractions* y *geogebra*, los cuales anticipan que se encontrarán investigaciones con interés en las fracciones como elemento matemático para tratar en las tareas formativas y GeoGebra como recurso. Esta presencia de GeoGebra es coherente con la presencia del TPACK (Mishra & Koehler, 2006) como marco teórico de estudio en las investigaciones de Portugal y España.

En España y Portugal el conocimiento del profesor se conceptualiza desde el MKT y el citado TPACK, y sobre todo, desde conceptualizaciones propias de los equipos de investigación. Es significativo que casi todas las producciones hacen uso de un modelo de conocimiento del profesor, lo que refrenda que son útiles para el diseño y análisis de tareas en la formación inicial del profesorado. Las investigaciones siguen usando modelos con más trayectoria como son el MKT o el TPACK, así como otros modelos más emergentes como es el CM-EI específico para el conocimiento del profesor de matemáticas de Educación Infantil.

El contexto y el propósito principal de las investigaciones de España y Portugal indican que la mayoría de las tareas son diseñadas para analizar el conocimiento desarrollado o movilizado del profesor de Educación Primaria en formación.

En conclusión, la investigación sobre tareas en la formación inicial de profesores de matemáticas para la construcción de conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido es un tema de estudio de presencia internacional que genera un interés creciente y con perspectivas de futuro.

Este es un primer estudio general al que seguirá un análisis en profundidad sobre el contenido de los artículos, que nos permitirá dibujar una panorámica sobre el objeto de estudio.

Agradecimientos

Estudio que forma parte de la tesis del contrato predoctoral PRE2022-105267 asociado al proyecto PID2021-122180OB-I00 (Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK) financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y “FSE Invierte en tu futuro”. Se

enmarca en el Centro de Investigación en Pensamiento Contemporáneo e Innovación para el Desarrollo Social (COIDESO) de la Universidad de Huelva.

Referencias

Alsina, Á., & Delgado, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de educación infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *5*(1), 18-37. https://journals.uco.es/mes/article/view/14153

Aria, M., & Cuccurullo, C. (2017). Bibliometrix: An R-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics, 11*(4), 959-975. https://doi.org/10.1016/j.joi.2017.08.007

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Campina-Lopez, A. C., Lorca-Marín, A., & de las Heras.Pérez, M. Á. (2024). Indagación, modelización y pensamiento computacional: Un análisis bibliométrico con el uso de Bibliometrix a través de Biblioshiny. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 21*(1), 1102. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2024.v21.i1.1102

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, P., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clarke, B., Grevholm, B., & Millman, R. (2009). *Tasks in primary mathematics teacher education: purpose, use and exemplars.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8

Climent, N., & Montes, M. (2022). El modelo MTSK: Antecedentes y estructura. In J. Carrillo Yañez, M. A. Montes Navarro, & N. Climent Rodríguez (Coords.) *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.6

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1063

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics, 39*(1), 127–135. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M., & Contreras L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. In J. Carrillo Yañez, M. A. Montes Navarro, & N. Climent Rodríguez (Coords.) *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*, 2022, (pp. 207-222). Dykinson. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.20

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues Technology & Teacher Education, 9*, 60–70. https://citejournal.org/volume-9/issue-1-09/general/what-is-technological-pedagogicalcontent-knowledge

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 26*(1), 31-51. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854003

Martín-Díaz, J. P., & Climent, N. (2022). El papel de MTSK en el desarrollo profesional del profesor. In J. Carrillo Yañez, M. A. Montes Navarro, & N. Climent Rodríguez (Coords.) *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 223-233). Dykinson. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.21

Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Mokhnacheva, Yu. V., & Tsvetkova, V. A. (2020). Development of bibliometrics as a scientific field. *Sci. Tech. Inf. Process., 47*(3), 158-163. https://doi.org/10.3103/S0147688220 03003X

Oliveira, H. (2004). Percursos de identidade do professor de matemática em início de carreira: O contributo da formação inicial. *Quadrante*, *13*(1), 115–145. https://doi.org/10.48489/quadrante.22771

Pascual, M. I., Climent, N., Codes, M., Martín-Diaz, J. P., & Contreras, L. C. (2023). Tasks for the construction of specialised knowledge for mathematics teaching in preservice teacher education. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado-RIFOP, 98*, 55-72. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99221

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163. http://hdl.handle.net/10451/3167

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Prácticas profesionales de los profesores de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.5

Sánchez-Serrano, S., Pedraza-Navarro, I., & Donoso-González, M. (2022). ¿Cómo hacer una revisión sistemática siguiendo el protocolo PRISMA? Usos y estrategias fundamentales para su aplicación en el ámbito educativo a través de un caso práctico. *Bordón. Revista de Pedagogía, 74*(3), 51-66. https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.95090

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Taranto, E., & Arzarello, F. (2020). Math MOOC UniTo: An Italian project on MOOCs for mathematics teacher education, and the development of a new theoretical framework. *ZDM – Mathematics Education, 52*(5), 843–858. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01116-x

FRONTEIRAS CONVERGENTES: O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR NO ENSINO INTERDISCIPLINAR DE CIÊNCIAS EXATAS COM TECNOLOGIA

CONVERGING FRONTIERS: TEACHERS' PROFESSIONAL KNOWLEDGE IN INTERDISCIPLINARY TEACHING OF EXACT SCIENCES WITH TECHNOLOGY

Tânia Coelho

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal
ta.coelho@campus.fct.unl.pt

Helena Rocha

[2]*CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal*

hcr@fct.unl.pt

Resumo: O estudo aborda a integração de disciplinas, especialmente Matemática e Física, em contexto interdisciplinar e uso de tecnologia. Tem como objetivo, investigar como o conhecimento profissional de duas professoras é mobilizado no processo e identificar os desafios em ultrapassar algumas barreiras que impactam a implementação de práticas interdisciplinares. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, utilizando um estudo de caso com duas professoras que utilizam tecnologia. A metodologia envolve observações em aulas e entrevistas, focando na aplicação de tecnologia e promoção de práticas interdisciplinares. A análise dos dados foi descritiva e interpretativa, categorizando conhecimentos conforme o modelo APCK. Os resultados mostram que o conhecimento dos professores impacta positivamente a aprendizagem dos alunos, facilitando conexões entre disciplinas. Por último conclui-se que a superação das barreiras institucionais e formativas é crucial para práticas interdisciplinares eficazes, exigindo esforço colaborativo entre educadores.

Palavras-chave: conhecimento profissional do professor, interdisciplinaridade, tecnologia, matemática, física.

Abstract: The study addresses the integration of disciplines, particularly Mathematics and Physics, in an interdisciplinary context with technology use. The objective is to investigate how the professional knowledge of two teachers is mobilized in the process and to identify the challenges in overcoming certain barriers that impact the implementation of interdisciplinary practices. The research employs a qualitative approach, utilizing a case study with two teachers who integrate technology into their practice. The methodology employed included classroom observations and interviews, with a particular focus on the application of technology and the promotion of interdisciplinary practices. The data analysis was descriptive and interpretive, categorizing knowledge in accordance with the APCK model. The results demonstrate that teachers' knowledge has a positive impact on students' learning, facilitating connections between disciplines. Furthermore, the findings indicate that overcoming institutional and formative barriers is essential for the effective implementation of interdisciplinary practices, requiring collaborative efforts among educators.

Keywords: teachers' knowledge, interdisciplinarity, technology, mathematics, physics.

Introdução

A integração de disciplinas, especialmente entre Matemática e Física, desenvolve competências como pensamento crítico, resolução de problemas e inovação (An, 2017; Rocha, 2019). A implementação da interdisciplinaridade enfrenta barreiras, principalmente na formação docente e integração de tecnologias (Vieira et al., 2023). Com a rápida adoção de tecnologias digitais, é fundamental preparar os professores para incorporar métodos interdisciplinares com o uso da tecnologia. A integração tecnológica não é apenas um desafio técnico, mas requer uma reconceptualização de como as disciplinas podem ser ensinadas de forma integrada (Rocha, 2019), utilizando tecnologia, como a calculadora gráfica (CG), para visualizar conceitos complexos. A colaboração entre professores de diferentes disciplinas é crucial para práticas interdisciplinares eficazes, mas é um dos maiores desafios no ensino secundário (Tonnetti & Lentillon-Kaestner, 2023). Hasni et al. (2015) reforçam que, apesar da consciência sobre a importância da interdisciplinaridade, a sua implementação permanece superficial.

O conhecimento profissional do professor é um desafio nesse processo (Rocha, 2019), especialmente na integração tecnológica (Koehler et al., 2013; Rocha, 2023a, 2023b). Mulder (2012) observa que são poucos os estudos que exploram os domínios do conhecimento mobilizados para a prática interdisciplinar docente no ensino secundário. Tonnetti e Lentillon-Kaestner (2023) destacam a escassez de investigações sobre a colaboração entre Matemática e Ciências (Wong & Dillon, 2019), com muitos estudos focando intervenções específicas. Este estudo, ao focar colaborações espontâneas numa escola secundária figura-se como incomum. Especificamente, pretendemos responder às seguintes questões: Q1) Como o conhecimento profissional do professor sobre práticas interdisciplinares impacta o processo de ensino-aprendizagem num contexto de integração de tecnologia? Q2) Como as principais barreiras enfrentadas pelos professores na implementação de abordagens interdisciplinares entre a Matemática, a Física, em contexto da integração de tecnologia, podem ser consideradas um desafio para promover a interdisciplinaridade?

Interdisciplinaridade uma questão de integração

Devido às múltiplas interpretações do termo “interdisciplinaridade”, é necessário clarificar o seu significado. Klein (2010) define-a como uma síntese de duas ou mais disciplinas, estabelecendo um novo nível de integração do conhecimento. Já Mansilla et al. (2000) veem-na como um processo que visa compreender problemas complexos através da combinação de múltiplas perspetivas disciplinares, que isoladamente seriam insuficientes. Hasni et al. (2015) associam o conceito à integração e McPhail (2017) confirma que juntar várias disciplinas é descrito por termos como interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e integração curricular.

A abordagem interdisciplinar, apesar de desafiadora, quebra a rotina e estimula todos os envolvidos no processo de ensino, estabelecendo melhores relações e um clima de confiança (Harris & de Bruin, 2018; McPhail, 2017). Colaborar com colegas de outras disciplinas promove o desenvolvimento profissional dos professores e o enriquecimento de conhecimentos em áreas que não lecionam (Harris & de Bruin, 2018; Ríordáin et al., 2016). A investigação indica que esta abordagem beneficia os alunos, promovendo maior envolvimento e aprendizagem mais significativa (Aguirre-Munõz et al., 2022; An, 2017).

Por outro lado, surgem desafios na implementação. A afiliação disciplinar forte pode levar professores a resistirem à abordagem interdisciplinar, devido ao fraco conhecimento de outras disciplinas (Ríordáin et al., 2016). Desenvolver sequências interdisciplinares é mais difícil e requer mais tempo e organização entre professores (Hasni et al., 2015; McPhail, 2017; Tonnetti & Lentillon-Kaestner, 2023). Além disso, há escasso apoio documental para orientar professores, sem experiência, neste tipo de articulação (Hasni et al., 2015).

Conhecimento interdisciplinar um caminho para o desenvolvimento da prática interdisciplinar

Na literatura, existem poucos estudos que oferecem um quadro teórico abrangente sobre abordagens interdisciplinares (e.g., An & Tillman, 2018; Rocha, 2019). Além disso, a maioria foca-se em professores em formação inicial, ignorando a prática de professores em serviço, com longa experiência no ensino secundário, tornando-se relevante explorar essa temática. A complexidade do ensino interdisciplinar, aliada ao uso de tecnologias e teorias contemporâneas de aprendizagem, exige uma nova mentalidade para integrar ciências exatas e tecnologia.

Na perspetiva interdisciplinar entre Matemática e Ciências, An (2017), baseado no modelo de PCK de Shulman (1986), propõe o conceito de IPCK - Interdisciplinary Pedagogical Content Knowledge, que representa o conhecimento pedagógico interdisciplinar na Matemática e Ciências. O IPCK resulta da interseção do conhecimento de conteúdo em ambas as áreas, associado ao Conhecimento Pedagógico, e reflete a capacidade do professor em representar conceitos de forma interdisciplinar, aplicar métodos e identificar conexões entre disciplinas para planejar atividades.

Rocha (2019), baseando-se no modelo TPACK de Mishra e Koehler (2006), apresenta o modelo APCK - Application and Pedagogical Content Knowledge, destacando a Matemática como linguagem integradora nas Ciências. A combinação do conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo fortalece o ensino moderno, onde a tecnologia é essencial. No APCK, o Conhecimento de Aplicação e Conteúdo (ACK) está ligado ao uso prático da Matemática em contextos interdisciplinares, permitindo uma aplicação flexível e integrada, exigindo que os docentes adotem uma atitude reflexiva e crítica (Rocha, 2019). A forma como os alunos aprendem (APK) e aplicam o conhecimento é impactada pelas aplicações matemáticas.

O uso de aplicações matemáticas promove um conhecimento baseado em contextos reais, incentivando abordagens colaborativas e discussão de diferentes métodos (Rocha, 2019), permitindo uma postura reflexiva dos professores (Coelho & Rocha, 2024). O modelo APCK facilita a integração com questões do quotidiano e o uso de ferramentas para resolução de problemas, promovendo aprendizagens significativas (Aguirre-Munõz et al., 2022; An, 2017; Pourdavood & Yan, 2021).

Metodologia

Tendo em conta a natureza do problema em estudo, e em consonância com as ideias defendidas por Yin (2003), a presente investigação adota uma abordagem qualitativa baseada em estudo de caso. Participaram no estudo duas professoras do ensino secundário, uma de Matemática (Professora M) e outra de Física (Professora F), ambas com ampla experiência na utilização de tecnologia em contexto de sala de aula, especialmente no uso da Calculadora Gráfica (CG). Um professor com uma longa trajetória no ensino e no uso da CG, bem como formação especializada no uso desta tecnologia, terá mais condições de integrar essa ferramenta de forma eficaz na sua prática pedagógica. Este aspeto é especialmente relevante, uma vez que, como apontado por autores como Drijvers et al. (2016), a experiência profissional e a formação contínua são fatores determinantes para uma integração bem-sucedida da tecnologia. De acordo com Yin (2003), duas das fontes de evidência mais comuns em estudos de caso são as observações diretas de eventos e as entrevistas com os participantes. O estudo seguiu uma abordagem longitudinal e observou dois professores ao longo de 30 aulas. Este método permitiu uma compreensão mais aprofundada de como os professores adaptam e incorporam a tecnologia na sua prática pedagógica. Os dados foram recolhidos por meio de observações das aulas e entrevistas, proporcionando uma visão multifacetada das experiências dos professores.

A análise de dados foi essencialmente descritiva e interpretativa tendo como base episódios onde a interdisciplinaridade entre a Física e a Matemática foi promovida. No processo da análise procedeu-se à categorização dos domínios de conhecimento do modelo APCK tendo em conta o conhecimento mobilizado pelas professoras no processo de articulação disciplinar com recurso à tecnologia (Tabela 1).

Tabela 1. Categorias de análise, relação com o modelo APCK (Rocha, 2019)

Conhecimento	Categoria
Pedagógico de conteúdo (**PCK**)	Conhecimento de como ensinar o conteúdo específico, tendo em consideração: características dos alunos, práticas eficazes de ensino e o currículo.
Aplicações (**AK**)	Conhecimento do uso da matemática em contextos do mundo real para resolver problemas práticos.
Pedagógico de aplicações (**APK**)	Conhecimento de como aplicar o conhecimento disciplinar e pedagógico em contextos do mundo real. Inclui conhecimento de como integrar as disciplinas de matemática e de física através de tarefas práticas.
Aplicações e conteúdo (**ACK**)	Conhecimento da interação entre o conhecimento disciplinar e o conhecimento de aplicações. Isso envolve entender como o uso de aplicações matemáticas pode afetar o conteúdo físico e vice-versa.
Pedagógico do Conteúdo e Aplicações (**APCK**)	Conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender e como, através duma abordagem integrativa de disciplinas.

Análise e discussão dos resultados

Nesta seção, são apresentados e discutidos os resultados da análise das práticas docentes, com base no modelo APCK proposto por Rocha (2019). O objetivo principal é compreender como as professoras M e F integram conhecimentos de Matemática e Física de forma interdisciplinar, promovendo aprendizagens significativas e interligadas entre essas áreas. A análise considera observações das aulas e entrevistas semiestruturadas, permitindo explorar as estratégias pedagógicas adotadas, o uso de tecnologias e a abordagem de conceitos-chave. Destaque é dado ao modo como cada professora mobiliza os seus conhecimentos e práticas interdisciplinares para aprofundar a compreensão dos alunos. Em seguida, são detalhados os principais aspetos observados para cada professora.

Professora M

Em linha de ação com a filosofia de pensamento “matemática para todos” defendido por Freudenthal (1968), a Professora M propõe, ao longo das aulas observadas, tarefas que têm por base a resolução de problemas em situações do quotidiano (Ferri & Mousoulides, 2017). Um processo complexo já que se verifica falta de documentos de referência e manuais para orientar os professores do ensino secundário (Hasni et al., 2015; Moss et al., 2019).

> Professora M: Sendo a minha formação inicial em Economia, é complicado procurar estabelecer pontes de contato com a Física e Química. Eu não sou da área, mas tenho gosto por estas coisas. Por outro lado, exige tempo (que não temos) para discutir com a colega que me apoia no processo. Vamos conversando entre as aulas e na sala de professores.

Por outro lado, a formação específica sobre o processo revela-se pouco eficaz mesmo quando os dois grupos disciplinares estão presentes:

> Professora M: Olha que até nas formações, não existe interdisciplinaridade, estamos os dois grupos a trabalhar na formação, mas depois temos o formador a enviar problemas para os professores de Física e Química e outros para Matemática, para trabalharem separadamente.

Verifica-se que a professora M recorre a diferentes momentos de trabalho para promover tarefas com carácter interdisciplinar, ora dando início a um tema ora no meio, quasi termino da análise dum conceito. A flexibilidade no uso de múltiplos métodos contribui para o estabelecimento de ligações significativas dentro e entre áreas temáticas (An &Tillman, 2018). Segue-se um dos exemplos de tarefa, proposta aos alunos, e que explora os conceitos matemáticos e a sua aplicabilidade em Física, promovendo a convergência entre as diferentes áreas do saber (An, 2017).

A queda da pedra

Suponhamos que deixamos cair uma pedra do cimo de uma torre.

A expressão $d(t)=5t^2$ relaciona a distância d (metros) que a pedra percorre com o tempo de queda t (segundos). A pedra demora 5 segundos a atingir o solo.

1) Representa graficamente a função no intervalo [0, 5].

2) Qual a velocidade média da pedra?

3) Representa novamente a função e a seguir traça a reta que passa pelos pontos (0, 0) e (5, 125).

4) Determina o declive da reta e compara com a taxa média de variação.

5) Qual é a maior? A velocidade média durante os primeiros dois segundos ou durante os dois últimos segundos?

Baseando-se no conceito de velocidade trabalhado em Física, a professora M procura utilizar este conceito do ponto de vista matemático e com isso a análise da aplicação do conceito de taxa média de variação e taxa de variação de uma função (ACK). É de referir que os conceitos são analisados em momentos distintos do ciclo de ensino, fruto das assimetrias do currículo entre a Física e a Matemática (Coelho & Rocha, 2022). Situação que a professora M destaca como um obstáculo no processo, quando questionada:

> Professora M: Ora toda a gente sabe calcular o declive da reta. Então o declive vai ser a diferença entre as imagens que não é mais do que a diferença entre duas distâncias percorridas, e a diferença entre os valores do tempo percorrido. Isto não é mais do que…
> Aluno: Mas isso é o que fazemos também na física! É a velocidade!

De seguida os alunos são desafiados a determinar a velocidade que a pedra tem no instante em que completa dois segundos de queda, ou seja, a velocidade instantânea nesse momento, com recurso à CG:

> Professora M: Ao calcular a velocidade média no intervalo [2; 2,1], verificam que dá…
>
> Alunos: 20,5.
>
> Professora M: Pois. Agora repitam o cálculo para intervalos de tempo menores. Quanto menor for a amplitude do intervalo, melhor será a aproximação. Já viram? O valor da velocidade média tende para 20. Ao número 20, chamamos derivada da função no ponto de abcissa x=2, ou a taxa de variação da função no ponto de abcissa x=2. E escreve-se f´(2)=20. Graficamente a derivada da função no ponto x=2 é o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa x=2, ou seja, a velocidade instantânea da pedra.

No processo de análise da tarefa, a professora M reforça a utilização da GC para que através das representações algébrica e gráfica os alunos percebam que a velocidade média ao tender para 20, está a indicar a taxa de variação da função nesse ponto ou seja a velocidade instantânea. Revela assim para além do ACK, fluência representacional de acordo com Rocha (2016).

Constatamos a mobilização integradora do APCK e com isso a mobilização de um conceito que integra as duas disciplinas, mas onde a Matemática assume o destaque.

Professora F

Sabendo que a Física é geralmente vista como altamente dependente da Matemática, sendo esta frequentemente considerada a "linguagem da Física", e o conhecimento matemático visto como um pré-requisito essencial para aprender Física (e.g. Hansson et al., 2021) destacamos alguns momentos observados nas aulas e entrevistas que corroboram estes estudos. Por outro lado, a Física assume-se como ciência onde é possível observar como os conceitos matemáticos são aplicados. Nesse sentido, a professora F considera que a articulação entre estas duas áreas é essencial para que os alunos consigam entender a relação entre ambas:

> Professora F: É importante que eles entendam que não haveria Física sem a Matemática. E por isso temos de insistir com eles. Precisamos de saber Matemática para perceber os conceitos de Física. Nesse sentido a interdisciplinaridade é fundamental.

Segue-se uma das tarefas observadas na aula da professora F, que tinha como objetivo analisar a relação entre a Energia cinética (Ec), a velocidade (v) de um corpo e a velocidade ao quadrado (v^2) através da expressão $E_c = m.v^2$.

Como varia a Energia cinética dum corpo?
Sabendo que a massa (m) de um corpo em movimento é de 10 kg, determina para cada velocidade dada a respetiva energia cinética.
Compara as relações Ec =f(v) e Ec=f(v^2), tendo em conta os dados da tabela.

Na entrevista que antecede a aula, a professora F indica a necessidade de trabalhar a relação $E_c = f(v)\ e\ \ E_c = f(v^2)$ para se analisarem as principais diferenças entre ambos os gráficos e como o pretende fazer. Explica também o porquê de recorrer à folha de cálculo como tecnologia a utilizar nessa abordagem:

> Professora F: Os miúdos quando chegam aqui vindos do 9.º ano, sentem dificuldade em aplicar esta simples função. Mecanizam-na, e eu preciso que eles percebam a relação entre as grandezas E_c e v. O raciocínio matemático necessário, assim como a noção do conceito físico de relação entre grandezas é complexo. Sem contar com esta linguagem tão específica. O trabalho algébrico é essencial, assim como a análise gráfica. Depois proponho sempre diferentes estratégias e recurso a diferentes tecnologias.
> Para compararem a relação entre as grandezas é necessário aprenderem a calcular a E_c no excel, é necessário inserir uma fórmula de cálculo. Eles não estão habituados a isso. Depois têm de analisar os dados e relacionar os mesmos através de gráficos. Este processo permite ao aluno visualizar ao mesmo tempo a tabela e os dois gráficos, comparar os mesmos e procurar identificar o que os distingue. É importante que eles saibam utilizar outro recurso para além da calculadora gráfica. Este recurso não é muito utilizado no secundário. Trabalhar no Excel é importante para eles na faculdade, por isso achei relevante começarem a trabalhar aqui.

De acordo com Nilsen et al. (2013) isto é interpretar a linguagem matemática formal e transformar a linguagem quotidiana em linguagem matemática formal, manipulando fórmulas e equações, assim como o uso e a alternância entre símbolos, gráficos, diagramas.

Ao analisar o desenvolvimento da tarefa, a professora F mobiliza o seu PCK considerando que pedagogicamente esta tecnologia e a forma como a mesma é aplicada ao conceito a trabalhar poderá ser benéfica para os seus alunos.

Por outro lado, mobiliza o seu ACK permitindo-lhe idealizar uma tarefa que articula o estudo e análise gráfica de funções afins e quadráticas com a análise necessária da relação entre as grandezas físicas E_c, v e v^2.

No processo de implementação da tarefa, a professora F ensina os seus alunos a introduzirem na folha de cálculo a fórmula de cálculo $E_c = m.v^2$ que relaciona a massa (m) com a velocidade (v), isso implica determinar a velocidade elevada ao quadrado e posterior determinação de E*c*. Com os respetivos dados da tabela são obtidos os gráficos que relacionam $Ec = f(v)$ e $Ec = f(v^2)$. Verificando-se alguma complexidade na prática:

> Aluno: Professora, nesta coluna tenho de elevar ao quadrado a velocidade? Como se faz isso aqui no excel?
>
> Professora F: Aqui temos de introduzir essa informação na célula. Olha como é prático, nesta célula quero elevar ao quadrado o valor desta velocidade, para isso indico que este valor que está na célula D23 (cruzamento da coluna D com a linha 23) deve estar elevado, chapeuzinho ^ a dois e aqui escrevo =D23^2. Tenho de colocar o igual antes do que pretendo calcular. Agora enter. Tenho o primeiro valor calculado agora vou correr esta informação para todas as velocidades ao longo da coluna.

Durante a observação da aula a professora F recorre às representações tabular e gráfica da folha de cálculo para analisar as relações $E_c = f(v)$ e $E_c = f(v^2)$ verificando com os alunos que existem diferenças entre os gráficos:

Professora F: Eu disse ontem que a Ec era proporcional à v^2, esta tabela que aqui têm está otimizada para ao colocar as velocidades, na tabela eu consiga analisar o valor do v^2 e ao mesmo tempo o valor da E_c. Ou seja, conseguimos ao mesmo tempo projetar o gráfico da $E_c=f(v)$ onde podemos ver o ramo da parábola e no outro a $E_c=f(v^2)$. Ora o que vemos, quando tenho o gráfico $E_c=f(v)$ eu tenho um ramo da parábola e quando olho para o gráfico $E_c=f(v^2)$ temos…

Aluno: Uma reta

Professora F: Ora a fórmula diz que a E_c é proporcional à massa e proporcional à v^2. Pergunta para um milhão, o que será o declive desta reta?

Aluno: É a diferença…

Professora F: Vamos fazer aqui o paralelismo…quando eu tenho uma reta como aquela que ali está eu tenho a E_c nas ordenadas e aqui tenho v^2… reparem se aqui estivessem os matemáticos diziam que a reta que aqui está é expressa pela equação reduzida da reta $y=mx+b$. Reparem que aqui este m é o declive, a inclinação da reta, quanto maior for m mais inclinada é a reta. Concordam? Ora o b é onde cruza o eixo das ordenadas. Por isso chamamos ordenada na origem. Ora aqui o b é zero, posso por isso dizer que esta reta é $y=mx$.

Agora reparem na fórmula da E_c… qual será o declive? Cuidado! O que será este m para nós? Estes *m´s* não são o mesmo, para os matemáticos m representa o declive e para nós m massa. Cuidado! Então o declive desta minha reta é metade da massa. Ponham isso aí no caderno e não se esqueçam quando eu vos pedir o significado físico do declive, não digam inclinação do gráfico. Neste caso representa metade do valor da massa m.

Nesta última parte do excerto da aula, a professora F procura fazer o paralelismo entre a aplicação matemática a utilizar com o conceito e a relação física em questão. Há uma clara preocupação para que os alunos percebam como podem aplicar os conceitos de função afim na Física. Um processo para o qual recorreu à representação gráfica para depois avançar para a representação algébrica revelando assim fluência representacional (Zbiek et al., 2007). A tecnologia adotada, assim como a fluência entre representações para analisar a relação entre as duas grandezas físicas distinguindo uma função afim de uma função quadrática, revela que a professora mobiliza de forma integrada o seu conhecimento (APCK).

Conclusões

Tendo em contas as questões de investigação verificamos que:

Questão 1: Como o conhecimento profissional do professor sobre práticas interdisciplinares impacta o processo de ensino-aprendizagem num contexto de integração de tecnologia?

O conhecimento profissional do professor em práticas interdisciplinares tem um impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem, especialmente com a integração de tecnologias. Professores experientes conseguem criar conexões significativas entre disciplinas, facilitando a compreensão dos alunos (Rocha, 2019; 2023). Por exemplo, ao aplicar conceitos de Física com a Matemática, como a análise da velocidade média de uma pedra em queda, a professora M contextualiza a situação a um problema real, uma aplicação física para ensinar o conceito matemático (Ferri & Mousoulides, 2017).

A flexibilidade no uso de múltiplos métodos contribui para conexões entre áreas temáticas, um aspeto destacado por An e Tillman (2018) e Frykholm e Glasson (2005). Ambas as professoras recorrem a diferentes tecnologias A fluência representacional, evidenciada pela capacidade de usar diferentes representações algébricas e gráficas através da CG, é crucial para a compreensão dos alunos sobre a derivada e a taxa de variação (Molenje & Doerr, 2006). Modelos como o APCK (Rocha, 2019) mostram que a integração do APK e ACK pode facilitar a prática interdisciplinar eficaz.

Questão 2: Como as principais barreiras enfrentadas pelos professores na implementação de abordagens interdisciplinares entre a Matemática e a Física, em contexto da integração de tecnologia, podem ser consideradas um desafio para promover a interdisciplinaridade?

As principais barreiras à implementação de abordagens interdisciplinares entre Matemática e Física, no contexto de integração de tecnologia, incluem questões de afiliação disciplinar, suporte institucional limitado e lacunas formativas, dificultando a interdisciplinaridade.

Primeiramente, a forte afiliação disciplinar gera resistência dos professores à interdisciplinaridade, devido ao conhecimento limitado noutras áreas (Ríordáin et al., 2016; Frykholm & Glasson, 2005). A professora M, com formação base em Economia, reconhece o desafio em desenvolver atividades colaborativas com Física, mesmo quando participa de formações que se limitam a atividades segmentadas. Para ultrapassar esse obstáculo, ela conta com o apoio ocasional de uma colega de Física com quem trabalha de forma colaborativa. Outro desafio é a falta de tempo e de material suporte para planeamento de tarefas interdisciplinares. De acordo com a professora M a colaboração interdisciplinar é frequentemente limitada a trocas informais devido ao tempo que disponibilizam para a sua prática. Tal como referido nos estudos de Hasni et al. (2015) e McPhail (2017).

A tecnologia também representa um desafio, pois requer conhecimento técnico e pedagógico. A professora F, por exemplo, usa o Excel para explicar conceitos de energia cinética e velocidade, facilitando a visualização de relações entre grandezas físicas e conceitos matemáticos. O desalinhamento curricular entre Matemática e Física constitui outro obstáculo, especialmente quando conceitos são abordados em anos diferentes, dificultando a integração de conteúdos entre disciplinas (Drijvers et al., 2016; Coelho & Rocha, 2022). Apesar dessas barreiras, o estudo identificou práticas bem-sucedidas: a professora M conseguiu relacionar conceitos de velocidade entre Matemática e Física, e a professora F promoveu a compreensão dos alunos ao usar representações tabulares e gráficas com tecnologias pouco exploradas em Física no ensino secundário.

Estes exemplos evidenciam que a superação das barreiras é possível, mas exige um esforço colaborativo e contínuo para superar esses obstáculos e promover práticas interdisciplinares eficazes.

Referências

Aguirre-Muñoz, Z., Dang, B., & Loria Garro, E. S. (2022). Impact of integrated science and mathematics instruction on middle school science and mathematics achievement. In M. Kalogiannakis & M. Ampartzaki (Eds.), *Advances in research in STEM education* (pp.1-19). IntechOpen. https://doi.org/10.5772/intechopen.104082

An, S. (2017). Integrating mathematics and science: An effective pedagogical approach? *School Science and Mathematics, 117*(5), 193-194. https://doi.org/10.1111/ssm.12224

An, S. A., & Tillman, D. A. (2018). Preservice teachers' pedagogical use of "gerrymandering" to integrate social studies and mathematics. *Journal of Mathematics Education, 11*(3), 33–53. https://doi.org/10.26711/007577152790031

Bozkurt, G., & Uygan, C. (2020). Lesson hiccups during the development of teaching schemes: A novice technology-using mathematics teacher's professional instrumental genesis of dynamic geometry. *ZDM, 52*, 1349-1363. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01184-4

Coelho, T., & Rocha, H. (2022). A interdisciplinaridade em contexto de integração da tecnologia: O conhecimento profissional de professores de matemática e de físico-química. In A. S. Rodrigues, A. Domingos, A. P. Canavarro, H. Martins, L. Serrazina & P. C. Teixeira (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática - EIEM 2022: Desenvolvimento curricular* (pp.346-349). SPIEM - Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Coelho, T., & H. Rocha. (2024). Interdisciplinary professional knowledge: Divergences and convergences of two models – Conhecimento profissional interdisciplinar: Divergências e convergências de dois modelos. *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação, 71*, 316-328. https://doi.org/10.17013/risti.e71.316-328

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4_1

Ferri, R., & Mousoulides, N. (2017). Mathematical modelling as a prototype for interdisciplinary mathematics education? - Theoretical reflections. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of CERME 10* (pp. 900-907). ERME.

Freudenthal, H. (1968) Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1* (1), 3-8.

Frykholm, J., & Glassom, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: Pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18047.x

Hansson, L., Hansson, Ö, Juter, K., & Redfors, A. (2021). Curriculum emphases, mathematics and teaching practices: Swedish upper-secondary physics teacher´s views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*(3), 499–515. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10078-6

Harris, A., & de Bruin, L. (2018). An international study of creative pedagogies in practice in secondary schools: Toward a creative ecology. *Journal of Curriculum and Pedagogy, 15*(2), 215-235. https://doi.org/10.1080/15505170.2018.1457999

Hasni, A., Lenoir, Y., & Froelich, A. (2015). Mandated interdisciplinarity in secondary school: The case of science, technology, and mathematics teachers in Quebec. *Issues in Interdisciplinary Studies, 33*, 144-180.

Klein, J. T. (2010). A taxonomy of interdisciplinarity. In R. Frodeman, J. T. Klein, & C. Mitcham (Eds.), *The Oxford handbook of interdisciplinarity* (pp. 15-30). Oxford University Press.

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)? *Journal of Education, 193*(3), 13-19. https://doi.org/10.1177/002205741319300303

Mansilla, V., Miller, W. C., & Gardner, H. (2000). On disciplinary lenses and inter-disciplinary work. In S. Wineburg & P. Grossman (Eds.), *Inter-disciplinary curriculum: Challenges to implementation* (pp. 17-38). Teachers College Press.

McPhail, G. (2017). Curriculum integration in the senior secondary school: A case study in a national assessment context. *Journal of Curriculum Studies*, *50*(1), 56–76. https://doi.org/10.1080/00220272.2017.1386234

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proc. of the 28th PME-NA* (pp. 884-887). PME.

Moss, J., Godinho, S., & Chao, E. (2019). Enacting the Australian curriculum: Primary and secondary teachers' approaches to integrating the curriculum. *Australian Journal of Teacher Education*, *44*(3), 24-41. https://doi.org/10.14221/ajte.2018v44n3.2

Mulder, M. (2012) Interdisciplinarity and education: Towards principles of pedagogical practice, *The Journal of Agricultural Education and Extension*, *18*(5), 437-442. https://doi.org/10.1080/1389224X.2012.710467

Nilsen, T., Angell, C., & Grønmo, L. S. (2013). Mathematical competencies and the role of mathematics in physics education: A trend analysis of TIMSS advanced 1995 and 2008. *Acta Didactica Norge*, *7*(1), 1-21. https://doi.org/10.5617/adno.1113

Pourdavood, R. G., & Yan, M. (2021). Preparing pre-service and in-service teachers to teach mathematics and science using an integrated approach: The role of a six-week summer course. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, *20*(1), 64-85. https://doi.org/10.26803/ijlter.20.1.4

Ríordáin, M. N., Johnston, J., & Walshe, G. (2016). Making mathematics and science integration happen: Key aspects of practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(2), 233-255. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1078001

Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and its Applications*, *35*(2), 53-64. https://doi.org/10.1093/teamat/hrw005

Rocha, H. (2019). Interdisciplinary tasks: Pre-service teachers' choices and approaches. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A.S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado & M. H. Martinho (Eds.), *Proceedings of the ATEE Winter Conference "Science and mathematics education in the 21st century"* (pp. 82-93). ATEE and CIEd.

Rocha, H. (2023). The impact of teachers' knowledge on the connection between technology supported exploration and mathematical proof. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(4), 635-649. http://dx.doi.org/10.30935/scimath/13285

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Tonnetti, B., & Lentillon-Kaestner, V. (2023). Teaching interdisciplinarity in secondary school: A systematic review. *Cogent Education*, *10*(1). https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2216038

Vieira, R.M., Tenreiro-Vieira, C.C., Bem-Haja, P., & Lucas, M. (2023). STEM teachers' digital competence: Different subjects, different proficiencies. *Education Sciences*, *13*(11), 1133. https://doi.org/10.3390/educsci13111133

Weinberg, A., & Meeking, L. (2017). Toward meaningful interdisciplinary education: High school teachers' views of mathematics and science integration. *School Science and Mathematics*, *117*(5), 204-213. https://doi.org/10.1111/ssm.12224

Wong, V., & Dillon, J. (2019). Crossing the boundaries: Collaborations between mathematics and science departments in English secondary (high) schools. *Research in Science &*

Technological Education, 38(4), 396-416. https://doi.org/10.1080/02635143.2019.1636024

Yin, R.K. (2003). *Case study research: Design and methods. (4th edition).* Sage Publications.

Zbiek, R., Heid, M. K., Blume, G., & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). NCTM, IAP.

Posters

DESENVOLVIMENTO DA COMPREENSÃO DA FÁTIMA SOBRE O QUE É O PENSAMENTO COMPUTACIONAL E COMO ENSINÁ-LO: UM ESTUDO DE CASO

THE DEVELOPMENT OF FATIMA'S UNDERSTANDING OF WHAT COMPUTATIONAL THINKING IS AND HOW TO TEACH IT: A CASE STUDY

Ana Lúcia Miguens

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

amiguens@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

mq@campus.ul.pt

Resumo: Por meio de um design de observação participante, este caso de estudo explora como se decorreu o desenvolvimento de uma professora do 1.º ciclo sobre o que é o Pensamento Computacional em Matemática e como ensiná-lo. Esta professora participou num estudo de aula, onde os professores e a investigadora planearam e conduziram uma trajetória de aprendizagem para desenvolver o Pensamento Computacional dos alunos em Matemática. Os resultados evidenciam um desconhecimento inicial da professora sobre as práticas de Pensamento Computacional. A sua participação no estudo de aula, nomeadamente a discussão e análise de tarefas, o ensino das aulas planeadas e a reflexão sobre a aprendizagem dos alunos contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento da professora sobre como ensinar esta capacidade.

Palavras-chave: pensamento computacional, conhecimento do professor, desenvolvimento profissional, 1.º ciclo, matemática.

Abstract: Through a participant observation design, this case study explores how a primary school teacher developed her understanding of Computational Thinking in Mathematics and how to teach it. This teacher participated in a lesson study, where the teachers and the researcher planned and conducted a learning trajectory to develop students' Computational Thinking in mathematics. The results show an initial lack of knowledge of Computational Thinking practices. Her participation in the lesson study, namely the discussion and analysis of tasks, the teaching of the planned lessons and the reflection on the students' learning contributed to the development of the teacher's knowledge of how to teach this skill.

Keywords: computational thinking, teacher knowledge, professional development, elementary school teachers, mathematics.

Introdução

O atual programa de Matemática (Canavarro, et al., 2021) tem suscitado desafios aos professores, tanto ao nível das suas práticas, como ao nível da nova capacidade matemática transversal nele presente, o caso do Pensamento Computacional (PC). Nesse contexto, o estudo de aula (Ponte et al., 2022) pode ser visto como uma prática colaborativa que pode apoiar o desenvolvimento profissional dos professores que visa melhorar o ensino e a aprendizagem através da partilha de reflexões.

Pensamento computacional em Matemática

Em 2021, foi promulgado um novo currículo de Matemática, onde surge o PC. Aqui, são elencadas um conjunto de "práticas", nomeadamente, a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a algoritmia e a depuração (Canavarro et al., 2021), que são consideradas imprescindíveis na atividade matemática.

Embora o PC já esteja presente no currículo português, a promoção do PC nas salas de aula continua a deparar-se com alguns desafios. O seu carácter emergente pressupõe nos professores um desconhecimento sobre o que o PC implica e sobre como o introduzir no seu ensino. Assim, a integração do PC no ensino da Matemática exige uma formação de professores que incida no desenvolvimento do seu entendimento sobre o que é o PC e como ensiná-lo (Bocconi et al., 2022).

Desenvolvimento profissional

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional focado na colaboração, em que os professores estudam tópicos e recursos pedagógicos; planificam uma aula ou trajetória de aprendizagem que incida particularmente na aprendizagem dos alunos; lecionam e observam essa aula; refletem sobre a aprendizagem dos alunos, e discutem sobre possíveis soluções para os desafios observados e possíveis reformulações ao plano de aula. O conjunto dessas atividades proporciona uma oportunidade para os professores repensarem o seu entendimento sobre o ensino e refletirem na e sobre a prática (Stigler & Hiebert, 2016). Esse modelo surge, muitas vezes, associado à introdução de novas orientações curriculares, podendo contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores (Ponte et al., 2022) na área do PC, uma nova orientação curricular da Matemática.

Metodologia

Foi seguida uma abordagem qualitativa e interpretativa para recolha e tratamento dos dados. A metodologia de estudo de caso (Stake, 2012) foi adotada, pois permite uma análise mais completa da construção do conhecimento do professor para o ensino do PC na Matemática, que podem ser estudadas e utilizadas para fornecer uma visão mais abrangente e completa sobre o fenómeno a estudar.

Para este estudo foi selecionada a professora, Fátima, que mais interagiu ao longo do estudo de aula. Este envolveu quatro professores e a investigadora/facilitadora. O grupo reuniu, semanalmente, durante 1 hora, ao longo de 6 meses. Começou-se por estudar o PC no currículo de Matemática e criou-se uma trajetória de aprendizagem para o 2.º ano de escolaridade, que os professores lecionaram nas respetivas turmas, e sobre a qual refletiram, melhorando-a. Posteriormente, foi pedido que Fátima planificasse individualmente uma aula, que a investigadora observou e sobre a qual refletiram antes e após esta ser lecionada.

Os dados foram recolhidos através de entrevistas semiestruturadas, recolha documental e observação participante, por meio de gravações áudio. Posteriormente, as transcrições das sessões foram analisadas por meio de uma análise de conteúdo indutiva e dedutiva, considerando as dimensões do conhecimento de Ponte (2012).

O modelo de Ponte (2012) foi adaptado para analisar o desenvolvimento do conhecimento dos professores, sendo consideradas quatro dimensões: conhecimento da Matemática para o ensino; conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem; conhecimento do currículo; e conhecimento da prática letiva. As três primeiras dimensões estão sempre e simultaneamente presentes no conhecimento da prática letiva, uma vez que este conhecimento é informado pelas restantes dimensões.

Resultados e Conclusões

É notável uma progressão ao nível da compreensão de Fátima sobre o que é o PC. O seu entendimento das práticas de PC tornou-se mais consolidado, demonstrando entender e distinguir as práticas de PC, com a exceção da prática da abstração. No seu diálogo e descrição do trabalho dos alunos, Fátima exemplificou a prática da abstração definindo-a com aspetos comuns aos da prática de identificação de padrões.

No que respeita ao desenvolvimento da sua compreensão do ensino do PC em Matemática, Fátima demonstrou mudanças na seleção das tarefas a propor aos alunos. Inicialmente, optou pela seleção de exercícios e por meio da análise das práticas de PC, passou a selecionar problemas e tarefas exploratórias.

A aula que Fátima planificou após a sua participação no estudo de aula consistiu numa tarefa exploratória, em que a professora deu primazia ao trabalho de grupo e à troca de ideias entre os alunos e entre grupos, com foco nas práticas de identificação de padrões e algoritmia.

Referências

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagienė, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V., & Stupurienė, G. (2022). *Reviewing computational thinking in compulsory education: State of play and practices from computing education*. In A. Inamorato dos Santos, R. Cachia, N. Giannoutsou, & Y. Punie, (Eds.; 1st ed.). *Publications Office of the European Union*. https://doi.org/10.2760/126955

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico: - 2.º ano*. Ministério da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_2.o_ano.pdf

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2022). Teachers' learning in lesson study: Insights provided by a modified version of the interconnected model of teacher professional growth. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(2), 373–386. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01367-1

Stake, R. E. (2012). *A arte da investigação com estudos de caso*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(4), 581–587. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7

MODELO GLOBAL DO CONHECIMENTO: UMA VERSÃO PRELIMINAR
GLOBAL KNOWLEDGE MODEL: A PRELIMINARY VERSION

Helena Rocha

CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal

hcr@fct.unl.pt

Resumo: Este estudo tem como objetivo analisar as semelhanças e diferenças entre modelos de conhecimento centrados na tecnologia, propondo, a partir deles, o *Modelo Global*. Esse modelo não pretende ser uma nova conceptualização, mas antes um contributo para a conexão e integração entre os diferentes quadros conceptuais existentes.

Palavras-chave: conhecimento profissional, modelo de conhecimento, tecnologia, *Modelo Global*.

Abstract: This study intends to propose the *Global Model*, inspired by a reflection about the similarities and differences between knowledge models focused on technology. The *Global Model* is not a new conceptualization, but rather a contribution towards the integration of different conceptual frameworks.

Keywords: teachers' knowledge, knowledge model, technology, *Global Model*.

Introdução

O contributo que a tecnologia pode trazer à aprendizagem matemática, promovendo uma Matemática para todos no século XXI, é amplamente reconhecido (Tabach & Trgalová, 2019). Ainda assim, alcançar plenamente esse potencial tem-se revelado particularmente complexo. Os professores desempenham obviamente um papel crucial na integração da tecnologia e o seu conhecimento profissional é uma das principais influências nesse processo (Clark-Wilson et al., 2020).

A contribuição de Shulman (1987) e do seu conceito de PCK – *Pedagogical Content Knowledge* – é um marco na investigação sobre o conhecimento dos professores. Desde então, vários investigadores ampliaram o conceito de PCK (por exemplo, o MKT – *Mathematical Knowledge for Teaching*, proposto por Ball et al., 2008), desenvolvendo inclusivamente novas concetualizações (como o *Knowledge Quartet*, elaborado por Rowland et al., 2005). A inclusão da tecnologia suscitou novas questões e impulsionou a criação de modelos do conhecimento dos professores.

Esses modelos, focados na integração da tecnologia, incluem o TPACK – *Technological Pedagogical Content Knowledge*, de Misha e Koehler (2006), que se inspira no PCK; o PTK – *Pedagogical Technology Knowledge*, proposto por Thomas e Hong (2013), que visa integrar num modelo do conhecimento elementos relativos à génese instrumental (Rabardel, 1995); e o KTMT – *Knowledge for Teaching Mathematics with Technology*, desenvolvido por Rocha (2020), que procura articular a investigação sobre conhecimento profissional com os resultados de estudos sobre a integração da tecnologia. Embora estes modelos sejam frequentemente referidos como modelos de conhecimento, alguns deles abrangem mais do que apenas o conhecimento do professor. O PTK, por exemplo, incorpora as orientações pessoais dos professores, enquanto o KTMT considera, de forma abrangente, todas as influências sobre os docentes, tanto as que vêm dos próprios professores quanto as que são determinadas pelo contexto em que atuam.

Este trabalho tem como objetivo analisar as semelhanças e diferenças entre os modelos de conhecimento focados na integração da tecnologia. A partir dessa análise, pretendemos propor um modelo global. Este *Modelo Global* não consiste num novo modelo; em vez disso, é uma integração dos modelos já existentes, reunindo num modelo os diferentes domínios de conhecimento presentes nos modelos atuais.

Método e resultados

Em termos metodológicos, inspiramo-nos em Jablonka et al. (2018) e tomamos como base uma revisão da literatura (Rocha, 2023) para identificar os modelos existentes e a interpretação atribuída a cada domínio de conhecimento. Consideramos, então, todos os domínios de conhecimento destes modelos, o respetivo entendimento e a articulação estabelecida entre estes, para conceber o *Modelo Global*.

Na representação do *Modelo Global* (figura 1), usamos diferentes cores para indicar a articulação entre os domínios de conhecimento de cada modelo considerado – TPACK, PTK e KTMT – e utilizamos sobreposições parciais entre os domínios dos três modelos sempre que identificamos semelhanças entre os domínios de conhecimento representados.

Os resultados obtidos evidenciam algumas semelhanças, especialmente no que se refere ao conhecimento matemático e pedagógico, com um destaque importante para o PCK, mas mostram também diferenças. Algumas destas respeitam à nomenclatura dos domínios (como *conhecimento matemático* versus *conhecimento do conteúdo matemático*), mas, sobretudo, ao entendimento dos domínios (como PCK e MKT), aos domínios incluídos (como *currículo* e *contexto*) e à forma como o desenvolvimento do conhecimento é concebido.

Conclusão

É essencial agora aprimorar o modelo, aplicando-o na análise do conhecimento profissional dos professores e analisando se o *Modelo Global* pode fornecer novas perspetivas para a compreensão do conhecimento dos professores e para a promoção do seu desenvolvimento profissional.

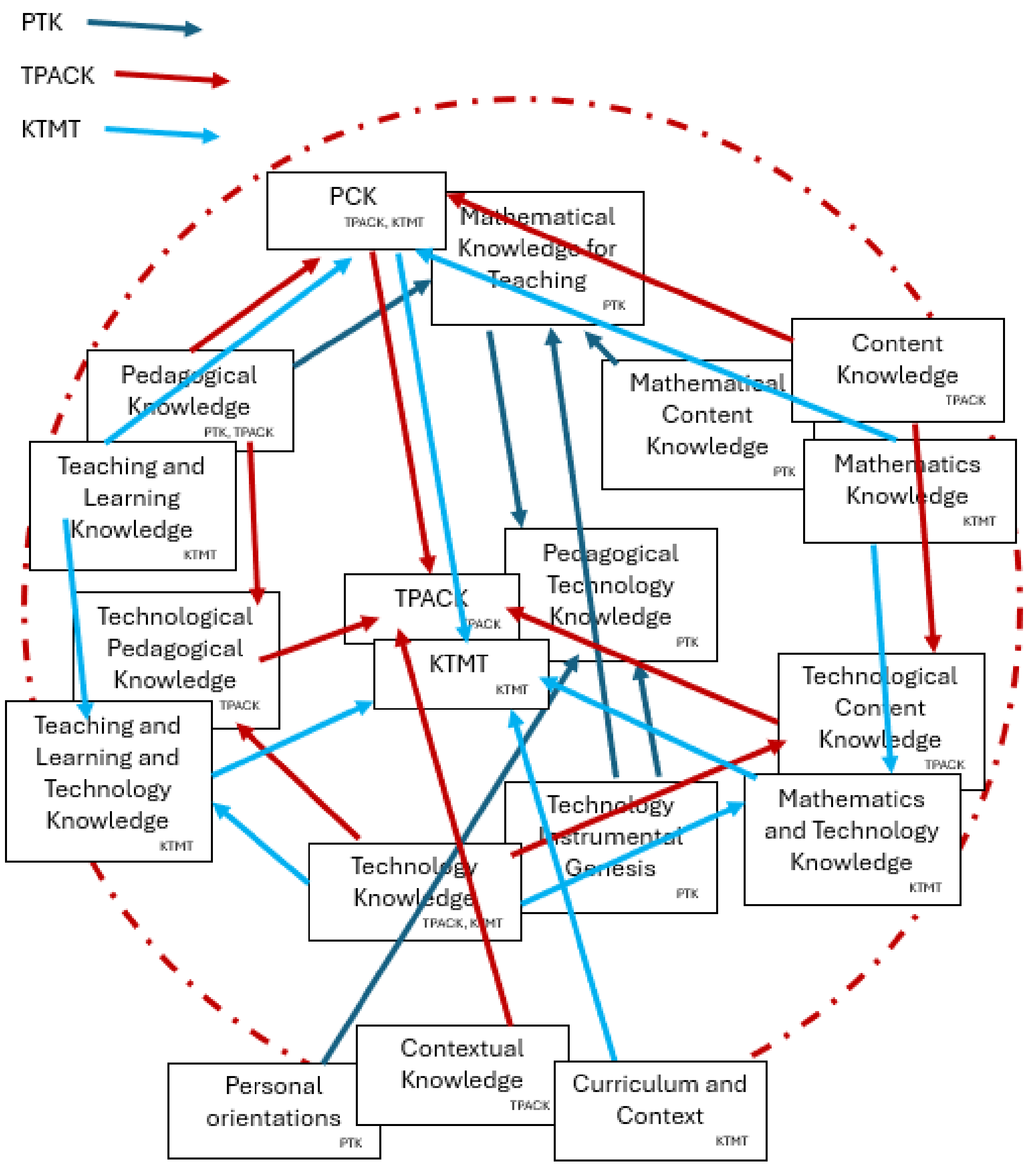


Figura 1. Modelo Global.

Agradecimentos

Este trabalho é apoiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., que financiou o projeto TecTeachers (https://doi.org/10.54499/2022.03892.PTDC).

Referências

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM – Mathematics Education*, *52*(7), 1223-1242. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01196-0

Jablonka E., Andrews P., Clarke D., & Xenofontos C. (2018). Comparative studies in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven

(Eds.), *Developing research in mathematics education* (pp. 223-238). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315113562

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM – Mathematics Education, 52*(7), 1381-1396. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01195-1

Rocha, H. (2023). Models on teachers' knowledge to teach with digital technology: A systematic review. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of CERME13*. ERME.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 255-281.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Tabach, M., & Trgalová, J. (2019). The knowledge and skills that mathematics teachers need for ICT integration: The issue of standards. In G. Aldon & J. Trgalová (Eds.), *Technology in mathematics teaching* (pp. 183-203). Springer.

Thomas, M., & Hong, Y. (2013). Teacher integration of technology into mathematics learning. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 20*, 69-84.

sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática