

Atas Encontro de Investigação em Educação Matemática

**EIEM 2023
Resolução de problemas**



sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática
EIEM 2023: Resolução de Problemas

Proceedings of the Conference on Research in Mathematics
Education

EIEM 2023: Problem Solving

Editores / Editors:

Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora, Portugal
Isabel Cabrita, Universidade de Aveiro, Portugal
Neusa Branco, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal
Rosa Ferreira, Universidade do Porto, Portugal
Teresa Neto, Universidade de Aveiro, Portugal

ISSN: 2182-0023

Local e datas / Venue and dates:

Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal
18-19 de novembro de 2023

University of Aveiro, Aveiro, Portugal
November 18-19, 2023

Editora / Publisher:

SPIEM



sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

Comissão Científica / Scientific Committee:

Alexandra Gomes, Instituto de Educação, Universidade do Minho, Portugal
Alicia Castañeda, Universidad de La Laguna, Espanha
Ana Caballero Carrasco, Universidad de Extremadura, Facultad de Educación y Psicología, Espanha
Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora, Portugal
António Borralho, Universidade de Évora, Portugal
Hélia Jacinto, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
Isabel Cabrita, Universidade de Aveiro, Portugal
João Pedro da Ponte, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal
Margarida Rodrigues, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal
María Teresa González Astudillo, Universidad de Salamanca, Espanha
Miguel R. Wilhelmi, Universidade de Navarra, Espanha
Nélia Amado, Universidade do Algarve, Portugal
Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém, Portugal
Peter Liljedahl, Simon Fraser University, Canadá
Rosa Antónia Ferreira, Universidade do Porto, Portugal
Teresa B. Neto, Universidade de Aveiro, Portugal

Corpo de Revisores / Reviewers:

Aitzol Lasa, Alessandro Ribeiro, Alexandra Gomes, Alexandra Rodrigues, Alicia Bruno, Ana Barbosa, Ana Caballero-Carrasco, Ana Paula Canavarro, Andrea de la Fuente Silva, António Guerreiro, Belén Palop, Carla Santos, Catarina Delgado, Célia Mestre, Ceneida Fernández, Clara Jiménez, Cristina Loureiro, Edelmira Badillo, Elisabete Cunha, Ema Mamede, Fátima Mendes, Fernando Calle Alonso, Fernando Martins, Floriano Viseu, Helena Martinho, Helena Rocha, Hélia Jacinto, Javier Diez, João Pedro da Ponte, José Luis Torres Manano Rama Carvalho, Juan Santaengracia, Lina Brunheira, Letícia Martins, Lina Fonseca, Lina Melo-Niño, Linda Cardoso, Luis Manuel Soto Ardila, Luis Maya-Jaramillo, Lurdes Serrazina, Manuel Vara Pires, Margarida Pinheiro, Margarida Rodrigues, María Teresa González Astudillo, Marisa Quaresma, Marta Teixeira, Miguel Wilhelmi, Myriam Codes, Mónica Patrício, Nélia Amado, Nelson Mestrinho, Neusa Branco, Pablo Giadas, Paula Gomes, Paulo Afonso, Rosa Antónia Ferreira, Vanda Santos.

Apoios / Sponsors



Fundação
para a Ciência
e a Tecnologia



dep
universidade de aveiro
departamento de educação e psicologia



centro de investigação
Didática e Tecnologia
na Formação de Formadores

Índice

TEMA DO ENCONTRO	3
Resolução de problemas.....	4
SESSÕES PLENÁRIAS	8
Painel Plenário.....	9
Resolução de problemas: Investigação, currículo e desenvolvimento curricular na educação matemática	10
Conferências plenárias.....	11
Resolução de problemas de matemática com tecnologias: da competição matemática à sala de aula	12
Building Thinking Classrooms: A Summary of 15 Years of Research.....	30
GRUPO DE DISCUSSÃO 1	40
A resolução de problemas e o ensino e a aprendizagem da matemática	41
Comunicações.....	48
Dificuldades na resolução de problemas e na comunicação escrita em matemática: Um estudo com alunos do 11.º ano	49
As conexões matemáticas na resolução de problemas	64
Grandeza área: Relação entre a medida da área de uma figura com a da unidade de medida utilizada.....	79
Género y modelización: Análisis preliminar de un problema aritmético.....	95
Experiencia docente dentro del tema estadístico utilizando elementos financeiros.....	106
Investigações estatísticas com várias etapas em sala de aula: Que desafios para os professores?.....	116
Posters.....	130
Resolução de problemas matemáticos na construção de pontes de esparguete numa escola de ensino secundário	131
A resolução de problemas por alunos do 1.º ano de escolaridade.....	135
Creación de problemas como evaluación inicial en educación primaria	139
GRUPO DE DISCUSSÃO 2	143
A resolução de problemas e a tecnologia para uma educação 4.0 transformadora	144
Comunicações.....	150
Fortalecendo a resolução de problemas com HINTS: a abordagem das perguntas intermédias	151
¿Cuántos años tiene la ballena jorobada?	162

Posters.....	183
Diseño de una formación sobre el pensamiento computacional con un enfoque multidimensional.....	184
Literacia estatística de alunos do 7.º ano em contexto de pandemia COVID-19	189
Fluência representacional: A Matemática na resolução de problemas de Física	194
GRUPO DE DISCUSSÃO 3	198
A resolução de problemas e formação de professores e educadores	199
Comunicações.....	205
Formação de professores de matemática e a resolução de problemas em tarefas de aprendizagem profissional.....	206
La resolución de un problema de probabilidad como un medio para establecer la identidad matemática de docentes.....	220
Seleção, adaptação e reflexão sobre uma tarefa de proporcionalidade direta num estudo de aula: o passeio de bicicleta	231
Promover o raciocínio matemático dos alunos através de problemas: aprendizagens de uma futura professora durante um estudo de aula.....	244
Posters.....	258
Formulação de problemas na formação inicial de professores.....	259
Do planeamento à reflexão: O trabalho dos futuros professores numa tarefa sobre pirâmides	264
Seleção e adaptação de tarefas de resolução de problemas para a promoção do pensamento computacional	268
Ações de um futuro professor na resolução de tarefas num estudo de aula	272
Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação: Perspetivas dos professores sobre as estratégias pedagógicas para uma aprendizagem significativa da matemática	277
Cómo se forman los formadores de profesores de matemáticas? La situación española	280

TEMA DO ENCONTRO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROBLEM SOLVING

Teresa Neto

Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro, Portugal

teresaneto@ua.pt

Isabel Cabrita

Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro, Portugal

icabrita@ua.pt

Rosa Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, Portugal

rferreir@fc.up.pt

Neusa Branco

Escola Superior de Educação de Santarém, Portugal

neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

O tema Resolução de Problemas é o foco do Encontro de Investigação em Educação Matemática - EIEM 2023, considerando a sua inquestionável relevância ao longo dos tempos (Associação de Professores de Matemática [APM], 1988; Cai & Lester, 2010; Calabrese et al., 2022; Liljedahl & Cai, 2021; Liljedahl et al., 2016; NCTM, 1991, 2007, 2017). Por isso, para além de constituir uma das capacidades mais valorizadas no mundo do trabalho, das empresas e da investigação, a resolução de problemas está, de forma evidente, presente no cerne dos mais variados currículos de matemática, constituindo-se como uma capacidade transversal, mas também como um conteúdo programático e uma abordagem metodológica. Aliás, as mais recentes orientações curriculares para o ensino da matemática em Portugal (Canavarro et al., 2021; Carvalho e Silva et al., 2023; Martins et al., 2017) refletem precisamente esta multiplicidade de papéis que a Resolução de Problemas deve ter no contexto (da Matemática) escolar, à luz da investigação nacional e internacional em Educação Matemática.

Este Encontro, na senda dos encontros anteriormente organizados pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, teve como propósito principal partilhar e refletir sobre trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, relativos a múltiplos aspetos associados à Resolução de Problemas, e perspetivar futuras investigações sobre o tema.

Tiveram lugar contribuições conceptuais/teóricas e empíricas relacionadas com diferentes níveis de ensino e distribuídas pelos seguintes eixos temáticos:

- A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem;
- A resolução de problemas e a tecnologia;
- A resolução de problemas e a formação de professores e educadores.

O EIEM 2023 contou, em particular, com duas sessões plenárias e um painel plenário, nos quais estiveram envolvidos investigadores convidados que abordaram o tema do Encontro segundo diferentes perspetivas.

Hélia Jacinto, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, proferiu a conferência intitulada *Resolução de problemas de matemática com tecnologias: Da competição matemática à sala de aula*. Na sua intervenção, a autora relatou um cenário no qual as tecnologias digitais têm conquistado um inegável papel de transformação da atividade humana e discute a essência de um modelo explicativo dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias e o conceito de fluência tecno-matemática. Explorou, então, o impacto de ferramentas tecnológicas na resolução de problemas de matemática e/ou no desenvolvimento da referida fluência a partir de três estudos com abordagens metodológicas distintas e abrangendo campos empíricos variados. O primeiro estudo, de índole qualitativa, debruçou-se sobre uma competição matemática. Seguiu-se a análise de um programa de natureza extracurricular, o Clube Tecn@Mat, em que a atividade de resolução de problemas pelos alunos era realizada de forma colaborativa e a distância, e, por fim, Hélia Jacinto apresentou os resultados de um estudo quase-experimental que pretendia aferir o impacto de uma experiência de ensino assente no desenvolvimento da fluência tecno-matemática dos alunos no seu desempenho em resolução de problemas de matemática com recurso a diferentes ferramentas tecnológicas.

A segunda conferência plenária foi proferida por Peter Liljedahl, da Universidade de Simon Fraser, Canadá. Nesta conferência, intitulada *Building thinking classrooms: A summary of 15 years of research*, o autor referiu que as dificuldades dos alunos com a Matemática têm sido um problema generalizado e sistémico desde o advento do ensino público – não porque os alunos não consigam aprender Matemática, mas porque, de um modo geral, os alunos não a conseguem aprender quando lhes é dito como fazê-lo. O investigador salientou e sustentou o facto de que, desde a publicação dos *Princípios e normas para a matemática escolar*, do National Council of Teachers of Mathematics (2007), houve um esforço concertado para mudar esta realidade através da transição para pedagogias mais progressistas e centradas no aluno. No entanto, tal como Liljedahl reforçou, de um ponto de vista sistémico, continua-se a assistir a elevadas taxas de insucesso, baixa autoeficácia e grande desinteresse dos alunos. Nesta conferência, o autor analisou os resultados de um projeto de investigação especificamente concebido para mudar esta realidade, focando-se em formas, pragmáticas, de potenciar o pensamento dos alunos (Liljedahl, 2020, 2021). A sala de aula é, assim, transformada num espaço onde os alunos pensam, aprendem e têm sucesso.

O painel plenário teve como tópico *Resolução de Problemas: Investigação, Currículo e Desenvolvimento Curricular na Educação Matemática*. Foi moderado por António Borralho, da Universidade de Évora, Portugal, e nele participaram: Alicia Bruno Castañeda, da Universidade de La Laguna, Espanha; Nélia Amado, da Universidade do Algarve, Portugal; e Margarida Rodrigues, da Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal. O painel iniciou-se com uma panorâmica do trabalho que cada um dos intervenientes tem desenvolvido em torno da Resolução de Problemas, nos últimos anos, a nível da investigação, do currículo, do desenvolvimento curricular e das suas relações.

Partindo destas partilhas e de questões dos participantes no EIEM 2023, perspetivaram-se linhas de trabalho futuro focadas nas várias temáticas abordadas.

Na presente publicação, pode encontrar-se uma seleção de artigos apresentados no EIEM 2023, quer sob a forma de comunicações orais quer sob a forma de comunicações em póster, distribuídos pelos referidos eixos temáticos. Para além de um texto enquadrador de cada um dos eixos, consideram-se:

- Eixo 1: A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem – textos de seis comunicações orais e três comunicações em póster;
- Eixo 2: A resolução de problemas e a tecnologia – textos de duas comunicações orais e três comunicações em póster;
- Eixo 3: A resolução de problemas e a formação de professores e educadores – textos de quatro comunicações orais e cinco comunicações em póster.

Espera-se que a presente publicação possa contribuir para o aprofundamento conceptual da Resolução de Problemas e inspire propostas didáticas potenciadoras do desenvolvimento de tão estruturante capacidade transversal, assim como novos trabalhos de investigação nesta área tão central da Educação Matemática.

Referências

- Associação de Professores de Matemática [APM] (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. APM.
- Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Problem Solving Research Brief, 14, 1-6. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM].
- Calabrese, J. L., Capraro, M. M., & Thompson, C. G. (2022). The relationship between problem posing and problem solving: A systematic review. *International Education Studies*, 15(4), 1-8. <https://doi.org/10.5539/ies.v15n4p1>
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino básico*. Ministério da Educação e Ciência: Direção-Geral da Educação (DGE). <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>
- Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E. G., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. Ensino Secundário. Matemática*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação. <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario>
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, Grades K-12: Teaching practices for enhancing learning*. Corwin.
- Liljedahl, P. (2021). *modifying your thinking classroom for different settings: A supplement to building thinking classrooms in mathematics*. Corwin.
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education* 53, 723-735 <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics Education*. Springer Open. <https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27743/1/1002262.pdf>

- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação da matemática escolar*. APM. Tradução de *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, publicado em 1989, pelo NCTM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM. Tradução de *Principles and standards for school mathematics*, publicado em 2000, pelo NCTM.
- NCTM (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM. Tradução de *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*, publicado em 2007, pelo NCTM.

SESSÕES PLENÁRIAS

Painel Plenário

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: INVESTIGAÇÃO, CURRÍCULO E
DESENVOLVIMENTO CURRICULAR NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
PLENARY PANEL - PROBLEM SOLVING: RESEARCH, CURRICULUM,
AND CURRICULUM DEVELOPMENT IN MATHEMATICS EDUCATION**

António Borralho (moderador)
Universidade de Évora, Portugal
amab@uevora.pt

Alícia Bruno-Castañeda
Universidade de La Laguna, Espanha
abruno@ull.edu.es

Nélia Amado
Universidade do Algarve, Portugal
namado@ualg.pt

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal
margaridar@eselx.ipl.pt

A resolução de problemas está hoje, de forma inequívoca, presente no cerne dos currículos de matemática, constituindo-se como uma capacidade transversal dos currículos dos mais diversos países, para além de constituir uma das capacidades mais valorizadas no mundo do trabalho, das empresas e da investigação. Neste painel, pretende-se fornecer uma panorâmica do trabalho que cada um dos intervenientes tem desenvolvido à volta da resolução de problemas, nos últimos anos, a nível da investigação, do currículo, do desenvolvimento curricular e das suas relações, bem como perspetivar linhas de trabalho.

Conferências plenárias

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS:
DA COMPETIÇÃO MATEMÁTICA À SALA DE AULA**
**MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING WITH TECHNOLOGY: FROM THE
MATHEMATICS COMPETITION TO THE CLASSROOM**

Hélia Jacinto

UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

[hjacinoto@ie.ulisboa.pt](mailto:hjacinto@ie.ulisboa.pt)

Resumo: Num cenário em que as tecnologias digitais têm conquistado um inegável papel de transformação da atividade humana, esta conferência explora o impacto de ferramentas tecnológicas na resolução de problemas de matemática a partir de três estudos com abordagens metodológicas distintas e abrangendo campos empíricos variados. Num primeiro momento discutir-se-á a essência de um modelo explicativo dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias e o conceito de fluência tecno-matemática a partir de um estudo qualitativo que se debruçou sobre uma competição matemática. Seguir-se-á uma análise de um programa extracurricular, o Clube Tecn@Mat, desenhado com o propósito de contribuir para o desenvolvimento da fluência tecno-matemática e da capacidade de resolução de problemas com tecnologias dos alunos participantes. Por fim, apresentar-se-ão os resultados de um estudo quase-experimental que pretendia aferir o impacto de uma experiência de ensino assente no desenvolvimento da fluência tecno-matemática dos alunos no seu desempenho em resolução de problemas de matemática com recurso a diferentes ferramentas tecnológicas. A conferência encerrará com uma síntese dos resultados alcançados e das suas possíveis implicações para a prática letiva, para o desenvolvimento profissional docente e para o avanço da investigação nesta área emergente.

Palavras-chave: resolução de problemas de matemática, tecnologias digitais, fluência tecno-matemática, clubes de matemática, experiência de ensino.

Abstract: In a scenario where digital technologies have achieved an undeniable role in transforming human activity, this conference explores the impact of technological tools in solving mathematics problems through three studies with distinct methodological approaches and covering various empirical fields. Initially, the essence of an explanatory model for solving mathematics problems with technologies and the concept of techno-mathematical fluency will be discussed, based on a qualitative study that focused on a mathematical competition. This will be followed by an analysis of an extracurricular program, the Techno@Mat Club, designed to contribute to the development of techno-mathematical fluency and the problem-solving ability of participating students using technologies. Finally, the results of a quasi-experimental study aiming to assess the impact of a teaching experiment based on the development of students' techno-mathematical fluency on their performance in solving mathematical problems with various technological tools will be presented. The conference will conclude with a synthesis of the achieved results and their possible implications for teaching practice, professional development of teachers, and the advancement of research in this emerging area.

Keywords: mathematical problem solving, digital technologies, techno-mathematical fluency, mathematics clubs, teaching experiment.

Introdução

Os avanços tecnológicos e o acesso crescente a ferramentas digitais sofisticadas têm transformado a forma como interagimos com a matemática, criando situações de resolução de problemas que exigem capacidades específicas para além do ambiente escolar (Forgasz et al. 2010). Num mundo cada vez mais digitalizado e globalizado, a constante evolução dessas competências matemáticas realça a importância de estudar como as tecnologias são aplicadas em contextos exteriores à sala de aula, mas onde a matemática é essencial (Hoyles et al., 2010). Desta forma, é crucial que os jovens do século XXI desenvolvam as competências necessárias para utilizar essas ferramentas no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos e também em atividades de resolução de problemas (Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2007).

Embora a pesquisa sobre o uso espontâneo de ferramentas digitais em contextos de resolução de problemas fora do ambiente escolar não tenha sido extensa (English & Sriraman, 2010), revelou que os alunos frequentemente descobrem novas maneiras de integrar conhecimentos matemáticos e tecnológicos, especialmente quando têm a liberdade de escolher e usar as ferramentas digitais ao seu alcance (Barbeau & Taylor, 2009; Koichu, 2018; Zevenbergen & Zevenbergen, 2009).

Nesta conferência apresento e discuto três estudos que analisam o uso de tecnologias digitais na resolução de problemas de matemática em diferentes contextos empíricos. O primeiro estudo visa entender em que consiste e o que envolve a Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias, num ambiente extraescolar, onde jovens de 12 a 14 anos participam num campeonato de resolução de problemas, explorando as suas competências matemáticas e tecnológicas. A investigação neste contexto contribui para a compreensão de como os alunos utilizam a tecnologia para resolver problemas de forma espontânea, fora das estruturas tradicionais de ensino (Carreira et al., 2016). O segundo estudo foca-se no Clube Tecn@Mat, um ambiente que alia o desafio de problemas matemáticos à descontração de um espaço de aprendizagem informal, onde os alunos são incentivados a explorar e integrar ferramentas digitais no seu raciocínio matemático. Este clube oferece uma ponte entre o ambiente competitivo e a sala de aula, proporcionando um espaço de experimentação e desenvolvimento de competências matemáticas com recurso a tecnologias digitais. Por último, o terceiro estudo analisa uma experiência de ensino em sala de aula, cuidadosamente desenhada para potenciar as capacidades dos alunos na resolução de problemas de matemática com tecnologia. Esta abordagem procura integrar de forma estruturada diversas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, em consonância com os objetivos das Aprendizagens Essenciais de Matemática implementadas no ano letivo de 2022/2023 no ensino básico.

Estes três estudos são sustentados por abordagens metodológicas distintas, que permitem uma análise aprofundada dos processos de resolução de problemas com tecnologias nos diferentes cenários. Em conjunto, fornecem uma perspetiva ampla sobre como os alunos desenvolvem competências de resolução de problemas ao interagirem com ferramentas digitais em contextos variados, contribuindo para a discussão sobre a forma como a tecnologia pode ser integrada eficazmente no ensino da matemática, em particular para lidar com situações desafiadoras que envolvem matemática.

Resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais

A interação entre seres humanos e tecnologias tem sido um campo de estudo em constante evolução, especialmente nas últimas décadas. Desde o aparecimento dos ambientes computadorizados, que a relação entre ser-humano e a tecnologia se tem intensificado e

diversificado (Borba & Villarreal, 2005; Sinclair, 2020). Atualmente, a presença ubíqua da tecnologia no cotidiano leva-nos a utilizá-la de maneira instintiva e natural, muitas vezes sem compreender plenamente os princípios que lhe estão subjacentes. No entanto, essa aparente simplicidade esconde uma elevada complexidade, que requer não apenas conhecimentos tecnológicos, mas também fundamentos sólidos em matemática e noutras áreas científicas (Cevikbas et al., 2023; Hoyles & Noss, 2016).

O quadro teórico global, que suporta esta investigação multifacetada, explora a complexa interação entre a cognição em ambientes digitais e a resolução de problemas matemáticos, destacando não apenas os desafios inerentes aos problemas de matemática, mas também a simultaneidade entre resolver e expressar esses problemas. Além disso, aprofunda a análise sobre como a competência tecnológica e matemática se entrelaçam para integrar uma capacidade que é vital na aprendizagem da matemática.

Cognição em habitats digitais

A cognição em ambientes digitais é frequentemente concebida como emergindo das interações entre indivíduos, tecnologia e o contexto circundante. Estas interações complexas são a base do conceito de “seres-humanos-com-media” (Borba & Villarreal, 2005), que reflete o poder transformador e reorganizador das ferramentas digitais com as quais pensamos e agimos. Borba e Villarreal (2005) destacam que estas ferramentas são extensões cognitivas que moldam a forma como os conhecimentos são construídos e aplicados. Mais recentemente, Sinclair (2020) reforça esta perspetiva, argumentando que é praticamente impossível estabelecer limites claros entre as ações e os pensamentos induzidos pelas ferramentas digitais, dado que estas interações contínuas com a tecnologia tornam indistintas as fronteiras entre o próprio sujeito e o meio digital.

Geiger (2005) já havia explorado esta ideia através de várias metáforas que visavam descrever a relação entre estudantes e tecnologia: como mestre, onde o estudante é passivo; como servo, onde a tecnologia executa tarefas sob comando; e como parceiro, onde se desenvolve uma relação dinâmica que incentiva a reflexão e a ação. Adicionalmente, a metáfora da tecnologia como extensão de si mesmo ilustrava como os estudantes incorporam as ferramentas digitais no seu repertório matemático, de modo que tecnologia e cognição co-evoluem, apoiando o pensamento matemático de maneira tão natural quanto os demais recursos cognitivos. Mais recentemente, Kuzle (2017) discute as ferramentas digitais como reguladoras da cognição humana, destacando seu papel como parceiras cognitivas e criativas ou como extensões do eu cognitivo.

Estes estudos destacam a importância da tecnologia no desenvolvimento do pensamento matemático, facilitando formas inovadoras de acesso à informação e reorganizando a atividade cognitiva, especialmente na resolução de problemas, conforme Borba & Villarreal (2005) já tinham indicado. Assim, o conceito de “seres-humanos-com-media” sublinha como as ferramentas digitais, ao se entrelaçarem inseparavelmente com o raciocínio humano, transformam profundamente a cognição matemática e ampliam as capacidades de resolução de problemas.

Os problemas de matemática

Outra dimensão crucial na utilização de tecnologias digitais na resolução de problemas matemáticos relaciona-se com a própria natureza dos problemas propostos. Estes são frequentemente problemas de palavras não rotineiros que não estão, necessariamente, alinhados com os temas habituais do currículo escolar e exigem uma abordagem inovadora. O desafio não é apenas resolver um problema, mas sim desenvolver uma

perspetiva matemática que permita abordar a situação de forma criativa e eficaz (Saadati & Felmer, 2021; Schoenfeld, 1985). A capacidade de ver para além do problema imediato e aplicar conceitos matemáticos de forma flexível é crucial, tornando estes problemas ferramentas poderosas para o desenvolvimento cognitivo.

A moderação no nível de dificuldade dos problemas é essencial para manter os alunos envolvidos nesta atividade. Os problemas que apresentam um desafio moderado são os ideais, pois se forem excessivamente fáceis ou demasiado difíceis poderão desencorajar os alunos ou levá-los a desistir sem tentar resolver (Carreira et al., 2016; Turner & Meyer, 2004). É importante encontrar um equilíbrio que proporcione aos alunos tanto a oportunidade de sucesso quanto o incentivo para superar desafios, promovendo um envolvimento produtivo e um sentido de realização.

Ao resolver problemas com tecnologias, os alunos são incentivados a desenvolver modelos conceptuais das soluções. Estes modelos não servem apenas como representações da resolução, mas são antes estruturas matemáticas que encerram o entendimento do problema e solução (Lesh & Zawojewski, 2007). Mediante o uso de ferramentas digitais os alunos podem explorar uma variedade de representações, tais como símbolos, diagramas ou gráficos, que enriquecem a sua compreensão e expressão do seu pensamento matemático (Lesh & Doerr, 2003). Esta capacidade de representar e manipular ideias matemáticas de várias formas é fundamental para a aquisição de uma fluência matemática robusta e adaptável a diversos contextos e problemas.

Simultaneidade entre resolver um problema e exprimir a solução

Um terceiro aspeto distintivo desta atividade, e que foi desenvolvido conceptualmente no âmbito do projeto ProblemWeb (Carreira et al., 2016), é a noção de resolver-e-exprimir como duas facetas indissociáveis entre si. No âmbito do projeto pôde observar-se que uma parte significativa dos participantes recorria à tecnologia desde o início do processo, não apenas como uma ferramenta de resolução, mas também como um meio para registar e traçar o roteiro dos seus processos de raciocínio. Esta abordagem sustenta que resolver um problema naquele contexto exterior à sala de aula envolvia um processo síncrono de matematização e expressão do pensamento matemático que conduzia a uma solução que se explica por si mesma (Carreira et al., 2016; Jacinto & Carreira, 2017a, 2021).

Este processo é evidenciado através do uso de um discurso matemático digital expositivo (Stahl, 2009), que é mediado pela tecnologia. A expressão do pensamento matemático, facilitada por ferramentas digitais, manifesta-se no uso de cores, desenhos, imagens e outros recursos visuais, muito embora estes elementos não sejam meramente decorativos, mas, antes, desempenhem um papel crucial na forma como os estudantes articulam e visualizam conceitos matemáticos complexos (Carreira et al., 2016; Stahl, 2009).

Por conseguinte, o discurso matemático em ambientes digitais não só enriquece a resolução de problemas ao incorporar estes recursos visuais e interativos, mas também transforma a natureza da aprendizagem matemática. Ao integrar tecnologia no processo de resolução de problemas, os alunos desenvolvem uma fluência tecno-matemática que os capacita a pensar matematicamente e a comunicar de forma mais eficaz (Jacinto & Carreira, 2017a, 2017b; Jacinto et al., 2018). Esta fluência tecno-matemática, um conceito que emergiu deste contexto, envolve a mobilização de conhecimentos matemáticos juntamente com uma elevada competência tecnológica e refere-se especificamente à capacidade de conjugar eficientemente conhecimentos matemáticos e tecnológicos para desenvolver um modelo conceptual de uma solução e comunicá-lo através de um discurso tecno-matemático (Jacinto & Carreira, 2017b).

A fluência tecno-matemática (FTm) é fundamental na atividade de resolver e exprimir problemas com tecnologia na medida em que envolve um discurso matemático digital que permite aos alunos desenvolver e apresentar soluções tecno-matemáticas que são autoexplicativas. Estas soluções são notáveis pela robustez dos modelos conceptuais que as sustentam, evidenciando a compreensão profunda dos problemas em questão. Além disso, a FTm revela-se na capacidade dos alunos para perceber e explorar as affordances e as restrições das tecnologias que utilizam. Esta perceção crítica permite que os alunos escolham as ferramentas mais adequadas para cada problema específico, adaptando as suas estratégias para maximizar a eficácia da resolução e a comunicação das soluções (Jacinto & Carreira, 2017a, 2017b, 2021; Jacinto et al., 2018).

As próximas secções apresentam três estudos que dão suporte a esta conferência e que se debruçam sobre a resolução de problemas de matemática com tecnologia, percorrendo um itinerário que vai desde a compreensão desta prática no contexto de uma competição extraescolar, passando por um ambiente de aprendizagem online intitulado Clube Tecn@Mat, até a uma experiência de ensino realizada em sala de aula com o propósito de potenciar as capacidades dos alunos na resolução de problemas com tecnologias. Estes estudos não só se distinguem pelos seus contextos empíricos variados, como também pelas suas abordagens metodológicas diversificadas.

Estudo 1: Como se caracteriza a resolução de problemas de matemática com tecnologias? O caso do Campeonato de Matemática Sub14

Apresentação global e objetivo do estudo

O Sub14 foi uma competição online de resolução de problemas matemáticos, dirigida a alunos do 7.º e 8.º ano de escolas no sul de Portugal. Os participantes resolviam problemas de matemática, disponibilizados quinzenalmente, com possibilidade de recorrer às ferramentas digitais da sua preferência. Os alunos deviam descrever detalhadamente o seu processo de resolução, mostrando como chegaram às suas soluções, e submetiam-nas via e-mail ou através de um formulário disponível na página da competição.

Este estudo procurou *documentar e compreender os processos* desenvolvidos por alunos do 3.º ciclo quando podem fazer uso de tecnologias digitais para *resolver* problemas não rotineiros no âmbito de um campeonato de matemática extraescolar e *exprimir* as suas estratégias e o raciocínio matemático associado. Uma descrição detalhada deste estudo está disponível em Jacinto e Carreira (2017a) e Jacinto (2017).

Fundamentação teórica adicional

A inexistência de uma ferramenta teórica adequada para descrever a integração de conhecimentos matemáticos e tecnológicos, bem como compreender o papel da tecnologia na resolução e expressão de soluções de problemas não rotineiros (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013), levou à fusão de dois quadros teóricos: um que trata da atividade de um indivíduo ao abordar uma tarefa ou problema tecnológico (Martin & Grudziecki, 2006) e outro que permite descrever os processos envolvidos na resolução de problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985).

O modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologia (RPMT) inclui dez processos, obtidos pela comparação entre os dois quadros, que permitiu identificar ações proeminentes, combinar processos dentro do modelo de Martin e Grudziecki (2006) e decompor algumas etapas do modelo de resolução de problemas matemáticos de Schoenfeld (1985), com o apoio de um caso paradigmático (Jacinto & Carreira, 2017a).

Os processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias iniciam-se com *Captar*, onde ocorre a apropriação da situação e das condições do problema, fornecendo uma compreensão inicial do que está envolvido. Segue-se o *Identificar*, que envolve uma tentativa inicial de discernir os elementos cruciais em jogo, incluindo a matemática relevante e as ferramentas necessárias. O próximo passo é *Interpretar*, no qual se exploram as potencialidades dos recursos tecnológicos para abordar a solução de uma forma matemática, integrando análise, avaliação e interpretação. O processo de *Integrar* combina recursos tecnológicos e matemáticos numa abordagem exploratória, organizando e integrando esses elementos de maneira eficaz. Em *Explorar*, esses recursos combinados são utilizados para investigar modelos conceptuais que possam levar a uma solução. O processo *Planejar* envolve o delinear de uma abordagem baseada nas conjecturas previamente exploradas, que inclui a implementação e a síntese de novos conhecimentos. Já em *Criar* é quando se implementa a abordagem planeada, reorganizando recursos de novas maneiras que permitam resolver e expressar o problema. Segue-se *Verificar*, onde se realizam atividades para explicar ou justificar a solução, utilizando os recursos matemáticos e tecnológicos disponíveis. O processo de *Disseminar* apresenta a solução ou os produtos a outros interessados e reflete sobre o sucesso do processo de resolução, consolidando os conhecimentos adquiridos e partilhando-os com uma audiência mais ampla. O processo de *Comunicar* é intrínseco a cada uma das etapas descritas e desempenha um papel crucial ao longo de todo o ciclo de resolução de problemas de matemática com tecnologias.

Aspetos metodológicos

Este trabalho, de natureza qualitativa, concentrou-se no caso de uma estudante, Jessica, uma jovem de 13 anos participante no campeonato Sub14. A recolha de dados envolveu todas as produções digitais de Jessica durante as duas edições anuais do campeonato, complementada por uma entrevista realizada na sua casa, vídeo-gravada para permitir obter informações sobre a sua atividade de resolução de problemas e o uso de tecnologia. Foram também recolhidos os ficheiros produzidos em GeoGebra por Jessica e as mensagens eletrónicas com as respostas aos problemas, que continham explicações detalhadas das soluções.

A análise dos dados seguiu uma perspetiva interpretativa, procurando fornecer uma descrição holística do caso. Isso incluiu a integração da perceção da participante sobre a sua atividade de resolução de problemas com a análise das suas produções e a perspetiva da investigadora, informada pelo modelo teórico proposto.

Resultados

Com base num modelo proposto para descrever os processos de resolução de problemas matemáticos com tecnologias, identificou-se a presença de microciclos, isto é, múltiplas sequências de processos que se repetem de forma iterativa ao longo da atividade de resolução de problemas. O processo de *Integrar* destaca-se como fundamental, encontrando-se estreitamente ligado ao processo de *Explorar*. Tal associação revela-se crucial para o apoio ao pensamento matemático e o desencadeamento de novas atividades exploratórias com a tecnologia.

Este trabalho encerra ainda outros dois contributos relevantes. Os resultados sugerem que tanto os recursos tecnológicos como os recursos matemáticos são indispensáveis à eficácia da resolução e expressão de problemas com tecnologias e que a tecnologia permeia todos os processos envolvidos. Esta atividade consiste num processo síncrono entre matematização e expressão de pensamento matemático, querendo com isso dizer

que resolver um problema com tecnologias envolve encontrar a solução e explicá-la com os media digitais. Nota-se que, até então, a *comunicação* do pensamento matemático não havia sido contemplada nos modelos usuais de resolução de problemas de matemática. Nesse trabalho, propôs-se a noção *resolver-e-exprimir-com-tecnologias*. Por um lado, oferecem-se evidências empíricas sobre de que o uso de tecnologias digitais para obter e explicar soluções de problemas de matemática envolve uma capacidade específica e não documentada na literatura, que se designou por *fluência tecno-matemática*. Na génese desta fluência está o reconhecimento de *affordances* matemáticas na ferramenta digital, sendo que se manifesta pela eficácia com que se combinam os dois tipos de conhecimento – da matemática e da tecnologia, e que são constantemente interligados para desenvolver o pensamento tecno-matemático, ou seja, novas formas de conhecer e compreender e de comunicar de forma efetiva usando um discurso que é também, ele próprio, tecno-matemático.

Este trabalho traz também implicações para o ensino da Matemática. Em primeiro lugar, alerta para o facto de as competências tecno-matemáticas dos jovens poderem ser desenvolvidas numa multiplicidade de locais, nomeadamente para além da sala de aula, pelo que se torna necessário reconhecê-las e incorporá-las na aprendizagem da Matemática, para que possam ser desenvolvidas em contexto formal. Contudo, essa integração representa um desafio para o professor na medida em que tem de reconhecer ele próprio a validade das estratégias e dominar os usos de uma diversidade, cada vez maior, de ferramentas. Com isto em mente, os resultados destacados por este estudo sugerem que a aprendizagem matemática formal através da resolução de problemas precisa de ser pensada em termos do desenvolvimento da fluência tecno-matemática dos alunos, já que aparenta ser fundamental para lidar com situações problemáticas em que a tecnologia é tão indispensável quanto a matemática.

Estudo 2: Como desenvolver a capacidade de resolução de problemas de matemática com tecnologias? O caso do Clube Tecn@Mat

Apresentação global e objetivo do estudo

Este estudo de caso exploratório examina um programa extraescolar online, o Tecn@Mat Club, destinado a promover a capacidade de alunos do ensino básico na resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais durante a pandemia. Com efeito, a pandemia COVID-19 e a exigência de distanciamento social levaram ao encerramento de atividades extracurriculares que geralmente envolvem trabalho em equipa e colaboração, como os clubes de matemática. A investigação que se debruça sobre o design e a eficácia de atividades matemáticas extracurriculares que visam promover o interesse dos alunos e melhorar as capacidades matemáticas é limitada (Kennedy & Smolinsky, 2016) especialmente nos tempos complexos como os vividos durante a pandemia.

A pesquisa documentou a conceção e a implementação do Clube Tecn@Mat, bem como as experiências dos seus participantes e perspetivas sobre a atividade em que se envolveram. O objetivo principal do estudo foi examinar o design e a implementação do Clube Tecn@Mat, que visava a promoção da capacidade de resolver problemas de matemática com tecnologia, a partir de três questões norteadoras: i) Quais são as principais características de design do Clube Tecn@Mat, em termos de sua estrutura, conteúdo e organização? ii) Quais são as perspetivas dos participantes em relação à resolução de problemas e ao uso de tecnologias digitais dentro do Clube Tecn@Mat? iii) Quais são os pontos fortes, fracos, oportunidades e ameaças ao Clube Tecn@Mat? Um relato pormenorizado deste estudo encontra-se publicado em Jacinto (2023).

Fundamentação teórica adicional

Os Clubes de Matemática são iniciativas de enriquecimento curricular que proporcionam aos jovens entusiastas da matemática um espaço para partilhar ideias e desenvolver as suas capacidades. Estes clubes oferecem uma oportunidade para os alunos desenvolverem autoestima e um sentido de pertença a uma comunidade (Durbin, 2020).

A partir de uma revisão da literatura existente, foi possível perceber que a investigação sobre este tipo de atividades extracurriculares é relativamente limitada, tanto em Portugal quanto internacionalmente. Contudo, essa revisão aponta uma influência positiva dos clubes de matemática na aprendizagem matemática dos alunos. Estudos como os de Papanastasiou e Bottiger (2004) e Mueller e Maher (2009) destacaram o impacto positivo dos clubes de matemática, observando que os participantes geralmente exibem atitudes positivas em relação à matemática e ao clube, além de desenvolverem capacidades de raciocínio matemático, em particular, ao nível da justificação. Projetos como o “Pushing for Progression” na África do Sul (Stott et al., 2019) e o estudo efetuado por Durbin (2020) com mais de 23.000 estudantes do 9.º ano evidenciaram melhorias significativas na proficiência matemática dos participantes nestes clubes de matemática.

Assim, estes estudos sugerem que os clubes de matemática são eficazes não apenas no desenvolvimento de competências matemáticas, mas também na promoção de atitudes positivas em relação à aprendizagem da matemática. Neste contexto, o Clube Tecn@Mat em Portugal emergiu como uma resposta inovadora ao isolamento imposto pela pandemia de COVID-19, oferecendo um espaço colaborativo para a resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais, para enriquecer as experiências dos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Aspetos metodológicos

O estudo adotou uma abordagem exploratória de estudo de caso para analisar a implementação e o impacto do clube Tecn@Mat. Esta abordagem foi multifacetada, combinando várias fontes de dados para obter uma compreensão abrangente do fenómeno em estudo. Por esse modo, este estudo seguiu um design convergente de métodos mistos, em que os dados qualitativos e quantitativos foram recolhidos concomitantemente, mas a vertente qualitativa foi enfatizada tratando-se, portanto, de um estudo da tipologia “QUAL+quant”.

Participaram neste estudo 12 alunos do Ensino Básico que frequentaram voluntariamente o Clube Tecn@Mat, com base no seu interesse por matemática, por resolução de problemas e por tecnologias digitais, e não necessariamente pelo seu desempenho académico na disciplina de matemática. Participou ainda um perito em Educação Matemática que contribuiu para o desenvolvimento e a validação das tarefas e serviu também como informante no estudo participando numa entrevista.

Na recolha de dados foram empregues várias técnicas e instrumentos. Os participantes responderam a um breve questionário após cada sessão do clube, fornecendo dados quantitativos sobre as suas perceções e experiências específicas com cada problema e ferramenta tecnológica usada. As sessões do clube foram observadas e videogravadas, incluindo o trabalho dos participantes em salas simultâneas, permitindo uma análise qualitativa mais detalhada das interações e processos de aprendizagem. Também foram realizadas entrevistas semiestruturadas aos alunos participantes no final das atividades do Clube, que permitiram complementar as informações provenientes dos questionários.

A análise desses dados combinou abordagens qualitativas e quantitativas. Os dados provenientes dos questionários foram submetidos a uma análise estatística descritiva para identificar tendências e padrões nas respostas dos participantes. Os dados provenientes das entrevistas foram alvo de uma análise SWOT (acrônimo de *strengths*, *weaknesses*, *opportunities*, *threats*) de modo a identificar os fatores internos e externos que podem desafiar ou contribuir para o sucesso do Tecn@Mat. Assim, os dados qualitativos ofereceram uma visão aprofundada das experiências dos participantes, enriquecendo a análise quantitativa com uma dimensão qualitativa descritiva. A integração de resultados decorreu por comparação e contraste entre os resultados que foram originados em cada vertente, pela triangulação de dados quando adequado, e posteriormente, foi elaborada uma narrativa integradora.

Resultados

O estudo permitiu concluir sobre a viabilidade de adaptar iniciativas matemáticas extracurriculares para um ambiente online, mostrando que é possível manter os alunos envolvidos e interessados na resolução de problemas de matemática com tecnologias.

Do ponto de vista estrutural, embora o Clube esteja ancorado num website, baseia-se na comunicação síncrona através de videoconferência e na utilização de um repositório online partilhado. O seu currículo organiza-se em torno de: i) objetivos de aprendizagem bem definidos, como o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de matemática com tecnologia e da fluência tecno-matemática; ii) tarefas baseadas em problemas não rotineiros que admitem várias estratégias e encerram um desafio matemático de nível moderado; admitem a utilização de recursos adequados, tanto matemáticos como tecnológicos; sendo que a atividade dos participantes é caracterizada por lhes ser permitida escolha (dos desafios, dos recursos tecno-matemáticos), por desenvolverem trabalho colaborativo online, e por serem impelidos a criar explicações tecno-matemáticas das suas soluções.

A análise das perspetivas dos participantes também contribuiu para compreender como o design e implementação do Clube foram baseados em várias perspetivas teóricas e evidências empíricas acerca das especificidades do uso de tecnologias digitais na resolução de problemas matemáticos. Destaca-se que, embora o nível de dificuldade sentido pelos participantes ao longo das sessões tenha aumentado, o nível médio de satisfação sentida durante a atividade manteve-se elevado (Figura 1).

Quanto à utilização de ferramentas tecnológicas, observou-se uma diminuição progressiva no uso exclusivo de papel e lápis na resolução de problemas, acompanhada por um aumento no recurso exclusivo a ferramentas digitais (Figura 2). Este fenómeno pode dever-se à crescente familiarização dos alunos com as potencialidades destas ferramentas e ao aumento da confiança no seu uso. É importante salientar que os alunos também reconheceram vantagens na utilização combinada de tecnologias e papel-e-lápis, especialmente no que se refere à criação de explicações para as soluções dos problemas. Ao longo das sessões, tornou-se evidente uma preferência crescente pelas ferramentas tecnológicas, culminando num valor médio de 4,73 na última sessão, indicando uma adesão significativa a estes recursos.

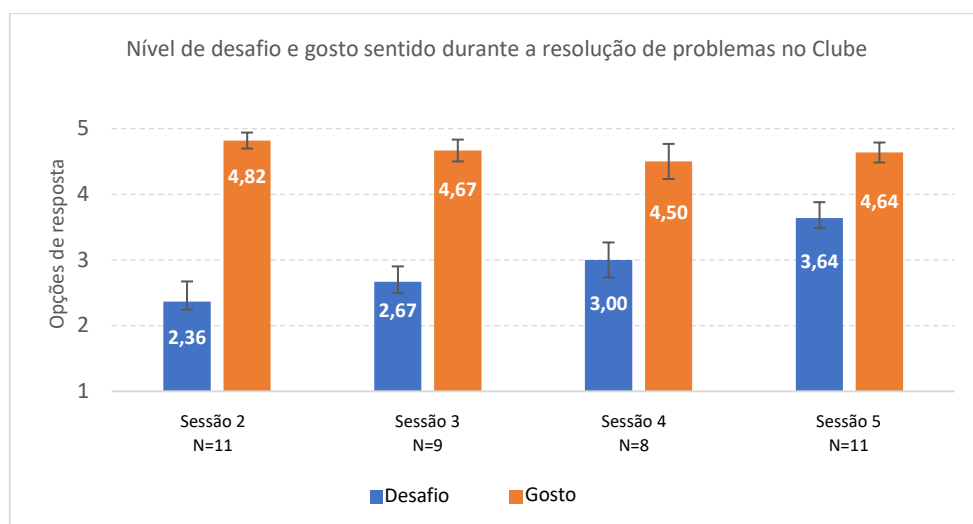


Figura 1. Valores médios do nível de desafio* e prazer** sentidos pelos participantes enquanto resolviam problemas em cada sessão do Tecn@Mat (* 1-Muito fácil; 5-Muito difícil. ** 1-Não gostei; 5-Gostei muito). N é o número de respondentes em cada sessão. São apresentadas barras de erro padrão.

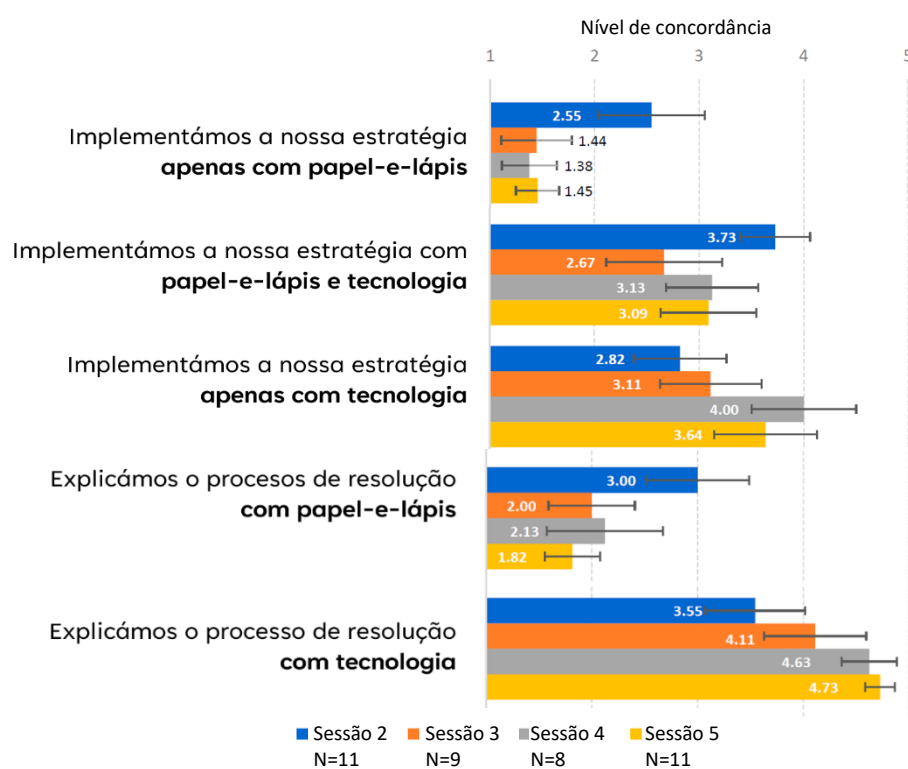


Figura 2. Valor médio do nível de concordância* com cada afirmação sobre o uso de papel e lápis e tecnologia para resolver e expressar os problemas, por sessão (* 1-Discordo totalmente; 5-Concordo totalmente). N é o número de respondentes por sessão. São apresentadas barras de erro padrão.

No que concerne ao desenvolvimento de competências, é crucial destacar que, embora os participantes já possuíssem experiência prévia com tecnologias digitais, esta representou uma das suas primeiras experiências no uso de tecnologia para atividades matemáticas e especificamente para a resolução de problemas de matemática. As sessões do Clube foram

relevantes para que os alunos descobrissem as potencialidades de várias ferramentas, despertando um interesse por explorações independentes e mais profundas. Este desenvolvimento incipiente da fluência tecno-matemática é consistente com a gênese de “jovens-com-media” (Borba & Villarreal, 2005; Jacinto & Carreira, 2017a) sugerindo uma integração efetiva da tecnologia na prática de resolução de problemas de matemática deste conjunto de alunos.

Outro dos aspectos distintivos deste estudo foi a realização de uma análise SWOT que permitiu identificar os pontos fortes do clube, as características que devem ser aprimoradas, as que podem ter um impacto positivo no alcance de seus objetivos e os obstáculos que enfrenta, e que, no seu conjunto, podem ser úteis para melhorar o design e implementação de futuras edições do clube. Relativamente aos aspectos que foram considerados *forças* do Clube, destaca-se a capacidade do formato online de maximizar a participação, criar oportunidades para estabelecer novas amizades, promover a inclusão através de desafios moderados, e apoiar o desenvolvimento de competências em resolução de problemas matemáticos e habilidades tecnológicas, visando a fluência tecnológico-matemática. No que diz respeito às *fraquezas* do Clube, encontraram-se desafios como o equilíbrio entre a orientação dada e o trabalho autónomo, a insuficiência de tempo para colaboração e uma carga de trabalho percebida como alta, fatores que podem levar à desistência dos participantes. Quanto às *oportunidades* identificadas, destacam-se a possibilidade de envolver especialistas internacionais e participantes, a realização de webinars para apresentação de trabalhos e a inclusão de problemas e ferramentas de pensamento computacional, que podem enriquecer significativamente a experiência dos participantes. Em relação às *ameaças* ao sucesso do Clube, destacam-se diversos riscos, como o desconhecimento de todos os benefícios do clube por parte dos alunos, a variabilidade do seu conhecimento prévio, um ensino escolar excessivamente focado na preparação para exames, e a potencial falta de financiamento, que pode comprometer a sustentabilidade do clube.

O estudo reconheceu ainda certas limitações metodológicas, principalmente devido à sua natureza exploratória e à dependência de autorrelatos dos participantes. No entanto, a combinação de diferentes métodos e fontes de dados foi considerada eficaz para capturar a complexidade do Tecn@Mat Club e o seu impacto, fornecendo uma visão holística e detalhada do programa e das suas implicações.

Estudo 3: Como desenvolver a capacidade de resolução de problemas de matemática com tecnologias na aula de Matemática? Resultados de uma experiência de ensino

Apresentação global e objetivos do estudo

Este terceiro estudo, no âmbito de uma dissertação de mestrado (Simões, 2024) discute uma proposta para integrar tecnologias digitais na aula de matemática, considerando explicitamente a sua utilização por alunos do 5.º ano e visando desenvolver a sua capacidade de resolver diferentes problemas matemáticos não rotineiros. Este estudo é motivado pela crescente necessidade de desenvolver a fluência tecno-matemática dos alunos, o que significa capacitá-los para interligar de forma eficaz competências matemáticas e tecnológicas para resolver problemas de matemática.

Assim, o estudo visou avaliar o impacto de uma experiência de ensino focada no desenvolvimento da capacidade dos alunos na resolução de problemas de matemática utilizando várias ferramentas digitais. Foram definidos três objetivos de investigação, para medir o impacto dessa intervenção na capacidade dos alunos em: a) compreender a

situação problemática; b) implementar uma abordagem tecno-matemática; e c) encontrar e explicar a solução.

Fundamentação teórica adicional

O trabalho desenvolvido teve como suporte teórico a conceptualização da atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias no Sub14 (Jacinto, 2017) e os resultados da implementação do Clube Tecn@Mat (Jacinto, 2023). Contudo, ao considerar a implementação do modelo RPMT (Jacinto & Carreira, 2017a) num contexto de sala de aula, tornou-se necessário desenvolver um instrumento para medir o desenvolvimento desta capacidade.

Muir et al. (2008) desenvolveram uma escala de avaliação especificamente projetada para avaliar vários aspetos da resolução de problemas em ambientes educacionais. A escala concentra-se em avaliar a compreensão do aluno sobre o problema, a seleção e implementação de uma estratégia, e a precisão da sua resposta final. Baseando-se nos dez processos estabelecidos pelo modelo RPMT e na escala de avaliação, desenvolvemos uma rubrica para avaliar o desempenho dos alunos na resolução de problemas de matemática utilizando ferramentas digitais. Esta rubrica permite classificar as respostas individuais em termos de:

- i) *Adequação*: avalia quão bem o aluno entende o problema, identifica os dados relevantes e escolhe a ferramenta digital adequada.
- ii) *Implementação*: refere-se à adoção de estratégias de resolução pelo aluno, a integração da ferramenta escolhida e a exploração dos resultados dessa integração.
- iii) *Explicação*: examina a capacidade do aluno expressar o processo de resolução do problema e justificar a resposta, focando a forma como a tecnologia foi usada.

A experiência de ensino, aderindo às recomendações das Aprendizagens Essenciais em Matemática para o 5.º ano (Canavarro et al., 2021) consistiu em quatro aulas de 100 minutos cada, adotando uma abordagem exploratória (Oliveira et al., 2013). Cada aula começou com a proposta de um novo problema de matemática, seguida de trabalho autónomo dos alunos e uma discussão em grupo, culminando com uma síntese pelo professor das estratégias de resolução eficientes e das ferramentas utilizadas. As quatro aulas abordaram temas distintos dentro de áreas como números, álgebra e geometria, com os alunos a utilizar ferramentas específicas como a folha de cálculo, o GeoGebra e o Scratch para resolver problemas e explorar os conceitos matemáticos envolvidos.

Aspetos metodológicos

Este estudo adotou um design quase-experimental com um grupo de controlo, aplicando um pré-teste e um pós-teste equivalente para avaliar o impacto de uma experiência de ensino nas capacidades dos alunos de resolver problemas de matemática com tecnologia. Participaram 54 alunos de três turmas do 5.º ano de uma escola numa zona rural de Portugal, sendo que duas turmas, num total de 34 alunos, formaram o Grupo Experimental (GE) e a terceira turma, com 20 alunos, o Grupo de Controlo (GC). A maioria dos alunos tinha 10 anos, com uma média de idade aproximada de 10,2 anos.

Os instrumentos de recolha de dados, incluindo o pré-teste e o pós-teste, foram desenvolvidos e validados através de um processo rigoroso para assegurar a sua confiabilidade e alinhamento com os objetivos do estudo. Ambos os testes continham problemas não rotineiros relacionados com geometria, números e sequências, adaptados

para ferramentas específicas como folha de cálculo, ambientes de geometria dinâmica e plataformas de programação visual, e foram administrados através do Google Forms.

A recolha de dados iniciou-se com uma fase de adaptação, onde os alunos de ambos os grupos realizaram *tarefas de ambientação*, utilizando ferramentas como Excel, Scratch e GeoGebra, para se familiarizarem com essas tecnologias. Após esta fase, foi administrado um pré-teste em março, seguido por um pós-teste em junho, depois de um período em que a experiência de ensino foi conduzida.

A análise dos dados envolveu a avaliação de cada item no pré-teste e no pós-teste usando rubricas de classificação para avaliar o desempenho dos alunos na resolução de problemas de matemática com tecnologia. Os resultados dos alunos foram analisados usando estatísticas descritivas e inferenciais com o auxílio do software SPSS.

Resultados

Inicialmente, tanto o Grupo Experimental (GE) como o Grupo de Controlo (GC) apresentaram capacidades semelhantes ao nível da resolução de problemas de matemática com tecnologias conforme avaliado nos pré-testes. Com efeito, ambos os grupos apresentaram valores médios bastante baixos, de 18,06 para o GE e 14,85 para o GC, sem apresentar diferenças estatisticamente significativas. No entanto, nos pós-testes, observou-se uma melhoria considerável no GE, que obteve um valor médio de 32,38 contra 22,25 do GC, agora com diferenças estatisticamente significativas, sugerindo um impacto positivo da experiência de ensino.

A tabela 1 fornece uma análise estatística detalhada dos resultados do pré-teste e pós-teste em múltiplos indicadores dentro dos critérios de Apropriação, Implementação e Explicação. O teste de normalidade Shapiro-Wilk foi utilizado para avaliar a distribuição dos dados e o Teste de Mann-Whitney para comparar as diferenças entre os grupos.

Tabela 1. Comparação entre os resultados do pré-teste e pós-teste por Critério/Indicador entre o Grupo Experimental e o Grupo de Controlo

Critérios de RPMT	Indicadores	Teste de Mann-Whitney Pré-teste			Teste de Mann-Whitney Pós-teste		
		U	Z	Sig.	U	Z	Sig.
Apropriação	Interpretação de enunciados	316.000	- .437	.662	186.000	- 2.795	.005**
	Seleção de dados	306.000	- .620	.535	174.500	- 2.999	.003**
Implementação	Adoção de estratégias	252.500	- 1.616	.106	372.000	- 3.245	.001
	Integração de recursos tecnológicos	278.000	- 1.157	.247	138.500	- 3.672	<.001***
	Exploração dos resultados da integração	301.500	- .728	.466	148.000	- 3.514	<.001***
Explicação	Obtenção da solução	165.000	- 3.288	.001**	183.000	- 2.870	.004**
	Explicação/Justificação da solução obtida	253.000	- 1.651	.003**	243.500	- 1.785	.074

Foram observadas melhorias significativas no pós-teste para os dois indicadores de Apropriação, com valores-p de .005 e .003, respetivamente, o que sugere que a intervenção foi eficaz na melhoria das capacidades de interpretação de enunciados problema e na seleção de dados. Os resultados do pré-teste apresentaram distribuições não normais, destacando a variabilidade inicial nessas capacidades entre os participantes. A intervenção também melhorou as capacidades dos alunos em termos do critério Implementação, como demonstrado pelas melhorias significativas nos resultados do pós-teste para os seus três indicadores, todos com valores-p de .001, <.001 e <.001, respetivamente. Enquanto os dados do pré-teste revelam disparidades existentes antes da intervenção, os resultados do pós-teste indicam um forte impacto da experiência de ensino na adoção de estratégias, integração de recursos tecnológicos e exploração dos resultados dessa integração. Além disso, houve uma melhoria significativa nas capacidades de

Explicação para o indicador obtenção da solução no pós-teste, evidenciada por um valor-p de .004, sugerindo um desenvolvimento das capacidades do GE. Contudo, as mudanças para o indicador explicação/justificação da solução obtida, do pré-teste para o pós-teste, não alcançaram significância estatística, com um valor-p de .074, indicando que este aspecto da explicação pode requerer estratégias instrucionais adicionais ou alternativas para reforço.

Estes resultados, no seu conjunto, sugerem que a experiência de ensino foi particularmente eficaz na melhoria das capacidades de *Apropriação*, *Implementação* e de certos aspectos de *Explicação*. Essas melhorias são estatisticamente significativas, ilustrando que a intervenção teve aparentemente um impacto positivo na capacidade dos alunos de aplicarem as capacidades aprendidas sobre o uso da tecnologia para resolver problemas matemáticos.

Discussão e conclusão

Ao rever os três estudos apresentados, é possível sintetizar algumas conclusões, destacando as suas metodologias distintas, as principais contribuições e os desafios associados ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de matemática com tecnologias dos alunos. O Quadro 1 apresenta uma síntese comparativa entre os três estudos, realçando a sua abordagem metodológica, contributos, resultados e os desafios identificados.

Quadro 1. Síntese comparativa entre os três estudos com foco na abordagem metodológica, nos contributos, resultados e desafios identificados

	Campeonato SUB14	Clube Tecn@Mat	Sala de aula
Abordagem	Qualitativa	Mista (QUAL+quant)	Quantitativa
Contributos	- Processos RPMT - Conceito FTm	- Design do Clube (Objetivos, Tarefas, Recursos, Atividade)	- Experiência de ensino - Avaliar RPMT
Resultados	- Microciclos (Integrar/Interpretar, Integrar/Explorar) - Resolver-e-Expressar	- Aprender a resolver PMT - Desenvolver FTm através de exploração guiada	- Melhorias: Apropriação, Implementação, Explicação (encontrar a solução) - Sem melhoria: "Justificação da solução obtida"
Desafios	- Assente em casos particulares (SUB14 e 3 alunos) - Transferência	- Participantes predispostos para a Matemática, TIC, resolução de problemas	- RPMT para todos - Articulação intencional entre RPMT e temas das AE

O primeiro estudo aqui discutido teve como objetivo documentar e compreender de forma os alunos do 3.º ciclo utilizam tecnologias digitais para resolver problemas não rotineiros num campeonato de matemática extraescolar, o Sub14, explorando as suas estratégias e o raciocínio matemático subjacente. Os contributos principais do primeiro estudo, que adotou uma abordagem qualitativa, incluem o modelo de processos de Resolução de Problemas Matemáticos com Tecnologia (RPMT) e o conceito de Fluência Tecno-matemática (FTM). Os resultados salientaram a identificação de processos que constituem sobretudo dois tipos de microciclos (Integrar/Interpretar e Integrar/Explorar) e evidências que suportam a proposta de que resolver problemas com tecnologias envolve uma capacidade síncrona de matematização e expressão do pensamento matemático. Como principais desafios que emergem deste trabalho, salientam-se a limitação do estudo

a casos particulares paradigmáticos, e a questão da transferência destes resultados para outros contextos.

O segundo estudo, relacionado com o Clube Tecn@Mat, visava examinar o design e a implementação do Clube Tecn@Mat cujo principal propósito residia no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas de matemática com tecnologia. Neste estudo utilizou-se uma metodologia mista, embora tivesse tido um foco predominantemente qualitativo. Este trabalho contribuiu através da caracterização do design e da organização do clube, destacando-se nos resultados o desenvolvimento da aprendizagem dos participantes sobre a resolução de problemas com tecnologias e da sua fluência tecno-matemática por meio de exploração guiada. Uma limitação observada foi a predisposição dos participantes para a matemática e o uso de tecnologias, algo comum ao estudo anterior, mas que pode não ser tão prevalente em contextos de sala de aula.

Por fim, o terceiro estudo analisado pretendeu avaliar o impacto de uma experiência de ensino no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de matemática utilizando várias ferramentas digitais em alunos do 5.º ano de escolaridade. Este estudo adotou um design quase experimental com grupo de controlo, baseou-se na implementação de uma experiência de ensino e na criação de rubricas de avaliação do desempenho dos alunos na resolução de problemas de matemática com tecnologias. Quanto aos principais resultados, observou-se uma melhoria significativa no desempenho do grupo experimental em todos os critérios avaliados e correspondentes indicadores, exceto ao nível da explicação/justificação da solução obtida. Os desafios identificados neste trabalho incluem a promoção da capacidade de resolução de problemas de matemática com tecnologias em todos os alunos e a necessidade de uma articulação intencional com os diversos temas do currículo escolar.

É interessante notar como a literatura mais recente também destaca esta linha de investigação, seja porque as tecnologias digitais estão a mudar a forma como resolvemos problemas (Gros, 2016), ou por reconhecer que o uso de tecnologias digitais para resolver problemas de matemática é uma competência por si só (Liljedahl & Cai, 2021), designada por *Digital Problem Solving*. Outros investigadores têm explorado ideias semelhantes, como Geraniou e Jankvist (2019), ao falar de *digital mathematical competence*, embora partam de um quadro conceptual distinto, que compreende as teorias da génese instrumental e dos campos conceptuais. Já Benjamin Rott et al. (2021), ao discutir modelos normativos e descritivos de resolução de problemas, consideram que o modelo RPMT pode ser visto como um “modelo descritivo de processos reais de resolução de problemas”, sendo, por isso, um recurso adicional valioso para a análise de dados. Nesse trabalho, Rott e colegas propõem ainda outro modelo descritivo que merece destaque e tem interesse para futuras investigações

Os três estudos discutidos nesta conferência, no seu conjunto, ilustram o potencial e os desafios da integração de tecnologia no ensino da matemática, realçando a importância de abordagens metodológicas adaptadas e bem estruturadas para potenciar o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas com tecnologias e a fluência tecno-matemática dos alunos. Este trabalho e a literatura recente revelam que o terreno da integração das tecnologias digitais e dos problemas não rotineiros no ensino de matemática é vasto, mas está ainda pouco explorado. Existem múltiplos desafios que se apresentam aos professores de matemática, desde a gestão curricular, que envolve a articulação da resolução de problemas com outros temas curriculares, até à adequação das tarefas às ferramentas tecnológicas disponíveis. Outras questões que também se destacam são a gestão do tempo e a diferenciação do trabalho dos alunos, especialmente desafiante

quando trazem conhecimentos e experiências tão distintas para a sala de aula. Além disso, ficou também patente que nesta era, *data-driven*, o campo de investigação pode beneficiar do recurso a abordagens de investigação distintas, eventualmente, complementares. Finalmente, as reflexões emergentes desta conferência sugerem a necessidade de uma maior atenção na formação inicial e contínua de professores e uma exploração mais profunda do “pensamento tecno-matemático” dos alunos noutros tipos de atividade matemática (como a modelação), noutros níveis de escolaridade, estendendo-se à educação STEM ou considerando a integração de tecnologias emergentes como a realidade aumentada ou a inteligência artificial.

Referências

- Barbeau, E. J., & Taylor, P. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study*. Springer.
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer.
- Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.
- Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematics problems with technology*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-24910-0>
- Cevikbas, M., Greefrath, G., & Siller, H. S. (2023, April). Advantages and challenges of using digital technologies in mathematical modelling education: A descriptive systematic literature review. *Frontiers in Education*, 8, nr. 1142556.
- Durbin, J. M. (2020). An examination of effects of student math extracurricular participation on math self-efficacy and proficiency. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 20(9).
- English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*, (pp. 263-290). Springer.
- Forgasz, H. J., Vale, C., & Ursini, S. (2010). Technology for mathematics education: Equity, access and agency. *Mathematics education and technology-rethinking the terrain: The 17th ICMI study*, 385-403.
- Geiger, V. (2005). Master, servant, partner and extension of self: a finer grained view of this taxonomy. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice*. MERGA.
- Geraniou, E., & Jankvist, U. T. (2019). Towards a definition of “mathematical digital competency”. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 29–45. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8>
- Gros, B. (2016). The dialogue between emerging pedagogies and emerging technologies. In B. Gros (Ed.), *The future of ubiquitous learning: Learning design for emerging pedagogies* (pp. 3–23). Springer.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2016, July). Mathematics and digital technology: Challenges and examples from design research. *ICME13. ICMI*.
- Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker, A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. Routledge.

- Jacinto, H. (2017). *A atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI*. [Tese de doutoramento não publicada]. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Jacinto, H. (2023). Engaging students in mathematical problem solving with technology during a pandemic: The case of the Tecn@Mat Club. *Education Sciences*, 13(3), 271. <https://doi.org/10.3390/educsci13030271>
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017a). Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1115–1136. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8>
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017b). Different ways of using GeoGebra in mathematical problem-solving beyond the classroom: Evidences of techno-mathematical fluency. *Bolema*, 31(57), 266–288. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13>
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2021). Digital Tools and Paper-and-Pencil in Solving-and-Expressing: How Technology Expands a Student's Conceptual Model of a Covariation Problem. *Journal on Mathematics Education*, 12(1), 113-132.
- Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S., & Amado, N. (2018). Different levels of sophistication in solving and expressing mathematical problems with digital tools. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A Focus on Technology, Creativity and Affect*, (pp. 15-41). Springer.
- Kennedy, E., & Smolinsky, L. (2016). Math Circles: A Tool for Promoting Engagement Among Middle School Minority Males. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(4), 717-732. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1223a>
- Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 307–324). Springer.
- Kuzle, A. (2017). Delving into the nature of problem solving processes in a dynamic geometry environment: Different technological effects on cognitive processing. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 37-64. <https://doi.org/10.1007/s10758-016-9284-x>
- Lesh, R. & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism – models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 763-804). Information Age Publishing and NCTM.
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 53, 723–735.
- Martin, A. & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and tools for digital literacy development. *Innovation in Teaching and Learning in Information and Computer Sciences*, 5(4), 249–267.
- Mueller, M., & Maher, C. (2009). Learning to reason in an informal math after-school program. *Mathematics Education Research Journal*, 21(3), 7-35. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Muir, T., Beswick, K., & Williamson, J. (2008). “I’m not very good at solving problems”: An exploration of students’ problem solving behaviours. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 228-241.

- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-54.
- Papanastasiou, E. C., & Bottiger, L. (2004). Math clubs and their potentials: Making mathematics fun and exciting. A case study of a math club. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(2), 159-171.
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 737-752. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3>
- Saadati, F., & Felmer, P. (2021). Assessing impact of a teacher professional development program on student problem-solving performance. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 799-816. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01214-1>
- Santos-Trigo, M., & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some mathematics education frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), 81-106.
- Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 1–2, 279–302.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic.
- Simões, A. C. (2024). *Tecnologias digitais na resolução de problemas de matemática: Uma experiência de ensino no 5.º ano do ensino básico*. [Unpublished master dissertation]. Universidade de Lisboa. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/64245>
- Sinclair, N. (2020). On teaching and learning mathematics–technologies. In Y. Kolikant, D. Martinovic, & M. Milner-Bolotin (Eds.), *STEM teachers and teaching in the digital era* (pp. 91-107). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29396-3_6
- Stahl, G. (2009) (Ed.). *Studying Virtual Math Teams*. Springer.
- Stott, D., Baart, N., & Graven, M. (2019). Partnering with districts to expand an after-school maths club programme. *Africa Education Review*, 16(6), 183-200.
- Turner, J. C., & Meyer, D. K. (2004). A classroom perspective on the principle of moderate challenge in mathematics. *The Journal of Educational Research*, 97(6), 311-318.
- Zevenbergen, R., & Zevenbergen, K. (2009). The numeracies of boatbuilding: new numeracies shaped by workplace technologies. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 183-206.

BUILDING THINKING CLASSROOMS: A SUMMARY OF 15 YEARS OF RESEARCH¹²

Peter Liljedahl

Simon Fraser University, Canada

liljedahl@sfu.ca

Abstract: Student difficulty with mathematics has been a pervasive and systemic problem since the advent of public education—not because students can't learn mathematics, but because, by and large, students can't learn it by being told how to do it. Since the publication of the NCTM Principles and Standards (1998) there has been a concerted effort to change this reality by transitioning to more progressive and student-centered pedagogies. And progress has been made. Yet, something is still missing. Systemically, we are still struggling with high failure rates, low self-efficacy, and massive student disengagement. In this article I look at the results of a research project that was specifically designed to change this reality by finding ways to get students to think. The results of this work show that there are a collection of teaching practices that any teacher can use to turn their classroom into a space where students think, learn, and succeed.

What is missing?

Over 15 years ago I reached out to my connections in the teaching community and asked them to recommend to me teachers that they had heard were good mathematics teachers—teachers who were respected within their schools and within the school division and were known to have students who perform well in mathematics. Based on these recommendations I visited 40 classrooms in 40 different schools. I visited classrooms of every grade from kindergarten to grade 12. I was in low socio-economic settings and high socio-economic settings, English-speaking classrooms and French-speaking classrooms, urban schools and rural schools, and I was in public schools and private schools. And in every classroom I visited, I saw the same thing—**students not thinking**. Students were not thinking in ways that we know they need to in order to be successful in mathematics. Closer investigations (Liljedahl & Allan, 2013a) revealed that within a 60 minute lesson, 20% of students spent 8-12 minutes thinking while 80% spent zero minutes thinking. What they were doing instead was mimicking—watching what the teacher was doing and then just copying them. This is a problem. Thinking is a necessary precursor to learning (Lucariello, J. et. al., 2017; Seel, 2012) and if students are not thinking they are not learning—and students were not thinking. This is what has been missing.

At the same time, however, everywhere I went I saw hardworking and dedicated teachers. These were teachers who knew their content, who cared about their students, and who worked hard to ensure that their students learned the content. No one was falling through the cracks. Yet, in every class I visited, I saw students not thinking.

¹ Texto originalmente publicado em: Liljedahl, P. (2023). Building Thinking Classrooms. A Summary of 15 Years of Research. In T. Fritzlar & B. Rott (eds.) Wenn es sein muss, dann halt in Distanz Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2021, pp. 2-14.

² Parts of this text are drawn from an executive summary of the book *Building Thinking Classrooms in Mathematics (Grades K-12): 14 Teaching Practices for Enhancing Learning* (Liljedahl, 2020).

On my journey through these schools and classrooms, other patterns also emerged. Everywhere I went, irrespective of grade or demographic, classrooms looked more alike than they looked different. And what happened in those classrooms looked more alike than it looked different. Desks or tables were usually oriented towards a discernible front of the classroom. Toward this front was a teacher desk, some sort of vertical writing space for the teacher, and some sort of a vertical projection space. Students sat, while the teacher stood. Students wrote on horizontal surfaces while the teacher wrote on vertical ones. And the lessons mostly followed the same rhythm of lecture, note taking, student activity, and homework.

These normative structures that permeate classrooms in North America, and around the world, are so entrenched that they transcend the idea of classroom norms (Cobb, Wood, & Yackel, 1991; Yackel & Cobb, 1996) and can only be described as ***institutional norms*** (Liu & Liljedahl, 2012)—norms that have extended beyond the classroom, even the school building, and have become ensconced in the very institution of *school*. Much of how classrooms look and much of what happens in them today is guided by these institutional norms—norms which have not changed since the inception of an industrial-age model of public education (Egan, 2002; Liljedahl, 2022). Yes, desks look different now, and we have gone from blackboards to greenboards to whiteboards to smartboards, but students are still sitting, and teachers are still standing. And students are not thinking. Although there have been a lot of innovations in assessment, technology, and pedagogy, much of the foundational structure of *school* remain the same.

Everywhere I went I saw students not thinking. And everywhere I went, I saw entrenched and systemic institutional norms. I wondered if these issues were connected? Could the very institutional norms that permeate all schools and all classrooms actually be perpetuating the non-thinking behaviors I was observing? If this was true, that meant we would need to fundamentally alter the institutional norms to get students to think.

How do we get students to think?

This assumption became the basis of my research, and for the next 15 years I worked with over 400 K-12 teachers to try to break through any and all institutional norms and get students to think (Liljedahl, 2020, 2016). The goal was simple—try to increase the number of students thinking and try to increase the number of minutes during which students were thinking. My work, in this regard was organized around the 14 factors that make up the core of every teacher’s practice.

1. What are the types of tasks we use.
2. How we form collaborative groups.
3. Where students work.
4. How we arrange the furniture.
5. How we answer questions.
6. When, where, and how we give tasks.
7. What homework looks like.
8. How we foster student autonomy.
9. How we use hints and extensions to further understanding.
10. How we consolidate a lesson.
11. How students take notes.
12. What we choose to evaluate.
13. How we use formative assessment.
14. How we grade.

This list is comprehensive. Everything we, as teachers, do in the classroom is an enactment of one of these factors and how we enact each of these factors is what forms our teaching practice—our unique teaching practice. These factors became the variables we systematically experimented with in our efforts to increase thinking in the classroom. What we were looking for were practices, for each factor, that generated more thinking than the institutionally normative practices I had observed. And of these practices, we were looking for the practices that generated the most thinking—what we eventually came to call the *optimal practice for thinking*. And we found them. Slowly at first. But over the next 15 years they all emerged along with an optimal sequence for introducing each of these optimal practices into the classroom—what I came to call the *Building Thinking Classroom Framework* (see figure 1). Each of these practices is explained in the next section.

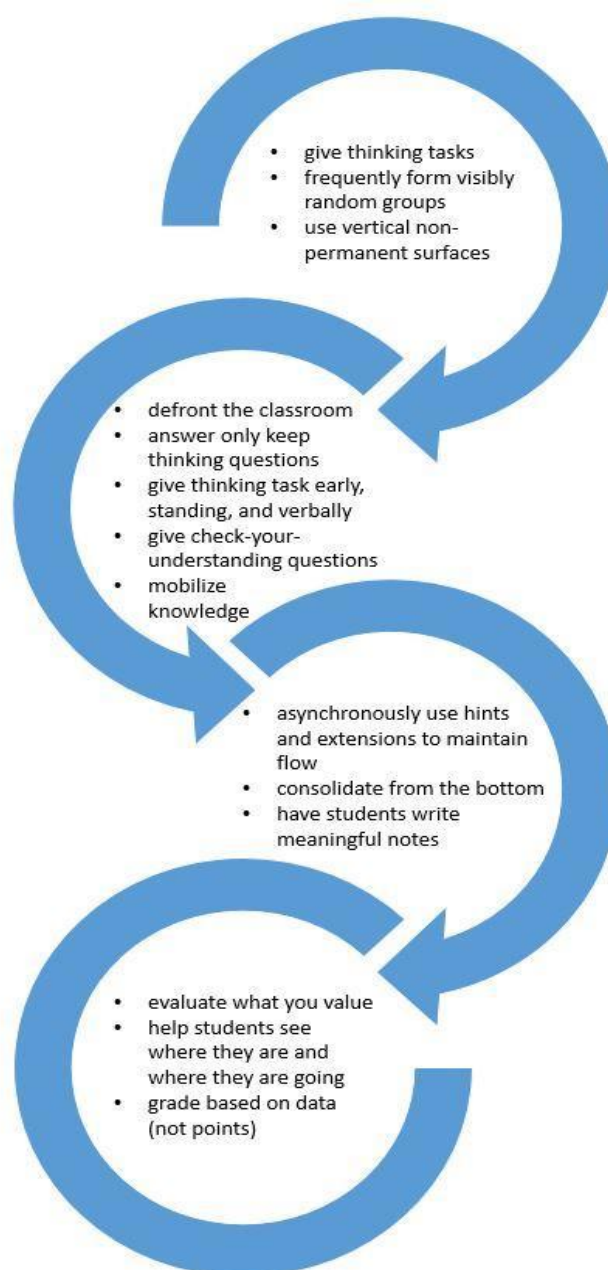


Figure 1. The Building Thinking Classroom Framework

How do we build a thinking classroom in mathematics?

In the book, *Building Thinking Classrooms in Mathematics (Grades K-12): 14 Teaching Practices for Enhancing Learning* (Liljedahl, 2020), I explore each of these 14 optimal practices, beginning with a deep dive into what are the institutionally normative practices that permeate many classrooms around the world. I reveal how each of these practices are working against our efforts to get students to think, and then offer a clear presentation of what my research revealed to be the optimal practice for each variable. In what follows, I summarize some of the results of each of these 14 practices.

What are the types of tasks we use in a thinking classroom

If we want our students to think, we need to give them something to think about—something that will not only require thinking but will also encourage thinking. In mathematics, this comes in the form of a task, and having the right task is important. The research revealed that ***we have to give thinking tasks***. When first starting to build a thinking classroom it is important that these tasks are highly engaging non-curricular tasks. As the culture of thinking begins to develop, we transition to using curriculum tasks. The goal, however, is not to get students to think about engaging non-curricular tasks day in and day out—that turns out to be rather easy. Rather, the goal is to get more of your students thinking, and thinking for longer periods of time, within the context of curriculum and curriculum tasks (Liljedahl, in press).

How we form collaborative groups in a thinking classroom

We know from research that student collaboration, when it functions as intended, has a powerful impact on learning (Edwards & Jones, 2003; Hattie, 2009; Slavin, 1996). How we have traditionally been forming groups, however, makes it very difficult to achieve the powerful learning we know is possible. Whether we group students strategically (Dweck & Leggett, 1988; Hatano, 1988; Jansen, 2006) or we let students form their own groups (Urdan & Maehr, 1995), we found that 80% of students enter these groups with the mindset that, within this group, their job is not to think. However, when we frequently formed *visibly random groups*, within six weeks 100% of students entered their group with the mindset that they were not only going to think, but that they were going to contribute. In addition, frequent and visible random groupings was shown to break down social barriers within the room, build community, increase knowledge mobility, reduce stress, and increase enthusiasm for mathematics (Liljedahl, 2014).

Where students work in a thinking classroom

One of the most enduring institutional norms that exists in mathematics classrooms is students sitting at their desks (or tables) and writing in their notebooks. This turned out to be the workspace least conducive to thinking. What emerged as optimal was to have the students standing and working on *vertical non-permanent surfaces (VNPS)* such as whiteboards, blackboards, or windows. It did not matter what the surface was, as long as it was vertical and erasable (non-permanent). The fact that it was non-permanent promoted more risk-taking and the fact that it was vertical prevented students from disengaging. Taken together, having students work, in their random groups, on VNPS had a massive impact on transforming previously passive learning spaces into active thinking spaces where students think, and keep thinking, for upwards of 60 minutes (Liljedahl, 2019).

How we arrange the furniture in a thinking classroom

At its core, a classroom is just a room with furniture. Absent the students and the teacher, a classroom is an inert space waiting to be inhabited, waiting to be used, waiting for thinking to happen. This is not to say that the classroom, in its inert form, has no role in what happens in it—it actually has a huge role in determining what kind of learning can take place in it. The research showed that rectilinear and fronted classrooms promote passive learning. On the other hand, a *defronted classroom*—a classroom where students sit facing every which way—was shown to be singularly most effective way to organize the furniture in the room to induce student thinking.

How we answer questions in a thinking classroom

A typical teacher will answer between 200 and 400 questions in a day, all of which fall into one of three categories: (1) *proximity questions*—the questions students ask when you happen to be close by to show you that they are working, (2) *stop-thinking questions*—the questions students ask so they can reduce their effort, the most common of which is, “Is this right?”, and (3) *keep-thinking questions*—the questions students ask so they can keep working, keep trying, and keep thinking, such as, “To be clear, they all have to lie on a straight line”, or “Can we do it for a 4x4 x4 now?” The research showed that 90% of the questions that students ask are either proximity questions or stop-thinking questions and that answering these is antithetical to building a culture of thinking and a culture of learning. To build a thinking classroom we need to *answer only keep-thinking questions*.

When, where, and how tasks are given in a thinking classroom

In typical classrooms, tasks are given to students textually—from a workbook or textbook, written on the board, or projected on a screen. Interestingly, asking students to do a task from a workbook or textbook produced less thinking than if the same task was written on the board. It matters how we give the task. It turns out to also matter when in the lesson we give the task and where the students are when the task is given. The research showed that a task given in *the first five minutes of a lesson* produces significantly more thinking than the same task given later in the lesson. Likewise, students thought more and began to think sooner when the task was given to them while they were *standing in loose formation around the teacher* than if it was given while they were sitting at their desks. Finally, the research also showed that, although giving a task by writing it on the board produced more thinking than assigning it from a workbook or textbook, *giving a task verbally* produced significantly more, and different types of, thinking.

What homework looks like in a thinking classroom

Homework, in its current institutionalized normative form as daily iterative practice to be done at home, doesn’t work (Liljedahl & Allan, 2013b). Almost every teacher I have interviewed says the same thing—the students who need to do their homework don’t, and the ones who do their homework are the ones who don’t really need to do it. The research confirmed this. The problem, it turns out, has to do with who students perceive homework is for (the teacher) and what it is for (grades) and how this differs from the intentions of the teacher in assigning homework (for the students to check their understanding). By rebranding homework as *check-your-understanding questions* and positioning it as an opportunity rather than a requirement we saw significant changes in how students engaged with the practice and how they now approached it as a form of feedback on their thinking.

How we foster student autonomy in a thinking classroom

A Thinking classroom looks very different from a typical classroom. Students are working in groups rather than individually, they are standing rather than sitting, and the furniture is arranged so as to *defront* the room. Closer inspection will reveal that the teacher is giving instructions verbally, answering fewer questions, and has drastically altered the way they give “homework”. All of these changes require a greater independence on the part of the students and for thinking classrooms to function well this independence needs to be fostered. But not just independence in general. To really access the potential of a thinking classroom, students need to learn to look at the work of their peers (Pruner & Liljedahl, 2021)—to make use of the knowledge that exists in the room and to *mobilize that knowledge* to keep themselves thinking when they are stuck and need a push or when they are done and need a new task.

How we use hints and extensions in a thinking classroom

Mathematics teaching, since the inception of public education, has largely been built on the idea of synchronous activity—students write the same notes at the same time, they do the same questions at the same time, etc. From a teacher’s perspective, this is an efficient strategy that, on the surface, allows us to transmit large amounts of content to groups of 20 to 30 students at the same time. If we go under the surface, however, we realize that students’ abilities are more different than they are alike and the idea that they can all receive, and process, the same information at the same time is outlandish. Decades of work on differentiation is built on the realization that students learn differently, at different speeds, and have different mental constructs of the same content. What this work is telling us is that students need teaching built on the idea of asynchronous activity—activities that *meet the learner where they are* and are customized for their particular pace of learning. The research showed that, in order to foster and maintain thinking, we need to asynchronously give groups *hints and extensions to keep them in flow* (Liljedahl 2018)—“*a state in which people are so involved in an activity that nothing else seems to matter; the experience is so enjoyable that people will continue to do it even at great cost, for the sheer sake of doing it.*” (Csíkszentmihályi, 1990, p. 4).

How we consolidate a lesson in a thinking classroom

In a thinking classroom, consolidation is of the utmost importance in every lesson. Through consolidation we are able to bring together the disparate parts of a task or an activity and help students to solidify their experiences into a cohesive conceptual whole. For over 100 years, this has involved teachers showing, telling, or explaining the learning that the teachers desired for the students to have achieved (Schoenfeld, 1985). This doesn’t work—students, by and large, don’t learn by being told how to do it. In a thinking classroom, consolidation takes an opposite approach—*working upwards from the basic foundation of a concept and drawing on student work produced during their thinking on a common set of tasks.*

How students take notes in a thinking classroom

Having students take notes is another one of the most enduring institutional norms that permeate mathematics classrooms all over the world. Teachers engage in this activity for two reasons: (1) it creates a record for students to look back at in the future, and (2) it is a way for students to solidify their own learning. However, the research showed that less than 20% of students actually looked back at their notes and, while they were writing the notes, the vast majority of students were so disengaged that there was no solidifying of

learning happening. So, although done with noble intentions, having students write notes was a mindless activity. In a thinking classroom, on the other hand, notes are a mindful activity involving students deciding for themselves *what notes their future self will need*. The research showed that this way of taking notes kept students thinking while they wrote the notes and that the majority of students referred back to these self-created notes in both the near and far future.

What we choose to evaluate in a thinking classroom

When asked what competencies they value most among their students, and which competencies they believe are most beneficial to students' thinking, teachers will give some subset of perseverance, willingness to take risk, ability to collaborate, patience, curiosity, autonomy, self-responsibility, grit, positive views, self-efficacy, and so on. The question is, if these are the most valuable competencies for students to possess, how do we then develop and nurture these competencies in our students? It turns out that the answer to this question is to *evaluate what we value*. This is not to say that we stop evaluating students' abilities to demonstrate individual attainment of curriculum outcomes. But, if we value perseverance, then we need to also find a way to evaluate it. If we value collaboration, then we need to also find a way to evaluate it. What we choose to evaluate tells students what we value and, in turn, students begin to value it as well. But it turns out that *how* we choose to evaluate is just as important as *what* we choose to evaluate. And the optimal practice for evaluating these valuable competencies turns out to be a particular type of the three-column rubric that emerged out of the research (see figure 2 for an example of what a collaboration rubric can look like).

		
• closed minded to others' ideas • disrespectful of others • actively excluding • hogging the marker • discouraging		• open minded to others' ideas • respectful of others • actively inclusive • sharing the marker • encouraging

Figure 2. A collaboration rubric

How we use formative assessment in a thinking classroom

Summative assessment has typically been defined as the gathering of information for the purpose of informing grading and was the dominant objective of assessment and evaluation for much of the 20th century. On the other hand, formative assessment has been defined as the gathering of information for the purpose of informing teaching and has stood as the partner to summative assessment for much of the 21st century. The problem is that, even within this more progressive paradigm, the needs of the learners have continued to be ignored. If we want our students to be active partners in their learning, we need to find ways to use formative assessment to inform both teaching (and teachers) and learning (and learners). The research into how best to do this revealed that when we *find ways to help students understand both where they are (what they know) and where they are going (what they have yet to learn)* not only do they become more active in their learning and thinking, but their performance on unit tests can improve upwards of 10-15%.

How we grade in a thinking classroom

For the last 25 years, there has been a movement in assessment and evaluation to shift away from what is sometimes referred to as *events-based grading* and towards *outcomes-based grading* (also known as standards-based or evidence-based grading). The benefits of this shift are many—from increased students’ agency to increased student performance (O’Conner, 2009; Stiggins, Arter, Chappuis, & Chappuis, 2006). What this looks like in a thinking classroom, it turns out, is closely linked to how we do formative assessment and involves not only the *gathering of information of what students are capable of vis-à-vis specific outcomes or standards*, but also a *folding back of this information to the students* to inform their learning.



When all 14 of these optimal practices are enacted in concert, a teacher will have a classroom that is not only conducive to thinking but also *requires* it. They will have a space that is inhabited by thinking individuals as well as individuals thinking collectively, learning together, and constructing knowledge and understanding through activity and discussion. *They will have built a thinking classroom.*

This work has taken an incredibly long time to develop, but now that it is at its current state and with the publication of the book (Liljedahl, 2020) there are teachers all over the world using these practices to great effect. Teachers in Canada, USA, Sweden, Finland, Norway, Denmark, Italy, Germany, Turkey, Chile, and Australia have been building thinking classrooms in droves. There are 19000 teachers from all over the world that are part of the Building Thinking Classrooms Facebook group and there is endless traffic on Twitter under the hashtag #thinkingclassroom. These teachers are reporting more engaged students and greater satisfaction with their job as teachers.

At its core, I think the success of thinking classrooms lies in the fact that the research was done with teachers and by teachers in real classrooms. The practices that emerged out of such research are anchored from start to finish in the reality of the classroom and, as such, are practices that teachers find connection with and are willing to use.

References

- Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1991). Analogies from the philosophy and sociology of science for understanding classroom life. *Science Education*, 75(1), 23-44.
- Csikszentmihályi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. Harper and Row.
- Dweck, C., & Leggett, E. (1988). A social-cognitive approach to motivation and personality. *Psychological Review*, 95, 256-273.
- Edwards, J., & Jones, K. (2003) Co-learning in the collaborative mathematics classroom. In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.) *Collaboration in teacher education. Mathematics teacher education*, vol 1. Springer, Dordrecht.
- Egan, K. (2002). *Getting it wrong from the beginning: Our progressivist inheritance from Herbert Spencer, John Dewey, and Jean Piaget*. New Haven, CT: Yale University Press.

-
- Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child Development*, 41, 55-70.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge
- Jansen, A. (2006). Seventh graders' motivations for participating in two discussion-oriented mathematics classrooms. *Elementary School Journal*, 106(5), 409-428.
- Liljedahl, P. (under review). Innovation in the teaching of mathematics: Rethinking the foundational principles that underpin teaching. *Proceedings of the Singapore National Academy of Science*.
- Liljedahl, P. (in press). Flow and variation theory: Powerful allies in creating and maintaining thinking in the classroom. In R. Leikin (Ed.) *Research in mathematics education on the mathematical challenges*. New York, NY: Springer.
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics (Grades K-12): 14 teaching practices for enhancing learning*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press Inc.
- Liljedahl, P. (2019). Conditions for supporting problem solving: Vertical non-permanent surfaces. In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.) *Mathematical problem solving: Current themes, trends, and research*, (pp. 289-310). New York, NY: Springer.
- Liljedahl, P. (2018). On the edges of flow: Student problem solving behavior. In S. Carreira, N. Amado, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect* (pp. 505-524). New York, NY: Springer.
- Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pekhonen (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. New York: Springer.
- Liljedahl, P. (2014). The affordances of using visibly random groups in a mathematics classroom. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*, (pp. 127-144). New York, NY: Springer.
- Liljedahl, P., & Allan, D. (2013a). Studenting: The case of "now you try one". In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Kiel, Germany: PME.
- Liljedahl, P., & Allan, D. (2013b). Studenting: The case of homework. *Proceedings of the 35th Conference for Psychology of Mathematics Education – North American Chapter*, (pp. 489-492). Chicago, USA.
- Liu, M., & Liljedahl, P. (2012). 'Not normal' classroom norms. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 300). Taipei, Taiwan.
- Lucariello, J. et. al. (2017). Top 20 Principles from Psychology for PreK–12 Teaching and Learning. Center for Psychology in Schools and Education Directorate, American Psychological Association (APA). Retrieved on April 10, 2022 from: <https://www.apa.org/ed/schools/teaching-learning/top-twenty-principles.pdf>
- NCTM (1998). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- O'Connor, K. (2009). *How to grade for learning*. Thousand Oaks, CA: Corwin.
- Pruner M., & Liljedahl, P. (2021). Collaborative problem solving in choice-rich environments. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 53(4), 753-770.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

-
- Seel, N. M. (2012) Learning and Thinking. In N. M. Seel (Ed.) *Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Springer, Boston, MA.
- Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology*, 21, 43-69.
- Stiggins, R., Arter, J., Chappuis, J., & Chappuis, S. (2006). *Classroom assessment for student learning: Doing it right—Using it well*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Urdan, T., & Maehr, M. (1995). Beyond a two-goal theory of motivation and achievement: A case for social goals. *Review of Educational Research*, 65(3), 213–243.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in mathematics Education*, 27(4), 458-477.

GRUPO DE DISCUSSÃO 1

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

PROBLEM SOLVING AND THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS

Rosa Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, Portugal

rferreir@fc.up.pt

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

lurdess@eselx.ipl.pt

Ana Caballero-Carrasco

Universidad de Extremadura, España

acabar@unex.es

A resolução de problemas, onde se inclui as formas como os problemas são representados, os significados da linguagem matemática, as formas como se conjectura e se raciocina, é considerada a atividade principal da matemática (e.g., Liljedhal et al., 2016). Além disso, através da resolução e da formulação de problemas os alunos têm oportunidade de construírem aprendizagens significativas (e.g., Cai & Lester, 2010; Calabrese et al., 2022; Liljedhal & Cai, 2021). Assim, devem ter oportunidades de discutir com os colegas e com o professor, de argumentar, de criticar, de interagir por forma a haver uma partilha de ideias, de estratégias, de raciocínios, de pensamentos matemáticos e de desenvolver a sua capacidade de comunicação (Canavaro et al., 2021; Carvalho e Silva et al., 2023; NCTM, 2017).

Considera-se como problema uma situação onde estejam presentes as duas características seguintes. (i) trata-se de uma situação claramente apresentada e bem definida para a qual se pretende uma solução; (ii) o resolvidor não tem um procedimento que conduza imediatamente à solução (Polya, 1978; Ponte, 2005, 2014). Através da resolução de problemas, ~~realizada~~ num ambiente propício e favorável, o aluno realiza conjecturas, relaciona conceitos, generaliza, avança nos procedimentos num contexto significativo, numa atitude reflexiva, desenvolvendo a sua capacidade de raciocínio e o seu pensamento matemático. A resolução de problemas é, pois, uma importante atividade matemática, possibilitando que os alunos aprendam matemática fazendo matemática (Krulik & Rudnik, 1993; NCTM, 2007, 2017; Stein & Smith, 1998).

Em Portugal, desde o início dos anos noventa, os programas de Matemática consideram a resolução de problemas como um dos principais (ou o principal) objetivos do ensino da Matemática (e.g., Canavaro et al., 2021; Carvalho e Silva et al., 2023; ME, 1991, 1997, 2018; MEC, 2013, 2015; Ponte et al., 2007). Apesar de a ênfase na atividade da resolução

de problemas nos currículos ter sofrido algumas flutuações ao longo do tempo, nomeadamente no seu papel como objetivo de aprendizagem, conteúdo programático ou metodologia de ensino, o facto de ser uma constante nas orientações curriculares é suficiente para que os investigadores em Educação Matemática se envolvam, mais uma vez, na discussão sobre qual o seu contributo para a aprendizagem da Matemática. De facto, continuam atuais as palavras de Vale et al. (2015, p. 39): “Apesar dos enormes avanços conseguidos na área da investigação em resolução de problemas, o seu impacto no currículo e sobretudo na sala de aula de matemática de modo a produzir bons resolvidores de problemas tem sido muito limitado”.

Reúnem-se aqui nove contribuições para este grupo de discussão, focado nas questões que associam a resolução de problemas ao ensino e à aprendizagem da matemática. As três primeiras contribuições focam-se nos processos de resolução de problemas de alunos do ensino secundário e no papel que as conexões podem ter tanto na compreensão dos conceitos envolvidos, como no desenvolvimento de várias capacidades transversais, entre as quais a comunicação matemática, as representações matemáticas e o pensamento crítico.

Letícia Martins e Maria Helena Martinho debruçam-se sobre as dificuldades que alunos do 11.º ano manifestam na resolução de problemas e na comunicação escrita do seu pensamento nesse processo. Partindo de um sistema de categorias por elas desenvolvido, baseado na literatura revista e em trabalhos anteriores, analisam as resoluções de seis grupos de alunos a um problema, assim como a forma como comunicam a forma como pensaram. As autoras identificaram várias dificuldades nestes processos, sendo que dois dos grupos manifestaram dificuldades apenas ao nível da comunicação matemática escrita. Da análise das restantes resoluções, foram identificadas dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado do problema, com a recolha de informação pertinente para a sua resolução, com a escolha de uma estratégia adequada e também com a necessidade de manter uma postura de persistência. De acordo com as atuais *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário* (Carvalho e Silva, 2023), a resolução de problemas é uma atividade que proporciona oportunidades para o estabelecimento de conexões entre conceitos e o desenvolvimento simultâneo de outras capacidades transversais, entre elas a comunicação matemática. A identificação das dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas e na expressão escrita do seu pensamento ao resolver problemas dão aos professores informações relevantes para poderem ir ao encontro das necessidades dos alunos, e dão aos alunos elementos importantes para que possam ultrapassar essas mesmas dificuldades, numa perspetiva reguladora da aprendizagem.

Com vista a perceber que papel desempenham as conexões na compreensão de conceitos associados ao tópico das funções, ao nível do ensino secundário, Guilherme Ferreira, Helena Rocha e Alexandra Rodrigues propõem-se investigar como os alunos resolvem problemas envolvendo conexões entre conceitos, procedimentos e representações, no âmbito do estudo das funções, e como as conexões podem contribuir para uma compreensão mais relacional (Skemp, 1978) dos diferentes tópicos associados ao tema das funções. O recurso a representações múltiplas (Amado, 2022; Canavarró 2017) surgiu como uma estratégia que contribuiu para uma melhor compreensão das situações problemáticas, facilitando também a sua resolução. Por seu turno, as conexões matemáticas pareceram contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos, sobretudo quando estes se associavam a contextos da realidade ou da semirrealidade (Skovsmose, 2000), destacando-se uma compreensão mais profunda dos símbolos. Além disso, as conexões, sobretudo com o mundo real, facilitam a deteção, pelos alunos, de

erros cometidos. Contudo, o papel do professor é determinante nas ações a desenvolver, pelos alunos, após essa detecção, no sentido de ultrapassar os erros identificados.

Ainda envolvendo alunos do ensino secundário, Rosana Kripka, Paula Boito e Moacir Kripka trazem considerações sobre as potencialidades da realização de projetos envolvendo conexões entre diferentes áreas do saber para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Em particular, a experiência interdisciplinar (Tomaz & David, 2011) sobre a qual os autores se debruçam visou tópicos de trigonometria e resolução de sistemas, assim como equilíbrio e decomposição de forças, interligando a matemática e a física. Num ambiente de competição entre grupos, os projetos de construção de pontes com esparguete e cola quente permitiram ressignificar os conceitos já abordados nas duas disciplinas envolvidas, contribuindo para uma melhor compreensão dos mesmos e para o desenvolvimento de uma atitude face à matemática mais positiva.

Um segundo conjunto de contribuições para este grupo de discussão centra-se em aspetos relacionados com a resolução de problemas por alunos dos primeiros anos, desde o 1.º ano ao 5.º do ensino básico. Marta Teixeira, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte apresentam um trabalho focado nos contributos que uma tarefa (integrada numa sequência de tarefas dirigida a alunos dos 3.º e 4.º anos do ensino básico) pode trazer para a compreensão da relação entre o uso de diferentes unidades de medida e o cálculo das respetivas medidas de área. Numa abordagem exploratória ao ensino (Oliveira et al., 2013), é dado destaque ao papel do professor, nomeadamente no que toca à gestão da discussão coletiva das resoluções dos alunos (Stein et al., 2008) e às ações do professor (Ponte et al., 2013) que promovem uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos. A utilização, pelos alunos, de unidades de medida não padronizadas permitiu que eles encontrassem estratégias diversificadas para a medição da área, estabelecendo relações entre as unidades de medida, entre as unidades de medida e as respetivas medidas de área, e entre medidas relativas a unidades de medida distintas.

Belén Palop e Rocío Garrido-Martos procuram identificar se existem diferenças de género nas abordagens de alunos do 5.º ano do sistema espanhol (correspondente ao 6.º ano do ensino básico português) ao resolver um problema aritmético composto. Os resultados sugerem que as raparigas tendem a ser mais organizadas do que os rapazes na forma como abordam o problema, recorrendo a esquemas ou diagramas como apoio à resolução. As diferenças de género mostram-se mais evidentes no que toca ao nível de autoconfiança na resolução do problema. Mesmo quando resolvem corretamente o problema, as raparigas mostram-se menos autoconfiantes do que os rapazes; pelo contrário, mesmo quando cometem incorreções na resolução do problema, os rapazes mostram-se mais autoconfiantes no seu desempenho do que as raparigas. Os resultados deste estudo trazem contribuições importantes para a prática do professor, nomeadamente na promoção da equidade em sala de aula, em linha com as recomendações do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2017).

Trabalhando com alunos da mesma faixa etária, Andrea de la Fuente Silva, Juan José Santaengracia, Rocío Garrido-Martos e Gonzalo Ramírez-Fernández debruçam-se sobre a atividade de formulação de problemas, destacando a sintaxe do problema formulado, a complexidade da solução do ponto de vista matemático e a análise semântica (Espinoza-González et al., 2015). Os resultados sugerem que os alunos tendem a formular problemas recorrendo a cerca de três frases, privilegiando os números naturais relativamente grandes e uma estrutura aditiva ou multiplicativa. Os autores destacam ainda a relevância de uma análise de atividades de formulação de problemas, na medida em que pode apoiar os professores em processos de avaliação diagnóstica (Cai & Hwang, 2020), ficando melhor

equipados para reformular práticas de ensino de modo a ir ao encontro das necessidades dos alunos e a melhor responder à diversidade.

Mariana Branco e Ema Mamede apresentam um trabalho em que procuram compreender que estratégias de resolução de problemas os alunos desenvolvem, no início do 1º ano de escolaridade, ainda sem terem competências de escrita ou leitura. Com base numa intervenção de quatro sessões de duas horas cada uma, foram propostos aos alunos 11 problemas, progressivamente mais desafiantes. Partindo das suas produções e das explicações aos colegas sobre a forma como tinham resolvido os problemas, foi possível observar uma transição gradual de estratégias de resolução informais para estratégias apoiadas em desenhos e esquemas, privilegiando as representações visuais. Os resultados, em linha com Clements et al. (2020) e Tjoe (2019), reforçam a importância de os alunos desenvolverem diversas estratégias informais de resolução de problemas desde o início do seu percurso escolar, e de progressivamente recorrerem a estratégias mais formais, valorizando as representações visuais, incluindo representações próprias.

As duas últimas contribuições para este grupo de discussão centram-se na aprendizagem da estatística. Luis Maya-Jaramillo, Luis Manuel Casas-García e Ana Caballero-Carrasco discutem como os contextos financeiros podem contribuir para a aprendizagem de conceitos estatísticos ao nível da educação primária em Espanha, o que equivale ao 5.º ano do ensino básico português. Focando-se na interpretação de gráficos, no uso de termos estatísticos, e na comunicação escrita acerca de tópicos de educação financeira, os autores sugerem que os contextos de educação financeira aproximam a estatística dos alunos, chamando a atenção para a importância dos contextos das tarefas (Alsina et al., 2023). Deste modo, situações contextualizadas em assuntos de educação financeira proporcionam oportunidades de aprendizagem mais significativa dos conceitos estatísticos, ao mesmo tempo que os alunos desenvolvem competências úteis para o século XXI.

Por fim, Mónica Patrício e Ana Paula Canavarro, assumindo as investigações estatísticas como tarefas de natureza problemática, procuram identificar os desafios que o professor encontra, nas várias fases de uma investigação estatística (Martins & Ponte, 2010), relativamente ao seu conhecimento do ensino da estatística. Seguindo uma abordagem de estudo de caso, uma das principais dificuldades encontradas pela professora participante foi conseguir realçar, para os alunos, a importância de cada fase de uma investigação estatística, diferenciando as várias fases. Desafios como reduzir o nível cognitivo das subtarefas de cada fase (Stein & Smith, 1998), monopolizar o discurso da sala de aula (Brendefur & Frykholm, 2000) de modo a que os resultados esperados surgissem e envolver-se em tomadas de decisão que deviam ser deixadas aos alunos foram frequentes e evidenciaram a necessidade de um maior investimento no desenvolvimento do conhecimento do ensino da estatística. De facto, uma das recomendações decorrentes deste estudo é precisamente a necessidade de uma maior atenção ao conhecimento didático do professor (Ponte & Oliveira, 2002) no que à estatística diz respeito, em linha com Quintas et al. (2015) e dada a crescente importância do desenvolvimento da literacia estatística nas orientações curriculares mais recentes, nacionais e internacionais (Canavarro et al., 2021; Carvalho e Silva et al., 2023; NCTM, 2017).

Referências

- Alsina, Á., Muñiz-Rodriguez, L., Rodriguez-Muñiz, L. J., García-Alonso, I., Vázquez, C., y López-Serentill, P. (2023). Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes. *Revista Complutense de Educación*, 34(1), 95-108.
- Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, 166, 2-6.
- Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Problem Solving Research Brief. National Council of Teachers of Mathematics.
- Calabrese, J. L., Capraro, M. M., & Thompson, C. G. (2022). The relationship between problem posing and problem solving: A systematic review. *International Education Studies*, 15(4), 1-8. <https://doi.org/10.5539/ies.v15n4p1>
- Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões: Ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, 144-145, 38-42.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino básico*. Ministério da Educação e Ciência: Direção-Geral da Educação (DGE). <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>
- Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E. G., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. Ensino Secundário. Matemática*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação. <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario>
- Clements, D., Dumas, D., Dong, Y., Banse, H., Sarama, J., & Day-Hess, C. (2020). Strategy diversity in early mathematics classrooms. *Contemporary Educational Psychology*, 60(4), 101834.
- Direção-Geral do Ensino Básico e Secundário (DGEBS) (1991). *Organização e programas: Ensino Básico – Volume I*. DGEBS.
- Espinoza-González, J., Lupiáñez-Gómez, J.-L., y Segovia-Alex, I. (2015). A scheme to analyses the statements of the student in context of problem posing. *Uniciencia*, 29(1), 58-81. <https://doi.org/10.15359/ru.29-1.4>
- Krulik, S., & Rudnik, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving – A handbook for elementary school teachers*. Allyn and Bacon.
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education* 53, 723-735 <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer Open. <https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27743/1/1002262.pdf>

- Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).
- Ministério da Educação (ME) (1997). *Matemática – Programas: 10.º, 11.º e 12.º anos*. Departamento do Ensino Secundário.
- ME (2018). *Aprendizagens essenciais de matemática*. Direção-Geral de Educação. <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>
- Ministério da Educação e Ciência (MEC) (2013). *Programa e metas curriculares de matemática para o ensino básico*. MEC. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf
- MEC (2015) *Programa e metas curriculares de Matemática A – Ensino Secundário*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documents/Documents_Disciplinas_novo/Cursos_Cientifico_Humanisticos/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática (APM).
- NCTM (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-54. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22895>
- Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Interciência.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM. <http://hdl.handle.net/10451/3008>
- Ponte, J. P. (Org.) (2014). *Práticas profissionais de professores de matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310>
- Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145-163. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3167/1/02-Ponte-Oliveira_Rev.Educacao.pdf
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55-81. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22894>
- Ponte, J. P. (2007). *Programa de matemática para o ensino básico*. DGIDC. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/programamatematica_2007.pdf
- Quintas, S., Tomás Ferreira, R. A., & Oliveira, H. (2015). O conhecimento didático de duas professores de matemática sobre dados bivariados. *Bolema*, 29(51), 284-306. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/gwHyVy5VHCnXcmQQKfgPvDL/?format=pdf>
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275. <https://pubs.nctm.org/view/journals/mtms/3/4/article-p268.xml>
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell.

Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313-340.
<https://doi.org/10.1080/10986060802229675>

- Tjoe, H. (2019). “Looking back” to solve differently: Familiarity, fluency, and flexibility. In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving – Current themes, trends and research* (pp. 3-20). Springer.
- Tomaz, V. S., & David, M. M. M. S. (2011) *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Autêntica.
- Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39-60.

Comunicações

DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E NA COMUNICAÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 11.º ANO**DIFFICULTIES IN PROBLEM-SOLVING AND WRITTEN COMMUNICATION IN MATHEMATICS: A STUDY WITH 11TH GRADE STUDENTS**

Letícia Gabriela Martins

CIEd, Universidade do Minho, Portugal

LGB.martins@hotmail.com

Maria Helena Martinho

CIEd, Universidade do Minho, Portugal

mhm@ie.uminho.pt

Resumo: A resolução de problemas e a comunicação escrita são duas das capacidades que os alunos devem desenvolver durante a escolaridade obrigatória. As dificuldades são parte integrante do seu desenvolvimento, uma vez que é algo que pode ser sentido pelos alunos no momento em que resolvem problemas ou escrevem as suas resoluções, e é necessário conseguir identificar essas dificuldades para posteriormente as ultrapassar. Tendo isto em consideração, procuramos, neste estudo, responder à questão *Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas e na comunicação escrita?*. Desenvolvemos um sistema de categorias de análise das dificuldades observadas na resolução de problemas e na comunicação escrita. Além disso, analisamos nesta comunicação resoluções de seis grupos de alunos de 11.º ano a um problema matemático que lhes foi proposto. Das seis resoluções analisadas, uma não apresentava sinal de dificuldades, e outra apresentava apenas dificuldades de coerência. Duas das outras resoluções registavam dificuldades somente relacionadas com a escrita. As restantes duas apresentavam dificuldades de interpretação do enunciado, sendo que num grupo também se observou dificuldades de persistência e de escolha da estratégia, e no outro verificou-se dificuldades na recolha de informação.

Palavras-chave: dificuldades, resolução de problemas, comunicação escrita, ensino secundário

Abstract: Problem solving and written communication are two of the skills that students must develop during compulsory schooling. Difficulties are an integral part of their development, since it is something that students can feel when they solve problems or write their resolutions, and it is necessary to be able to identify these difficulties to overcome them later. Taking this into account, in this study we tried to answer the question *What are the difficulties experienced by students in problem solving and written communication?*. We have developed a system of categories for analysing the difficulties observed in problem solving and written communication. In addition, in this communication, we analyse resolutions of six groups of 11th grade students to a mathematical problem that was proposed to them. Of the six resolutions analysed, one showed no sign of difficulties, and another showed only consistency difficulties. Two of the other resolutions registered difficulties related only to writing. The remaining two presented difficulties in interpreting the statement, with one group also experiencing difficulties in persistence and choice of strategy, and in the other group difficulties in gathering information.

Keywords: difficulties, problem solving, written communication, high school

Introdução

Nos documentos mais recentes sobre o currículo para a disciplina de Matemática, é possível perceber que a resolução de problemas e a comunicação escrita permanecem em lugar de destaque, sendo duas das nove ideias chave apresentadas para o ensino desta disciplina (Carvalho e Silva et al., 2023). Já no Programa do Ensino Secundário de Matemática A (Bivar et al., 2013), programa ainda em vigor, são estabelecidos desempenhos que são fundamentais para os alunos e que, no seu conjunto, devem ajudar a desenvolver competências como a resolução de problemas e a comunicação matemática. Quanto à resolução de problemas, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) já referia que “um ensino eficaz da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas” (2017, p. 17). Também a Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) reforçou a relevância da resolução de problemas e a importância de desenvolver esta capacidade, em vez de estarmos apenas focados em memorizar factos e regras e aplicar algoritmos (2014). Isto revela também a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático, que é baseado na análise e produção de argumentos que podem ser apresentados oralmente ou por escrito de modo a justificar determinadas afirmações (Niss & Højgaard, 2019). Por isso, além da resolução de problemas, também a comunicação é “um elemento estruturante da atividade humana” (Menezes et al., 2013, p. 46). Estes autores reforçam esta importância esclarecendo que vivemos em constante interação uns com os outros, o que faz com que muitas das coisas que fazemos envolvam comunicação. Graham (2020) foca também a importância específica da comunicação escrita, uma vez que usamos a escrita para comunicar, registar informação, criar histórias imaginárias, desabafar sobre os próprios sentimentos, ou até em diversas tarefas no trabalho. Existe ainda a escrita para aprender, que consiste em escrever como forma de aumentar e aprofundar conhecimento (Graham, 2020). Por exemplo, a escrita de todas as justificações sobre como se resolve determinado problema matemático é, de acordo com este autor, uma aplicação da escrita para aprender.

Os erros e as dificuldades são parte integrante do desenvolvimento de diferentes capacidades, nomeadamente da resolução de problemas e da comunicação escrita. Para Socas (2007), é importante não focar apenas a nossa atenção para o facto de a resposta estar ou não correta, mas ter também em atenção os erros que os alunos cometem. A identificação do erro e trabalhar sobre ele pode ajudar a que o aluno o compreenda e não o repita. Mascle (2013) concorda que o erro deve ser chamado à atenção de forma moderada, pois deve-se também ter especial cuidado em valorizar a evolução positiva dos alunos, de forma a mantê-los motivados. Esta evolução positiva também será construída com base no ultrapassar das dificuldades e obstáculos que surjam quando resolvem problemas ou quando comunicam por escrito. Assim, prever as dificuldades que os alunos podem sentir é muito importante, e para isso será benéfico que se conheça de antemão quais são as dificuldades que normalmente são identificadas (Schoenfeld, 1985). Tendo este conhecimento, o professor será capaz de ajudar melhor o aluno a ultrapassar essas dificuldades, sem fazer com que essa ajuda impeça que o aluno tenha oportunidade de resolver autonomamente a tarefa proposta (Stein et al., 1996). Assim, de acordo com estes autores, o professor deve ajudar o aluno a manter o foco na tarefa e no seu próprio raciocínio, sem que isso resulte numa ajuda excessiva. Menezes et al. (2014) referem que, desta forma, o apoio que o professor dá ao aluno é focado na superação das dificuldades

que existem naquele momento, permitindo que o aluno consiga avançar sozinho a partir daí.

Considerando a importância de detectar as dificuldades sentidas pelos alunos, tanto na resolução de problemas como na comunicação escrita, nesta comunicação procura-se responder à questão *Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas e na comunicação escrita?*. Para alcançar uma resposta, pretende-se apresentar os resultados da análise de resoluções de grupos de alunos do 11.º ano de duas turmas do curso de Ciências e Tecnologias a um problema proposto. Esta análise será focada na perspetiva do professor, relativamente às dificuldades demonstradas pelos grupos ao longo da atividade de resolução do problema e também nas dificuldades detetadas na própria resolução escrita.

Dificuldades na resolução de problemas e na comunicação escrita

Os alunos podem apresentar diferentes dificuldades, pelo que o processo de ensino e aprendizagem não será igual para todos. Para Tambychik e Meerah (2010), compreender essas dificuldades será uma forma de dar assistência aos alunos, de modo que a aquisição de capacidades matemáticas não vá piorando com o tempo. Estes autores indicam cinco dificuldades distintas, baseadas em capacidades: *factos numéricos* (associadas a dificuldades sobre conhecimentos matemáticos de um modo geral), *aritmética* (falhas na precisão dos cálculos ou na aplicação de algoritmos), *informação* (dificuldades em interpretar o enunciado do problema), *linguagem* (relacionadas com determinado vocabulário conhecido pelo aluno e que pode trazer obstáculos) e *visualização espacial* (dificuldades em visualizar conceitos mais abstratos). No seu estudo, Tambychik e Meerah (2010) reforçam mesmo que, em muitas situações, os alunos sentem dificuldades na resolução de problemas devido à ausência do desenvolvimento de certas capacidades matemáticas, sendo a dificuldade na capacidade de informação aquela que mais se verificou nesse estudo. Também no estudo de Ponte et al. (2012) se verifica algo semelhante, com os alunos a apresentarem dificuldades significativas relacionadas com a compreensão do enunciado, principalmente quando este se desenvolve num contexto menos familiar para os alunos. Com pontos de análise semelhantes, Prates et al. (2011) optam por dividir esta dificuldade de interpretação em três tópicos distintos: simbologia, informação dada, e interpretação da solução. A *dificuldade de simbologia* surge quando os alunos não sabem identificar símbolos matemáticos, como por exemplo os símbolos de domínio e contradomínio. Já a *dificuldade na informação* dada consiste em apresentar dificuldades na recolha da informação do enunciado e também no seu uso ao longo da resolução do problema. Por fim podem ainda existir *dificuldades em interpretar soluções*, quando o aluno não consegue apresentar uma resposta que conjugue o que é pedido e o que foi desenvolvido na resolução.

Wijaya et al. (2014) apresentam dificuldades semelhantes aos autores já referidos, acrescentando duas outras: desconhecida e transformação. A *dificuldade desconhecida* é considerada quando encontramos uma resolução na qual se percebe que existiu alguma dificuldade, mas ainda assim não está suficientemente visível no trabalho que o aluno entregou. A *dificuldade de transformação* surge quando os alunos usam de imediato algum conhecimento que aprenderam, nomeadamente fórmulas ou algoritmos, sem antes refletirem se existe essa necessidade. Também incluídos nesta dificuldade estão os casos em que se foca demasiado a atenção no contexto real do problema, não olhando também à perspetiva matemática do enunciado. Kusumadewi e Retnawati (2020) especificam um tipo de dificuldade associado a este, relacionada com a definição da estratégia. Esta dificuldade surge quando o aluno não consegue definir uma estratégia para resolver o

problema, ou utiliza estratégias desadequadas. Estes autores acrescentam ainda a *dificuldade de enfrentar o problema*, que pode fazer com que os alunos apresentem dificuldades relacionadas com a persistência. Muitas vezes, esta dificuldade começa no facto de os alunos se depararem com enunciados grandes, com muito texto (Phonapichat et al. 2014). Para estes autores, os alunos não gostam de problemas com muito texto. Além disso, estes são mais propícios a criar dificuldades de compreensão, o que não ajuda a enfrentar devidamente o problema proposto.

Para Martinho e Rocha (2018), o insucesso dos alunos em escrever as suas resoluções pode não acontecer por falta de conhecimento matemático, mas sim por não serem capazes de escrever as suas ideias. Estas autores indicam dificuldades específicas como por exemplo na *conversão do raciocínio para a escrita*, em saber como exprimir as suas ideias, e também na *forma de estruturar a resolução* de modo que as ideias sejam expostas de forma coerente e devidamente encadeada. Já Morgan et al. (2014) tinham também referido estas *dificuldades no encadeamento de ideias* e nas conexões lógicas que seria necessário estabelecer, acrescentando também as dificuldades relacionadas com o *vocabulário* e com a *notação algébrica*, e ainda dificuldades a nível da extensão dos textos. Assim, temos dificuldades relacionadas com o próprio processo de escrita, mas também na fase de pensar em como vamos escrever e conectar diferentes fases da resolução. Yuniara et al. (2018) indicam três pontos em que a dificuldade poderá ser visível: conceitos, procedimentos, e paciência. A *dificuldade de conceitos* traduz-se quando o aluno não é capaz de explicar as suas próprias ideias através da escrita. Já a *dificuldade de procedimentos* acontece quando o aluno não consegue expressar determinada situação através de desenhos, modelos matemáticos ou mesmo fórmulas já conhecidas. Por fim, os autores apresentam a dificuldade relacionada com o princípio da *paciência* na qual os alunos são incapazes de expressar a situação através de um modelo matemático, não conseguindo aplicar fórmulas ou regras previamente conhecidas. Martins e Martinho (2021) acrescentam ainda a dificuldade relacionada com a *coerência*, que surge quando os alunos não são coerentes ao longo da sua resolução, começando por assumir uma suposição inicialmente e usando argumentos contraditórios no desenvolvimento do seu raciocínio.

Nesta investigação, assume-se um sistema de categorias de análise dos dados relativamente às dificuldades observadas nas resoluções escritas dos alunos (Martins, 2023; Martins e Martinho, 2021). Este sistema é composto por nove categorias principais: persistência, interpretação, seleção e organização da informação, estratégia, processo, escrita, coerência, desconhecida, e nenhuma. Começando pela *persistência*, esta pode ser observada em duas fases: início e conclusão. A dificuldade de *persistência no início* observa-se quando o aluno não inicia a resolução do problema, desistindo sem apresentar nenhum tipo de resolução. Já a *persistência na conclusão* ocorre quando o aluno começa a resolver o problema, mas não o consegue concluir, desistindo de o resolver. Na *interpretação*, podemos ter dificuldades no *enunciado* – caso o aluno não compreenda o que está dito no enunciado –, em *diagramas* – se o aluno não compreende corretamente a informação que consta num diagrama, figura ou esquema –, ou no *resultado* – quando o aluno não interpreta corretamente a sua resolução e o resultado a que chegou. Passando para a *seleção e organização da informação*, esta dificuldade pode surgir na *recolha da informação* dada no enunciado ou mesmo da informação que adquiriu ao longo da sua resolução, ou na *tradução* entre linguagem verbal e linguagem matemática. A quarta categoria é destinada à *estratégia*, sendo que pode existir dificuldade na *escolha da estratégia* a aplicar no problema proposto, ou ainda na *execução* da estratégia escolhida. Passando para as dificuldades de *processo*, existem quatro subcategorias: conceitos,

aritmética, regras, e generalização. Assim, o aluno pode apresentar dificuldades relacionadas com os *conceitos* matemáticos, ou com cálculos realizados (*aritmética*), ou na utilização e aplicação de *regras* matemáticas previamente conhecidas, ou ainda na *generalização* ou particularização de informações dadas ou adquiridas. Relativamente à *escrita*, esta pode ser dividida em dificuldades de *conversão*, *estruturação* e *conexão*. Ou seja, o aluno pode apresentar dificuldades na *conversão* do seu raciocínio para a escrita, na *estruturação* da escrita da sua resolução, ou na *conexão* entre diferentes ideias e etapas de uma resolução. Por fim, resta-nos a dificuldade de *coerência*, que surge quando o aluno apresenta incoerências em diferentes fases da sua resolução. As categorias *desconhecida* e *nenhuma* destinam-se a casos em que a dificuldade do aluno não é suficientemente visível no trabalho apresentado ou quando o aluno não apresenta nenhum tipo de dificuldade, respetivamente.

Contexto e metodologia

Este artigo é resultado de uma investigação mais ampla que contou com a participação de 29 alunos de duas turmas do 11.º ano de Ciências e Tecnologias, entre outubro de 2020 e maio de 2021. Estes alunos, com idades entre os 15 e os 16 anos, estavam divididos em seis grupos de 4 ou 5 elementos, e frequentavam uma escola pública do distrito de Braga, tendo em comum o professor de Matemática A. Antes da recolha de dados, foi apresentado o projeto, intitulado *ProbleMath.Com*, a todos os alunos dessas duas turmas, explicando em que consistia a investigação e quais os objetivos a alcançar com a mesma. Os alunos tomaram conhecimento que se esperava que eles resolvessem problemas matemáticos em grupo, em sessões de 90 minutos a decorrer online num horário em que todos os participantes estivessem disponíveis, em horário extracurricular, e em datas a definir com o acordo de todos. Após apresentar o projeto aos alunos, estes foram convidados a inscrever-se de forma voluntária no *ProbleMath.Com*. A decisão de funcionamento online e extracurricular deveu-se ao facto de, nesse ano letivo, estarmos a passar um período pandémico que impedia o trabalho em grupo presencial, pelo que se decidiu manter o que estava planeado para ser feito em sala de aula, mas alterando para um regime online. Como as aulas decorriam presencialmente, a única forma de conseguirmos aplicar este projeto online seria realizar as sessões fora do tempo de aula.

Os alunos acabaram por participar em 16 sessões, coordenadas pela primeira autora deste trabalho. Todas as sessões foram gravadas integralmente, mesmo em momentos em que todos os alunos se juntavam em diferentes salas para trabalharem em pequenos grupos. O decorrer das sessões tinha três fases: entrada na sessão, trabalho em pequenos grupos, discussão final em grande grupo. Os alunos entravam na sessão através do link enviado previamente por email, e de seguida eram enviados para a respetiva sala do grupo a que pertenciam – grupos que foram organizados pelos próprios alunos, para que se sentissem mais confortáveis nas sessões e para que o grupo não fosse fator de desistência por parte de nenhum elemento. Nessa altura, era enviado por email o problema a resolver nessa sessão, e os alunos tinham um tempo estipulado para o resolverem em grupo e enviarem para a investigadora através de email. Podiam enviar uma foto da resolução escrita em papel, ou um documento digital, como por exemplo uma imagem efetuada no *paint*, ou uma resolução em *word* ou *excel*. Terminada essa fase, todos os alunos regressavam à sala inicial, para se realizar uma discussão das resoluções com todos os participantes, na qual os alunos tinham contacto com as resoluções dos colegas e tinham oportunidade de questionar essas resoluções e defender as suas ideias. A ordem de apresentação das resoluções era estabelecida pela investigadora, de modo a tornar a discussão mais interessantes para os alunos, e mostrando diferentes estratégias de resolução, diferentes

modos de apresentar as resoluções, e discutindo as diferentes dificuldades que surgiam. Esta comunicação foca-se nesta última parte, as dificuldades, pelo que se irá apresentar a análise das dificuldades observadas nas resoluções dos grupos na resolução do problema proposto na Sessão 6 do projeto, cujo enunciado é:

No início, cada uma das três jogadoras pôs à sua frente as moedas que tinha trazido.

Começaram depois um certo jogo. Cada vez que uma delas perdia, tinha de duplicar o número de moedas de cada adversária.

A sessão terminará quando quem perder não conseguir satisfazer os pagamentos ou quando uma delas voltar a ter o mesmo número de moedas que tinha no princípio.

A Inês tem agora 7 moedas e as adversárias têm 16 e 28.

A Ângela começou com 20 moedas.

Quantos jogos já fizeram? Quantas moedas tem neste momento a Diana?

Quantos jogos poderão ainda realizar?³

A escolha pela apresentação dos resultados desta sessão prende-se com o facto de ter sido a sessão em que se registou uma maior variedade das categorias principais presentes nas resoluções apresentadas.

Esta investigação encontra-se numa posição nominalista, já que esta posição assume que a nossa maneira de ver o mundo real depende das nossas interpretações pessoais (Neuman, 2014) – neste caso, os dados são analisados de forma subjetiva por parte da investigadora. Além disso, encontra-se num paradigma interpretativo, uma vez que esta investigação é caracterizada pela forte interação entre investigadora e investigado (Coutinho, 2011). Esta interação, entre a investigadora e os alunos que constituem o caso em estudo, esteve presente em todas as fases de recolha de dados, e os resultados obtidos estão muito dependentes das interpretações feitas pela investigadora. Assim, os resultados são fechados em si mesmos, não sendo generalizáveis, apesar de ser possível tirar conclusões que podem ser usadas noutros casos (Neuman, 2014). Este estudo insere-se também numa metodologia qualitativa, em que os dados incluem as vozes dos participantes, através da transcrição de diálogos e das suas resoluções escritas, e é feita uma descrição desses dados em conjunto com uma reflexão por parte da investigadora (Creswell & Poth, 2018). Por fim, podemos considerar que se trata de um estudo de caso instrumental, uma vez que, segundo Stake (2005), o caso é apenas um meio para alcançar o fenómeno que se pretende estudar, sendo que o caso a estudar é constituído pelos alunos que se voluntariaram a participar neste projeto.

Apresentação dos resultados

Na Sessão 6 do projeto, apenas o Grupo 2 apresentou uma resolução considerada incorreta. Podemos ver essa resolução na Figura 1.

³ Retirado de Viana, J. P. (2005). *Desafios 9* (Problema 39). Edições Afrontamento.

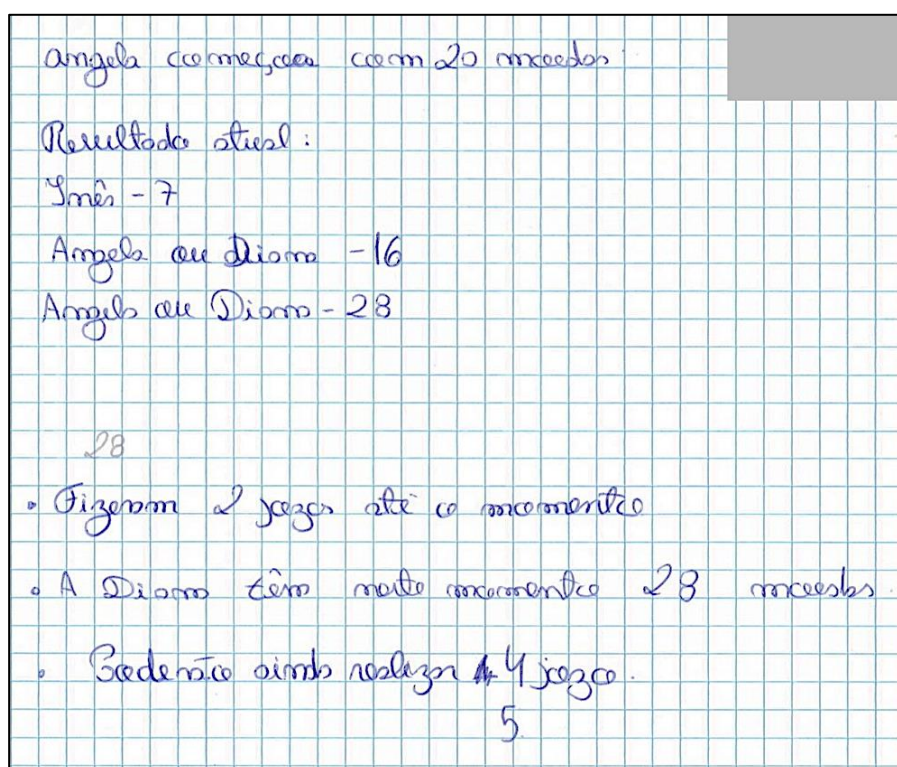


Figura 1. Resolução do problema da S6 pelo Grupo 2.

No que diz respeito a dificuldades, percebemos desde logo que existem a nível de persistência, nomeadamente no início. Isto porque o grupo não chega a iniciar a resolução do problema. Este grupo apresenta apenas uma resposta aleatória, sem qualquer fundamento, pelo que quase poderíamos assumir que tem uma “não resposta”. Isto deveu-se a uma outra dificuldade, muito notória quando se realizou as notas de campo com base na visualização das gravações da sessão: dificuldade de interpretação do enunciado.

Sandra – Eu não percebo... porque diz que cada vez que uma perdia, tinha de duplicar o número de cada adversária. Mas essa pessoa fica sem, ou só duplica os dos outros?

Marta – Eu acho que ela fica sem moedas, ela vai dar a cada uma o dobro das moedas, portanto fica sem...

Sandra – Então, deixa ver... (Grupo 2, nota de campo da S6)

Quase 15 minutos depois, a Sandra consegue chegar à conclusão que “[A Ângela] Tem 20... faz de conta que a Inês é x e a Diana o y . Então, aos 20 vamos ter de tirar $x \times 2$ e $y \times 2$...” (Sandra, nota de campo da S6). No entanto, não foi o suficiente para conseguirem resolver o problema, pelo que se verifica uma dificuldade na escolha da estratégia.

Na Figura 2 podemos ver uma outra resolução, desta vez do Grupo 5. Esta resolução não está concluída, uma vez que o grupo respondeu apenas a parte do problema. No entanto, o que está resolvido, está resolvido de forma correta.

	Imês	Ângela	Zioma
Nº moedas inicial		20	
Nº moedas final	7	28	16

Nº total de moedas final = 51

Nº total de moedas inicial = 51, pois não se ganharam nem se perderam moedas, apenas passaram de pessoa para pessoa.

No momento atual, o jogo apenas continua se a pessoa que tem 28 moedas perder pois é a única capaz de satisfazer os pagamentos.

A pessoa de 28 perde:

A Imês passa a ter $7+7 = 14$ moedas

A pessoa com 16 passa a ter $16+16 = 32$ moedas

A pessoa de 28 passa a ter $28-16-7 = 5$ moedas

Só a pessoa com 32 moedas pode perder pois é a única capaz de satisfazer os pagamentos

+ Imês passa a ter $14+14 = 28$ moedas

A pessoa com 5 moedas passa a ter 10 moedas

A pessoa com 32 moedas passa a ter $32-14-5 = 13$ moedas

Só a pessoa com 28 moedas pode perder pois é a única capaz de satisfazer os pagamentos.

A pessoa com 10 moedas passa a ter $10+10 = 20$ moedas

A pessoa com 13 moedas passa a ter $13+13 = 26$ moedas

A Imês passa a ter $28-10-13 = 5$ moedas

Se considerarmos que a Ângela é quem tem 28 moedas no momento, então apenas se poderão realizar mais 3 jogos, pois ela volta a ter 20 moedas, valor igual ao inicial e, por isso, a sessão termina.

Figura 2. Resolução do problema da S6 pelo Grupo 5.

O grupo mostrou sentir dificuldades na interpretação do enunciado, à semelhança das dúvidas registadas pelo grupo anterior – sendo que isto foi possível confirmar pela visualização da gravação da Sessão 6, com o grupo a sentir necessidade de chamar a investigadora para esclarecer o problema.

Cíntia – Uma coisa que eu ainda não percebi é: elas trazem 30 moedas cada uma, imaginem. Elas apostam em cada jogo as 30 moedas?

Edgar – Acho que sim...

Cíntia – Mas isso ia fazer com que acabasse logo o jogo...

Clara – Mas eu acho que não é isso que está em causa... de ela apostar. Acho que é... o que é que significa perder? Significa que perdeu uma moeda? (Grupo 5, nota de campo da S6)

Após alguma discussão, e depois de pedirem ajuda para confirmar se estariam a interpretar bem o problema, procederam com a resolução e ultrapassaram essa dificuldade. Mas foi também possível detetar uma dificuldade através da conjugação entre a gravação e a resolução apresentada: a dificuldade a nível de recolha de informação. Isto porque o grupo demonstrou não se ter apercebido que faltava responder a duas perguntas, dando o problema como concluído.

Na resolução do Grupo 6, na Figura 3, são visíveis outros tipos de dificuldades, sendo ambas a nível de escrita.

Total de moedas: 51 moedas			
	Inês	Jogadora 2	Jogadora 3
andar 1	7	16	28
Jogada	→ 20	8	14
1.ª J.ª	→ 40	4	7
	→ 20	2	29
	→ 10	1	40
	→ 5	26	20
Inês	←	→ Diana	→ Jogada inicial Angela
já fizeram 5 jogos / neste momento, a Diana tem 16 moedas.			
	Inês	Diana	Angela
	14	32	5
	28	13	10
	5	26	20
Fizeram mais 3 jogos (voltaram ao n.º de moedas inicial)			

Figura 3. Resolução do problema da S6 pelo Grupo 6.

Este grupo respondeu a todas as questões colocadas de forma correta. No entanto, não justificam o porquê de acharem que a jogada inicial teria a Inês com 5 moedas, a Diana com 26 e a Ângela com 20 (isto na primeira parte da resolução). Tal como também não explicam o porquê de, na segunda parte, assumirem que será a Ângela a perder na ronda seguinte, nem sequer deixam explícito que foi essa jogadora a perder. Esta ausência faz com que o leitor precise de voltar ao início do primeiro esquema para interpretar o porquê de a Inês começar o segundo esquema com 14 moedas. Assim, verificamos a presença de dificuldades a nível de escrita, nomeadamente dificuldades de estruturação da resolução e ainda a nível de conexão.

Os grupos 3 e 4 seguiram estratégias idênticas, mas apresentaram dificuldades distintas. Começamos por observar na Figura 4 a resolução do Grupo 3.

A Inês acabou de perder pois tem um nº ímpar de moedas

	a	$a-1$	$a-2$	$a-3$	$a-4$	$a-5$	
Inês	7	29	40	20	10	5	- Inês
x	16	8	4	2	1	26	- Diana
y	28	14	7	24	40	20	- Ângela

$29 + 4 + 7 = 40$
 $7 + 20 + 2 = 29$
 $29 + 10 + 1 = 40$
 $1 + 20 + 5 = 26$

Eles jogaram 5 jogos e a Diana tem 16 moedas no momento

agora

Inês	Diana	Ângela
7	16	28

Para poderem jogar o máximo nº de possíveis de jogos a jogadora com mais moedas deve perder

	agora	1º jogo	2º jogo	3º jogo
I	7	14	28	5
D	16	32	13	26
A	28	5	10	20

Após o 3º jogo todos têm o mesmo nº de moedas, com que conseguiram, o jogo acabou.

Figura 4. Resolução do problema da S6 pelo Grupo 3.

No caso do Grupo 3, as respostas às três questões estão explícitas. Considera-se que faltaria justificar o porquê de assumirem logo em “ $a-5$ ” que a Ângela era a amiga com 28 moedas no momento atual do jogo, e também o porquê de dizerem que a Inês seria a próxima a perder, apenas por ter um número ímpar de moedas. Por este motivo, apontamos para uma dificuldade de conexão, a nível de escrita.

Uma resolução semelhante é apresentada pelo Grupo 4, e pode ser visto um excerto da mesma na Figura 5.

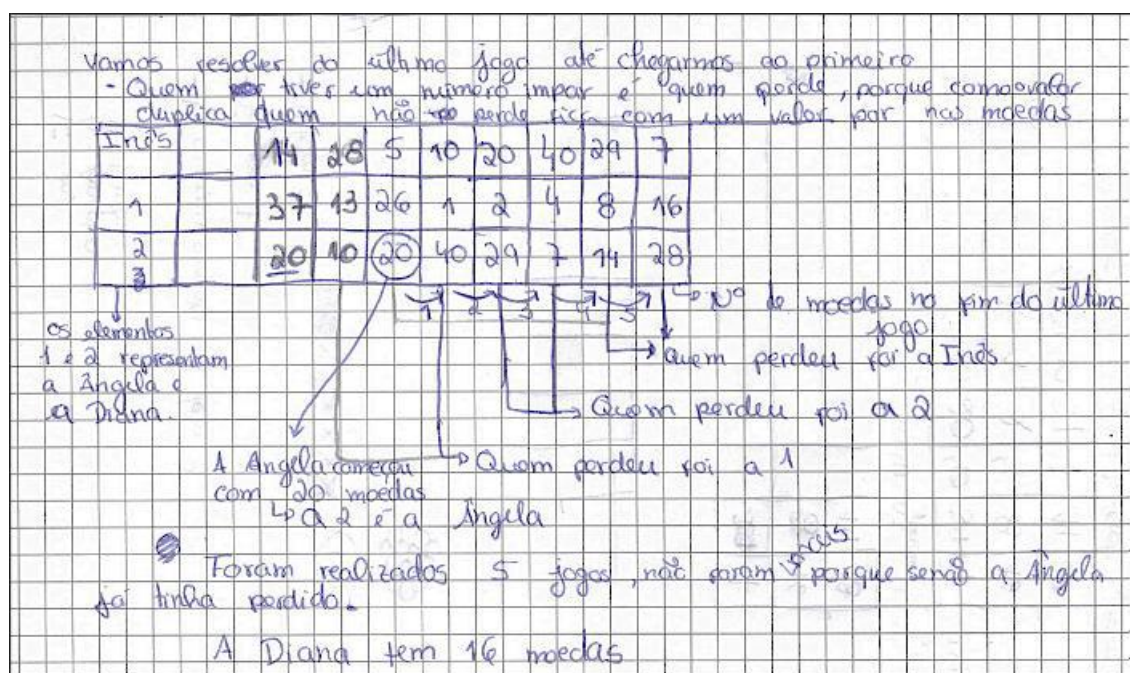


Figura 5. Resolução do problema da S6 pelo Grupo 4.

Como já foi referido, a resolução do Grupo 4 foi muito semelhante ao Grupo 3, pelo que se decidiu deixar aqui apenas o excerto da resolução que mostre os pontos de distinção entre os dois grupos. Ao contrário do grupo anterior, no Grupo 4 assume-se que escreveram todas as justificações consideradas necessárias, pelo que não apresentam a mesma dificuldade do grupo anterior. No entanto, considera-se que existem dificuldade a nível de coerência, devido às colunas 3 e 4 da tabela apresentada, nas quais temos os valores 14, 37, 20 e 28, 13, 10, que não parecem fazer sentido no contexto da restante resolução – e que, possivelmente, permaneceram na resolução por esquecimento ou gralha.

A única resolução que faltaria aqui apresentar seria a do Grupo 1, que apresentou uma resposta considerada correta e com todas as justificações necessárias, não sendo possível identificar dificuldades, pelo que se considera que não tiveram nenhuma dificuldade na resolução deste problema. Como a resolução deste grupo é longa e sem dificuldades a registar, considerou-se que não era relevante partilhá-la nesta comunicação.

Em jeito de resumo, podemos observar a Tabela 1, na qual vemos um quadro com as diferentes dificuldades registadas.

Tabela 1. Quadro-resumo das dificuldades observadas nas resoluções da Sessão 6.

Dificuldades		G1	G2	G3	G4	G5	G6
Persistência	Início	-	X	-	-	-	-
Interpretação	Enunciado	-	X	-	-	X	-
Seleção e organização da informação	Recolha	-	-	-	-	X	-
Estratégia	Escolha	-	X	-	-	-	-
Escrita	Estruturação	-	-	-	-	-	X
	Conexão	-	-	X	-	-	X
Coerência		-	-	-	X	-	-
Nenhuma		X	-	-	-	-	-

Fonte: Produção pessoal.

Ao observar a tabela anterior, verificamos então que um dos grupos não apresentou nenhuma dificuldade, Grupo 1, e num outro verificou-se um pequeno problema relacionado com coerência, Grupo 4. Dois grupos apresentaram dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado, tendo sido os dois grupos que não chegaram à resposta correta a este problema. Um deles (Grupo 5) acrescenta ainda dificuldades na recolha da informação, e o outro (Grupo 2) revelou dificuldades de persistência e na escolha da estratégia. A nível de escrita apenas dois grupos, grupos 3 e 6, apresentaram dificuldades, ambos relacionados com a conexão – sendo que este último grupo teve ainda dificuldades de estruturação da escrita.

Considerações finais

A resolução de problemas deve ser, de acordo com as aprendizagens essenciais para Matemática A, utilizada para estabelecer conexões entre diferentes conceitos, envolvendo também a comunicação escrita (Carvalho e Silva et al., 2023). Sendo as dificuldades algo que naturalmente surge por parte dos alunos quando resolvem problemas e escrevem as suas ideias, decidimos focar aí este trabalho. Socas (2007) alertava para a importância de não nos focarmos apenas no facto de a resposta estar correta, e percebermos melhor os erros que os alunos cometem e as dificuldades que sentem. Foi isso que procuramos fazer nesta comunicação, tentando responder à questão *Quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas e na comunicação escrita?*. Para isso, criamos um sistema de categorias de análise das dificuldades na resolução de problemas e na comunicação escrita, baseadas nas nomenclaturas e respetivas noções de diferentes autores. Este sistema tinha nove pontos distintos, alguns deles com subcategorias: persistência (início, conclusão), interpretação (enunciado, diagramas, resultado), seleção e organização da informação (recolha, tradução, organização), estratégia (escolha, execução), processo (conceitos, aritmética, regras, generalização), escrita (conversão, estruturação, conexão), coerência, desconhecida, e nenhuma.

Nas seis resoluções aqui referidas, a um problema proposto a alunos do 11.º ano, observamos três grupos com uma dificuldade cada um: nenhuma, coerência, e conexão a nível de escrita. Esta última dificuldade foi observada num outro grupo, em conjunto com a dificuldade de estruturação da escrita. Os restantes dois grupos apresentaram dificuldades de interpretação do enunciado, sendo que um deles também teve problemas na recolha dos dados, e o outro apresentou obstáculos a nível de persistência e da escolha da estratégia – tendo sido estes os únicos grupos com uma resolução considerada não totalmente correta. Como o enunciado do problema é extenso, as dificuldades de interpretação podem ter surgido por esse motivo (Phonapichat et al., 2014). Martins e Martinho (2021) referiam que melhorar a leitura do enunciado, retirando a informação restrita que ele contém, sem ter tendência de inventar dados que não existem, ajuda a ultrapassar as dificuldades de interpretação. Num dos grupos (Grupo 2) acabou por se manter essa dificuldade, dando ainda origem à dificuldade de persistência, mas no outro grupo (Grupo 5) essa dificuldade acabou por ser ultrapassada e conseguiram resolver parte do problema. Isto aconteceu porque os alunos do Grupo 5 foram persistentes e leram o problema várias vezes até conseguirem retirar a informação correta do problema e interpretá-la convenientemente. É ainda relevante acrescentar que, além da categoria de dificuldade desconhecida, a categoria de dificuldade a nível de processo foi a única na qual não se registou qualquer dificuldade.

Como já se tem critérios definidos para a identificação das dificuldades na comunicação escrita e na resolução de problemas, a investigação sobre as dificuldades sentidas pelos alunos poderá seguir para outros campos em trabalhos futuros. Nomeadamente, perceber

possíveis formas de superação das dificuldades detetadas, e até mesmo perceber se se regista alguma evolução nos alunos numa nova aplicação de um projeto idêntico ao que aqui apresentamos. Será que as dificuldades diminuem ao longo do projeto? Todos os elementos do grupo registam as mesmas dificuldades? É conveniente referir que, para responder a estas questões, o projeto deverá sofrer alterações, por exemplo através do pedido de que todos os elementos do grupo entreguem uma resolução escrita de todos os problemas após discussão em pequeno grupo, em vez de existir apenas uma resolução escrita por grupo. Além disso, inserir no projeto mais momentos de resolução de problemas individualmente, também poderia ser benéfico para aferir as reais dificuldades que podem ser detetadas nas resoluções de cada aluno – apesar de nestes casos se perder alguma informação, pois será mais difícil ter acesso a todo o pensamento do aluno ao longo da resolução.

Agradecimentos

Esta investigação é financiada pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia através de uma bolsa de doutoramento (SFRH/BD/147510/2019). Este trabalho é também financiado pelo CIED – Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade do Minho, projetos UIDB/01661/2020 e UIDP/01661/2020 e UID/CED/1661/2016, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT.

Referências

- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C., & Loura, L. (2013). *Programa de Matemática A*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência (MEC).
- Carvalho e Silva, J. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens essenciais* [11º ano, Matemática A]. Direção-Geral da Educação (DGE). https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_vf.pdf
- Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e prática*. Almedina.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). SAGE Publications Inc.
- Graham, S. (2020). The effects of writing on learning in science, social studies, and mathematics: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 90(2), 179-226. <https://doi.org/10.3102/0034654320914744>
- Kusumadewi, C. A., & Retnawati, H. (2020). Identification of elementary school students' difficulties in mathematical problem-solving. *Journal of Physics: Conference Series*, 1511. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1511/1/012031>
- Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, 149-150, 34-38.
- Martins, L. G. (2023). *A resolução de problemas e a escrita matemática: Um estudo com alunos do ensino secundário* [Tese de doutoramento, Universidade do Minho].
- Martins, L. G., & Martinho, M. H. (2021). Strategies, difficulties, and written communication in solving a mathematical problem. *Bolema*, 35(70), 903-936. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a16>
- Masclé, D. D. (2013). Writing self-efficacy and written communication skills. *Business Communication Quarterly*, 76(2), 216-225. <https://doi.org/10.1177/1080569913480234>

- Menezes, L., Ferreira, R. A., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 135-161). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sisyphus - Journal of Education*, 1(3), 44-75. <https://doi.org/10.25749/sis.3706>
- Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM Mathematics Education*, 46, 843-853. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9>
- NCTM (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Associação de Professores de Matemática (APM).
- Neuman, W. L. (2014). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches* (7th ed.). Pearson Education Limited.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- OECD. (2014). *PISA 2012 results: Creative problem solving - Students' skills in tackling real-life problems* (Volume V). Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf>
- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 116, 3169-3174. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.728>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, 1(1), 9-29.
- Prates, A., Tavares, C., Dias, R. P., & Nunes, C. C. (2011). O pensamento algébrico no estudo das funções no 10.º ano de escolaridade. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 163-178). APM.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic press, inc.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas análisis desde el enfoque lógico semiótico. In M. Camacho, P. Flores & M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* (19-52). Sociedad Española de Investigación em Educación Matemática (SEIEM).
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (3rd ed., pp. 443-466). SAGE Publications Inc.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Tambychik, T., & Meerah, T. S. (2010). Students' difficulties in mathematics problem-solving: What do they say? *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 142-151. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.020>
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, 11(3), 555-584. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1317>
- Yuniara, P., Sinaga, B., & Dewi, I. (2018). Analysis of difficulties in completing mathematical communication problem solving in terms of learning styles using inquiry learning.

Advances in Social Science, Education and Humanities Research, 200, 764-768.
<https://doi.org/10.2991/aisteel-18.2018.166>

AS CONEXÕES MATEMÁTICAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATHEMATICAL CONNEXIONS IN PROBLEM SOLVING

Guilherme Ferreira

Colégio de Santa Doroteia, Portugal

gavferreira19@gmail.com

Helena Rocha

*CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
Portugal*

hcr@fct.unl.pt

Alexandra Sofia Rodrigues

*CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
Portugal*

alexsofiarod@gmail.com

Resumo: O estudo centra-se na relação da resolução de problemas com conexões matemáticas, procurando perceber que papel desempenham as conexões matemáticas na compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções. A recolha de dados foi realizada no contexto da prática letiva supervisionada do Mestrado em Ensino de Matemática, no ano letivo 2022/2023, numa escola da região de Lisboa. A investigação assentou numa metodologia de natureza qualitativa e de carácter interpretativo. A estratégia metodológica usada foi o estudo de caso e os instrumentos de recolha de dados aos quais se recorreu foram a observação participante, a entrevista semiestruturada, o diário de bordo e a recolha documental. Concluiu-se que o facto de os alunos concretizarem/materializarem os objetos matemáticos facilita a deteção de erros na resolução de problemas e contribui para a compreensão dos alunos de conceitos matemáticos associados ao tópico de funções.

Palavras-chave: conexões matemáticas, resolução de problemas, funções reais de variável real.

Abstract: The present study focuses on the relation between problem solving and mathematical connexions, with the aim of identifying which strategies students use when doing tasks with mathematical connexions and understanding how mathematical connexions add to the students' understanding on the concepts of functions. The data collection was done in the context of the pedagogical internship of the Master in Mathematics Education, in the 2022/2023 school year, in a school located in Lisbon. The study was settled on a qualitative and interpretive research methodology. The used methodological strategy consisted on a case study and the data collection techniques that were used were the participant observation, the individual semi-structured interview, the logbook and the documental collection. The study concluded that when students concretize/materialize mathematical objects it becomes easier for them to find their mistakes during problem solving and adds to the students' understanding on mathematical concepts related to the topic of functions.

Keywords: mathematical connexions, problem solving, real-valued functions of a real variable.

Introdução

As conexões matemáticas são um conceito que tem vindo a ganhar uma progressiva importância no ensino da Matemática. Canavarro (2017) confirma esta realidade, apontando, por um lado, para a adoção de um termo específico que o designa e, por outro lado, para o facto de as conexões terem adquirido um estatuto idêntico a pilares do ensino da Matemática como a resolução de problemas e o raciocínio matemático. Estes acontecimentos, segundo a autora, ajudaram a conferir às conexões matemáticas a preponderância que estas têm presentemente no currículo da disciplina.

Para categorizar as conexões matemáticas, Ferreira (2012) organiza-as da seguinte forma:

1. Conexões matemáticas dentro da matemática
 - a) entre ideias de um mesmo tema
 - b) entre ideias de temas distintos
2. Conexões matemáticas fora da matemática
 - a) com a realidade
 - b) com outras áreas científicas

À margem desta categorização, Businskas (2008) define de forma mais cognitiva o conceito de conexão matemática, ao estipular que uma conexão consiste num objeto passível de memorizar e de ser matéria de discussão. Assim, o estabelecimento de conexões matemáticas consiste num processo mental que tem por base reconhecer ou estabelecer ligações entre ideias matemáticas. Jacinto e Pires (2019) reiteram esta definição e afirmam que este objeto mental pode ser uma ferramenta a usar futuramente em raciocínios matemáticos.

Neste estudo entende-se por “conexão matemática” uma relação passível de estabelecer entre um conceito matemático e qualquer outro conceito, seja ele igualmente matemático, situação na qual se está perante uma conexão interna, ou não matemático, estando-se, neste caso, perante uma conexão externa.

O objetivo do estudo aqui exposto é perceber que papel desempenham as conexões matemáticas na compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções, tendo-se em consideração as seguintes questões de investigação:

- i. Que estratégias usam os alunos na resolução de problemas que envolvem conexões matemáticas entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticas?
- ii. De que forma contribuem as conexões matemáticas para a compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções, para a manipulação dos mesmos e para fazer face às dificuldades dos alunos?

Após esta breve secção de introdução, o estudo segue a seguinte organização: uma segunda secção, de revisão de literatura, que relaciona as conexões matemáticas com a resolução de problemas; uma terceira secção, na qual se explicita mais detalhadamente em que circunstâncias e de que forma se realizou a recolha de dados; uma quarta secção, onde é descrita uma das tarefas aplicadas e onde são expostas e analisadas as resoluções dos participantes no estudo; e, por fim, uma quinta secção, na qual se apresentam as conclusões do estudo.

Fundamentação teórica

As conexões no ensino da Matemática

As conexões internas promovem uma compreensão mais profunda das ideias matemáticas e das relações entre os diferentes temas da Matemática. As conexões externas, por sua vez, evidenciam o lado utilitário da Matemática e ajudam os alunos a compreender, não só ideias doutras áreas científicas, como também o mundo que os rodeia (Mendes, 2022).

As conexões matemáticas adquiriram um estatuto equiparado ao da resolução de problemas (Canavarro, 2017). Para além disso, estes são pilares do ensino da Matemática suscetíveis de formar um par simbiótico no contexto do ensino da Matemática.

Nesta sequência, o NCTM (2017) afirma que:

um ensino eficaz da matemática envolve os alunos no estabelecimento de conexões entre representações matemáticas, no sentido do aprofundamento da compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, e assume-as como ferramentas para a resolução de problemas (p. 24).

Se, por um lado, o NCTM refere as conexões como ferramentas para a resolução de problemas, no documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário* é referido que:

a resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 5)

Desta forma, não só é salientada a importância das conexões aquando da resolução de problemas, como também o é a importância da resolução de problemas para o estabelecimento de conexões.

Bisognin e Flôres (2021) realizaram um estudo com alunos de ensino superior. Estes autores perspetivam a resolução de problemas como uma atividade que propicia o estabelecimento de conexões matemáticas, através da formação de conceitos matemáticos e da construção de esquemas mentais. Nas conclusões do seu estudo, pode ler-se que:

a vasta rede de conceitos relacionados à resolução do problema foi algo que surpreendeu os estudantes, pois, antes disso, cada um desses conceitos estava compartimentado e, após a atividade, foi possível fazer a ligação entre eles para resolver um problema. (p. 771)

Também Allevato e Onuchic (2019) analisam as conclusões de vários estudos que abordam a aprendizagem com conexões matemáticas através da resolução de problemas. As autoras referem que os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável à Matemática quando sentem que esta facilita a compreensão de fenómenos exteriores à Matemática e ajuda a explicar e a prever esses fenómenos.

Conexões matemáticas e resolução de problemas

Quando se fala de conexões matemáticas é importante perceber que tipos de tarefa e que recursos são mais adequados ao estabelecimento das mesmas. Neste seguimento, Jacinto e Pires (2019) incluem os problemas na sua lista de tipos de tarefas que propiciam o desenvolvimento do raciocínio matemático e o estabelecimento de conexões matemáticas. Stein e Smith (1998), por sua vez, defendem que a presença de um elevado

nível de exigência cognitiva é uma das possíveis características de uma tarefa que se considera boa para a promoção de conexões matemáticas. A posição destes autores reforça o potencial da resolução de problemas, uma vez que é um tipo de tarefa que apresenta uma elevada exigência cognitiva.

No que toca às dificuldades sentidas pelos alunos no estudo e aprendizagem do tópico de funções, Ponte et al. (2009) referem que, entre estas, encontram-se a dificuldade em fixar a terminologia associada ao tópico (domínio, objeto, imagem, etc.) e a dificuldade em lidar com a simbologia do mesmo (x , y , $f(x)$, etc.). Matos (2007) refere dificuldades ao nível da manipulação algébrica, que influenciam a compreensão dos alunos no tópico de funções, atendendo à ligação progressivamente mais estreita entre a Álgebra e as Funções.

Contexto e metodologia

O estudo decorreu no ano letivo de 2022/2023, no âmbito do relatório de estágio, tendo sido levado a cabo um estudo de caso com cinco alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade, acompanhada ao longo do estágio pedagógico do primeiro autor deste estudo (Ferreira, 2023). O estudo foi desenvolvido em torno do tópico de funções. Mais especificamente, foram abordados os subtópicos sobre a função quadrática, as funções definidas por ramos e a função-módulo.

A investigação assentou numa metodologia de natureza qualitativa e de carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). O ambiente de recolha de dados foi natural, consistindo em momentos de aula e em sessões realizadas com os participantes numa sala à parte. Os dados recolhidos são de índole descritiva e interpretativa e o enfoque da investigação é o processo e não os resultados finais.

A estratégia metodológica pela qual se optou foi o estudo de caso do tipo explicativo (Yin, 2003). Considerou-se que o estudo de caso era a estratégia mais adequada para a investigação a realizar, por um lado, porque se pretendia responder a questões que se prendessem com o “como” e o “porquê” e, por outro lado, por se tratar de uma investigação particularística, na qual o objetivo era explorar as especificidades dos alvos de estudo e dos seus processos de resolução (Ponte, 2006).

Os instrumentos de recolha de dados aos quais se recorreu consistiram na observação participante, na entrevista semiestruturada, no diário de bordo e na recolha documental (Bogdan & Biklen, 1994). O recurso à observação participante, que teve lugar aquando da aplicação das tarefas, teve a finalidade de recolher dados que fundamentassem e enquadrassem de forma mais detalhada a resolução dos alunos, através dos comentários que estes faziam, das dificuldades que expressavam e das perguntas que colocavam. O diário de bordo apoiou a observação participante, funcionando como instrumento de registo às observações realizadas.

Na recolha de dados aplicaram-se três tarefas, entre os dias 6 e 23 de março: na primeira foram propostas explorações sobre a função quadrática em contextos semirreais; na segunda (onde se centrará este estudo) foram propostos alguns problemas sobre a função quadrática em contextos semirreais, num dos casos com enfoque na modelação; e na terceira foram propostas explorações, desta vez sobre a função-módulo e funções definidas por ramos, também em contextos semirreais. Os autores deste estudo usam a definição de contextos semirreais de Skovsmose (2000) e consideram que uma situação semirreal consiste numa simplificação de determinada situação real de modo a que esta seja tratável ao nível de ensino em questão. A escolha de explorações e de problemas para os tipos de tarefas aplicados deveu-se, por um lado, à presença de ambos na lista de tipos de tarefas que propiciam o desenvolvimento do raciocínio matemático e o

estabelecimento de conexões matemáticas de Jacinto e Pires (2019) e, por outro, da característica que os distingue: o seu grau de abertura. As explorações são de caráter aberto, ao passo que os problemas são de caráter fechado (Ponte, 2005).

Após a aplicação das tarefas, foram realizadas entrevistas individuais semiestruturadas (uma entrevista por participante), com a finalidade de obter informação para complementar os dados recolhidos nas resoluções dos alunos. Nomeadamente, os motivos pelos quais o aluno efetuou determinado raciocínio ou recorreu a determinada estratégia.

Este estudo foca-se na segunda tarefa, aplicada a 9 de março, e em três estudos de caso: Mercúrio, Vénus e Saturno. A escolha dos participantes teve em consideração uma característica fundamental que todos os alunos escolhidos deveriam manifestar: uma predisposição para olhar para situações e conceitos matemáticos com profundidade, em busca de uma visão mais ampla e holística dos mesmos e para encarar essas situações e conceitos de vários prismas. Neste sentido, teve-se em conta a participação dos alunos nas aulas, as resoluções de fichas e de testes e o interesse demonstrado em encarar a Matemática como uma disciplina articulada com as restantes disciplinas e áreas do saber. Dos cinco estudos de caso realizados, optou-se por apresentar apenas três, com o objetivo de concentrar o estudo em menos casos e reduzir a redundância dos dados apresentados. Assim, o critério de seleção utilizado para a escolha destes três casos foi a diversidade de resoluções apresentadas. Em citações de entrevistas, os participantes são identificados com a inicial do seu nome fictício e o investigador, o primeiro autor deste estudo, com a letra I.

Apresentação de resultados e análise de dados

A tarefa: “A função quadrática na resolução de problemas”

A segunda tarefa utilizada no estudo realizado no âmbito do relatório de estágio envolve a importância de estabelecer conexões matemáticas para a resolução de problemas. Esta tarefa é constituída por um problema que aborda uma situação em contexto semirreal, descrito no parágrafo seguinte, e por uma atividade de modelação. O tipo de conexões que são estabelecidas na tarefa são conexões fora da matemática, de acordo com a classificação de Ferreira (2012). O problema da tarefa (adaptado de Alves (2018)) possui um enunciado extenso com a descrição minuciosa da situação em estudo, a marcação de um livre direto num jogo de futebol, como é possível observar na figura 1.

1. Problema do livre direto

Num jogo de futebol vai ser cobrado um livre a 25 metros da baliza, tal como esquematiza a Figura 1 ao lado. A barreira encontra-se à distância regulamentar de **9,15 metros** da bola.

O plano que contém a trajetória da bola, indicado a tracejado, é perpendicular à linha da baliza.

A bola pode não atravessar a barreira ou passar por cima desta.

Se passar por cima da barreira, a bola segue na direção da baliza, fora do alcance do guarda-redes.

Admite que só pode acontecer uma das quatro situações seguintes:

- A bola não passa a barreira.
- A bola bate na barra da baliza.
- A bola sai por cima da barra da baliza.
- A bola entra na baliza.

O jogador mais alto da barreira tem **1,95 metros** de altura e a barra da baliza está a **2,44 metros** do chão.

Admite que, depois de rematada, a bola descreve um arco, de tal modo que a sua altura relativamente ao chão (em metros) é dada por: $f(x) = 0,32x - 0,01x^2$, onde x é a distância (em metros) da projeção da bola no chão ao local donde esta é rematada (Figura 2).

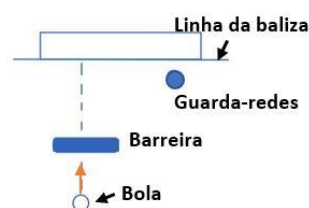


Figura 1 – Esquema do livre
(Retirado de Alves (2018))

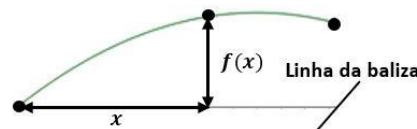


Figura 2 – Esquema da livre bidimensional
(Fonte própria)

Figura 1. Enunciado do problema

O aluno é confrontado com os obstáculos que situações problemáticas da vida real podem acarretar, uma vez que os dados a tratar são de uma quantidade muito superior à de problemas ou exercícios normalmente presentes nos manuais escolares. Esta característica leva o aluno a envolver-se mais profundamente no problema, tendo de organizar os dados fornecidos de forma a poder compreender a situação exposta, podendo, assim, dar resposta às questões colocadas (figura 2).

Responde às seguintes perguntas indicando os cálculos efetuados e as justificações que consideres necessárias:

- a) Qual é a **altura máxima** atingida pela bola?
- b) Nas condições descritas, o livre resulta em golo?
- c) A que **distância da linha da baliza** se encontra a bola quando esta atinge a **altura máxima**? Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

Figura 2. Questões colocadas no problema

São apresentados dois esquemas ao aluno, um com a perspetiva de cima, que ilustra a trajetória retilínea da bola em direção à baliza, passando pela barreira, e outro com a perspetiva lateral, que expõe a trajetória vertical da bola. Estes esquemas, em articulação com os quatro cenários admissíveis, fornecem ao aluno as ferramentas necessárias à realização de um raciocínio, desde que a interpretação e o tratamento dos dados sejam feitos corretamente.

Atendendo ao nível de ensino dos participantes (10.º ano), a alínea a), que pede a altura máxima atingida pela bola, pode ser resolvida recorrendo a duas estratégias. Como a

altura da bola é descrita por uma função quadrática, determinar a altura máxima equivale a determinar a ordenada do vértice da parábola que a representa. Para tal é possível, ou recorrer às fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola ($x_V = -\frac{b}{2a}$, $y_V = f(x_V)$), ou recorrer à técnica do completamento do quadrado, uma vez que colocando a expressão quadrática na forma $a(x - h)^2 + k$, os valores de h e de k são, respetivamente, a abcissa e a ordenada do vértice. Para a resolução da alínea b) é necessário averiguar o valor lógico de duas desigualdades. Mediante o contexto do problema, é preciso avaliar se a bola passa pela barreira – equivalente a saber se a altura da bola é superior à altura do jogador mais alto da barreira (isto é, se $f(9,15) > 1,95m$) – e avaliar se a bola entra na baliza – equivalente a saber se a altura da bola é inferior à altura da baliza (isto é, se $f(25) < 2,44m$). Se se verificarem as duas desigualdades, o livre resulta em gol. Por último, a alínea c), que pede a distância da bola à linha da baliza, quando esta se encontra à altura máxima, tem igualmente duas estratégias de resolução. Uma estratégia que recorre apenas à expressão da função e que consiste na resolução da equação $f(x) = 2,56$ e uma outra que recorre ao teorema de Pitágoras, tratando-se de uma abordagem geométrica.

Apresentam-se agora algumas resoluções de três dos cinco casos que participaram no estudo. Quanto à caracterização dos participantes, Mercúrio é uma aluna com um nível de aproveitamento muito bom na disciplina de Matemática e realiza um estudo regular. Revela não só destreza na componente mais mecanicista da disciplina, como também aptidão para interpretar situações novas e fora do comum, nas quais faz um uso proficiente dos conhecimentos adquiridos e procura obter uma compreensão mais profunda e holística. Vénus é um aluno dedicado com um nível de aproveitamento bom na disciplina de Matemática. A sua zona de conforto está circunscrita à memorização dos mecanismos algébricos e das fórmulas. O aluno revela menos destreza e segurança no que toca à transição dos objetos/conceitos matemáticos para o seu significado em diferentes contextos reais. Saturno é um aluno dedicado que demonstra consistentemente formas de pensamento que divergem do comum, fornecendo, muitas vezes, resoluções “fora da caixa” e não expectáveis. Este aluno procura ir sempre mais longe na busca pela razão de ser das coisas e não se contenta com um só método de resolução para um determinado problema. Além disso, o seu nível de aproveitamento na disciplina de Matemática é muito bom.

Estudo de caso: Mercúrio

Na primeira alínea, Mercúrio procura recorrer à técnica do completamento do quadrado (figura 3).

1.

a) $f(x) = -0,01x^2 + 0,32x$

$f(x) = -0,01(x + 16)^2 + 2,56$

$V(-16, 2,56)$

a altura máxima atingida pela bola foi de 2,56 m

Figura 3. Resolução da alínea a) de Mercúrio

A aluna comete um erro algébrico provavelmente proveniente da omissão de passos. No entanto, não tem em conta a troca de sinal da parcela $0,32x$, que decorre da colocação do fator $-0,01$ em evidência. Uma vantagem do uso de conexões externas na resolução de

problemas é, precisamente, a detecção de erros advinda da constante associação de valores com o conceito real que os mesmos representam. Neste caso, a aluna compreendeu que a abcissa do vértice não fazia sentido mediante o contexto do problema, como afirmou em contexto de entrevista:

I – Explica-me o teu raciocínio nesta alínea [alínea a)].

M – Então, queríamos a altura máxima. Como é uma parábola, vemos o vértice e a altura máxima vai ser o y .

I – Certo. E vês algum problema na tua resolução?

M – Oh, sim. Está uma coordenada negativa. O que não faz sentido, porque a bola anda assim [da zona do remate para a baliza].

Portanto, uma vez que o valor de x representa a distância da projeção da bola à zona de remate, um valor negativo significaria que a bola tinha ido no sentido oposto ao sentido do remate. Revela-se, desta forma, a importância do contexto semirreal para a compreensão da aluna.

Na alínea b), Mercúrio revela uma boa compreensão do que é pedido, bem como uma boa articulação dos dados fornecidos, como ilustra a figura 4.

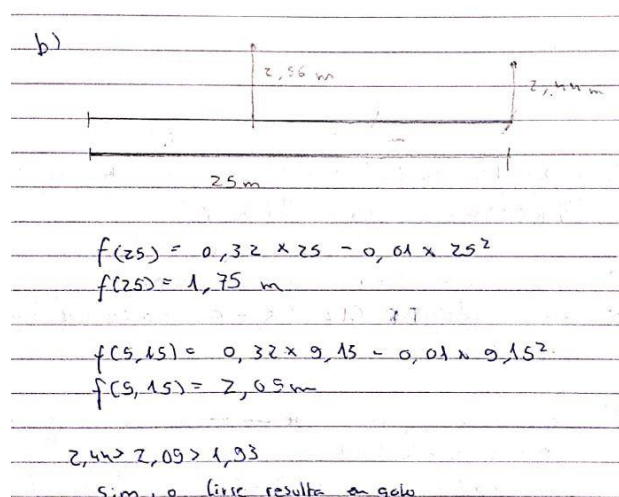


Figura 4. Resolução da alínea b) de Mercúrio

Mercúrio realiza os cálculos necessários à posterior averiguação das desigualdades referidas na secção anterior e chega à conclusão pretendida. Contudo, fá-lo expondo um argumento que não satisfaz a segunda das desigualdades. Mais especificamente, na cadeia de desigualdades que Mercúrio apresenta ($2,44 > 2,09 > 1,93$), esta relaciona a altura a que a bola se encontra quando passa pela barreira com a altura do jogador mais alto da barreira. No entanto, relaciona estes valores com a altura da baliza, algo que é irrelevante para o caso, não relacionando a altura da baliza com a altura a que a bola se encontra quando atravessa a linha da baliza. As desigualdades relevantes são $2,09 > 1,93$ e $1,75 < 2,44$. Na existência de uma associação permanente entre cada um destes valores e as alturas que estes representam, esta incorreção poderia ter sido detetada e corrigida.

Na terceira alínea, a aluna opta por recorrer à abordagem algébrica do problema (figura 5).

Handwritten mathematical work on lined paper:

$$a) f(x) = 2,56 \text{ m}$$

$$2,56 = -0,01x^2 + 32x$$

$$0,01x^2 - 32x + 2,56 = 0$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 4 \times 0,01 \times 2,56}}{0,02}$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 0,1024}}{0,02}$$

Figura 5. Resolução da alínea c) de Mercúrio (Parte 1)

Após incorrer num erro de transcrição (a parcela $32x$ deveria ser $0.32x$), Mercúrio não consegue chegar ao que se pretendia (figura 6).

Handwritten mathematical work on lined paper:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1023,9}}{0,02}$$

$$x = \frac{32 \pm 31,998}{0,02}$$

$$x = \frac{0,002}{0,02} \quad \vee \quad x = \frac{63,998}{0,02}$$

$$x = 0,1 \quad \vee \quad x = 3199,9$$

Figura 6. Resolução da alínea c) de Mercúrio (Parte 2)

A equação inicial, $f(x) = 2,56$, decorre da relação entre f , que representa a altura da bola quando a sua projeção se encontra a x metros do local do remate, e $2,56$, que é a altura máxima que a bola atinge. No entanto, assim que se inicia a manipulação algébrica, cessa a possibilidade de estabelecer relações entre as parcelas e/ou termos da equação. Uma potencial desvantagem da abordagem algébrica reside na dificuldade em estabelecer conexões com a situação problemática que se está a trabalhar. A abordagem geométrica ao problema, para além de conduzir de forma mais natural à solução, auxilia ao manter presente a situação descrita.

Em contexto de entrevista, Mercúrio partilha a sua visão relativamente ao tipo de tarefas realizado e ao que estas podem acrescentar à aprendizagem matemática:

I – Olhando para o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios ou desvantagens achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas?

M – Como nós estamos habituados a fazer as tarefas de uma certa maneira, quando fizemos estas, inicialmente foi um bocado um choque porque é diferente do que estamos habituados a fazer e é difícil pensar nas situações reais. Mas eu acho que, primeiro, torna as coisas mais divertidas e também ajuda a transportar a matemática para a realidade e não é só coisas abstratas. É mais concreto e é mais fácil de visualizar e perceber os conceitos.

A partilha da aluna vai ao encontro da conclusão mencionada por Allevato e Onuchic (2019), quando as autoras referem que os alunos adquirem uma postura mais favorável à

Matemática ao perceberem que podem utilizá-la para compreender fenómenos exteriores à disciplina.

Estudo de caso: Vénus

Na alínea a), Vénus opta por recorrer às fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola (figura 7), interpretando o resultado em conformidade com o problema.

$$1 - a) \quad f(x) = 0,32x - 0,01x^2$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,32}{2 \cdot (-0,01)} = -\frac{0,32}{-0,02} = 16$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(16) = 0,32 \times 16 - 0,01 \times 16^2 = 2,56 \text{ m}$$

Figura 7. Resolução da alínea a) de Vénus

Na resolução da segunda alínea do problema, contudo, o aluno não chega à resposta mais completa que seria possível dar (figura 8).

$$b) \quad h_{\text{bola}} = 2,44 \text{ m} \quad f(2s) = 0,32 \times 2s - 0,01 \times 2s^2 = 0$$

$$f(2s) = 8 - 6,25 = 1,75 \text{ m (altura)}$$

→ Resulta em golo, caso a passagem da bola não seja impedida pela barreira e/ou pelo jogador de 1,95m e caso não bata num dos postes.

Figura 8. Resolução da alínea b) de Vénus

Na resposta dada, pode ler-se: “Resulta em golo, caso a passagem da bola não seja impedida pela barreira e/ou pelo jogador de 1,95m e caso não bata num dos postes.” Por um lado, Vénus não se apercebe da possibilidade de dar resposta ao primeiro “caso”, isto é, da possibilidade de confirmar se a bola passa pela barreira e/ou pelo jogador mais alto, recorrendo ao valor lógico da desigualdade $f(9,15) > 1,95$. Por outro lado, também não nota que o segundo “caso” não estava previsto nas quatro situações que o enunciado refere que podem acontecer.

Um aspeto importante na resolução apresentada é o facto de o aluno não esboçar o diagrama representativo da situação desta alínea. O não reconhecimento da possibilidade de fornecer uma resposta mais completa ou, pelo menos, mais determinística, reforça a importância e o potencial das representações múltiplas que Canavarro (2017) defende. Esta observação é realçada na resolução da alínea seguinte.

Na alínea c), Vénus recorre a um raciocínio geométrico que conduz a uma compreensão completa da situação. O aluno recorre a um diagrama que o leva a compreender o enunciado, a realizar os raciocínios necessários e, por fim, a dar uma resposta completa (figura 9).

barreira e/ou pelo jogador de 1,95m e caso não bata num dos postes.

altura = 2,56m

25-16 = 9m

$$h^2 = e_1^2 + e_2^2 \Leftrightarrow h^2 = (2,56)^2 + 9^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 6,55 + 81$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 87,55$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{87,55} \Leftrightarrow h = 9,4 \text{ m}$$

Figura 9. Resolução da alínea c) de Vénus

O diagrama simples a que Vénus recorre evidencia a possibilidade do recurso ao teorema de Pitágoras, sendo necessário realizar apenas uma subtração para a obtenção da medida que falta e para a posterior aplicação do mesmo ($25 - 16 = 5$). Desta forma, confirma-se que a resolução de problemas é uma atividade que promove o estabelecimento de conexões matemáticas (tanto internas, como externas), como defendem Allevato e Onuchic (2019) e Carvalho e Silva et al. (2023).

Em contexto de entrevista, Vénus dá a sua opinião relativamente ao tipo de tarefas realizado e ao que estas podem acrescentar à aprendizagem matemática:

I – Tendo em conta o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas, que envolvem contextos doutras disciplinas?

V – Começando com a Matemática relativamente a contextos doutras disciplinas, neste caso Física, facilita bastante. Porque é quase como se nós tivéssemos o dobro da aprendizagem, tanto em Matemática como também temos umas luzes de Física. Ou seja, acho que é mais fácil para nós associarmos coisas que estão ligadas a situações reais por que já experimentámos, já as visualizámos em contexto doutras disciplinas.

A aluna manifesta agrado na possibilidade de associar a Matemática a outras disciplinas, referindo o caso da Física, que está relacionada com a explicação de fenómenos reais, alinhando-se com a conclusão de Allevato e Onuchic (2019), quando afirmam que os alunos adquirem uma atitude mais favorável para com a disciplina ao aperceberem-se que podem utilizá-la para compreender fenómenos de outras áreas.

Estudo de caso: Saturno

A resolução que Saturno apresenta para a primeira alínea ilustra uma boa articulação das ferramentas matemáticas conhecidas com o que é pedido, como é possível aferir na figura 10.

Handwritten solution on grid paper:

$$y = 0,32x - 0,01x^2$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01x^2 + 0,32x$$

$$\Leftrightarrow y = -(0,01x^2 - 0,32x)$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01(x^2 - 32x)$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01(x - 16)^2 - 256$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01[(x - 16)^2 - 256]$$

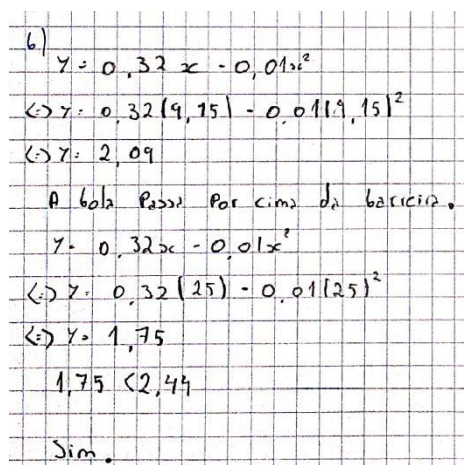
$$V: (16; 2,56)$$

A altura máxima atingida pela bola foi de 2,56 m.

Figura 10. Resolução da alínea a) de Saturno

É usada a técnica do completamento do quadrado de modo a obter-se a ordenada do vértice da parábola associada à função quadrática dada, que corresponde, finalmente, ao máximo da função e, logo, à altura máxima atingida pela bola.

Quanto à alínea b), um aspeto curioso na sua resolução (figura 11) é o facto de o aluno optar por traduzir o primeiro cálculo realizado em linguagem corrente, mas traduzir o segundo cálculo em linguagem simbólica (matemática).



b)

$$y = 0,32x - 0,01x^2$$

$$\hookrightarrow y = 0,32(1,75) - 0,01(1,75)^2$$

$$\hookrightarrow y = 2,09$$

A bola passa por cima da barreira.

$$y = 0,32x - 0,01x^2$$

$$\hookrightarrow y = 0,32(2,5) - 0,01(2,5)^2$$

$$\hookrightarrow y = 1,75$$

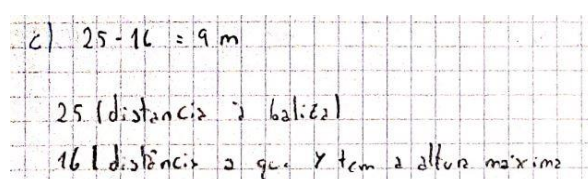
1,75 < 2,44

Sim.

Figura 11. Resolução da alínea b) de Saturno

Na realidade, estas traduções complementam-se uma à outra, sendo que seria expectável que o aluno apresentasse a afirmação em linguagem simbólica, traduzindo-a posteriormente para linguagem corrente, envolvendo o contexto do problema. Em primeiro lugar, partindo da desigualdade $2,09 > 1,95$, concluiria que a altura da bola quando esta passa pela barreira é superior ao jogador mais alto da barreira e, logo, que esta passa por cima da barreira. E em segundo lugar, partindo da desigualdade $1,75 < 2,44$, concluiria que a altura da bola é inferior à altura da barreira quando esta passa pela linha da baliza.

Na resolução apresentada para a alínea c), Saturno interpreta que a distância pretendida é a distância da zona de remate à projeção da bola relativa ao chão (figura 12).



c) $25 - 16 = 9m$

25 (distância à baliza)

16 (distância a que y tem a altura máxima)

Figura 12. Resolução da alínea c) de Saturno

Tendo em conta a capacidade elevada do aluno em articular os dados das situações descritas com o seu conhecimento matemático e em utilizar os mesmos para efetuar raciocínios, a sua resolução põe a claro uma particularidade importante. Na resolução apresentada, em contraste com as outras, não há nenhum esquema ilustrativo da situação, que poria de imediato em evidência a conceção errada de Saturno. Isto vem fundamentar a importância das representações múltiplas de uma mesma situação matemática para o aprofundamento da compreensão da mesma (Canavarro, 2017).

Considerações finais

Estratégias

Ao longo do estudo realizado, verificou-se o recurso a representações múltiplas de uma mesma situação matemática no recurso a esboços ou diagramas auxiliares (Canavarro, 2017). Esta estratégia permite, numa primeira instância, uma compreensão mais profunda da situação descrita no enunciado e, posteriormente, uma interpretação mais adequada às questões colocadas. Tal decorre da vantagem de se poder visualizar o problema, encarando o mesmo de perspetivas distintas (como o são a algébrica e a geométrica). Como se pôde observar nas resoluções de Mercúrio na alínea b) (figura 4) e de Vénus na alínea c) (figura 9), os diagramas auxiliares que os alunos representaram facilitaram a construção do raciocínio. Essa facilitação deu-se tanto na associação dos valores com aquilo que eles representam, como no reconhecimento da possibilidade de usar resultados doutra área da matemática, como aconteceu com o teorema de Pitágoras.

Contributo das conexões matemáticas

Relativamente aos benefícios que o uso de conexões matemáticas acarreta para a compreensão sobre conceitos do tópico de funções, verificou-se: a facilitação da deteção do erro proveniente do contexto semirreal, como aconteceu com Mercúrio na resolução da alínea a) (figura 3); e a promoção da associação dos conceitos reais em estudo com os conceitos matemáticos pelos quais estes são representados, manifestada na generalidade das resoluções da alínea b), na associação correta entre cada desigualdade e a conclusão que dela decorria, e nos excertos das entrevistas.

Quanto ao primeiro contributo, este deve-se à concretização/materialização dos objetos matemáticos. Torna-se mais fácil identificar erros quando uma quantidade está associada a um objeto ou um conceito real, do que se for trabalhado no abstrato. Porém, o potencial deste contributo só pode ser verdadeiramente atingido se o professor orientar os seus alunos no sentido de se apropriarem da competência de revisão da sua resolução, após a deteção do erro. Como se observou com Mercúrio, na sua resolução da alínea a) (figura 3), ainda que a aluna tenha detetado o erro, não foi capaz de encontrar a sua origem e corrigi-lo. Esta competência pode ser trabalhada em contexto de aula, individualmente ou em grupo.

Face às dificuldades sentidas pelos alunos no tópico de funções, referidas por Ponte et al. (2009), as conexões matemáticas com a realidade mostram-se como uma oportunidade para tornar a simbologia mais compreensível, trazendo-a do abstrato para o concreto, uma vez que esta surge frequentemente associada a um conceito real, como sendo o x com uma distância e o $f(x)$ com uma altura.

Sugestão para futuras investigações

Para futuras investigações, sugerem-se duas questões orientadoras que poderão levar a uma melhor compreensão do impacto que o uso de conexões matemáticas tem para a resolução de problemas no contexto do ensino e da aprendizagem da Matemática:

- i. Que atitude pode adotar o professor na implementação de resolução de problemas que envolvam conexões matemáticas, de modo a catalisar a aprendizagem dos alunos?
- ii. Que oportunidades oferecem as conexões matemáticas para desenvolver as competências trabalhadas na resolução de problemas?

Referências

- Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2019). As conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. *RenCiMa*, 10(2), 1-14. <https://doi.org/10.26843/rencima.v10i2.2334>
- Alves, D. F. L. (2018). *As aplicações da Função Quadrática no dia a dia, uma experiência com alunos de 10º ano numa turma de Ciências e Tecnologias*. [Relatório de estágio de mestrado, Instituto de Educação da Universidade do Minho]. http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/58347/1/Relat%C3%B3rio%20de%20Est%C3%A1gio_D%C3%A9bora%20Filipa%20Lopes%20Alves.pdf
- Bisognin, V., & Flôres, M. V. (2021). Conexões Matemáticas e Resolução de Problemas: um estudo envolvendo estudantes de um curso de licenciatura em matemática. In *Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 759-772). Even3.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualise and contend with mathematical connections*. [Unpublished doctoral dissertation Simon Fraser University]. Summit Research Repository. <https://core.ac.uk/download/pdf/56373465.pdf>
- Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, 144-145, 38-42.
- Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E. G., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A. Articulação com o Perfil dos Alunos. 10.º ano. Ensino Secundário*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf
- Ferreira, C. D. (2012). *Conexões matemáticas em álgebra: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade*. (Relatório de estágio de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa). <http://hdl.handle.net/10451/7694>
- Ferreira, G. (2023). *Relatório de estágio – Conexões matemáticas no âmbito do estudo de funções*. [Relatório de estágio de mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa].
- Jacinto, H., & Pires, M. V. (2019). Tarefas e recursos para a promoção de conexões matemáticas. In N. Amado, A.P. Canavarro, S. Carreira, R.T. Ferreira & I. Vale (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2019, Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 189-195). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano de escolaridade: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. (Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa). <http://hdl.handle.net/10451/1228>
- Mendes, F. (2022). Conexões matemáticas em debate: Matemática no património cultural material de Setúbal. *Educação e Matemática*, 164, 6-10.
- NCTM. (2017). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM. <http://hdl.handle.net/10451/3008>
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132. <http://hdl.handle.net/10451/3007>
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. DGIDC. <http://hdl.handle.net/10451/7105>

- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275. <https://pubs.nctm.org/view/journals/mtms/3/4/article-p268.xml>
- Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods*. Sage Publications.

**GRANDEZA ÁREA: RELAÇÃO ENTRE A MEDIDA DA ÁREA DE UMA
FIGURA COM A DA UNIDADE DE MEDIDA UTILIZADA**

**AREA MAGNITUDE: RELATION BETWEEN THE MEASUREMENT OF THE
AREA OF A FIGURE AND THE UNIT OF MEASUREMENT USED**

Marta Teixeira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

martateixeira@edu.ulisboa.pt

Lurdes Serrazina

*Escola Superior de Educação de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade
de Lisboa, Portugal*

lurdess@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: O objetivo desta comunicação é compreender o contributo de uma tarefa para o desenvolvimento da relação entre usar diferentes unidades de medida (u.m.) e as respetivas medidas de área, através da discussão das estratégias de resolução dos alunos relativas ao processo de medição, por pavimentação, e das ações do professor e da investigadora no momento de discussão coletiva. Esta tarefa, de natureza exploratória, é parte de uma sequência de tarefas que se integra num estudo mais amplo, que inclui uma experiência de ensino realizada no 3.º e 4.º anos de escolaridade, de natureza qualitativa e interpretativa, na modalidade de investigação baseada em *design*. A recolha de dados, realizada em contexto educativo, foi apoiada em observação direta e participante, registos vídeo e fotográficos, produções escritas dos alunos e notas de campo. A análise de dados centra-se no momento de discussão coletiva e usa a análise de conteúdo. São analisadas as resoluções dos alunos e as ações do professor e da investigadora na condução daquele momento. Os resultados mostram a utilização de três estratégias de resolução na medição da área com u.m. não padronizadas: 1) pavimentação total da figura com uma e com duas u.m.; 2) pavimentação de partes da figura e 3) compensação. Nestas estratégias estão presentes a relação entre as u.m., a relação entre as u.m. e as respetivas medidas de área e ainda a relação entre medidas relativas a unidades diferentes. O momento de discussão coletiva e as ações do professor e da investigadora contribuíram para a construção do novo conhecimento pelos alunos.

Palavras-chave: unidade de medida, medida de área, área

Abstract: The aim of this paper is to understand the contribution of a task to the development of the relationship between using different units of measurement and the respective area measurements, through discussion of students' resolution strategies related to the measurement process, by tessellation, and the actions of the teacher and researcher during the collective discussion. This task is exploratory and is part of a sequence of tasks that is integrated on a broader

study, which includes a teaching experiment in the 3rd and 4th grades, with a qualitative-interpretative approach, in the modality of design-based research. Data collection, carried out in an educational context, was supported by direct and participant observation, video and photographic records, students' written productions and field notes. Data analysis focuses on content analysis of the moment of collective discussion. The students' resolutions and the teacher and researcher's actions in conducting this moment are analyzed. The results show the use of three resolution strategies when measuring the area with non-standard units: 1) total tessellation of the figure with one and two measurement units; 2) tessellation of parts of the figure and 3) compensation. These strategies include the relationship between the units of measurement and the relationship between the units of measurement and the respective area measurements and also the relationship between measurements relative to different units. The moment of collective discussion and the teacher and researcher's actions contributed to the construction of new knowledge by students.

Keywords: unit of measurement, area measurement, area

Introdução

Medir é uma atividade diária comum e saber medir corretamente é fundamental. Mas, a medição nem sempre é trabalhada em sala de aula com a devida importância, quando comparada, por exemplo, com o trabalho com números e operações (Smith III & Barrett, 2017). Acresce que, a medida é uma das utilizações mais comuns da matemática, permitindo estabelecer conexões entre dois grandes temas, geometria e números, e relacionar a matemática com outras disciplinas (NCTM, 2007; Smith III & Barrett, 2017). Daí a relevância deste trabalho, dada a escassez de investigações realizadas em Portugal sobre este tema (Serrazina, 2017) e a importância que lhe é dada no 1.º Ciclo do Ensino Básico. De notar que as atividades de medição ajudam a desenvolver capacidades importantes para o dia a dia, a reforçar conhecimentos sobre outros temas da matemática, a estabelecer conexões com outras áreas do currículo, envolvendo os alunos numa aprendizagem ativa. Através da resolução de problemas podem ser desenvolvidos conceitos e processos de medição, que são formalizados e alargados ao longo da escolaridade (NCTM, 2007).

Esta comunicação tem como objetivo compreender o contributo de uma tarefa para o desenvolvimento da relação entre usar diferentes unidades de medida (u.m.) e as respetivas medidas de área, discutindo estratégias de resolução relativas ao processo de medição de área, por pavimentação, de uma situação problemática para a qual os alunos não dispunham de um processo imediato de resolução, e das ações do professor e da investigadora no momento de discussão coletiva.

Enquadramento teórico

Grandeza área

Para Ponte e Serrazina (2000) “o conceito de área corresponde à cobertura de uma superfície com uma unidade repetida, de forma a pavimentar essa superfície, isto é, não deixar buracos nem fazer sobreposições” (p. 196). A medida de uma determinada área “é um número real que resulta da comparação dessa área com uma área tomada para unidade” (Albuquerque & Carvalho, 1990, p. 19).

Breda et al. (2011) esclarecem que área e medida de área são conceitos diferentes. A área é uma grandeza geométrica, pelo que é mensurável com u.m. adequadas. A medida de

área de uma figura é um valor numérico, obtido da comparação entre a área da figura e a u.m.

Trabalhar com a grandeza área requer pensar a duas dimensões, o que torna complexa a sua compreensão. Alguns autores apresentam quatro ideias na aprendizagem da área: 1) partição equitativa; 2) iteração da unidade; 3) conservação e 4) estruturação retangular (Battista, 2003; Clements & Sarama, 2009; Stephan & Clements, 2003). Lehrer et al. (2003) e Stephan e Clements (2003) defendem que as primeiras experiências com a área devem incluir a pavimentação de uma região com uma unidade à escolha, com a posterior discussão dos resultados obtidos, comunicando os processos e precisando a unidade escolhida. As discussões acerca destas ideias permitem que os alunos criem imagens mentais, que os ajudam a visualizar uma região dividida em sub-regiões que podem ser contadas. Deste modo, poderão ultrapassar a dificuldade que, por vezes, apresentam quando há necessidade de subdividir a unidade porque esta não cabe inteira no espaço que sobrou para pavimentar. A utilização de diferentes unidades no processo de pavimentação é importante, porque os alunos necessitam de discriminar a unidade escolhida, permitindo que compreendam que a unidade pode mudar e exigindo ainda a descoberta da relação entre diferentes unidades (Ponte & Serrazina, 2000).

De acordo com Smith III e Barrett (2017), a u.m. é conceptual e não um objeto físico, embora muitas vezes esta distinção seja ignorada. Breda et al. (2011) definem u.m. como a quantidade de uma grandeza usada na comparação com outras quantidades que se pretendem medir. Vários autores (NCTM, 2007; Smith III & Barrett, 2017) consideram que os alunos devem ter experiências com várias u.m., antes da utilização das u.m. padronizadas, e devem ser os próprios a escolher essas unidades, de acordo com a grandeza com que estão a trabalhar e a quantidade dessa grandeza.

Para o NCTM (2007), medir é atribuir um valor numérico a um determinado atributo mensurável de um objeto. Smith III e Barrett (2017) acrescentam que a medição converte quantidades contínuas em quantidades discretas, dividindo-as em coleções contáveis de partes de tamanho igual. A seleção de unidades apropriadas é fundamental para este processo. Grant e Kline (2003) indicam que as atividades de medida envolvem: 1) escolher uma unidade apropriada para medir o atributo; 2) explorar a relação existente entre o tamanho da unidade e o número de unidades necessárias para medir; 3) lidar com medidas que têm unidades inteiras e partes da unidade; 4) compreender que há uma relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de u.m, quanto maior é a unidade menor é a medida. O NCTM (2007) considera que o processo de medição de qualquer grandeza é semelhante: 1) escolher uma unidade, 2) comparar a unidade com a grandeza a medir e 3) determinar o número de unidades necessárias. Este número pode ser obtido por iteração da unidade e contagem do número de iterações (NCTM, 2007; Sarama & Clements, 2009), relacionando assim a iteração da unidade com um número, ou através de um instrumento de medida (NCTM, 2007).

Discussão coletiva e ações do professor

A fase da discussão coletiva constitui uma oportunidade para o professor promover a comunicação matemática em sala de aula. Os alunos apresentam as suas estratégias de resolução, comparam-nas com as dos seus pares, justificam e argumentam as suas ideias e ouvem as dos outros. É um momento que se reveste de grande importância na construção coletiva de novo conhecimento.

O modelo de Stein et al. (2008) contempla cinco práticas que apoiam a preparação e condução das discussões matemáticas: 1) antecipar estratégias e dificuldades dos alunos;

2) monitorizar o trabalho autónomo; 3) seleccionar as estratégias importantes a partilhar; 4) sequenciar as intervenções dos alunos e 5) estabelecer conexões entre as diferentes estratégias.

As tarefas, em sala de aula, constituem o objeto da atividade dos alunos (Christiansen & Walther, 1986) e, em conjunto com as ações do professor, influenciam a forma como os alunos aprendem matemática (Stein & Smith, 1998; Stein et al., 2008). As ações do professor para a dinamização da discussão, têm objetivos diferentes de acordo com o momento que está a decorrer. Ponte et al. (2013) apresentam as ações: 1) convidar, de modo a envolver os alunos na discussão; 2) apoiar/guiar, conduzindo os alunos na apresentação da informação; 3) informar/sugerir, apresentando informação ou validando afirmações dos alunos e 4) desafiar, incentivando os alunos a avançarem no conhecimento.

Metodologia

A tarefa objeto desta comunicação faz parte de uma sequência de tarefas, integrada num estudo mais amplo, que inclui a realização de uma experiência de ensino no 3.º e 4.º anos de escolaridade. Este estudo segue uma abordagem qualitativa, com paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), na modalidade de investigação baseada em *design* (Ponte et al., 2016). Esta tarefa tinha como objetivo relacionar diferentes u.m. e as respetivas medidas de área, através da pavimentação de três figuras, usando como u.m. a área de um quadrado e a área de um triângulo.

O estudo foi desenvolvido em três fases: 1) preparação da experiência; 2) sua implementação e 3) análise retrospectiva. A fase da preparação foi realizada em colaboração com o professor da turma. Assim, foram analisados documentos curriculares referentes à Medida, nomeadamente as *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro et al., 2021; ME, 2018) e propostas curriculares internacionais (por exemplo, NSW, 2017). Também foi analisado o quadro teórico da grandeza e foi formulada, pela investigadora (primeira autora), uma conjectura, a qual considera que os alunos desenvolvem a compreensão de uma grandeza, assim como o respetivo processo de medição, percorrendo cinco níveis de aprendizagem: 1) identificação do atributo a medir; 2) medição informal – pavimentação; 3) medição informal – iteração da u.m.; 4) medição com u.m. padronizadas e 5) relação entre as u.m. padronizadas. Com base nesta conjectura, a investigadora construiu uma trajetória hipotética de aprendizagem para a grandeza área. Para cada um destes níveis, e com a colaboração do professor, foi construída e planificada uma sequência de tarefas desafiantes e articuladas entre si.

Na fase de realização em sala de aula, todas as tarefas foram acompanhadas pela investigadora, como observadora participante, sendo as aulas conduzidas pelo professor. As intervenções pontuais da professora foram acordadas com o professor dada a sua pouca experiência neste tipo de aulas. No final de cada aula e a partir da reflexão conjunta com o professor, ambos revisitavam a sequência de tarefas definida *a priori*, analisando a necessidade de proceder a ajustamentos ou não. Os dados foram recolhidos por observação direta e participante, apoiada em registos vídeo e fotográficos, recolha das produções escritas dos alunos e notas de campo, para posteriormente ser realizada uma análise mais completa e sistemática destes dados e uma reflexão aprofundada sobre toda a experiência de ensino.

A tarefa aqui analisada inclui-se numa sequência para desenvolver o nível 2) medição informal – pavimentação. Para desenvolver este nível, foi criada uma sequência de 4 tarefas, todas de natureza exploratória, com recurso a diferentes materiais manipuláveis

físicos. Estas tarefas tinham como objetivo trabalhar a medição da área, através da pavimentação de superfícies, utilizando u.m. não padronizadas. A primeira tarefa desta sequência explorou a noção e escolha apropriada da u.m. e as outras 3 tarefas exploraram o processo de medição. Destas 3 tarefas, a primeira é objeto desta comunicação. A escolha desta tarefa está relacionada com o facto de ser a primeira a trabalhar a relação entre a u.m. e a respetiva medida de área. Sendo uma tarefa de natureza exploratória, a sua realização em sala de aula envolveu três momentos distintos: introdução, trabalho autónomo e discussão coletiva. Esta comunicação centra-se neste último momento.

A análise de dados teve por base a análise de conteúdo dos elementos recolhidos no momento de discussão coletiva. A análise das ações do professor e da investigadora foi suportada no quadro de Ponte et al. (2013), tendo sido usado o quadro de indicadores de Araman et al. (2019), com pequenas adaptações.

A experiência foi realizada numa escola pública do distrito de Lisboa, numa turma de 18 alunos, a maioria rapazes, a frequentar o 3.º ano pela primeira vez. Na realização desta tarefa, os alunos trabalharam a pares e a cada par foi distribuído o enunciado da tarefa e respetivos materiais: um conjunto de 3 figuras diferentes (Anexo I) e um envelope com quadrados e triângulos a serem usados como u.m. Pretendíamos que os alunos medissem as respetivas áreas, concluindo depois se eram ou não figuras equivalentes. Nesta comunicação apenas nos debruçamos sobre as estratégias de medição, como já foi referido. Os nomes dos alunos são fictícios.

Resultados

O professor iniciou a aula revendo o conceito de figuras equivalentes, que tinha sido trabalhado anteriormente pelo professor, fora desta experiência. De seguida, distribuiu a cada par uma folha com o enunciado da tarefa e, enquanto os alunos individualmente construía a sua ideia sobre a tarefa, distribuiu o material necessário à sua concretização. Posteriormente, questionou-os sobre o entendimento que tinham acerca da tarefa e esclareceu as dúvidas colocadas, referentes à compreensão do enunciado, estabelecendo 30 minutos para a sua realização. Durante este tempo, o professor e a investigadora circularam pelos diversos pares, monitorizando o seu trabalho: verificaram a compreensão da tarefa, recolheram informações sobre o modo de pensar dos alunos, decidindo que aspetos deveriam ser discutidos e aprofundados no momento de discussão coletiva. Fotografaram ainda as resoluções dos alunos e, em conjunto, selecionaram e sequenciaram as resoluções para colocar à discussão. O momento de discussão coletiva durou aproximadamente uma hora e meia. De seguida apresentamos as diferentes estratégias usadas pelos pares.

1) Pavimentação total da figura

Esta estratégia foi usada por 3 grupos: 2 grupos (Figura 1) utilizaram duas u.m. diferentes para medir a área com o quadrado e na medição da área com o triângulo, um destes grupos usou apenas uma u.m. (o quadrado); um outro grupo (Figura 2) utilizou apenas os triângulos na medição da área da Figura C e estabeleceu a relação entre as u.m.

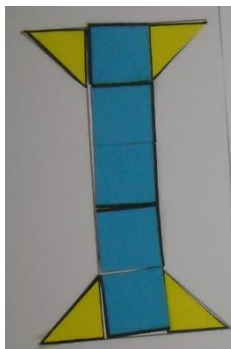


Figura 1. Estratégia apresentada por Liliana e Mariana – Figura C.

Na ação de convidar, o professor solicitou ao grupo o relato da estratégia utilizada (Figura 1).

Liliana – Nós pusemos os quadrados todos em fila [coluna], que era onde cabiam, e pusemos os triângulos nos espaços que sobravam.

Professor – E qual é a área da figura? [...] Em quadrados?

Liliana – 5.

Professor – 5 quadrados. E triângulos?

Liliana – 4.

Para Liliana, o grupo utilizou duas u.m. diferentes em simultâneo, não estabelecendo relação entre elas. Os quadrados foram utilizados em coluna, pois era onde encaixavam, e os triângulos foram utilizados para pavimentar as partes da figura onde estavam representados. A medida da área em quadrados não teve em conta a relação entre o triângulo e o quadrado, sendo contabilizados apenas 5 quadrados, assim como a medida de área em triângulos, que contou apenas com duas destas u.m., correspondendo estes valores ao número de u.m. que pavimentavam a figura.

Professor – Alguém tem alguma coisa a dizer sobre a estratégia deste grupo? Catarina.

Catarina – Eles misturaram duas figuras, só numa vez. Não fizeram uma vez cada figura.

O professor desafia os alunos a refletirem sobre o trabalho deste grupo e convida Catarina a participar na discussão. Na sua intervenção, a aluna refere-se à pavimentação com as duas u.m., conjuntamente, sem estabelecer relação entre elas. De seguida:

Duarte – No resultado, os triângulos são menos do que os quadrados.

Professor – E o que é que tu achas disso?

Duarte – Que deviam ser mais [triângulos], porque são dois triângulos e não só um.

Professor – Dois triângulos, o quê?

Duarte – Que... são o dobro.

Professor – Do?

Duarte – Quadrado.

Duarte revela conhecimento da relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de unidades necessárias para pavimentar e evidencia ainda a relação entre as u.m. Nas suas intervenções, o professor apoia-o na clarificação do seu discurso e na análise que faz da estratégia apresentada.

O grupo seguinte, Margarida e Luísa, apresentou a mesma pavimentação do grupo anterior (Figura 1). O professor convidou-as a participarem na discussão, relatando as estratégias de resolução que usaram:

Margarida – Nós pusemos os quadrados aqui em [...] coluna. Depois, como nós reparámos que só cabiam triângulos... nós pusemos os triângulos. Depois, nós juntámos os dois triângulos [...], porque faziam quadrados.

Embora a pavimentação deste grupo seja a mesma do anterior, a contagem das u.m. foi diferente. Margarida e Luísa consideraram a relação entre o triângulo e o quadrado, juntando 2 triângulos para formarem um quadrado, justificação que já tinham apresentado durante o trabalho autónomo (notas de campo). De seguida:

Professor – Qual é a diferença entre a primeira figura que nós vimos e esta? [projetando as duas fotografias] Se as fotografias são iguais, porque é que esta estratégia está correta e a do outro grupo não está? Rui.

Rui – Porque elas [este grupo] fizeram dois triângulos para dar um quadrado [...]. A Liliana e a Mariana puseram os triângulos, mas não os fizeram como quadrados.

O professor desafia os alunos a refletirem sobre as estratégias apresentadas e convida Rui a iniciar esta reflexão. Rui demonstra a compreensão das estratégias dos grupos e justifica o facto da última estar correta, evidenciando a relação existente entre o triângulo e o quadrado.

Na medida da área com os triângulos, Luísa referiu que a estratégia usada foi parecida com a anterior, mas que utilizaram os triângulos para construir os quadrados que colocaram em coluna, evidenciando a relação entre as duas u.m. Continuando:

Investigadora – Vocês, quando mediram a área da figura com os quadrados, já sabiam quanto é que seria com os triângulos ou precisaram de medir com os triângulos?

Luísa – Já sabíamos quantos triângulos iam caber, porque fizemos o dobro.

Investigadora – O dobro do quê?

Luísa – Dos quadrados.

Margarida – De 7.

Investigadora – Então havia necessidade de medir a área com os triângulos?

Margarida – Não! Mas foi para ter a certeza.

Com o propósito de verificar se nesta estratégia tinha sido utilizada a relação entre as u.m. e as respetivas medidas de área, a investigadora convida as alunas, solicitando uma resposta à questão fechada que coloca. Perante a resposta de Luísa, a investigadora apoia as alunas a clarificarem a afirmação de Luísa, e estas mostram ter presente esta relação.

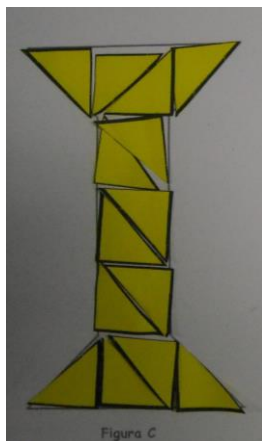


Figura 2. Estratégia utilizada por Rui e Simão – Figura C.

O professor convidou Rui e Simão a relatarem a estratégia utilizada (Figura 2).

Rui – Nós primeiro pusemos os triângulos aqui e depois fomos fazendo os quadrados [com os triângulos] em coluna.

O par apenas utilizou triângulos para medir a área da figura. Inicialmente colocaram os triângulos onde estes encaixavam e de seguida formaram quadrados com a u.m., pavimentando a coluna da figura.

Professor – Então, qual é a área da figura em triângulos?

Rui e Simão – 14.

Professor – E em quadrados?

Simão – Fizemos a metade [do número de triângulos].

Professor - Porque é que fizeram a metade?

Rui - Porque nós não conseguimos uma maneira de fazer com os quadrados e fizemos com os triângulos.

Professor – Qual foi a dificuldade?

Rui – Porque... sobravam quadrados... não cabiam todos... em algumas partes.

Miguel – Tinhas de imaginar que essas partes iam para outros lados.

Na a o de convidar, o professor coloca uma questão de verifica o relativamente à medida da área da figura em triângulos. Após a resposta de Rui e Simão, e uma vez que o par não apresentou uma estratégia de medi o da área usando o quadrado como u.m., o professor desafia os alunos, solicitando uma justifica o para este facto. Dada a resposta de Rui, podemos perceber que o grupo não usou quadrados porque não sabia como encaixar esta u.m. em algumas partes da figura, pois sobrava parte da u.m. Ou seja, os alunos não sabiam como representar com os quadrados.

Como não obteve resposta   sua questão anterior, “Porque é que fizeram a metade?”, o professor desafiou novamente o par, solicitando uma justifica o para terem calculado a metade dos triângulos, como estratégia para a medi o da área com quadrados. Simão

evidenciou a relação entre as duas u.m.. De seguida e redizendo a afirmação de Simão, o professor prossegue:

Professor – Então, se dois triângulos fazem um quadrado, como é que vocês calcularam a metade? [...] Precisamos de dois triângulos para fazer um quadrado.

Rui – Porque... nós vimos que o triângulo era a metade do quadrado... e o quadrado era o dobro do triângulo.

O professor, na ação de informar/sugerir, guia os alunos de modo a clarificar a afirmação, e desafia o par, solicitando uma justificação para a estratégia. Rui apresenta a relação entre o triângulo e o quadrado e entre este e o triângulo. Continuando:

Professor – Turma?

Santiago – Como os triângulos são metade do quadrado, ocupam menos espaço. Então precisamos do dobro dos quadrados.

Professor – Muito bem! Como o quadrado é maior do que o triângulo, precisamos de mais quadrados ou de mais triângulos?

Martinho – Mais triângulos.

Professor – Então...?

Martinho – A medida com quadrados vai ser menor do que com os triângulos.

Professor – Vai ser menor. Quanto? Neste caso [...] estes quadrados e estes triângulos.

Martinho – Vai ser metade da medida com o triângulo.

O professor desafia os alunos a refletirem sobre a estratégia deste par. Na sua resposta, Santiago esclarece e conclui, relacionando as u.m. com as respetivas medidas. Na ação de informar/sugerir, o professor valida a resposta do aluno e no discurso que se segue guia os alunos de modo a compreenderem a relação entre as u.m. e as respetivas medidas de área, sem recorrerem à memorização desta relação.

2) Pavimentação de partes da figura

Nesta estratégia (Figura 3) foram deixadas por pavimentar as partes da figura nas quais a u.m. não cabia inteira.

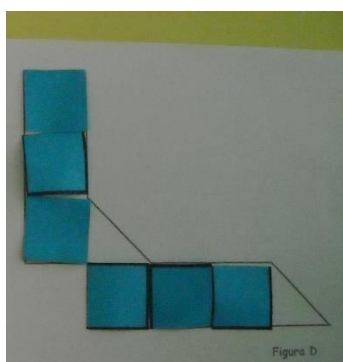


Figura 3. Estratégia utilizada por Inês e Catarina na medida da área com quadrados – Figura D.

O professor convidou Inês e Catarina a relatarem a sua estratégia.

Inês – Primeiro colocámos três quadrados em coluna, depois em linha os outros três quadrados [apontando respetivamente]. Depois vimos que sobravam dois triângulos. Então juntámos estes triângulos, porque formavam um quadrado.

O relato de Inês mostra que utilizaram a relação entre triângulo e quadrado, não sendo necessário colocar esta figura para pavimentar as partes que ainda faltavam. Durante o trabalho autónomo (dos registos em notas de campo) verificámos que esta pavimentação não foi feita, porque as alunas apresentaram dificuldades, não utilizaram triângulos, pois a u.m. era o quadrado, e não sabiam como usar o quadrado, pois saía da figura, tendo optado por não pavimentar.

Na medida da área com o triângulo, Catarina referiu que tiveram necessidade de pavimentar a figura com esta u.m., pelo que a relação entre as 2 u.m. não foi feita. De seguida:

Professor – Então, através do número de quadrados, como é que fazíamos para descobrir o número de triângulos, sem pavimentar? [dirigindo-se à turma]

Duarte – [...] Dividimos os quadrados em dois triângulos.

Professor – E a área seria...?

Duarte – O dobro do resultado com os quadrados.

Professor – Como num quadrado cabem lá dois triângulos, então, os triângulos vão ser o dobro dos quadrados. Se contaram sete quadrados, os triângulos vão ser o dobro, ou seja, 14.

Com o objetivo de ajudar Inês e Catarina a compreender a relação entre as u.m. e as respetivas medidas de área, o professor desafia os alunos a refletirem sobre uma estratégia de resolução. A resposta de Duarte evidencia esta relação, inicialmente entre as u.m. e, com o apoio do professor na clarificação da resposta, o aluno relaciona as respetivas medidas de área. Para concluir, o professor, na ação de informar/sugerir, reelabora a resposta do aluno, clarificando-a apresentando valores concretos, como forma de apoiar.

3) Compensação

Nesta estratégia (Figura 4) foi usada apenas uma u.m. e as metades da u.m. que sobram, são usadas para pavimentar o total da figura, evidenciando capacidade de abstração.

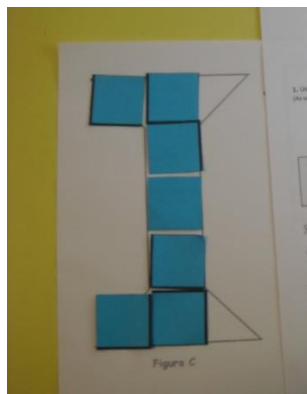


Figura 4. Estratégia utilizada por Miguel e Duarte – Figura C.

O professor convidou os alunos a relatarem a estratégia utilizada.

Duarte – Nós pusemos os quadrados em coluna e depois vimos que sobravam quatro triângulos nas pontas [apontando]. Depois nós, com um quadrado, vimos que se o dobrássemos ao meio, dava dois triângulos. Então pusemos [imaginámos] um triângulo em cima e outro em baixo.

[estes triângulos imaginários referem-se à metade do quadrado na parte superior da figura e à metade do outro quadrado na parte inferior, ambos do lado esquerdo, e que cabem na figura].

A seguir... sobrava um triângulo [em cada um dos quadrados anteriores] [...] esta parte e esta [apontando]. Depois este triângulo [do quadrado inferior esquerdo], nós imaginámos que veio para aqui [triângulo inferior direito], porque o quadrado estava dividido em dois triângulos.

E este quadrado também estava dividido em dois triângulos [apontando para o quadrado superior esquerdo]. Depois esta parte que saía fora, é um triângulo, e nós imaginámos que veio para aqui [apontando agora para o triângulo superior direito].

O grupo usou uma estratégia de compensação, em que as metades dos quadrados colocados e que sobram, os triângulos, imaginariamente são colocados nos triângulos que faltam pavimentar, evidenciando capacidade de abstração.

Martinho – Porque é que não fizeram [pavimentaram] com os triângulos?

Duarte – Porque nós dividimos os quadrados em triângulos e percebemos que não era preciso pavimentar com os triângulos. [...] nós sabíamos que aqui eram dois triângulos e aqui também [apontando para o lado esquerdo da figura, inferior e superior, respetivamente]. Depois nós só dividimos os quadrados que estão na coluna em triângulos.

A resposta de Duarte à questão de Martinho mostra que os alunos não tiveram necessidade de pavimentar a figura com triângulos, calculando a sua medida de área recorrendo à relação existente entre as duas u.m. Continuando:

Professor – E qual é a área [da figura C] em triângulos?

Duarte – O dobro dos quadrados.

Professor – Porquê?

Duarte – Porque se um quadrado são dois triângulos, vamos precisar do dobro dos triângulos.

Para concluir a apresentação do par, na ação de convidar, o professor coloca uma questão de verificação. Na sua resposta, Duarte indica a relação entre as medidas de área do triângulo e do quadrado. Perante esta resposta, o professor desafia o aluno, solicitando uma justificação. Duarte argumenta com a relação entre as duas u.m. e as respetivas medidas de área. O professor desafia os alunos a refletirem sobre esta justificação. Contudo não obtém qualquer comentário, o que poderá indicar a compreensão desta relação.

Após a apresentação e discussão das estratégias, seguiu-se a fase de sistematização das aprendizagens, também conduzida pelo professor e pela investigadora, como acordado com o professor e referido anteriormente, e com a colaboração dos alunos:

Investigadora – Que relação existe entre as unidades de medida e as respectivas medidas de área?

Professor – O que é que podemos concluir?

Investigadora – [...] Unidades de medida... estão aqui [apontando para a tabela do enunciado da tarefa do grupo anterior, projetada]. Vamos escolher uma [u.m.] para poder dizer qual é a relação entre essa unidade e a outra.

A investigadora e o professor desafiam os alunos a refletirem sobre as aprendizagens efetuadas, como forma de conclusão e sistematização do trabalho realizado. Uma vez que não obtêm respostas, a investigadora guia os alunos, conduzindo e focalizando o seu pensamento. De seguida:

Aluno – Metade e dobro.

Investigadora – Sim! Existe uma relação de metade e dobro. Agora temos de saber qual é a unidade. Por exemplo... escolhemos o quadrado. O que é que o quadrado é... do triângulo?

Santiago – O dobro.

Investigadora – Então, podemos dizer que a área do quadrado é...

Santiago – O dobro da do triângulo.

A investigadora continua a guiar os alunos, conduzindo e focalizando o seu pensamento para a relação existente entre as u.m. usadas. As intervenções dos alunos evidenciam esta relação.

Investigadora – Agora vamos olhar para a medida de área de uma figura, quando medimos com o quadrado. O que é que esta medida de área é em relação à medida de área quando medimos com o triângulo?

Carlos – A metade.

Investigadora – É metade! Então, o quadrado é o dobro do triângulo e a medida de área da figura, quando medimos com o quadrado é...

Santiago – Metade do que quando medimos com o triângulo.

Investigadora – E se medirmos com o triângulo?

Santiago – O triângulo é metade do quadrado.

Investigadora – E a medida de área de uma figura, quando medimos com o triângulo...?

Alunos – É o dobro.

Investigadora – É o dobro da medida de área da figura do que quando medimos com o quadrado. Portanto, há uma relação de dobro e de metade. [...] Temos é que escolher uma das u.m., para começar a fazer a relação.

Nas suas intervenções, a investigadora dá continuidade à ação de guiar, conduzindo e focalizando a atenção dos alunos, agora para a relação existente entre as u.m. e as respectivas medidas de área, a qual é indicada pelos alunos. Na última intervenção e na ação de informar/sugerir, a investigadora reelabora as respostas dos alunos, de modo a clarificar o discurso e a concluir.

Miguel – Quando a unidade é o dobro, as medidas vão ser metade e ao contrário também.

Santiago – Como é o caso do quadrado. O quadrado é o dobro [do triângulo] e as medidas vão ser metade.

Investigadora – Exatamente! Nas unidades de medida se a relação for o dobro... as medidas vão ser...

Alunos – Metade!

Investigadora – Se a relação entre a unidades de medida for metade...

Miguel – As medidas vão ser o dobro.

Miguel e Santiago, assim como os restantes alunos, estabelecem a relação existente entre a área da u.m. e a respetiva medida de área. A investigadora, na ação de informar/sugerir, valida as intervenções dos alunos, conduzindo e desafiando para a generalização. Para concluir:

Professor – Olhem todos para aqui [apontando para a mesma tabela]. O quadrado é...

Alunos – O dobro do triângulo.

Professor – Porque 2 triângulos...

Alunos – Formam um quadrado.

Professor – Já nas medidas... se reparamos, aqui estão 7 [quadrados] e aqui estão 14 [triângulos]... quer dizer que quando medimos [a área] a figura com quadrados, a medida de área...

Santiago – É metade do que quando medimos com os triângulos.

Professor – É ao contrário [referindo-se à relação inversa]. A relação entre elas [u.m.] é o contrário das suas medidas. [A área] do quadrado é o dobro da do triângulo, mas a medida da área tendo por unidade o quadrado, é metade da medida tendo como unidade o triângulo.

As intervenções do professor consolidam as últimas intervenções da investigadora, uma vez que desafia os alunos para a generalização, conduzindo-os neste processo, e concretizando com os valores obtidos nas medições realizadas.

Conclusão

Para determinar a medida da área das figuras apresentadas os alunos usaram três estratégias de resolução diferentes: i) pavimentação total da figura, com as duas u.m. apresentadas e fazendo a relação entre elas e com uma u.m., havendo a relação entre as u.m. e as respetivas medidas de área; ii) pavimentação de partes da figura, deixando por pavimentar os espaços onde a u.m. era maior do que o espaço a medir e iii) compensação, estratégia em que a u.m. era maior do que o espaço a medir e, através da capacidade de abstração, a parte da u.m. que sobrava poderia pavimentar espaços da figura que ainda não estavam pavimentados. Em todas as estratégias os alunos relacionaram as duas u.m. Foi ainda identificada a relação inversa entre a área da u.m. e o número de unidades necessárias (Smith III & Barret, 2017).

As dúvidas que surgiram relacionam-se com a utilização de duas u.m. em simultâneo, não tendo em atenção um dos princípios do processo de medir, a escolha e utilização de uma

u.m. (Grant & Kline, 2003; NCTM, 2007) (Figura 1), estratégia apresentada por Liliana e Mariana, erro também apontado por alguns autores (Smith III & Barrett, 2017). Outra dificuldade apresentada foi o facto de os alunos não conseguirem lidar com a u.m. maior do que o espaço a medir (Lehrer et al., 2003; Ponte & Serrazina, 2000), como observado na fase de trabalho autónomo de Catarina e Inês e referida também por Rui e Simão, no momento de discussão coletiva.

A discussão coletiva revelou-se um momento de grande importância, pela partilha e discussão das estratégias utilizadas, justificando e argumentando ideias, pela discussão e esclarecimento do erro na comparação de estratégias, levando à construção de novo conhecimento (Stein et al., 2008). Nas intervenções do professor e da investigadora foram identificadas as quatro ações propostas por Ponte et al. (2013), fundamentais para que o desenvolvimento do momento de discussão coletiva se revestisse de significado e se tornasse parte essencial à construção coletiva do conhecimento matemático.

Dado o objetivo da tarefa, pode afirmar-se que a sua exploração permitiu o estudo e desenvolvimento de três tipos de relações: 1) relação entre u.m.; 2) relação entre uma u.m. e a medida que lhe corresponde e 3) relação entre medidas relativas e u.m. diferentes. No entanto, para este desenvolvimento parecem ter contribuído as ações do professor e da investigadora durante a discussão coletiva.

Agradecimentos

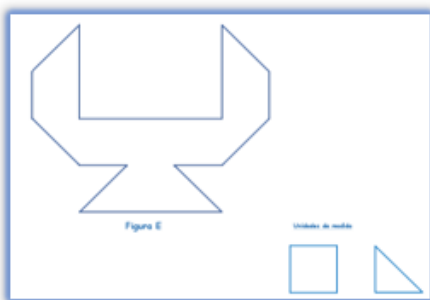
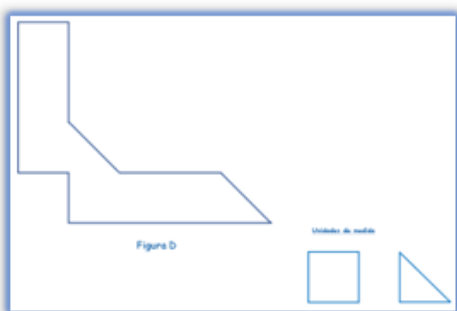
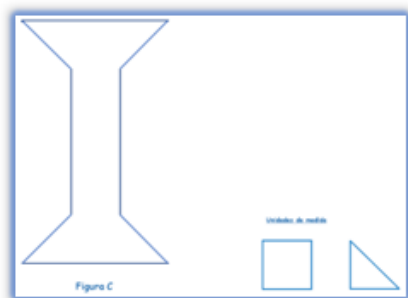
Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através de uma bolsa atribuída à primeira autora (bolsa 2021.04798.BD).

Referências

- Albuquerque, T. O., & Carvalho, R. F. (1990). *Dicionário Elementar de Matemática*. Texto Editora.
- Araman, E. M. O., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2019). “Eu perguntei se o cinco tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(2), 466-490. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p466-490>
- Battista, M. T. (2003). Understanding students’ thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements (Ed.), *Learning and teaching measurement* (pp. 122-142). National Council of Teachers of Mathematics.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. ME, DGIDC.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Reidel.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). Geometric measurement: Area, volume and angle. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (pp. 173-187). Routledge.
- Grant, J., & Kline, K. (2003). Developing the building blocks of measurement with young children. In D. H. Clements (Ed.), *Learning and teaching measurement* (pp. 45-56). National Council of Teachers of Mathematics.

- Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. L. (2003). Developing understanding of measurement in elementary grades. In *Learning and teaching measurement* (pp. 100-121). National Council of Teachers of Mathematics.
- ME [Ministério da Educação] (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática*. ME, DGE.
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.
- NSW [New South Wales] (2017). *Teaching measurement Stage 2-Stage 3*. Department of Education Learning and Teaching Directorate.
- Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, 25(2), 77-98. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22934>
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55-81. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22894>
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*. Universidade Aberta.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Geometric Measurement - Part 2. In J. Sarama & D. H. Clements (Eds.), *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children* (pp. 293–315). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883785-11>
- Serrazina, L. (2017). Contributos da investigação para a aprendizagem da Matemática. *Educação e Matemática*, 144-145, 2-8.
- Smith III, J. P., & Barrett, J. (2017). The learning and teaching of measurement: Coordinating quantity and number. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 355-385). National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(January), 268-275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements (Ed.), *Learning and teaching measurement* (pp. 3-16). National Council of Teachers of Mathematics.

Anexo I



Nota: As imagens das figuras apresentadas, assim como as unidades de medida, não representam o tamanho real.

GÉNERO Y MODELIZACIÓN: ANÁLISIS PRELIMINAR DE UN PROBLEMA ARITMÉTICO

GENDER AND MODELING: PRELIMINARY ANALYSIS OF AN ARITHMETIC PROBLEM

Belén Palop

U. Complutense de Madrid e U. Valladolid, España

b.palop@ucm.es

Rocío Garrido-Martos

U. Autónoma Madrid, España

rocio.garrido@uam.es

Resumen: Este trabajo se centra en la resolución de problemas matemáticos, en particular, en cómo un conjunto de estudiantes de secundaria aborda un problema aritmético compuesto. El estudio analiza las estrategias utilizadas por 158 alumnos de 11 y 12 años y examina si hay diferencias de género en la forma en que los estudiantes abordan estos problemas. Se obtiene que las chicas tienden a ser más ordenadas que los chicos en su enfoque y a utilizar algún tipo de andamiaje (esquema, modelo, etc.) para resolver el problema. Por último, las chicas muestran una menor autoconfianza incluso cuando han resuelto correctamente el problema, mientras que los chicos tienden a expresar una mayor confianza, incluso cuando sus respuestas son incorrectas. Así, nuestro estudio sugiere que existen diferencias de género en la forma en que los estudiantes abordan y resuelven problemas matemáticos y destaca la importancia de adoptar enfoques de enseñanza que consideren estas diferencias para promover un aprendizaje equitativo en matemáticas.

Palabras clave: género, educación matemática, problema aritmético, modelización.

Abstract: This study focuses on mathematical problem-solving, specifically how a group of secondary students approach a compound arithmetic problem. The study analyzes the strategies used by 158 students aged 11 and 12 and examines whether there are gender differences in how students approach these problems. It is found that girls tend to be more organized than boys in their approach and use some form of scaffolding (schema, model, etc.) to solve the problem. Lastly, girls show lower self-confidence even when they have correctly solved the problem, while boys tend to express greater confidence even when their answers are incorrect. Thus, our study suggests that there are gender differences in how students approach and solve mathematical problems and highlights the importance of adopting teaching approaches that take these differences into account to promote equitable learning in mathematics.

Keywords: gender, mathematics education, arithmetic problem, modelling.

Introducción

La resolución de problemas es una de las competencias fundamentales de la alfabetización matemática, si bien se presenta como una de las competencias más difíciles

de adquirir para el alumnado. Existe una clara brecha entre la importancia de este tema en la literatura especializada y en los currículos oficiales con respecto a la práctica de aula (Blum y Ferri, 2009; Codina y Rivera, 2001). Esta brecha entre la literatura y la práctica no solo afecta a la importancia que recibe esta competencia, sino también, y de manera muy directa, a cómo se trabaja la resolución de problemas en el aula. En el contexto español es habitual encontrar en la práctica de aula una recomendación de afrontar la resolución de problemas con un esquema en tres fases, que denominaremos *DOS*, en las que el alumno debe identificar los datos, realizar las operaciones y proporcionar la solución. Este enfoque esquiva el proceso de modelización y se centra únicamente en la resolución aritmética. Además, podemos detectar incluso en los libros de texto la confusión entre ejercicios y problemas (Blanco y Pino, 2015); dinámicas de aula en las que se promueve la mera imitación de un procedimiento que el docente realiza en primer lugar (Lithner, 2011); o un enfoque en el que el problema solo aparece como continuación a la exposición completa del contenido, en oposición a la enseñanza a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021).

Por otro lado, cada vez tenemos más evidencia de la influencia del género en educación matemática (Fuentes y Renobell, 2020), vinculada en muchas ocasiones a lo socioafectivo, pero que se traducen en el aula en comportamientos diferentes a la hora, por ejemplo, de resolver problemas (Ambrose, 2002; Gasco-Txabarri, 2017). Por ello, debemos sumar al planteamiento general comentado anteriormente, dicha componente que está adquiriendo, afortunadamente, cada vez mayor relevancia en la educación matemática desde la perspectiva socioafectiva: ¿en qué medida afecta o no el género del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje? Este enfoque nos obliga a reevaluar los resultados de investigaciones pasadas en las que se ha obviado el estudio de la variable género.

En este trabajo, que se enmarca en una investigación más amplia, realizamos un análisis detallado de las estrategias de modelización en función del género de las producciones escritas de 158 alumnos y alumnas en el primer mes del primer curso de ESO (séptimo grado, aproximadamente 12-13 años de edad) al enfrentarse a un problema compuesto, es decir, un problema aritmético donde hay, al menos, dos relaciones cuantitativas y, por tanto, requiere de más de una operación para obtener la solución numérica del problema (Castro, 2008).

Modelización

El proceso de modelización, central en la resolución de problemas, se diluye en este esquema y sucede de manera implícita entre las columnas de los datos y la de las operaciones. Si bien hay ocasiones en que se favorece el uso de modelos pictóricos, esta práctica desaparece conforme los alumnos avanzan en la educación primaria, siendo prácticamente inexistente en los últimos cursos. El escaso uso de otras representaciones más allá de la simbólica nos sitúa pues de espaldas a los trabajos de Brunner and Kenney (1965) quien afirma:

But while, once abstraction is achieved, the learner becomes free in a certain measure of the surface appearance of things, he nonetheless continues to rely upon the stock of imagery he has built en route to abstract mastery. It is this stock of imagery that permits him to work at the level of heuristic, through convenient and non-rigorous, means of exploring problems and relating them to problems already mastered. (p. 436)

El esquema DOS se defiende desde las aulas también como una necesaria simplificación para escolares del trabajo de Polya (1945), uno de los referentes tradicionales en resolución de problemas. En palabras de Beagle, traducido y citado por Castro (2008, p. 8),

De los hallazgos de estos estudios no se han obtenido directrices claras para la educación matemática. De hecho, hay bastantes indicadores de que las estrategias de resolución de problemas dependen tanto del estudiante como del problema, por lo que es demasiado simplista tratar de determinar una (o varias) estrategias que deberían ser enseñadas a todos (o a la mayoría) de los estudiantes.

En este contexto, se genera en el docente una clara tensión entre la dificultad de enseñar a desarrollar a *cada* alumno su propia estrategia para *cada* problema y la necesidad de enseñar a *todos* los alumnos a resolver problemas.

Atendiendo al modelo de Blum y Leiss (2007) este estudio centra su atención en el análisis de las estrategias que los alumnos ponen en marcha para realizar los pasos de construcción, estructuración y matematización de un problema de enunciado verbal (figura 1).

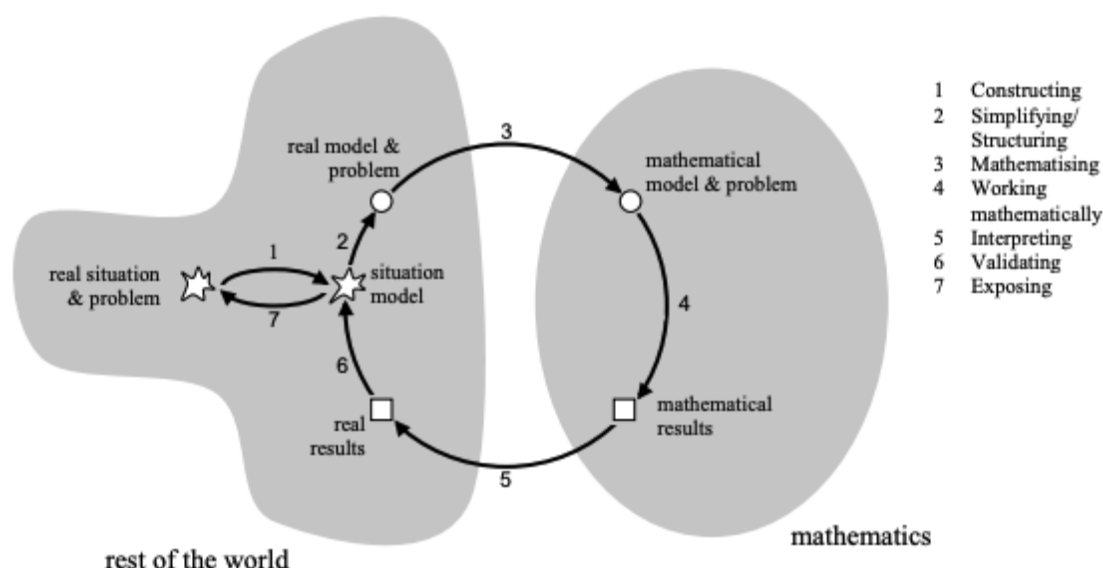


Figura 1. Modelo de Blum y Leiss (2007, p. 225).

De acuerdo con la definición de Lesh y Harel (2003), entendemos que el alumno ha realizado un modelo cuando llega a expresar a través de algún medio (simbólico o pictórico) los objetos matemáticos relevantes y los procedimientos que los acompañan para el logro de su objetivo.

Perspectiva de género

En la actualidad se está poniendo el foco en la educación con perspectiva de género, especialmente en el área STEM donde existe una brecha generalizada en las vocaciones de chicos y chicas (Bokova, 2017). Más concretamente en España, contamos con un currículo de matemáticas que contiene un sentido socioafectivo donde se incluye la perspectiva de género. Pero, han pasado 50 años de las escalas de Fennema-Sherman donde comenzaron a verse diferencias de género en la actitud frente a las matemáticas y 30 años del trabajo de Gallagher y De Lisi (1994) en el que analizaban detalladamente

diferencias de género en el proceso de modelización de varios problemas sencillos del examen previo al acceso a la universidad en EEUU, el SAT. Si bien alumnos y alumnas obtenían similares resultados en cuanto al éxito en la prueba, encontraron diferencias significativas en los caminos de resolución, siendo los chicos más tendientes a utilizar caminos no convencionales para resolver los problemas. Los autores relacionaron el uso de estrategias que no se habían trabajado previamente en el aula con la confianza que los alumnos tienen en su propia habilidad matemática, así como en su gusto por la materia y con la relevancia que le daban a esta en su vida, todas ellas variables estrechamente ligadas al género.

Se han realizado innumerables estudios para tratar de distinguir diferencias psicológicas entre géneros, también de manera particular en diferentes aspectos relacionados con la competencia matemática. Resulta muy interesante en este sentido el trabajo de Hyde (2005) donde concluye tras analizar diversos meta-análisis realizados hasta esa fecha que las similitudes o las diferencias pequeñas son mucho más habituales que las diferencias reales entre géneros, que se reducen a algunas excepciones como la agresividad y algunos aspectos relacionados con la sexualidad. En este marco, resulta entonces curioso cómo los trabajos de Gallagher y De Lisi (1994) o de tantos otros investigadores antes y después de ellos han conseguido demostrar en numerosas ocasiones que existen importantes diferencias entre los chicos y las chicas, como también vemos reflejado en los resultados de las pruebas internacionales. Los resultados de PISA (OCDE, 2015; Fuentes y Renobell, 2020) muestran que las chicas tienen mejores resultados, llegando incluso a superar en lectura en más de 30 puntos. Sin embargo, en matemáticas, los chicos superaron a las chicas por cinco puntos en promedio en los países de la OCDE. Además, también se puede observar que las chicas, en general, si se enfrentan a una tarea matemática conocida, es decir, de las que suelen realizar en clase, entonces lo hacen mejor. Volvemos pues sobre el informe de Hyde para subrayar en la tabla 1 algunos de los efectos que, si bien de manera aislada pueden resultar anecdóticos, de manera acumulativa consideramos que podrían afectar a la realización de tareas de alta demanda como la resolución de problemas matemáticos. No debe entenderse esta tabla como un análisis formal de este tema, sino como una mera recopilación de aquellos que las autoras consideran que pueden ser de interés en el análisis posterior, que presentan un tamaño de efecto entre pequeño y moderado, y que están suficientemente respaldados por el número de artículos que se analizan en los meta-análisis referenciados.

Tabla 1. Variables cognitivas y tamaño del efecto (hombre - mujer) obtenido en los meta-análisis analizados en Hyde (2005).

Diferencias en las variables cognitivas seleccionadas (hombre - mujer)		
Variable	#Artículo s	<i>d</i>
Autoconfianza en matemáticas	56	+0.16
Ansiedad matemática	53	-0.15
Percepción espacial	92+62	+0.44
Atribución del éxito a la habilidad	29	+0.13
Autoestima	216	+0.21

Fuente: Elaboración propia.

Objetivos del estudio

En este trabajo analizamos las producciones escritas de 158 alumnos y alumnas de 11 y 12 años ante un problema aritmético compuesto de enunciado verbal. Al tratarse de una tarea realizada en los primeros días del curso académico y fuera del contexto de ningún tema concreto, se considera que no se trata de un ejercicio que puedan resolver por

imitación y se espera que los alumnos acudan a la realización de modelos pictóricos o simbólicos para la resolución. Además de la producción escrita por el alumno, se analiza la respuesta que el alumno da sobre su creencia sobre la corrección de su planteamiento de cara a la resolución.

Los objetivos de este análisis son los siguientes:

- Identificar posibles diferencias de género en la elaboración de modelos pictóricos o esquemas previos al planteamiento de los cálculos en la resolución del problema.
- Identificar posibles diferencias de género en la creencia sobre la corrección del planteamiento, dependiendo de si realizan o no un modelo o esquema previo.

Metodología

Se han recogido en las primeras semanas de clase las respuestas de 158 alumnos, 86 chicas (54%) y 72 chicos (46%) de primer año a una batería de problemas de enunciado verbal. El centro es un Instituto de Enseñanza Secundaria de la Comunidad de Madrid al que acuden mayoritariamente alumnos de 3 colegios bilingües de la zona y la prueba se realiza en las semanas iniciales del curso en el que pasan de primaria a secundaria. La toma de datos se realizó como evaluación inicial de la competencia de resolución de problemas y la batería incluía tareas con diferentes niveles de dificultad cubriendo los sentidos numérico, geométrico, estocástico y de la medida.

Los datos se recogieron en papel y cada problema tenía un amplio espacio bajo el enunciado para que los alumnos pudieran escribir libremente sus respuestas marcado con el encabezado “Resolución:” para animar al estudiante a reflejar el proceso seguido y no solo la respuesta de cada problema. Cada problema estaba acompañado de un breve cuestionario para reflejar sus reflexiones sobre el problema y sobre su resolución.

Para esta comunicación analizaremos uno de los problemas propuestos, del bloque de contenido de fracciones y cuyo enunciado es el siguiente:

Un depósito de agua contiene 240 litros. A primera hora Juan usa $\frac{2}{5}$ del depósito y después María usa $\frac{1}{3}$ del depósito. ¿Cuántos litros de agua han consumido entre los dos?

Se ha elegido el problema 5 para la realización de este análisis por varios motivos:

- Se trata de un problema con fracciones, que es uno de los temas que más invitan a la modelización pictórica, incluso en cursos superiores.
- Al tratarse de un problema compuesto con cantidades no triviales provoca la necesidad de realizar anotaciones parciales.
- Permite varios caminos de resolución, comenzando por la suma de las fracciones, por el cálculo de las dos cantidades, o alternando ambas vías.
- No es un problema trivial para los alumnos de esta edad (la calificación numérica tradicional media fue de 4,3) ni pueden resolverlo normalmente acudiendo a la memoria.
- Al encontrarse cerca de la mitad de la prueba, todos los alumnos tuvieron suficiente tiempo para llegar a intentar su resolución sin restricciones en ese sentido, ya que mayoritariamente trabajaron en el orden en que aparecían los problemas en el dossier que se les entregó.

De entre las preguntas sobre la metacognición, se ha elegido para este análisis la siguiente, en la que los alumnos debían marcar una respuesta de entre las proporcionadas:

Mi planteamiento del problema:

- (Lo he dejado en blanco)
- Creo que es incorrecto
- Creo que es correcto
- Seguro que es correcto

Se ha elegido esta pregunta por hacer claramente referencia al planteamiento del problema, que es como los alumnos denominarían a la elaboración del modelo según lo hemos definido.

Análisis

Comenzamos revisando la respuesta que los alumnos dan al problema en el lugar donde se les indica. Para la realización de dicho análisis, se realizó una lista de cotejo donde un grupo de investigadores analizaron por separado cada respuesta y, después, se puso en común. Así se valoraba si la pregunta era correcta o incorrecta (con valor 144 u otras) o sin respuesta. Además, se valoró la producción identificando si se resolvía con el procedimiento DOS, si se realizaba un esquema, si contaba con operaciones ordenadas o si las tenía sin orden.

Aquí se presenta un análisis por género de las respuestas de los 158 alumnos, donde se han encontrado 43 correctas. La respuesta incorrecta 144 -que se origina de una incorrecta interpretación del enunciado- la proporcionan 16 alumnos; 44 respuestas son incorrectas pero diferentes de 144; y 18 alumnos avanzan en el planteamiento del problema, pero no producen una respuesta final en el espacio indicado para ello. Finalmente, 37 alumnos dejan el problema totalmente en blanco. La tabla 2 muestra los datos anteriores en porcentaje según el género de los alumnos.

Tabla 2. Respuestas proporcionadas por los alumnos al problema.

Género	Correcta (176)	Incorrecta (144)	Incorrecta (otras)	Sin respuesta final	Blanco
Femenino	23 %	10 %	29 %	13 %	24 %
Masculino	32 %	9 %	26 %	10 %	22 %
Total	27 %	10 %	28 %	11 %	23 %

Fuente: Elaboración propia. (Nota: N=158; Femenino=86; Masculino=72)

De entre las producciones completamente en blanco o sin respuesta final, encontramos 8 alumnas y 4 alumnos que comentan en el margen por qué no hay una solución. De entre ellos llaman la atención las 6 ocasiones (5 de ellas, chicas) en que aluden a “no recordar” cómo se resuelve el problema, en clara referencia a las dinámicas de imitación que hemos mencionado anteriormente, y una anotación, también de una chica, que dice “*Se me da fatal hacer problemas*”.

El resto de las producciones presentan similitudes en su enfoque según si el alumno se aproxima con el esquema DOS, si realiza algún tipo de dibujo o, si realiza únicamente operaciones.

De entre los 17 alumnos siguen el esquema DOS, ya sea de manera explícita como en la figura 2 (izquierda), o anotando inicialmente en el espacio disponible los datos $2/5$, $1/3$ y

240l (derecha), únicamente 2 realizan algún tipo de esquema o dibujo y solo 4 son finalmente capaces de resolver correctamente el problema.

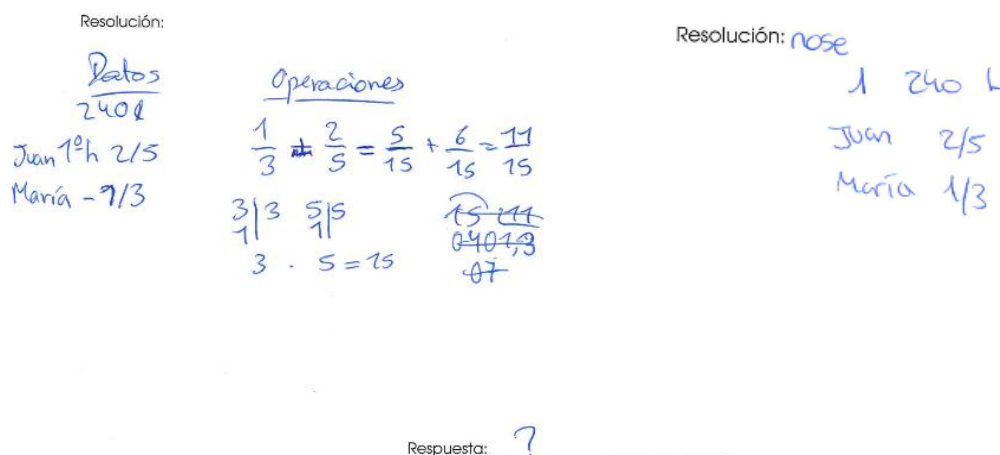


Figura 2. Esquema DOS explícito (izquierda) e implícito (derecha).

Del total de 28 alumnos ha realizado algún tipo de dibujo (2 de ellos usando el esquema DOS), mayoritariamente representan las dos fracciones por separado o ambas en un mismo dibujo. En alguna ocasión, como muestra la figura 3, el alumno llega a representar también la suma de ambas con el denominador común 15. La respuesta incorrecta 144, aparece 5 de las 16 veces en este subgrupo, en el que solo 6 de entre los 28 alumnos consiguen resolver correctamente el problema.

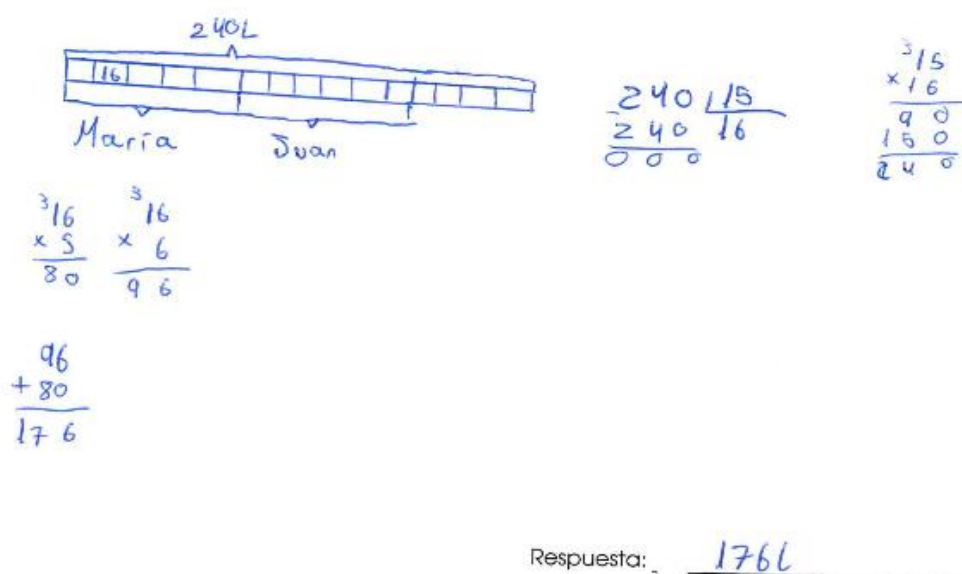


Figura 3. Resolución del problema con ayuda de un modelo de barras.

Un total de 78 alumnos reflejan en su proceso únicamente un conjunto de operaciones. De entre ellos, en las producciones de 14 chicas y 15 chicos las operaciones están ordenadas en la hoja de manera secuencial o tienen algún tipo de comentarios, números o flechas que indican el camino que el alumno ha seguido para modelizar la situación, como muestra el ejemplo de la figura 4. En ambos grupos un total de 11 alumnos finalizan dando la respuesta correcta. En el segundo subgrupo (15 alumnas y 34 alumnos) el proceso no aparece de manera ordenada en el espacio disponible, debiendo el evaluador

interpretar el camino seguido por el alumno (figura 5). De este segundo subgrupo, 11 alumnos y cero alumnas producen una respuesta correcta.

Handwritten work for Juan and Maria. Juan's work shows a division of 240 by 12, resulting in 20, and then a multiplication of 20 by 10 to get 200. Maria's work shows a division of 240 by 10, resulting in 24, and then a multiplication of 24 by 10 to get 240.

Figura 4. Resolución del problema con operaciones ordenadas.

Handwritten work for several students. The work includes various calculations such as $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$, $\frac{11}{15}$, and $\frac{16}{15}$, along with a large calculation of 240 divided by 15, resulting in 16.

Figura 5. Resolución del problema con operaciones sin orden.

La tabla 3 muestra el porcentaje de acierto dentro de cada uno de los grupos anteriormente mencionados, así como el porcentaje de alumnos por género que resuelven de la manera descrita. Los 2 alumnos que plantean el enfoque DOS y también realizan un esquema se han contado en ambos grupos.

Tabla 3. Clasificación de los procedimientos realizados y, entre paréntesis, alumnos con éxito en ese enfoque.

Género	DOS	Esquema	Operaciones ordenadas	Operaciones sin orden
Femenino	14 (3)	23 (6)	14 (11)	15 (0)
Masculino	3 (1)	5 (0)	15 (11)	34 (11)
Total	17 (4)	28 (6)	29 (22)	49 (11)

Fuente: Elaboración propia. (Nota: N=123; Femenino=66; Masculino=57)

Terminamos este análisis contrastando los resultados de los alumnos que no dejan la pregunta en blanco con las respuestas que ellos mismos han dado a continuación a la pregunta “*Mi planteamiento del problema...*”, donde debían elegir entre las cuatro opciones indicadas anteriormente.

De entre los 121 alumnos que abordan el problema, realizan un planteamiento correcto de la resolución un total de 55 (43 que dan una solución correcta y 12 que cometen algún error de cálculo). En la tabla 4 se muestran los registros de los 112 alumnos que trabajaron en el problema y además respondieron a la cuestión según la corrección o no de este. 1

chico cuyo resultado es correcto responde que ha dejado en blanco el planteamiento, pero en la pregunta de si crees que tienes las cuentas bien, responde que sí, por tanto, creemos que considera que hacer las cuentas no es ningún planteamiento.

Tabla 4. Corrección del planteamiento y confianza del alumno en su respuesta.

Género	Lo he dejado en blanco	Creo que es incorrecto	Creo que es correcto	Seguro que es correcto
Femenino, Correcto	0	0	20	6
Femenino, Incorrecto	5	13	17	1
Masculino, Correcto	1	0	16	8
Masculino, Incorrecto	2	3	14	6

Fuente: Elaboración propia. (Nota: N=112; Femenino=62; Masculino=50)

Si la respuesta era correcta, las chicas responden que creen que la tienen correcta en un 77% de los casos mientras que sólo un 23% están completamente seguras, en los chicos estos porcentajes son de un 64% frente al 32%. Solo una chica responde que cree que es correcto cuando no lo es por 6 chicos que responden de esa manera. Cuando es incorrecta 18 chicas responden que es incorrecta o en blanco frente a solo 5 chicos.

Conclusiones

Para el problema abordado hemos comprobado que los chicos resuelven correctamente en mayor proporción (32 %) que las chicas (23 %). Es interesante notar que, entre las personas que no concretan una respuesta, el doble de chicas que de chicos ponen aclaración, lo que se puede deber a una mayor necesidad de justificar que no han realizado lo esperado. Cabe destacar que 5 de las 6 personas que aluden a no recordar cómo se resuelve este problema son chicas.

Aunque en general el enfoque en el procedimiento que más éxito tiene es el de operaciones ordenadas, lo que puede indicar que cuando se plantea un esquema es intentando “acertar” una solución, es muy destacable el análisis por género. Las chicas superan con mucho a los chicos con un 77% frente a un 40%, la necesidad de contar con el planteamiento DOS, hacer esquema o realizarlo con un proceso ordenado en el espacio para resolver el problema. Además, el otro 23% de las chicas que no siguen esto nunca aciertan, mientras que los chicos de ese 60% que realizan las operaciones sin orden, aciertan un tercio.

Con respecto a la autoconfianza las diferencias son grandes. Solo verbalizan estar completamente seguras de su acierto cuando han resuelto correctamente el problema un 23% de las chicas frente a un 32% de los chicos. De las que no los plantean correctamente, solo un 3% afirma estar segura de haberlo planteado bien, frente a un sorprendente 24% de sus compañeros que están seguros de tener un planteamiento correcto, aunque este no lo es.

Nuestras conclusiones del estudio son que las chicas aciertan algo menos, tienen mayor necesidad de justificar por qué no resuelven un problema, lo hacen de manera más ordenada y, cuando no ordenan su planteamiento, no hay una respuesta correcta. Además, son más exigentes con lo que opinan de su resolución, mostrando menor autoconfianza incluso cuando esta es correcta.

Todo esto nos reafirma en que las diferencias procedimentales tienen una clara relación con variables socioafectivas en perspectiva de género. Consideramos que estudios como el que estamos llevando a cabo nos acercan más a la concreción de como lo socioafectivo influye en lo procedimental. Tener un enfoque de resolución de problemas cerrados con pasos muy concretos determinados por los docentes, puede estar provocando una inseguridad a la hora de resolver los problemas de “otra manera” si no se recuerdan dichos pasos, esto es mucho más acuciado en las chicas que en los chicos. Por tanto, proponer un enfoque de resolución de problemas como el que destacábamos de Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste (2021), no solo mejora la enseñanza de la resolución de problemas, además consideramos que trabajar de esta manera propiciaría reducir la brecha de género. Por otro lado, la evaluación formativa con enfoque socioafectivo es vital para que cada chica y cada chico sea consciente, no solo de sus “aciertos y errores”, también de la manera con la que aborda un problema y dar retroalimentación con el enfoque de género evidenciando dichas diferencias.

Las líneas de investigación que se abren con este enfoque son vitales para no quedarnos en el simple diagnóstico. Consideramos que son necesarias investigaciones basadas en el diseño (Bakker y Van Eerde, 2015), añadiendo un enfoque de género y dotando de una vital importancia a la retroalimentación y un enfoque de resolución de problemas más abierto y no centrado en datos, operación, solución.

Referencias

- Ambrose, R. C. (2002). Are we overemphasizing manipulatives in the primary grades to the detriment of girls? *Teaching Children Mathematics*, 9(1), 16-21.
- Bakker A., y Van Eerde D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.). *Approaches to qualitative research in mathematics education. Advances in mathematics education* (pp. 429-466). Springer.
- Beltrán-Pellicer, P., y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, 98, 11-21.
- Blanco, L., y Pino, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas? En L. Blanco, J. Cárdenas, y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 81-91). Universidad de Extremadura.
- Blum, W., y Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economic* (pp. 222-231). Horwood.
- Bokova, I. G. (2017). *Cracking the code: Girls' and women's education in science, technology, engineering and mathematics (STEM)*. UNESCO. <https://doi.org/10.54675/QYHK2407>
- Bruner, J. S., y Kenney, H. J. (1965). Representation and mathematics learning. En J. M. Anglin (Ed.), *Beyond the information given: Studies in the psychology of knowing* (pp. 426-436). Norton.
- Castro, E (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Codina, A., y Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: Los términos problema, solución y resolución. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la*

-
- investigación en didáctica de la matemática: Homenaje ao profesor Maurício Castro* (pp. 125-135). Editorial Universidad de Granada.
- Fuentes, S., y Renobell, V. (2020). La influencia del género en el aprendizaje matemático en España. Evidencias desde PISA. *Revista de Sociología de la Educación-RASE*, 13(1), 63-80. <https://doi.org/10.7203/RASE.13.1.16042>
- Gallagher, A. M., y De Lisi, R. (1994). Gender differences in Scholastic Aptitude Test: Mathematics problem solving among high-ability students. *Journal of Educational Psychology*, 86(2), 204.
- Gasco-Txabarri, J. (2017). Diferencias en el uso de estrategias en el aprendizaje de las matemáticas en enseñanza secundaria según el sexo. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 8(1), 47-59. <https://doi.org/10.18861/cied.2017.8.1.2638>
- Hyde, J. S. (2005). The gender similarities hypothesis. *American Psychologist*, 60(6), 581.
- Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 157-189.
- Lithner, J. (2011). University mathematics students' learning difficulties. *Education Inquiry*, 2(2), 289-303.
- OECD (2015), *The ABC of gender equality in education: Aptitude, behaviour, confidence*, PISA, OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264229945-en>
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

**EXPERIENCIA DOCENTE DENTRO DEL TEMA ESTATÍSTICO
UTILIZANDO ELEMENTOS FINANCEIROS**
**TEACHING EXPERIENCE WITHIN THE STATISTICAL TOPIC USING
FINANCIAL ELEMENTS**

Luis Maya-Jaramillo
Universidad de Extremadura, España
luismj@unex.es

Luis Manuel Casas-García
Universidad de Extremadura, España
luisma@unex.es

Ana Caballero-Carrasco
Universidad de Extremadura, España
acabcar@unex.es

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo analizar cómo el uso de elementos financieros puede ayudar en el trabajo estadístico, siendo un elemento importante en la educación financiera del alumnado de Educación Primaria. Partiendo de la alfabetización estadística, y valorando la educación financiera como marco especial para el trabajo comunicativo, la experiencia se encuadra dentro un proyecto didáctico más amplio para mejorar la comunicación matemática. Para la consecución del objetivo, se desarrolla una investigación no experimental o *ex post facto* con una muestra de 47 estudiantes de quinto de Educación Primaria. Mediante la complementariedad de metodología cuantitativa y cualitativa, se analiza el nivel de lectura gráfica, el uso de términos estadísticos, además de elementos del proceso escritor en relación con temas financieros utilizando una rúbrica como instrumento de análisis. Los resultados son positivos, de forma que los estudiantes presentan niveles de lectura gráfica y producción comunicativa superiores a los hallados en estudios previos, desarrollando esquemas lingüísticos propios de las ciencias matemáticas. Este estudio evidencia que la puesta en marcha de experiencias educativas usando marcos y temas financieros pueden ayudar y mejorar el aprendizaje del alumnado.

Palabras clave: educación financiera, comunicación estadística, didáctica estadística, educación primaria.

Abstract: This paper aims to analyze how the use of financial elements can help in statistical work, being an important element in the financial education of Primary Education students. Starting from statistical literacy and valuing financial education as a special framework for communicative work, the experience is part of a broader didactic project to improve mathematical communication. To achieve the objective, a non-experiential or *ex post facto* investigation is carried out with a sample of 47 fifth year students of Primary Education. By means of the complementarity of quantitative and qualitative methodology, the level of graphic reading, the use of statistical terms, as well as elements of the writing process in relation to financial topics

are analyzed using a rubric as an instrument of analysis. The results are positive, in such a way that students present higher levels of graphic reading and communicative production than those found in previous studies, developing linguistic schemes typical of mathematical sciences. This study shows that the implementation of educational experiences using financial frameworks and topics can help and improve student learning.

Keywords: financial education, statistical communication, statistical didactics, elementary school.

Introducción

La tradición escolar marca el ritmo en el trabajo diario de los alumnos y fija significativamente lo que se realiza en las aulas. Romper con esta dinámica, e incluir nuevos temas y distintos enfoques de trabajo puede ser un aliciente para el trabajo de los docentes. Los nuevos planteamientos de situaciones de aprendizaje ofrecen posibilidades de combinar temas cercanos a la realidad del alumnado con habilidades, destrezas, y con lo que se considera adecuado para el desarrollo competencial.

En este trabajo se presenta la inclusión de temas financieros para trabajar la estadística. El trabajo desarrollado abrió nuevas miras al alumnado, siempre acostumbrado a estudiar estadística con datos relacionados con los hobbies de la clase, la altura de los distintos niños o con las comidas que realizan durante un determinado tiempo. Además, trabajar con temas financieros ayudó al alumnado a reconocer conexiones entre el trabajo del aula y la realidad del entorno. El desarrollo de ciertos contenidos sobre economía se inserta en la materia de Sociales, y esta experiencia sirve de germen para el trabajo interdisciplinar. Los resultados de esta experiencia nos indican que los marcos sobre los que trabajar los saberes y contenidos matemáticos son muy importantes, y que la elección de temas financieros puede ser un buen camino para avanzar en la educación financiera de educación primaria.

Esta experiencia tiene como objetivo principal mostrar cómo el uso de gráficos financieros puede servir en el trabajo estadístico de Educación Primaria y también tiene como objeto analizar la comunicación estadística del alumnado de 10 y 11 años bajo el paraguas del marco de las finanzas. Esta experiencia se encuadra dentro de un estudio más amplio donde se analiza una propuesta didáctica para mejorar la comunicación estadística. Un nuevo paso en la educación estadística en favor de nuevos enfoques y nuevas ideas.

Educación financiera en primaria

El desarrollo de la educación financiera en las aulas se viene fraguando desde hace bastante tiempo. Desde 2003 la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) se han ido promoviendo programas e ideas para llevar la economía y las finanzas al aula llegando incluso a crear en 2008 la *International Network on Financial Education*. En España, se desarrollan sendos planes de Educación Financiera para la ciudadanía en 2008 y 2013 por parte de la Comisión Nacional del Mercado de Valores y el Banco de España.

Las pruebas internacionales dieron paso a la competencia financiera, y en 2012 aparece esta competencia en las pruebas PISA (*Programme for International Student Assessment*), instando a introducir en las escuelas la educación en finanzas. Este marco determina la competencia financiera como el conocimiento, la comprensión de los conceptos y riesgos financieros, además de las destrezas, la motivación y la confianza para aplicar dicho

conocimiento en la toma de decisiones eficaces en distintos contextos financieros (PISA 2012, Marco de Competencia financiera, p.12).

Así, en la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, 2013), se incluyen aspectos del tema económico y financiero dentro del área de sociales. En los estándares se habla de investigar sobre estrategias de compras, estableciendo relaciones entre precios, y diferenciando los tipos de gastos y la idea presupuestaria. La nueva propuesta de la Ley Orgánica de Educación, 3/2020, indica en sus aportaciones iniciales que los alumnos de Educación Primaria desarrollarán la competencia de “comprender el papel que el dinero juega en nuestras vidas”, además de “gestionar adecuadamente el dinero”. Sin embargo, las propuestas relacionadas con el tema de las finanzas han sido escasas y el trabajo de conceptos económicos en las aulas no está extendido.

El desarrollo del tema financiero en matemáticas abre una oportunidad a estudiar la proporcionalidad, los porcentajes, la numeración o el desarrollo de la regla de tres con realidades económicas.

Alfabetización estadística en primaria para la mejora de la educación financiera

Como indican Contreras y Molina Portillo (2019), los matices y la concreción del término alfabetización estadística han ido evolucionando por la necesidad de acercar el tema estadístico a los ciudadanos. Un aspecto genérico que se repite en las diferentes definiciones del término es la conexión de los aspectos estadísticos con el contexto y con la realidad.

Teniendo en cuenta que la naturaleza probabilística, variable y aleatoria del trabajo con gráficos (Aoyama, 2007; Batanero et al., 2011) no ayuda con alumnado menor de doce años y que el mundo financiero es cambiante, variable, y toda la fluctuación de cambios económicos requiere de pensamiento abierto a estas tendencias, la naturaleza de las finanzas y sus cambios se acerca acorde a una verdadera alfabetización estadística. El inicio, la graduación y la organización del desarrollo de temas económicos puede ir en paralelo a cómo se produce el proceso y desarrollo de la estadística.

Con la evolución y extensión del concepto de alfabetización estadística en el ámbito educativo, las propuestas curriculares dieron paso al trabajo con datos. Los avances y estudios sobre las propuestas pedagógicas crecieron notablemente y por ello surgieron análisis de los recursos y materiales (Arteaga, 2011; Diaz Levicoy et al., 2016), al igual que el análisis de los planes formativos para docentes (Molina-Portillo et al., 2017). Las investigaciones relacionadas con la mejora en didáctica estadística y su acercamiento a las aulas de Educación Primaria están en desarrollo. Hay que destacar el trabajo de investigación sobre las tareas matemáticas, los distintos elementos semióticos que las componen (Godino et al., 2007) y los estudios sobre contextualización de tareas (Alsina y Annexa, 2021; Alsina et al., 2023).

La Educación Primaria tiene un carácter muy globalizado, y muchos estudios sobre gráficos y sobre estadística han obviado que al llevar las propuestas didácticas al aula se pueden presentar dificultades interpretativas y comunicativas provocadas por diferentes elementos. Los contenidos estadísticos pueden presentar ciertas dificultades (Mochón y Tachy-Anell, 2003; García y García, 2009). De la misma manera, las dificultades lingüísticas matemáticas pueden dar pie a un fracaso en el trabajo de los temas estadísticos. Es por ello por lo que el trabajo en primaria en pro de la alfabetización estadística debe desarrollar y trabajar la educación lingüística para, así, formar ciudadanos críticos (Costa et al., 2018) La inclusión de nuevos enfoques al trabajo

estadístico puede servir para una evolución de los conceptos matemáticos y para una mejora expresiva del alumnado.

En el presente trabajo tendremos presente los niveles de lectura gráfica de Curcio (1987) y Friel et al. (2001) utilizados igualmente por Morales-García et al. (2022). Estos autores clasifican la lectura gráfica en cuatro niveles. El primer nivel es “Leer datos” que se caracteriza por una lectura literal de los datos que se presentan. El segundo de los niveles es “Leer dentro de los datos” donde se da un paso más al establecer comparaciones matemáticas de los datos presentados. “Leer detrás de los datos” es el tercer nivel, y se presenta relacionado con la información que se extrae de la información gráfica. Finalmente, el cuarto nivel es “Leer más allá de los datos”, y se caracteriza por el establecimiento de tendencias incluso de análisis crítico de la información proporcionada.

Valoramos en este estudio algunos elementos lingüísticos como elemento que presenta la información gráfica. El lenguaje en matemáticas representa externamente la comprensión, porque interviene en el proceso comunicador de los elementos. El lenguaje, genéricamente, tiene un papel esencial como parte de la representación del saber y que se traduce en el lenguaje expresivo capaz de representar ideas matemáticas. El uso lingüístico para comunicar la información es la conjunción de muchos factores como la sintaxis, el vocabulario, la gramática o el contexto; cualquier error o falta de entendimiento de estos factores va a condicionar el trabajo matemático, la comunicación matemática y por ende la argumentación en el trabajo estadístico (Planas y Moreras, 2012). Cassany (1995) habla de normas estilísticas a emplear para que los textos sean comprendidos y Morales-García et al. (2022) incluyen los términos y expresiones verbales específicas de la estadística como elementos lingüísticos de análisis. Las diferentes propuestas curriculares reflejan la siguiente terminología estadística a desarrollar en el tercer ciclo de Educación Primaria: media, moda, mediana, variable cualitativa, variable cuantitativa, gráfico, tendencia, intervalo, o rango; estas propuestas coinciden las dictadas en el Decreto 103/2014 por el que se establece el currículo para Educación Primaria en Extremadura (España). De ahí que se valore en el presente trabajo, como parte de la comunicación estadística, el uso de estos términos específicos y el número de palabras empleadas. No está muy extendido valorar la cuantía de palabras en estudios. Sí aparece la valoración de este elemento en las versiones antiguas del TALE (Test de Análisis de Lectura y Escritura) dentro de un apartado relacionado con la escritura espontánea habiéndose suprimido este apartado en las nuevas versiones de la prueba.

Método

Metodología

La investigación que nos ocupa es no experimental o *ex post facto* mediante la complementariedad de metodología cuantitativa y cualitativa y realizándose una valoración interjueces de las producciones de los discentes. Para empezar, se le propuso al alumnado participante el gráfico de la Figura 1 con la siguiente instrucción: “Comunica la información que te aporta este gráfico”. Disponían de 20 minutos para realizar la comunicación.

Se optó por un gráfico de barras debido a que es la tipología gráfica más presente en los manuales y entorno. Es un gráfico de nivel tres de complejidad semiótica, según la clasificación de Arteaga et al. (2011) por ser la distribución de una variable.

Los alumnos que participaron en esta experiencia habían trabajado durante diez sesiones con el proyecto “Pequeños Brokers”, un proyecto didáctico para mejorar la comunicación. En este proyecto se incide en el tema comunicativo, obviando el tema de cálculos matemáticos que suele primar en el tercer ciclo de primaria y se centra en comunicar lo que observan en el gráfico. “Pequeños Brokers” aporta pistas sobre en qué datos fijarse cuando tienes un gráfico, y cómo se deben mirar y analizar los distintos elementos gráficos para construir comunicaciones efectivas; a través de una pequeña guía de comentario los alumnos construyen argumentaciones y explicaciones siendo claves en el diseño los principios de incertidumbre y variabilidad.



Comunica la información que te aporta este gráfico

Fuente: https://cincodias.elpais.com/cincodias/2021/01/11/companias/1610398080_620121.html

Figura 1. Tarea propuesta a los estudiantes.

En este estudio participan 47 estudiantes de Educación Primaria de 10 y 11 años de edad, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico incidental.

Análisis de datos

Se analizan tres variables para valorar la comunicación estadística. Por un lado el nivel de lectura gráfica según la clasificación de Curcio (1987) y Friel et al. (2001), estableciéndose los siguientes niveles: 1. leer datos, 2. leer dentro de los datos, 3. leer detrás de los datos y 4. leer más allá de los datos”. En segundo lugar el uso de términos estadísticos en las construcciones comunicativas presentadas teniendo en cuenta los siguientes: media, moda, mediana, variable cualitativa, variable cuantitativa, gráfico, tendencia, intervalo, o rango. Y, finalmente, el número de palabras utilizadas en la comunicación para analizar la riqueza de los textos presentados.

Resultados

Lectura gráfica

Respecto a la primera variable, el 6,4% del alumnado participante realizó una lectura de nivel 1, lectura de datos, según Curcio (1987) y Friel et al. (2001) de forma que identifican datos concretos y comunican referencias presentadas en el gráfico. Se puede observar en la figura 2 una muestra de cómo este porcentaje del alumnado identifica datos concretos.

El 55.3% de los alumnos presentaron una lectura de nivel 2, lectura dentro de los datos. Presentaron una lectura y una comunicación de informaciones que no estaba expresamente dentro del gráfico. Este nivel se puede presentar cuando los alumnos establecen un orden al comunicar información priorizando ciertos elementos, realizan comparativas, o relacionan elementos que aparecen entre los datos presentados. En la Figura 3 se presenta una muestra de ello.

El 38.3% del alumnado realizaron una lectura más allá de los datos, nivel 3, lectura de la categorización. Este porcentaje comunica información que no está directamente presentada en el gráfico; también tiene como característica que la información presentada no puede ser calculada con los elementos gráficos y puede presentar tendencias significativas. En la Figura 4 se puede observar cómo el alumnado trata de inferir una posible evolución de los datos. En la imagen de la Figura 4 se observa que el compañero que le revisó el trabajo consideró que estaba bien comunicado, cumpliendo con las ideas de cómo acercarse a comunicar la información gráfica. Ningún alumno hizo una lectura de nivel 4 del gráfico, de forma que no se evidencia un análisis crítico sobre la información proporcionada.

Tabla 1. Resultados de lectura gráfica

	N	%
Nivel 1	3	6,4
Nivel 2	26	55,3
Nivel 3	18	38,3
Nivel 4	0	0

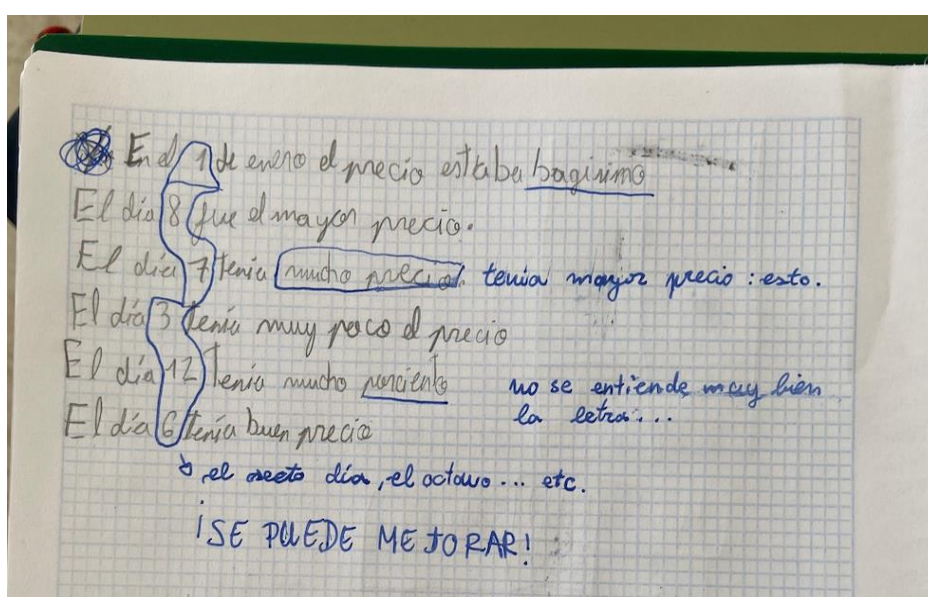


Figura 2. Primer nivel de lectura gráfica

23/2/2020

El gasto de la luz sube cada día. El día 1 de enero fue el día con menos gastos de la luz con 42'31€ en los primeros 12 días de enero. El día 8 de enero se registró que fue el día con el precio más alto de los 12 primeros días de enero. Los 5 últimos días se registraron los precios más altos, por lo general. Los 6 primeros días se registraron los precios más bajos.

Figura 3. Segundo nivel de lectura gráfica

23 de febrero de 2021

Esta Perfecto

En 2021 el día 8 de enero subió mucho el medio de luz. Entre el 1 de enero y 7 de enero hubo una gran variación de dinero. El día 1 enero era cuando costaba menos la luz. Entre los 4 primeros días hay una media de 49'47 euros. El día 13 de enero rondaría de 80 euros. El precio de la luz es similar entre el día 9 de enero y el día 11 de enero.

Figura 4. Tercer nivel de lectura gráfica

Uso de términos estadísticos

Los términos estadísticos utilizados en las comunicaciones venían marcados por las propuestas curriculares.

El 44.7% del alumnado participante utilizó un término estadístico en su escrito. Dos términos del mundo de la estadística lo emplearon el 8.5% de la muestra, y el 4.2% de los participantes empleó tres o más términos. El 42.6% del alumnado no utilizó ningún término estadístico en sus escritos.

Tabla 2. Términos estadísticos utilizados.

	N	%
Ninguno	20	42,6
Un	21	44,7
Dos	4	8,5
Tres o más	2	4,2

La palabra más utilizada en las composiciones fue “Media”. Este término aparecía en 11 escritos; esto refleja el 23% de la muestra. “Tendencia” fue la segunda palabra más empleada y aparecía en 8 de los escritos, lo cual representa el 17% de los participantes. Finalmente aparecieron otros términos, pero de forma exigua; destaca, dentro de este grupo la palabra “Mediana”. Otros términos que se utilizaron puntualmente en las comunicaciones son “Intervalo”, “Variable Cualitativa” y “Rango”. Se pueden encontrar y visualizar el número de términos empleado en la tabla anteriormente presentada. Es significativo que no aparece la palabra “Moda”, concepto y término que se estudia en el tercer ciclo de Educación Primaria, y que está muy presente en las prácticas docentes del curso estudiado.

Número de palabras utilizadas

La media de palabras presentadas en las composiciones fue de 63.3 palabras. Cabe destacar en este análisis que el 48.9% de los participantes se sitúan por encima de la media de palabras utilizadas.

Es importante reseñar que en determinados escritos la calidad discursiva presentada es mejorable. Se han encontrado alumnos que han presentado párrafos perfectamente contruidos, con presencia de un completo sujeto y predicado; por otro lado, algunos alumnos han empleado frases independientes donde los componentes sintácticos no estaban presentados y dificultaban la comprensión del texto.

Tabla 3. Número de palabras utilizadas.

	N	%
Menos de 25	1	2,1
Entre 26-50	15	31,9
Entre 51-75	17	36,1
Más de 76	14	29,7

Conclusiones y discusión

Esta experiencia sirve para mostrar cómo el uso de gráficos relacionados con el tema financiero puede servir para el trabajo estadístico (Alsina, 2019) marcos e itinerarios. Los resultados obtenidos indican que la capacidad de Lectura gráfica del alumnado presentó niveles superiores a lo encontrado en estudios previos (Hernández et al., 2021) debido al trabajo previo realizado con la propuesta “Pequeños Brokers”.

Por otro lado, esta experiencia nos constata que la producción comunicativa más elaborada debido a que 60% de la muestra empleó esquemas lingüísticos propios de las ciencias matemáticas, usando términos matemáticos en la comunicación. Maya & Caballero (2019) señalaban en estudios previos que en las producciones comunicativas no aparecían términos específicos matemáticos y solamente describían aspectos del gráfico, algo que está también estrechamente relacionado con niveles bajos de Lectura gráfica.

Para el desarrollo comunicativo de la información gráfica se incidía en buscar máximos y mínimos en el gráfico, también en establecer conexiones, incluso buscar tendencias o patrones que pudieran repetirse en el futuro. El trabajo del gráfico se hizo en esta línea y ofrece los resultados que se presentan.

Se evidencia por tanto que la puesta en marcha de experiencias educativas usando marcos y temas financieros pueden ayudar en el aprendizaje del alumnado, contribuyendo a la educación financiera. Muñiz-Rodríguez et al. (2020) señalan que trabajar con datos externos a la realidad condiciona el interés por la estadística, y el uso de marcos financieros incide en la línea de trabajar con estadística desde la realidad.

La conexión entre realidad y educación es importante en el tema estadístico. El uso de temas cercanos al alumnado, con conexión directa con el día a día del mundo ayuda a ser más precisos y a que el trabajo tenga un sentido real y concreto (Alsina y Annexa, 2021). El mundo es cada vez más visual e informativo; la información está presente en muchos espacios y el alumnado de los cursos finales de primaria es consciente de todo lo que le rodea.

El trabajo con temas financieros en tercer ciclo de educación primaria puede abrir espacio a su empleo en otras materias curriculares. Esta idea es importante tenerla presente en el diseño de las nuevas situaciones de aprendizaje. El desarrollo de estos temas en el área de sociales puede ser significativo para comprender la interdependencia y las relaciones que se establecen en la sociedad, asumiendo así destrezas responsables, éticas y razonables. Además, otras materias como Naturales o Lengua pueden enriquecer su didáctica con ciertos contenidos del ámbito financiero. Avanzar en la investigación sobre finanzas y educación primaria es importante (Ferrada et al., 2020).

Financiación

Esta investigación ha sido financiada por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Junta de Extremadura. Proyecto GR21093.

Referencias

- Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Editorial Gráo.
- Alsina, A., y Annexa, E. (2021) Estadística en contexto: Desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram – Revista de Educação Matemática*, 4(1), 71-98. <https://doi.org/10.30612/tangram.v4i2.14396>
- Alsina, Á., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., García-Alonso, I., Vázquez, C., y López-Serentill, P. (2023). Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes. *Revista Complutense de Educación*, 34(1), 95-108.
- Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 298-318.
- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67.
- Batanero, C., Arteaga, P., y Contreras, J.M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM TEIA, Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2), 1-20.
- Cassany, D. (1995). *La cocina de la escritura*. Anagrama.

- Contreras, J. M., y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-12). www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Costa, A., Sebastiao, I., y Campos, A. (2018). Una educación lingüística para formar ciudadanos críticos. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas*, 3, 5-15.
- Curcio, F. (1987). Developing graph comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Ferrada, C., Díaz-Levicoy, D., Puraivan, E., y Silva-Díaz, F. (2020). Análisis bibliométrico sobre la educación financiera en Educación Primaria. *Revista de Ciencias Sociales*, 26(2), 225-242
- Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria: Un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, 30(55), 713-737.
- García, I., y García, J. (2009) Enseñanza de la estadística y el lenguaje: Un estudio en Bachillerato. *Educación matemática*, 21(3), 95-126.
- Hernández, A., Pérez, M., Rodríguez, T., y Juárez, J. A. (2021). Un estudio acerca de la lectura de gráficos estadísticos en alumnos de sexto grado de primaria. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 107, 56-69
- Maya-Jaramillo, L., y Caballero-Carrasco, A. (2019). *Escribir y comunicar datos en Educación Primaria* [Comunicación oral]. VI Jornadas de Lingüística aplicada. Cáceres.
- Marcos y Pruebas de Evaluación Pisa (2012). *Competencia financiera. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. OCDE*. Traducido de PISA 2012, Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.
- Mochón, S., y Tachy-Anell, M. (2003). Un estudio sobre el promedio: Concepciones y dificultades en dos niveles educativos. *Educación Matemática*, 15(3), 5-28.
- Molina, E., Contreras, J. M., Godino, J., y Díaz-Levicoy, D. (2017) *Interpretación crítica de gráficos estadísticos incorrectos en la sociedad de la comunicación: Un desafío para futuros maestros*. X Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias. Sevilla.
- Morales-García, L., Vidal-Henry, S., García-García, J. I., y Díaz-Levicoy, D. (2022). Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en libros de texto mexicanos de Educación Primaria. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*, 22,111-135. <https://doi.org/10.35763/aiem22.4410seiem.es>
- Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L., y Alsina, A. (2020). The absence of statistical and probabilistic literacy in citizens: Effects in a world in crisis. *Mathematics*, 8(11), 1872. <https://doi.org/10.3390/math8111872>
- Planas, N., y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, A. Marbá, & M. Briceño (Eds.), *El desarrollo de competencias en la clase de Ciencias y Matemáticas* (pp.275-300). Universidad de los Andes.

INVESTIGAÇÕES ESTATÍSTICAS COM VÁRIAS ETAPAS EM SALA DE AULA: QUE DESAFIOS PARA OS PROFESSORES?
MULTI-STAGE STATISTICAL INVESTIGATIONS IN THE CLASSROOM: WHAT CHALLENGES FOR TEACHERS?

Mónica Patrício

EB André de Resende, Portugal

mopatricio@gmail.com

Ana Paula Canavarro

Universidade de Évora, Portugal

apc@uevora.pt

Resumo: A realização de investigações estatísticas com os alunos assume nas orientações curriculares atuais particular relevo, valorizando-se o desenvolvimento da literacia estatística. As investigações estatísticas constituem tarefas de natureza problemática, que envolvem desafios diferentes nas suas diferentes etapas. Este estudo tem como objetivo contribuir para a identificação dos desafios que o desenvolvimento de investigações estatísticas, envolvendo diversas etapas, coloca ao conhecimento do ensino da Estatística dos professores. Um estudo de caso com uma professora experiente de Matemática do 2.º ciclo revelou que a professora teve dificuldades em conduzir as aulas de modo a evidenciar a relevância das diferentes etapas de uma investigação estatística. Tendeu a reduzir o grau de dificuldade das tarefas, liderou o discurso da aula para fazer surgir resultados esperados e tomou decisões que à partida diziam respeito aos alunos. Este estudo sugere a necessidade de proporcionar aos professores oportunidades de aprofundar o seu conhecimento do ensino da Estatística, com recurso a tarefas exploratórias de investigação, visando superar a falta de experiência dos professores em planear e conduzir aulas com investigações e em apoiar os alunos no trabalho investigativo.

Palavras-chave: ensino da estatística, conhecimento do ensino da estatística, investigações estatísticas.

Abstract: Carrying out statistical investigations with students assumes particular importance in current curricular guidelines, valuing the development of statistical literacy. Statistical investigations constitute tasks of a problematic nature, which involve different challenges in their different stages. This study aims to contribute to the identification of the challenges that the development of statistical investigations, involving several stages, poses to teachers' knowledge of Statistics teaching. A case study with an experienced 2nd cycle Mathematics teacher revealed that the teacher had difficulties in conducting classes in a way that highlighted the relevance of the different stages of a statistical investigation. She tended to reduce the degree of difficulty of tasks, led the class discourse to bring out expected results and made decisions that initially concerned the students. This study suggests the need to provide teachers with opportunities to deepen their knowledge of teaching Statistics, using exploratory research tasks, aiming to overcome teachers' lack of experience in planning and conducting classes with investigations and supporting students in their work.

Keywords: teaching statistics, knowledge for teaching statistics, statistical investigations.

Introdução

Numa sociedade que veicula constantemente informação baseada em dados que impactam em todas as vertentes das nossas vidas, o desenvolvimento da literacia estatística surge como objetivo fundamental do ensino da Estatística (Bargagliotti et al., 2020). Tal como sugere a recente atualização do GAISE Report (*Guidelines for Assessment and Instruction of Statistics Education*) (Franklin et al, 2007) - GAISE II (Bargagliotti et al., 2020) - esta perspetiva curricular nunca foi tão importante já que os problemas globais como a pandemia da COVID-19 ou as alterações climáticas vieram reforçar a necessidade de o público em geral saber interpretar informação estatística. Neste contexto, os estudantes e cidadãos devem ser dotados de ferramentas para interpretarem a informação quantitativa no mundo ao seu redor e tomarem decisões inteligentes com base nela (Bargagliotti et al., 2020). Para tal, importa que os alunos tenham oportunidade de realizar investigações estatísticas, assumindo um papel ativo e decisório em cada uma das etapas que uma verdadeira investigação estatística precisa percorrer (Bargagliotti et al., 2020). Cada etapa tem valor próprio, mas devem ser abordadas de forma integrada para que os alunos compreendam a lógica do processo, a importância de cada etapa no mesmo, o propósito das várias técnicas estatísticas, o modo como estas podem ser manipuladas para gerar resultados falaciosos (Henriques & Oliveira, 2012; Martins & Ponte, 2010; Ponte & Sousa, 2010).

As investigações estatísticas são tarefas recorrentemente referidas nos documentos curriculares relativos ao ensino da Estatística, tanto a nível internacional (Bargagliotti et al., 2020; NCTM, 2007), como nacional (ME, 2007; Canavarro et al., 2021). Trata-se claramente de tarefas de natureza problemática bastante aberta (Ponte, 2005), que envolvem a compreensão do que está em jogo no contexto que se pretende estudar, a definição de questões precisas a que dar resposta, a conceção de uma estratégia e plano de procedimentos matemáticos que permitam obter resultados, e a interpretação e verificação desses resultados em contexto. Grosso modo, este processo tem similitudes com o processo de resolução de problemas tal como é descrito por George Polya (Polya, 1945).

No entanto, o desenvolvimento de uma investigação estatística envolve etapas cada uma com aspetos particulares relativos a interpretação, raciocínio, e até execução de procedimentos. Martins e Ponte (2010) parecem assemelhar o desenvolvimento de uma investigação estatística à resolução de uma coleção de problemas quando referem que um “problema” estatístico é uma questão bem determinada que se coloca numa das etapas da investigação e para a qual não há resposta imediata.

A especificidade de cada uma das etapas gera desafios particulares para os professores que têm de lidar com o seu ensino, mesmo para professores experientes envolvidos em estudos colaborativos, como é o caso da professora focada neste estudo. O objetivo do estudo que aqui reportamos é contribuir para a identificação dos desafios que o desenvolvimento de investigações estatísticas, envolvendo diversas etapas, coloca ao conhecimento do ensino da Estatística dos professores.

Enquadramento teórico

Da resolução de “problemas estatísticos”

Embora utilize Matemática, a Estatística é uma ciência autónoma com regras particulares e processos próprios de pensamento. Ao passo que a primeira lida com problemas de natureza determinista, a Estatística lida com problemas de natureza estocástica, com um

elevado grau de indeterminação e de incerteza e delimitados pelo seu contexto (Gal & Garfield, 1997). Este contraste dá origem a diferenças que se manifestam no que se podem chamar a resolução de problemas estatísticos e problemas matemáticos.

Polya (1945) foi pioneiro a caracterizar a atividade matemática em termos de etapas de resolução de problemas (compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano, verificação) e a explicitar os estados mentais a elas associados. Este matemático professor defendia que as heurísticas referentes à capacidade de resolução de problemas podiam ser ensinadas e desenvolvidas se os professores dessem oportunidade aos alunos de as praticar.

Já no que diz respeito à resolução de problemas estatísticos, existe um modelo, frequentemente designado de PPDAC, que tem inerente um processo investigativo cíclico — o ciclo investigativo — que se desenvolve comumente em cinco etapas: Problema (P), Plano (P), Dados (D), Análise de dados (A) e Conclusões da investigação (C) (Wild & Pfannkuch, 1999).

Shaughnessy (2007) refere a existência de semelhanças entre o modelo PPDAC de Wild e Pfannkuch (1999) com o modelo apresentado por Polya (1945) para a resolução de problemas (Compreensão, Plano, Execução e Verificação). No entanto, aponta também diferenças que residem, sobretudo, nas fases iniciais PPD. No ciclo investigativo, os problemas estatísticos são muitas vezes pouco claros e emergem de contextos confusos, há necessidade de um ajuste e uma interatividade constantes entre as fases PP de forma a transformar uma situação pré-estatística num problema estatístico. Também a fase D é distinta, pois os dados de um problema estatístico são de natureza diferente de os dados num problema matemático. Os dados precisam muitas vezes de ser alvo de uma “limpeza”, possuem fontes de variação incontrolláveis, questões de contexto, etc.

Martins e Ponte (2010) propõem o ciclo investigativo dividido em quatro etapas: 1. Formulação das questões de investigação; 2. Planeamento da recolha de dados; 3. Organização e tratamento dos dados; e 4. Interpretação dos resultados e formulação de conclusões. A *formulação das questões de investigação* deve ter por base um interesse, uma curiosidade ou uma necessidade concreta dos alunos (Henriques & Oliveira, 2010). A partir dele, formulam-se pequenas questões estatísticas que devem envolver variabilidade nos dados para que possam, efetivamente, ser respondidas por eles (Burgess, 2009; Martins & Ponte, 2010). O processo de formulação da questão de investigação é interativo e requer algum esforço para que sejam interpretadas corretamente e produzam informação relevante. Necessitam de um processo interrogativo de colocar questões à própria questão (Arnold & Pfannkuch, 2018). Uma boa questão estatística deve ser adequada ao nível cognitivo dos alunos, estatisticamente rica, isto é, proporcionar um conhecimento vasto de Estatística, e estar relacionada com outras áreas do currículo (Heaton & Michaelson, 2002). A investigação tem identificado dificuldades dos professores em formular problemas dignos de investigação ou a orientar os alunos a fazê-lo (Makar & Fielding-Wells, 2011). Burgess (2009) refere que a capacidade de decidir se uma questão colocada pelos seus alunos é adequada ou se requer alterações requer um conhecimento do ensino bem situado. Por exemplo, os futuros professores do estudo de Caseiro e Machado (2019) tenderam a apresentar apenas temas gerais. No estudo a que se referem Santos e Ponte (2014), embora a futura professora mostre ser capaz de gerar temas de investigação interessantes para os alunos e que surjam de forma natural, este aspeto não se concretizou na prática já que lhes apresentou uma pergunta inicial simples, formulada por si, com objetivo restrito de recolher os dados.

Na etapa de *Planeamento da recolha de dados* concebe-se e implementa-se um plano apropriado para selecionar e recolher os dados (Franklin et al., 2007). Verifica-se que os professores têm revelado pouca experiência com o raciocínio e com a tomada de decisões necessários para o planeamento da recolha e da organização de dados ou em apoiar os alunos neste trabalho (Makar & Fielding-Wells, 2011). Santos e Ponte (2014) referem que a futura professora estudada estabelece de antemão o plano de uso de questionários e também os tipos de perguntas a usar, reproduzindo experiências formativas suas. Quanto à recolha de dados, os futuros professores tendem a considerar esta fase confusa, demorada e barulhenta (Santos, 2015).

Na etapa de *Organização e tratamento dos dados* resume-se a informação através de métodos de análise estatística (tabelas de frequências, gráficos e medidas) (Franklin et al., 2007). A este respeito, a investigação tem mostrado que os professores revelam dificuldades em selecionar os métodos de análise mais adequados à natureza dos dados (Fernandes et al., 2019, Leavy, 2010), detendo um conhecimento estatístico marcadamente processual que projetam no ensino deste tema (Santos 2015).

Na etapa de *Interpretação dos resultados e formulação de conclusões* interpretam-se os resultados obtidos e reflete-se sobre a adequação dos dados e a eficácia da análise para formular as conclusões e responder às questões iniciais, fornecendo argumentos fortes baseados nessa mesma análise (Henriques & Oliveira, 2012). A complexidade desta etapa para os professores reside no facto de esta requerer um raciocínio forte que permita interligar e relacionar a análise de dados, as conclusões e a questão de investigação, mobilizando conhecimento processual e conceptual (Makar & Fielding-Wells, 2011). Os professores do estudo de Leavy (2010), por exemplo, revelaram um conhecimento processual que se traduziu numa fraca compreensão das medidas estatísticas e os levou a subestimarem a sua complexidade. Assim tiveram dificuldades em compreender a relação entre as medidas estatísticas, as suas propriedades e o impacto da forma da distribuição na sua representatividade. No estudo de Santos (2015), por exemplo, uma futura professora mostrou situar-se num nível avançado de interpretação gráfica “ler além dos dados” (Friel et al., 2001), contudo, promove o desenvolvimento de um nível mais elementar ao nível de “ler os dados”, junto dos seus alunos.

Conhecimento do professor para ensinar Estatística

Para ensinar, o professor convoca o conhecimento profissional que detém, que orienta toda a atividade de ensinar. No ensino da Estatística, consideramos o conhecimento do conteúdo (Estatística), conhecimento dos alunos e da aprendizagem, conhecimento do currículo e o conhecimento do ensino (prática letiva) (Canavarro, 2003). Neste estudo consideramos apenas o conhecimento do ensino, por estarmos focadas diretamente na análise da prática de ensino de uma professora.

O *conhecimento do ensino (ou da prática letiva)* inclui todo o conhecimento que é mobilizado pelo professor antes da aula, em termos de preparação bem como depois, em termos de reflexão, mas o seu núcleo essencial diz respeito ao conhecimento sobre a condução da aula de Matemática. Os processos de planear, conduzir e refletir sobre o desenvolvimento de uma investigação estatística em sala de aula podem evidenciar este tipo de conhecimento (Rodrigues & Ponte, 2022). Muitos autores ressaltam a importância do complexo papel do professor na condução da aula, que não se esgota com a seleção de tarefas válidas; é igualmente relevante a forma como as propõe e as conduz durante a aula. Indicadores relevantes que caracterizam a prática letiva durante a condução de uma aula são a apresentação das tarefas aos alunos e a negociação do trabalho a desenvolver,

a dinâmica da aula, os papéis desempenhados por professor e por alunos, e discurso/comunicação que se joga na sala de aula (NCTM, 2007).

No que se refere especificamente ao conhecimento do ensino da Estatística com investigações estatísticas, estudos apontam que estas nem sempre são vistas como tarefas que se possam realizar na sala de aula (Rodrigues & Ponte, 2022). Os docentes têm pouca ou nenhuma experiência em ensinar estatística por esta via e, por isso, esta abordagem resulta complexa e problemática para os mesmos quando têm de planificar, conduzir e refletir sobre aulas com investigações estatísticas (Batanero et al., 2011; Leavy, 2010; Ribeiro, 2006; Rodrigues & Ponte, 2022; Santos & Ponte, 2014). Buehring (2021) refere que este tipo de trabalho é difícil e requer do professor flexibilidade suficiente para alterar e adaptar os seus planos de aula e questionar a sua prática.

A inexperiência dos professores em conduzir aulas com investigações estatísticas é um fator limitador do desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos já que os docentes tendem a apresentar dificuldades em extrair informações dos alunos durante as várias etapas da investigação, levando-os a liderarem o discurso da aula e a se substituírem ao trabalho dos alunos durante as mesmas (Santos & Ponte, 2014), ou então a reduzirem o grau de complexidade da tarefa (Seker, 2018).

Outro aspeto problemático para os professores parece ser a necessidade de os alunos, em aulas com uma abordagem exploratória que está frequentemente associada ao desenvolvimento de investigações, assumirem papéis diferentes daqueles que assumem no ensino tradicional, o que causa constrangimentos a docentes com preocupação excessiva com a ordem e com a vertente disciplinar dos alunos, a qual pode comprometer o desenvolvimento da vertente cognitiva dos mesmos (Rodrigues & Ponte, 2021).

A investigação tem mostrado que os professores perspetivam o ciclo investigativo como um conjunto de procedimentos isolados (Santos & Ponte, 2014). Os professores tendem a revelar dificuldades em todas as suas etapas, sendo que a etapa inicial do *Problema* parece ser uma das que mais constrangimentos lhes traz (Buehring, 2021; Leavy, 2010; Santos & Ponte, 2014). Vários estudos referem a existência de uma tensão por parte dos professores que vacilam entre a formulação de questões pelos alunos, de acordo com os seus interesses, e uma maior orientação da sua parte nesta etapa de modo a assegurar o cumprimento de objetivos curriculares amplos, ainda que eventualmente menos atrativos para os alunos (Leavy, 2010; Rodrigues & Ponte, 2021). Por outro lado, os dados têm revelado que os professores tendem a sobrevalorizar a fase de *Análise* por incluir processos estatísticos que lhes são mais familiares, como o cálculo das medidas estatísticas e a construção de gráficos. Para muitos professores a investigação termina com esta fase (Santos & Ponte, 2014).

Metodologia

Este estudo adotou uma metodologia de natureza qualitativa, ancorada no paradigma interpretativo e concretizou-se através de um estudo de caso (Yin, 2010) de uma professora de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico, com cerca de 16 anos de experiência, Inês (Patrício, 2022). A professora integrou, juntamente com outros colegas e com a investigadora (primeira autora deste artigo), um grupo de trabalho colaborativo que se assumiu como um importante veículo que pretendeu fornecer o contexto para que o conhecimento da professora se revelasse, se clarificasse e se aprofundasse, já que Inês nunca tinha desenvolvido investigações estatísticas em sala de aula. Foi no contexto deste grupo que se discutiram ideias fundamentais sobre Estatística, se prepararam tarefas e o modo de as desenvolver, e Inês selecionou a tarefa de investigação estatística a realizar

nas suas aulas com os alunos adaptada de Sousa (2002), intitulada: Como são os alunos da minha turma? (Anexo 1). O desenvolvimento desta tarefa durou sete aulas e constitui o terreno da recolha de dados aqui referidos.

Utilizaram-se diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados que lhe conferiram robustez (Yin, 2010): duas entrevistas semiestruturadas (E) (antes e após da realização da tarefa); entrevistas informais após cada aula observada (RAO); observação não participante (AO) de sete aulas com o desenvolvimento da investigação estatística; observação participante das sessões de trabalho colaborativo (STC); análise documental dos planos de aula realizados pela professora.

Tendo em conta o objetivo do estudo que focamos neste artigo, a análise de dados considera as quatro etapas o desenvolvimento de uma investigação estatística enunciadas por Martins e Ponte (2010): Etapa 1 – Formular questões de investigação; Etapa 2 – Planeamento da recolha de dados; Etapa 3 – Organização e tratamento de dados; Etapa 4 – Interpretação dos resultados e formulação das conclusões. A análise de conteúdo realizada relativamente aos desafios encontrados pela professora nas suas práticas tomou como categorias aspetos essenciais em que incidem desafios ao conhecimento do ensino reportados no enquadramento teórico, como são o papel do professor e dos alunos e o discurso na aula, mas manteve-se a abertura necessária para acolher ideias emergentes.

Resultados

Os resultados que se apresentam de seguida consideram aspetos transversais que se manifestaram em todas as etapas de desenvolvimento da tarefa e também questões mais específicas de cada uma delas.

Importa referir que Inês optou por estruturar a tarefa nas suas diferentes etapas, como se pode observar no anexo 1, e planificar cada uma delas de forma bastante completa e cuidada. A sua opção relativamente à dinâmica da aula foi de fazer, para cada uma das questões das tarefas específicas de cada etapa da investigação, uma introdução coletiva da questão, a sua exploração pelos alunos em trabalho autónomo e a discussão das respostas à questão novamente em coletivo, optando assim por organizar as aulas em 3 fases, em sintonia com práticas de ensino exploratório da Matemática (Canavarro, 2011).

As fases de introdução das questões apresentaram duas modalidades – breves e longas – consoante o seu objetivo fosse, respetivamente, a apropriação das questões pelos alunos, apoiadas sobretudo na leitura do seu enunciado e em explicações sucintas do trabalho a desenvolver, ou fornecer novo conhecimento para resolução das questões. As fases de exploração foram sempre prolongadas em relação ao planeado pela professora, decorrentes de uma fraca apropriação das questões das tarefas por parte dos alunos durante a introdução e/ou devido à inexperiência da professora com este tipo de trabalho no contexto da Estatística, que não lhe permitiu antever e ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades.

As fases de discussão foram frequentemente apressadas, centradas no discurso da professora e focadas em aspetos processuais (identificação e correção de erros e procedimentos).

Aluno – Fizemos um gráfico de barras...

Professora – Diz-me só os cuidados que tiveste de ter.

Aluno – As barras à mesma distância.

Professora – Mais? Terem todas a mesma ...

Aluno – Largura.

Professora – E o que é que eu fui lá chatear, os gráficos têm de ter todos...

Aluno – Título.

Professora – E as nossas barras também devem ter o quê? O assunto a que se refere este eixo e o assunto a que se refere este eixo, a frequência absoluta e, neste caso, o número de horas (AO_5).

Os aspetos anteriores foram mais evidentes na etapa 1, a qual a professora identifica como a que mais lhe constrangimentos lhe causou.

A gestão do tempo para mim angustiou-me um bocado, houve aulas que eu tenho noção que foi mesmo isso, que foi falta de experiência e eu achar que tinha sido explícita e não fui. Mas a primeira [aula] foi catastrófica [...]se calhar, alguém que veja aquilo acha que a professora não explicou bem e eles não perceberam nada (E_2).

A convicção de Inês em envolver os alunos no trabalho e nas decisões metodológicas nas diferentes etapas da investigação, teve reflexos diferentes devido às tensões sentidas na prática, com consequências na aprendizagem dos alunos. Na etapa 1, relativa à formulação das questões de investigação, um aspeto que Inês mostrou priorizar foi que fossem os alunos a elencar, de acordo com os seus interesses, as variáveis que gerariam as questões de investigação mais específicas, tal como defendem Makar e Fielding-Wells (2011), pelo que lhes deu completa liberdade para o fazerem. Contudo, este trabalho resultou problemático para os alunos, ao contrário do que Inês previra. Inês, por ter menosprezado o grau de dificuldade que este trabalho acarreta para os estudantes, resultado também verificado por Burgess (2009), realizou um lançamento breve à tarefa que resultou numa apropriação insuficiente dos mesmos.

[...] eu não dei nenhum exemplo e isso levou a que eles demorassem mais tempo a chegar lá, porque eu achava que era uma coisa tão simples que não havia necessidade de eu dizer [...] Porque eu meu objetivo foi que fossem eles a fazer (STC_9).

Este aspeto originou um mau arranque do trabalho dos alunos com prejuízo em toda a dinâmica da aula e com necessidade de reajustar a planificação realizada. Os alunos, por um lado, foram por caminhos imprevistos para a professora, por outro lado, não fizeram surgir as variáveis que Inês antecipara (variáveis de natureza diversa) para dar cumprimento de objetivos curriculares promotores do desenvolvimento do raciocínio estatístico de uma cidadania crítica, tal como defendem Heaton e Michaelson (2002), tendo-se focado sobretudo no elencar de variáveis de carácter físico e de personalidade.

[...] as características físicas foram fáceis, mas depois aquela parte [enumerarem variáveis mais ricas do ponto de vista estatístico] demorei demasiado tempo. Eu não queria dar as respostas e estava ali a ver, a ver, a ver se eles diziam, e eu a tentar arranjar exemplos, que me levassem lá sem dizer o que é que era [...] foram os aspetos psicológicos que eu não tinha pensado, de maneira nenhuma (RAO_1).

A tensão sentida pela professora durante a aula, associada à necessidade de fazer surgir resultados esperados, à perceção das dificuldades dos alunos, à gestão do tempo e à sua

inexperiência para com este tipo de trabalho, fê-la precipitar o surgimento de resultados esperados.

Relativamente à etapa 2, sobre planeamento da recolha de dados, Inês responsabilizou totalmente os alunos por selecionarem os métodos de recolha de dados, aspeto também considerado muito importante por Makar e Fielding-Wells (2011) por lhes possibilitar uma resposta mais autêntica da eficácia das diferentes metodologias de investigação. Contudo, não ficou claro se estas ações da professora resultaram de uma convicção sua ou se foi uma forma que encontrou para contornar a sua falta de experiência em conduzir trabalho desta natureza na sala de aula, já que as escolhas metodológicas dos alunos não foram alvo de partilha, escrutínio nem alvo de reflexão, o que impossibilitou os alunos de desenvolverem um conhecimento mais profundo sobre planeamento estatístico.

Para cada um dos assuntos [...] como é que vocês podem obter as respostas?
Já estão aí 3 hipóteses: ou através de inquérito ou através de observação ou de medição. [...] Vocês agora é que vão decidir dentro dos grupos (AO_2).

No que concerne à etapa 3, organização e tratamento de dados, Inês não deu liberdade aos alunos para construírem várias representações para os seus dados e selecionarem a que melhor os representasse, ao contrário do que preconizam Makar e Fielding-Wells (2011). Selecionou previamente os gráficos que os alunos iriam realizar para cada variável para assegurar que, dentro de cada grupo, aprendessem a realizar uma grande diversidade de gráficos, indo ao encontro dos conteúdos presentes no programa (ME, 2007), uma preocupação muito presente para Inês.

Para que não haja dúvidas, eu coloquei os gráficos que vocês têm de fazer para cada uma das variáveis. Cada grupo tem três gráficos para fazer e são diferentes de grupo para grupo [...] (AO_5).

Este aspeto diminuiu o nível cognitivo da tarefa e impediu os alunos de aprofundarem a sua compreensão gráfica, pois o processo de mudança de representações permite verificar a sua adequabilidade em relação à natureza dos dados, revelar relações e padrões alternativos nos mesmos e desenvolver a compreensão da importância dos gráficos enquanto ferramentas de transnumeração (Makar & Fielding-Wells, 2011). Em episódios pontuais da aula, denota-se da parte de Inês a preocupação com uma abordagem mais concetual dos gráficos e das medidas estatísticas, trazendo à discussão gráficos e medidas estatísticas referentes a algumas das variáveis com valores mais discrepantes. Contudo, a tensão sentida para com a gestão do tempo, para com a perceção das dificuldades dos alunos e o repertório limitado de estratégias de ensino através de uma abordagem concetual, mais evidente no caso dos gráficos, conduziram a que prevalecesse a abordagem processual, mais familiar para a professora.

No que se refere à etapa 4, interpretação de dados e formulação das conclusões, o envolvimento dos alunos na interpretação dos dados foi pouco expressivo, em parte devido à forma como a professora dirigiu a etapa anterior. O facto de Inês se ter substituído aos alunos na seleção das representações para os próprios dados, retirou significado à fase de interpretação de dados e impediu-os de selecionarem a representação gráfica que melhor os representava. Da mesma forma, os alunos não selecionaram a medida estatística que melhor resumia os dados, porque a professora parece não considerar que a moda é igualmente eficaz para resumir a distribuição quando esta é enviesada, solicitando, nestes casos, todas as medidas estudadas (média, moda e amplitude) relacionadas entre si.

Professora – Exatamente! Então, eu quero que vocês me digam...

Aluno – O aluno típico da turma na moda tal, mas na média tal.

Professora – Sim, mais? Não é só utilizar a moda, não é?! Isto porquê? Porque é que a moda não é igual à média?

Aluno – Porque há um que calça o 43.

Professora – Porque há uma grande quê? Uma grande ampli...

Aluno – Amplitude (AO_6).

Relativamente à *formulação das conclusões do estudo*, Inês envolveu os alunos na formulação das conclusões da investigação, solicitando-lhes que escrevessem um texto como resposta ao seu problema inicial “Como são os alunos da turma?”, tal como a tarefa específica solicitava. Assim, dentro de cada grupo, os estudantes escreveram um texto tendo em conta as variáveis que estudaram, solicitando-lhes argumentos baseados nas representações gráficas e das medidas estatísticas determinadas, ao encontro do que recomendam Henriques e Oliveira (2012).

O que é que vocês têm de fazer dentro de cada grupo, com o estudo que vocês fizeram vão ter de descrever o aluno típico de acordo com as vossas variáveis [...] Agora, a vossa tem de ser o mais completo possível têm que ir buscar tudo o que vocês pesquisaram, vão analisar as tabelas de frequências, vão analisar os gráficos, vão analisar as medidas estatísticas e vão elaborar um texto que pode ser acompanhado por outro tipo de informação. [...] Tem que ser uma coisa bem feita e bem pensada e têm que explicar bem porquê. Por exemplo, estamos a ver que há situações em que se vocês só dissessem a moda ou a média não íamos ficar com uma ideia do conjunto e têm que justificar (AO_6).

Inês tentou guiar a discussão no sentido de ajudar os alunos a fornecerem argumentos com base nos gráficos construídos e nas medidas estatísticas calculadas, com o intuito de aprofundar o seu conhecimento, solicitando-lhes pequenos contributos para obter *feedback* acerca do seu entendimento sobre o assunto. Contudo, a professora explica que a perceção das dificuldades dos alunos neste aspeto, bem como a tensão sentida com a gestão do tempo, fê-la descurar este aspeto.

Que eles não chegaram a perceber bem e eu às tantas pensei assim: “estou aqui a bater no ceguinho, nunca mais saio de lá”. [...] A moda era 5... mas a média era 5,9, portanto, aproximava-se mais de 6 letras. Porque é que a moda não era coincidente... e eu tive ali e eles não explicavam, depois às tantas comecei a olhar para o relógio e começou-me a dar cá uma neura! [...] porque eram muito mais os valores que se situavam à direita da moda do que os que se situavam à esquerda, logo a média seria superior à moda, que era aquilo que eu queria que eles percebessem (RAO_6).

Ainda a referir que os planos de aula de todas as etapas da investigação possuíam um conjunto diverso de questões que faziam antever a preponderância de um modo de comunicação reflexivo (Brendefur & Frykholm, 2000). Contudo, verificou-se que, durante as aulas o predomínio de uma comunicação de estilo contributivo (Brendefur & Frykholm, 2000). Assim, Inês solicitou aos alunos apenas pequenas intervenções, ao contrário do que era a sua intenção inicial, para aceder às suas ideias prévias e/ou para

obter feedback sobre o seu entendimento acerca das ideias apresentadas e exercer a validação do seu discurso.

Conclusões

Este estudo mostra que a realização de investigações estatísticas na sala de aula coloca desafios ao conhecimento para ensinar estatística dos professores. Inês, apesar de experiente e de integrar um grupo colaborativo, revelou algumas dificuldades gerais e outras específicas em cada etapa de trabalho a desenvolver com os alunos na investigação estatística.

A professora teve dificuldades em conduzir as aulas de modo a evidenciar a relevância das diferentes etapas de uma investigação estatística, e em efetuar uma gestão eficiente dos tempos da aula, tendendo a reduzir o grau de dificuldade das tarefas, em particular na Etapa 1 – Formulação das questões de investigação – que identificou como a mais problemática para si.

O apoio aos alunos na tomada de decisões foi outro aspeto problemático para Inês e este variou entre: dar aos alunos completa liberdade decisória, como aconteceu nas etapas 1 – Formulação das questões de investigação – e na etapa 2 – Planeamento da recolha de dados; ou tomar decisões que competiam à partida aos alunos, como no caso da etapa 3 – Organização e tratamento de dados – e da etapa 4 – Interpretação dos dados e formulação das conclusões. Este estudo mostra que é muito importante ser dada a oportunidade aos alunos de tomarem decisões em todas as etapas da investigação, mas é igualmente relevante a orientação dos professores durante este processo.

Ao longo das etapas da investigação, Inês tendeu a liderar o discurso da aula para fazer surgir resultados esperados. Embora a professora tenha revelado nos planos de aula a intenção de dar mais voz aos seus alunos, a consciência das dificuldades dos estudantes levou a que a comunicação se pautasse por um estilo marcadamente contributivo (Brendefur & Frykholm, 2000), sendo solicitado aos alunos frequentemente apenas pequenos contributos e de baixo nível cognitivo.

São visíveis no conhecimento de Inês as marcas do seu investimento em formação contínua, e em trabalho colaborativo, como é o caso desta investigação, que se traduzem na sua intenção em proporcionar aos seus alunos um ensino da Estatística mais concordante com as orientações curriculares que apostam na literacia estatística. Todavia, a herança de um ensino da Estatística orientado para uma lógica de trabalho fragmentado, baseado no domínio de procedimentos estatísticos isolados, que dispensa os alunos na tomada de decisões sobre quais os métodos estatísticos devem usar está ainda muito presente na sua prática e é nela que Inês se refugia quando sente as mais variadas tensões relacionadas com a sua inexperiência em orientar os alunos no desenvolvimento de investigações estatísticas na sala de aula e com a pressão do cumprimento dos conteúdos programáticos devido ao exame final de Matemática de 6.º ano cuja data de realização estava eminente.

Na medida que as investigações estatísticas têm vindo a assumir uma centralidade crescente no currículo (Canavarro et al., 2021), é importante que os professores estejam preparados para ensinar Estatística com esta perspetiva. Assim, este estudo mostra a necessidade de os professores aprofundarem o seu conhecimento de Estatística e da sua didática, através de experiências de formação centradas no desenvolvimento de investigações estatísticas, para que as orientações curriculares sejam uma realidade na prática dos professores e estes possam preparar adequadamente os seus alunos para as exigências da sociedade do século XXI (Batanero, 2011).

Referências

- Arnold, P. & Pfannkuch, M. (2018). Critiquing investigative questions. In M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10, July, 2018), Kyoto, Japan*. International Statistical Institute. https://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_10_2018
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report II*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf
- Batanero, C. (2011). Teachers' beliefs, attitudes and knowledge. In C. Batanero, G., Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 497-418). Springer.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). Overview: Challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 407-418). Springer.
- Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Buehring, R. S. (2021). *Movimentos de pensamento estatístico na infância: Entre viver e contar histórias*. [Tese de doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis]. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/227356>
- Burgess, T. A. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(1&2), 3-24.
- Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). APM.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>.
- Caseiro, A., & Machado, R. (2019). A experiência de realização de projetos em educação estatística: Um estudo com futuros professores dos primeiros anos. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Online: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Online: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum Framework*. American Statistical Association. <http://www.amstat.org/>
- Friel, S. N., Curcio, F., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. <http://www.jstor.org/stable/74967>

- Gal, I., & Garfield, J. (1997). *The assessment challenge in statistics education*. Vol. 12., IOS Press.
- Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 35-59.
- Henriques, A., & Oliveira, H. (2012). Investigações estatísticas: Um caminho a seguir. *Educação e Matemática*, 120, 3-8.
- Leavy, A. (2010). Teaching statistics at the primary level: Identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*. (ICOTS8, July, 2010). Liubliana, Eslovénia. International Statistical Institute. https://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_8_2010
- Makar, K., & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 347-358). Springer.
- Martins, M. E. G. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Ministério da Educação, DGIDC.
- Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, DGIDC.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (tradução do original em inglês). APM e IIE.
- Patrício, M. S. (2022). *Conhecimento sobre estatística e o seu ensino com investigações estatísticas: Um estudo de caso no 2.º Ciclo do Ensino Básico*. [Tese de doutoramento, Universidade de Évora]. <http://hdl.handle.net/10174/34883>
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp.11-41). APM.
- Ribeiro, S. A. (2006). *O Ensino da Estatística no 7.º ano de escolaridade: Caracterização e dificuldades sentidas pelos professores* [Tese de Mestrado, Universidade do Minho]. <https://hdl.handle.net/1822/6270>
- Rodrigues, B., & Ponte, J. P. (2021). Da formação à prática: Experiências de duas professoras sobre as investigações estatísticas no envolvimento do aluno. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n4p402-409>.
- Rodrigues, B. M. B., & Ponte, J. P. (2022). Teacher education and didactics knowledge to teach statistics: A case study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 225-243. <https://doi.org/10.30935/scimath/11717>
- Santos, R. (2015). *O conhecimento de estatística e sua didática de futuros professores* [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/19954>
- Santos, R., & Ponte, J. P. (2014). Learning and teaching statistical investigations: A case study of a prospective teacher. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in*

statistics education (Proceedings of the 9th International Conference on the Teaching of Statistics (ICOTS6, July) (pp. 13-18). International Statistical Institute.

Seker, V. (2018). Teaching average through implementing cognitively demanding statistical tasks. In M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10, July)*. International Statistical Institute. https://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_10_2018

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics and reasoning. In F. Lester (Ed). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1000). Information Age Publishing, Inc., & National Council of Teachers of Mathematics.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6.º ano. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). APM <https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Sousa%202002.pdf>

Steen, L. (2002). A problemática da literacia quantitativa. *Educação e Matemática*, 69, 79-88.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999) *Statistical thinking in empirical enquiry* (with discussion). *International Statistical Review*, 67, 221-266. <http://iase-web.org/documents/intstatreview/99.Wild.Pfannkuch.pdf>

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Bookman.

ANEXO 1

Como são os alunos da minha turma?²

Supõe que queres comunicar a um aluno de um país distante, ou mesmo, quem sabe, a um extraterrestre, como são os alunos da tua turma. Para isso, necessitas de caracterizar o aluno típico da turma, recolhendo dados sobre algumas das suas características. Por forma a melhor conseguires transmitir o que pretendes, necessitas ainda de organizar e representar esses dados e de recorrer a medidas estatísticas que te ajudem a descrevê-lo. Todo este processo inclui diversas etapas que é importante que sigas para que, no fim, escrevas uma pequena carta caracterizando o aluno típico da turma, integrando as diferentes características que foram estudadas.

1.ª etapa

Preparação das questões de investigação

Discute, com os teus colegas, sobre:

1. Os dados (físicos, sociais, culturais, ...) que devem entrar na caracterização do aluno típico da turma;
2. Como pensas que vai ser o perfil do aluno típico da tua turma;
3. Será necessário traçar um perfil para os rapazes e outro para as raparigas? Justifica a decisão tomada.

2.ª etapa

Preparação da recolha dos dados

1. Escreve na forma de pergunta cada uma das características a investigar.
2. Que respostas pensas obter para cada pergunta?
3. De que modo (através de observação, medição ou inquérito) podes obter as respostas?
4. Prepara folhas de registo para os dados que vais recolher. Usa uma folha para cada uma das características que vais estudar.
5. Qual é a natureza dos dados em cada caso? Diz quais são os que dizem respeito a qualidades e quais os que foram obtidos por contagem ou medição (qualitativos discretos ou contínuos, respectivamente).

3.ª etapa
Organização e representação dos dados

Nesta etapa vais tentar descobrir formas de organizar e representar os dados. Para cada conjunto de dados que recolheste, responde às seguintes questões:

1. Organiza os conjuntos de dados em tabelas de frequências absoluta e relativa.
2. Para te ajudar a resumir os dados podes calcular algumas medidas estatísticas:
 - a) Existe algum valor mais frequente. Se sim, diz qual é (moda)?
 - b) Existe algum número que é o ponto de equilíbrio de todos os valores? Se sim, calcula-o (média). Será que podes calcular a média para todos os tipos de variáveis?
 - c) Se o conjunto de dados foi obtido por contagem ou medição, indica qual é o valor mínimo, o valor máximo e a distância entre estes dois valores (amplitude). Achas que os teus dados estão muito concentrados ou estão espalhados?
3. Selecciona a representação gráfica que te pareça mais adequada (diagramas de caule e folhas, pictogramas, gráficos de barras e/ou gráficos circulares) para cada um dos teus conjuntos de dados.

4.ª etapa
Interpretação dos dados

Analisa os vários conjuntos de dados que tu e os teus colegas obtiveram. Compara as diferentes representações que apareceram.

1. Escolhe, justificando, aquela que, em cada caso, dá uma melhor visão dos dados.
2. Repara nas respectivas medidas estatísticas, usadas para resumir a informação contida num conjunto de dados. Consegues dizer quando é preferível utilizar uma ou outra, ou se será indiferente a sua utilização?
3. Consegues dizer qual o conjunto de dados com maior e com menor amplitude? O que querará isto dizer?

Escreve agora a tua carta dando a conhecer os alunos da tua turma, integrando as diferentes características que foram estudadas.

(Não te esqueças de referir os aspectos positivos e negativos acerca da tua turma que a investigação realizada permitiu fazer sobressair e adiantar possíveis formas de perpetuar os positivos e extinguir os negativos.)

Posters

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NA CONSTRUÇÃO DE
PONTES DE ESPARGUETE NUMA ESCOLA DE ENSINO SECUNDÁRIO**
**MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING IN THE CONSTRUCTION OF
SPAGHETTI BRIDGES IN A SECONDARY SCHOOL**

Rosana Maria Luvezute Kripka

Universidade Federal do ABC, Brasil

rlkripka@gmail.com

Paula Boito

Escola de Ensino Médio Integrado, Brasil

paulaboito@upf.br

Moacir Kripka

Universidade de Passo Fundo, Brasil

mkripka@gmail.com

Resumo: Apresentam-se resultados de reflexões docentes sobre uma prática, com a intencionalidade de perceber as potencialidades de ensino e de aprendizagem de uma tarefa interdisciplinar envolvendo a resolução de problemas de construção de pontes de esparguete no ensino secundário. Na avaliação qualitativa, interpretativa, percebeu-se que a proposta promoveu o aprendizado significativo, pois possibilitou ressignificar diversos conceitos prévios básicos de física e de matemática. A livre escolha dos modelos a serem construídos impulsionou habilidades cognitivas como pensamento crítico e criatividade, estimulou o trabalho em equipe e mostrou a aplicabilidade da teoria. A abordagem permitiu evidenciar o valor do método de resolução de problemas na educação e na resolução de desafios tecnológicos.

Palavras-chave: educação matemática, método de Pólya, projeto de pontes de esparguete, resolução de problemas.

Abstract: Results of teaching reflections on a practice are presented, with the intention of understanding the teaching and learning potential of an interdisciplinary task involving solving problems related to building spaghetti bridges in high school. In the qualitative, interpretative evaluation, it was noticed that the proposal promoted significant learning, as it made it possible to reframe several previous basic concepts of physics and mathematics. The free choice of models to be built boosted cognitive skills such as critical thinking and creativity, encouraged teamwork and showed the applicability of the theory. The approach made it possible to highlight the value of the problem-solving method in education and in resolving technological challenges.

Keywords: mathematics education, Polya's method, spaghetti bridge project, problem-solving.

Introdução

A matemática é uma disciplina muitas vezes vista como difícil pelos alunos (Borges & Barbosa, 2022). Assim, novas abordagens para o ensino e a aprendizagem da matemática surgem para aprimorar a compreensão dessa disciplina. Uma delas é a resolução de problemas matemáticos, na qual destaca-se o método de Pólya (1975, 1981), o qual oferece uma abordagem estruturada para resolver problemas matemáticos e desafios em geral. Na área de engenharia, a elaboração e construção de projetos de pontes de esparguete se mostram eficazes para aplicar conceitos matemáticos e de física.

A ideia da proposta de construção de pontes é a de que estruturas podem ser projetadas a partir de cálculos relativamente simples e de fácil apreensão. Por essa razão, essa proposta foi vista como uma excelente oportunidade para a aplicação prática de conceitos matemáticos e físicos junto a estudantes de ensino secundário.

Esse tema considera a perspectiva de propostas interdisciplinares, possibilitando aos alunos o desenvolvimento da competência crítica, a partir de suas participações dialógicas em processos educacionais (Tomaz & David, 2011).

Partindo desses pressupostos, são apresentados resultados de reflexões docentes sobre uma prática, com a intencionalidade de perceber potencialidades de ensino e de aprendizagem da aplicação de uma tarefa interdisciplinar envolvendo a resolução de problemas de construção de pontes de esparguetes numa escola de ensino secundário (ensino médio) brasileira.

Aspectos gerais

O método de resolução de problemas proposto por Pólya (1975, 1981) é composto por quatro etapas principais: compreensão do problema, planejamento, execução e revisão. Esse método visa guiar os solucionadores de problemas por um processo organizado e criativo, permitindo-lhes abordar problemas complexos de maneira sistemática.

Considerando o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem matemática, a resolução de problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção de conhecimento, colocando o aluno no centro do processo de aprendizagem, na sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador no decurso dessas atividades (Allevato & Onuchic, 2014).

Fundamentada nessas ideias, foi proposta uma competição aos estudantes de construção de pontes de esparguete e cola quente, com objetivo de estimular a compreensão e o aprofundamento do conhecimento nas áreas de matemática e física, envolvendo conceitos relacionados à trigonometria, resolução de sistemas e de decomposição e equilíbrio de forças. Em equipes, eles deveriam projetar e construir uma estrutura que resistisse a maior carga possível, aplicada no centro do vão. A ponte deveria ter um vão de 50 centímetros, pesar no máximo 500 gramas (figura 1). Destaca-se que respeitando os limites definidos seria possível idealizar uma infinidade de modelos (soluções) estruturais para as pontes.

O problema foi proposto para estudantes de turmas de uma escola de Ensino Médio (Escola Secundária) de uma Universidade localizada na região Sul do Brasil, e contou com o apoio da professora de matemática da escola (segunda autora do artigo).



Figura 1. Construção das pontes

Em duas semanas, nos períodos de aula, foi feito o planejamento e a confecção das pontes. A competição consistiu na aplicação de cargas crescentes em um suporte, até a ruptura da ponte. A equipe vencedora (figura 2) obteve uma estrutura que suportou 21 kg, sem romper. Após a competição, os estudantes responderam um questionário, e constatou-se, no geral, avaliações positivas, com relatos de dificuldades na fase inicial, mas que com a prática puderam perceber a importância do planejamento e dos cálculos para a correta avaliação do comportamento das estruturas.



Figura 2. Equipe vencedora com sua ponte

Considerações Finais

A reflexão docente sobre os resultados permitiu concluir que a proposta educacional foi interessante e adequada ao ensino da matemática e da física no ensino secundário. Ao combinar o aprendizado teórico com percepções de aplicações, a abordagem possibilitou a compreensão e a ressignificação de conceitos de geometria plana, em especial da trigonometria, das leis de Newton sobre equilíbrio de forças atuando em um corpo e da resolução de sistemas lineares, na qual os alunos foram capazes de compreender de maneira mais profunda e significativa os conceitos e métodos envolvidos.

Verificou-se que o ambiente de aprendizagem propiciou o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais dos estudantes, tais como pensamento crítico, criatividade e resolução sistemática de problemas o que corrobora os indicativos de Pontes (2019) e de Tomaz e David (2011). Ao longo das etapas de compreensão, planejamento, execução e revisão, os alunos foram incentivados a explorar diferentes abordagens de resolução, avaliar suas soluções e aprender com suas experiências. Isso

não apenas fortaleceu suas habilidades matemáticas, mas também cultivou uma mentalidade de aprendizado contínuo e adaptabilidade diante de desafios futuros.

A abordagem interdisciplinar mostrou aos alunos como a matemática está intrinsecamente conectada a outras disciplinas e como seus conhecimentos podem ser aplicados em cenários do mundo real. A combinação da construção de pontes de esparguete e do método de Pólya ofereceu uma abordagem educacional holística e envolvente. Isso ajudou a superar a percepção de que a matemática é abstrata e desafiadora e também capacitou os alunos a abraçar a matemática como uma ferramenta poderosa para resolver problemas do mundo real, promovendo o pensamento crítico e a criatividade.

Agradecimentos

A primeira autora agradece ao auxílio recebido pela CAPES (bolsa de pós-doutorado, proc. 88887.808174/2023-00). O terceiro autor agradece pelo auxílio recebido do CNPq (Produtividade em Pesquisa).

Referências

- Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2014) Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: Por que através da resolução de problemas. In L. R. Onuchic, N. S. G. Allevato, F. C. H. Noguti, & A. M. Justulin (Org.). *Resolução de problemas: Teoria e prática*. Paco.
- Borges, F. S., & Barbosa, D. E. F. (2022). O uso de jogos e materiais manipuláveis como recurso didático motivacional nas aulas de matemática. *Anais do VIII Congresso Nacional de Educacao - CONEDU 2022*, Campina Grande, Brasil. <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/88936>
- Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Editora Interciência.
- Pólya, G. (1981). *Mathematics discovery: An understanding, learning, and teaching problem solving*. John Willey & Son.
- Pontes, E. A. S. (2019). Método de Pólya para resolução de problemas matemáticos: Uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. *HOLOS*, 3, 1–9. <https://doi.org/10.15628/holos.2019.6703>
- Tomaz, V. S., & David, M. M. M. S. (2011) *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Autêntica.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR ALUNOS DO 1.º ANO DE ESCOLARIDADE

PROBLEM SOLVING BY 1ST GRADERS

Mariana Branco

CE “Mente Viva”, Portugal

mariana.s.branco@gmail.com

Ema Mamede

CIEC – Universidade do Minho, Portugal

emamede@ie.uminho.pt

Resumo: Procura-se perceber como os alunos resolvem problemas na aula de Matemática, numa turma do 1.º ano (N=21), com idades dos 6-7 anos. Tenta responder-se à questão: Quais as estratégias adotadas pelos alunos para resolver problemas? Adotou-se uma metodologia qualitativa numa abordagem de estudo de caso e implementou-se uma intervenção de 4 sessões sobre resolução de problemas. Recorreu-se a uma avaliação diagnóstica e final para identificar possíveis mudanças na resolução de problemas dos alunos. Inicialmente, os alunos apresentavam estratégias de resolução informais, que progressivamente deram lugar a estratégias de representação visual, maioritariamente com recurso a desenhos e esquemas. Identificaram-se dificuldades dos alunos na explicitação oral e escrita de processos de resolução.

Palavras-chave: resolução de problemas, estratégias de resolução de problemas, aprendizagem da matemática.

Abstract: The study aims to understand how students solve problems in Mathematics class, in a 1st year class (N=21), aged 6-7. It tries to address the question: What strategies do students adopt to solve problems? A qualitative methodology was adopted in a case study approach, and a 4-session problem-solving intervention was implemented. A diagnostic and final assessment was used to identify possible changes in the students' problem solving. Initially, students presented informal resolution strategies, which progressively gave way to visual representation strategies, mostly using drawings and diagrams. Students' difficulties were identified in explaining oral and written resolution processes.

Keywords: problem solving, problem solving strategies, learning mathematics.

Resolução de Problemas

Na literatura (ver Pólya, 1981; Posamentier et al., 2015), um problema é uma situação para a qual não se encontra uma solução de imediato, e para a encontrar é necessário adotar estratégias. Uma tarefa que não implique esforço por parte do aluno considera-se um exercício. A resolução de problemas implica necessariamente uma compreensão prévia do problema e exige a aprendizagem e a aplicação de diferentes estratégias de resolução. Entende-se por estratégias de resolução de problemas um conjunto de técnicas a serem dominadas pelo solucionador e que o ajudam a “atacar” o problema ou a progredir

no sentido de obter a solução (Vale & Pimentel, 2004). Tjoe (2019) sublinha a relevância de os alunos dominarem diferentes estratégias de resolução de problemas, na construção do seu conhecimento matemático. Proporcionar aos alunos a resolução de problemas que promovam o aparecimento de estratégias, deixando que descubram e construam novos esquemas de ação, potenciando o desenvolvimento da criatividade, elemento vital do pensamento matemático (Clements et al., 2020; Kozłowski & Si, 2019) parece ser possível desde o início da escolaridade. Miranda e Mamede (2023) argumentam que alunos, em início de escolaridade formal, podem apresentar uma diversidade de estratégias de resolução, na resolução de problemas de processo, mesmo antes da aprendizagem da leitura e da escrita.

Assim, procura-se perceber como os alunos, em início de escolaridade, resolvem problemas de matemática: Quais as estratégias por eles adotadas para resolver problemas?

Metodologia

Adotou-se uma metodologia qualitativa (ver Bogdan & Biklen, 2010), tendo-se realizado um estudo de caso coletivo (ver Yin, 2010), com uma turma de alunos do 1.º ano do Ensino Básico (N=21), de uma escola pública de Braga. No momento em que os problemas foram apresentados aos alunos, estes ainda não tinham experiência de resolução de problemas e também não dominavam totalmente competências de leitura e escrita em Língua Portuguesa.

Implementou-se uma intervenção de quatro sessões com duração de duas horas cada, no 1.º período do ano letivo, precedida por uma avaliação diagnóstica composta por 4 problemas. Problemas semelhantes foram usados na avaliação final após intervenção. Foram propostos aos alunos 11 problemas (de processo e de cálculo), gradualmente mais exigentes de maneira a desafiar as suas capacidades. Ao longo da intervenção valorizaram-se o trabalho de grupo e a partilha de ideias, para promover a comunicação matemática. Os alunos foram sempre incentivados a explicar o seu raciocínio e a representá-lo por escrito. A recolha dos dados foi feita através de fotografias, gravações áudio, produções escritas dos alunos e notas de campo da investigadora (uma das autoras deste trabalho). A análise dos dados recaiu sobre as estratégias dos alunos e suas dificuldades na resolução de problemas.

Resultados

Ao longo das sessões, registaram-se as sugestões de resolução dos alunos, as estratégias adotadas e dificuldades identificadas durante a resolução. Os resultados evidenciam disposição e abertura dos alunos para resolver problemas. Contudo, possuíam muitas dificuldades ao nível da compreensão dos problemas, o que se entendeu como natural já que eram alunos em início do 1.º Ciclo do Ensino Básico. De um modo geral, em todos os problemas propostos, foi necessário esclarecer vocabulário novo, essencial à compreensão do problema, o que constituiu uma oportunidade de enriquecimento de vocabulário para os alunos. Depois de entendidos os enunciados, os alunos iam resolvendo com sucesso, os problemas propostos. Registou-se o recurso a estratégias de resolução como esquematização, dramatização e tentativa e erro.

Por exemplo, na resolução do problema dos “Apertos de mão”, foram sentidas grandes dificuldades nomeadamente na compreensão do que era um aperto de mão e o que implicava. Foi necessário a professora intervir várias vezes para esclarecer dúvidas e destravar o raciocínio. Esta fase de compreensão do problema foi essencial para os alunos conseguirem passar para a fase seguinte de resolução. Apesar desta dificuldade, todos os

alunos conseguiram chegar à solução correta. Por sugestão da professora recorreu-se à dramatização, de forma a esclarecer algumas dúvidas que foram surgindo de alguns alunos. As mesmas estratégias foram utilizadas pelos alunos para resolver a extensão proposta a este problema (acréscimo de um amigo ao grupo).

Num outro problema, de resolução do fim o princípio, registaram-se várias resoluções também elas muito visuais, recaindo em desenhos e esquemas. A esquematização foi a estratégia adotada por muitos alunos (ver Figuras 1 e 2), para resolver os problemas propostos.

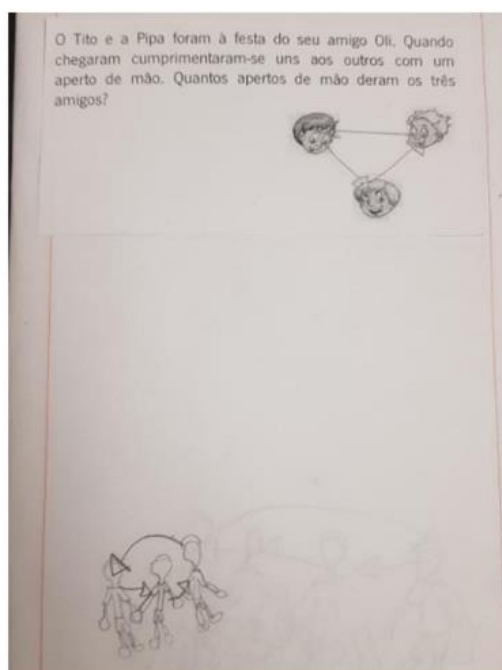


Figura 1. Resolução (Miguel).

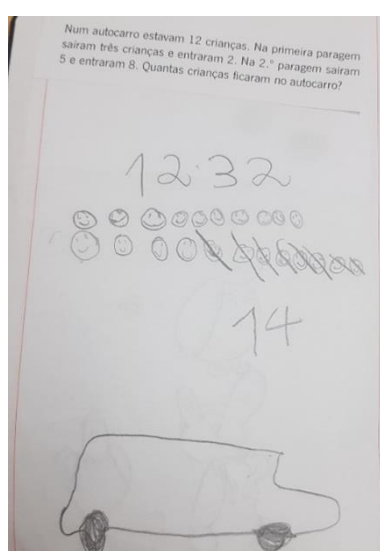


Figura 2. Resolução (Matilde).

A Tabela 1 resume a percentagem de acertos nos problemas na Avaliação Diagnóstica e Final, sendo evidente o progresso dos alunos na resolução dos problemas propostos.

Tabela 1. Percentagem de respostas certas na Avaliação Diagnóstica e Final (N=21)

	Avaliação Diagnóstica (%)	Avaliação Final (%)
Problema 1	38,1	83,3
Problema 2	38,1	72,2
Problema 3	37,2	77,8
Problema 4	0	72,2

Fonte: *Dados do Estudo*.

Ao longo das intervenções, os alunos tiveram oportunidade de contactar com problemas diversos. Todos os alunos foram incentivados a explicar as suas estratégias de resolução e partilhá-las com os restantes colegas, o que permitiu desenvolver a comunicação matemática e conhecer outras estratégias de resolução para o mesmo problema.

Considerações finais

Ao longo do estudo foi notória a evolução dos alunos mediante o contacto com a resolução de problemas, pois iniciaram esta intervenção sem nenhuma conceção de problema e terminaram com a apresentação e explicação de diferentes estratégias de resolução. Foi ainda evidente a melhoria na capacidade de resolver problemas dos alunos.

Referências

- Bogdan, R. & Biklen, S. (2010). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Clements, D., Dumas, D., Dong, Y., Banse, H., Sarama, J., & Day-Hess, C. (2020). Strategy diversity in early mathematics classrooms. *Contemporary Educational Psychology*, 60(4), 101834.
- Kozlowski, J., & Si, S. (2019). Mathematical creativity: A vehicle to foster equity. *Thinking Skills and Creativity*, 33(6), 100579.
- Miranda, P., & Mamede, E. (2023). Construindo estratégias de resolução de problemas com crianças de 6 a 7 anos de idade. *Educação e Pesquisa*, 49, e249924.
- Pólya, G. (1981). *Mathematics discovery: An understanding, learning, and teaching problem solving*. John Willey & Son.
- Posamentier, A., & Krulik, S. (2015). *Problem-solving strategies in mathematics: From common approaches to exemplary strategies* (Vol.1). World Scientific.
- Tjoe, H. (2019). “Looking back” to solve differently: Familiarity, fluency, and flexibility. In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving – Current themes, trends and research* (pp. 3-20). Springer.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do ensino básico*. Lidel.
- Yin, R. (2010). *Estudo de caso. Planejamento e métodos* (4.^a ed.). Bookman.

**CREACIÓN DE PROBLEMAS COMO EVALUACIÓN INICIAL EN
EDUCACIÓN PRIMARIA**
**PROBLEM POSING AS INITIAL ASSESSMENT IN ELEMENTARY
EDUCATION**

Andrea de la Fuente-Silva

Universidad Autónoma de Madrid, España

andrea.delafuente@uam.es

Juan José Santaengracia

Universidad de Oviedo, España

juanjose@uniovi.es

Rocío Garrido-Martos

Universidad Autónoma de Madrid, España

rocio.garrido@uam.es

Gonzalo Ramírez-Fernández

Colegio Salesianos Estrecho, España

gramirez@salesianosestrecho.es

Resumo: La creación de problemas es una tarea que puede ayudar en la adquisición y desarrollo de la competencia matemática. En este trabajo se analizan cualitativamente las creaciones de 20 estudiantes de quinto de primaria al inicio del curso. Se observa que el alumnado genera, de media, problemas con tres proposiciones. Además tienden a utilizar números naturales grandes y estructura aditiva o multiplicativa. El análisis de los problemas ha resultado de utilidad para realizar una evaluación inicial, dado que sin conocer con detalle aún al alumnado, la información obtenida es muy relevante para una mejor adecuación de la práctica docente.

Palavras-chave: invención de problemas, educación primaria, competencia matemática.

Abstract: The problem posing is a task that can aid in the acquisition and development of mathematical competence. This study presents the creations of 20 fifth-grade students at the beginning of the school year, and we observe that students generate, on average, problems with three propositions. They also tend to use large natural numbers and additive or multiplicative structure. Analyzing these problems proves to be valuable for conducting an initial assessment, as the students are not yet familiar, and the information gathered is highly relevant for better tailoring teaching practices.

Keywords: problem posing, elementary education, mathematical competence.

Introducción

La invención de problemas resulta una tarea retadora y valiosa para la adquisición de las competencias matemáticas de nuestros estudiantes (Cai y Hwang, 2023), a tal punto que en la nueva ley educativa la resolución de problemas se entiende a la vez como competencia específica en matemáticas y como eje vertebrador de la enseñanza (MEFP, 2022).

En este trabajo se presentan los resultados de una primera indagación en la construcción de problemas aritmético-verbales con alumnado de 5.º de primaria.

Marco teórico

Un problema plantea una situación que requiere de una reflexión previa, partiendo del desconocimiento del algoritmo que lo resuelve y con el objetivo de alcanzar una meta (Díaz y Poblete, 2001). Existen numerosas clasificaciones de los tipos de problemas aritméticos, destacando entre ellas la clasificación de Echenique (2006), en la que se distingue entre problemas aditivos (de cambio, combinación, comparación y/o igualdad) y problemas multiplicativos (de repartos equitativos, factor N , razón y producto cartesiano).

En numerosas ocasiones, “los problemas escolares planteados en las aulas se enuncian pensando más en el algoritmo que en la situación planteada” (Blanco et al., 2015, p. 123). Estos autores ponen atención en la formulación de estos problemas, ya que trabajándose de manera diferente en clase puede permitir que el alumnado analice la situación que se les plantea y su evaluación no se centre en el algoritmo, sino en la comprensión del problema.

A la hora de abordar el análisis de los problemas propuestos por el alumnado, es necesario destacar el trabajo seminal Leung y Silver (1997), en el que proponen medir la calidad de una propuesta a través de tres fases determinando si un problema es o no matemático, creíble y resoluble.

En este trabajo se utilizará el modelo de análisis de problemas propuesto por Espinoza-González et al. (2015). Este modelo analiza cada enunciado desde tres puntos relacionados. En primer lugar, la parte sintáctica del problema, considerando la extensión y el tipo de información que proporciona. Después, se analiza la complejidad de la solución implicada desde el punto matemático. Y, por último, se considera el análisis semántico.

Los objetivos de este trabajo son: (1) Comprobar el tipo de problemas que produce el alumnado tras una consigna sencilla y (2) comprender el pensamiento de sus estudiantes en la formulación de problemas.

Metodología

En este trabajo se utiliza una metodología eminentemente cualitativa basada en el análisis de contenido.

El desarrollo de la experiencia se ha llevado a cabo en los primeros días del curso escolar 2023-2024 en un colegio de Madrid que se utilizó como muestra por conveniencia. El maestro propuso al alumnado ($n=20$) inventar un problema, de manera individual, sin ninguna indicación previa. Tras la sesión, se han analizado los enunciados junto al maestro.

Siguiendo el modelo propuesto en el marco teórico, se comprobó si los problemas eran o no matemáticos/aritméticos, creíbles y resolubles. Tras esto, se analizaron según las siguientes categorías: estructura sintáctica (longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado), estructura matemática (tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema), estructura semántica (aditivos como combinación, cambio, comparación o igualación; multiplicativos en isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida).

A continuación los resultados más relevantes de las creaciones.

Resultados

Los resultados muestran que los 20 problemas analizados son matemático/aritméticos y solo uno de ellos es no resoluble, por lo que se tendrán en cuenta únicamente 19 para el análisis. Respecto a su estructura sintáctica, es destacable que, de media, se hayan utilizado tres proposiciones en el enunciado, incluyendo la gran mayoría proposiciones interrogativas de asignación.

Todos los problemas analizados muestran que el alumnado ha utilizado únicamente números naturales, aún conociendo los números racionales. Además, a excepción de una persona, todos han utilizado números de entre tres y seis cifras. Si nos centramos en la estructura matemática y semántica, trece fueron de estructura aditiva (de cambio y combinación) y seis de ellos multiplicativos (tres de divisiones y tres de producto) según la clasificación de Echenique (2006). En general, la cantidad de procesos matemáticos involucrados (en el sentido del NCTM (2000)) es de uno o dos. Por último, indicar la variedad de temáticas propuestas en las creaciones de los estudiantes: sellos, asignaturas, chocolatinas, huevos, rosquillas... solo coincidiendo en dos ocasiones la temática canicas y en seis las cartas. En la Figura 1 se muestra una creación, de un niño en la que se identifican las características más llamativas del análisis: uso de grandes números naturales, proposición interrogativa “¿Cuántas?” y las cartas/cromos como contexto más repetido en la clase.

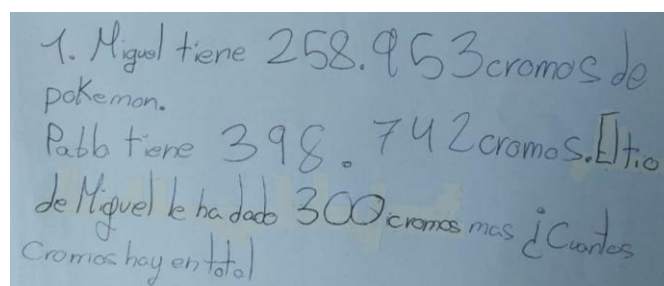


Figura 1. Problema creado por niño de 5.º primaria con grandes cantidades numéricas

Conclusiones

El esquema de análisis propuesto nos ha servido para obtener resultados que sirven como herramienta de diagnóstico previo, coincidiendo con lo propuesto por Espinoza-González et al. (2015). Por ejemplo, se ha observado que los estudiantes podrían asociar la dificultad de un problema con la longitud de los números. Este tipo de información obtenida es muy relevante para una mejora de la adecuación de la práctica docente.

Como explican Cai y Hwang (2020), los resultados son muy enriquecedores para la docencia desde dos puntos de vista. Por un lado, es posible comprender parte del conocimiento de los alumnos, pudiendo usar estos datos como punto de partida o de cara al desarrollo de la competencia matemática a través de la invención de problemas. Por otro lado, sirve al docente para una mejora de su propia práctica en educación matemática, pudiendo llevar a cabo una metodología basada en la creación de problemas.

Referencias

- Blanco, L. J., Caballero, A., y Cárdenas, J. A. (2015). Los problemas aritmético verbales. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas & A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 123-138). Universidad de Extremadura.
- Cai, J., y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., y Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. En R. Leikin (Ed.) *Mathematical challenges for all* (pp. 115-145). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7
- Díaz, M. V., y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 33-42.
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas. Resolución de problemas*. Prensa Gobierno de Navarra.
- Espinoza-González, J., Lupiáñez-Gómez, J.-L., y Segovia-Alex, I. (2015). A scheme to analyses the statements of the student in context of problem posing. *Uniciencia*, 29(1), 58-81. <https://doi.org/10.15359/ru.29-1.4>
- Leung, S., y Silver, E. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE (Boletín Oficial del Estado), 52, de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

GRUPO DE DISCUSSÃO 2

**A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A TECNOLOGIA PARA UMA
EDUCAÇÃO 4.0 TRANSFORMADORA**
**PROBLEM SOLVING AND TECHNOLOGY FOR TRANSFORMATIVE
EDUCATION 4.0**

Isabel Cabrita

*Centro de investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF),
Departamento de Educação e Psicologia Educativa Universidade de Aveiro, Portugal*

icabrita@ua.pt

Miguel R. Wilhelmi

*Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas de la Universidad Pública de
Navarra, España*

miguelr.wilhelmi@unavarra.es

A resolução de problemas é uma capacidade de nível superior que mobiliza e, consequentemente, contribui para a construção de conhecimento, sistematicamente renovado, bem como para o desenvolvimento, principalmente, do raciocínio, do pensamento crítico, do estabelecimento de conexões, do pensamento computacional, da tomada de decisões, da comunicação, da criatividade (Bobrowicz & Thibaut, 2023; Rahman, 2019; Sternberg et al., 2021). A nível atitudinal, a referida capacidade está dinamicamente relacionada com, designadamente, a perspicácia, a autoconfiança, a determinação, a perseverança, a resiliência, a plasticidade ou flexibilidade mental (Ingram et al., 2020; Niss & Højgaard, 2019).

O desenvolvimento de tais conhecimentos, capacidades e atitudes, principalmente no contexto da matemática, é essencial para o cidadão do século XXI, constituindo-se fator de empoderamento, com repercussões decisivas a nível pessoal, profissional e social, sendo determinante para enfrentar os complexos desafios que se lhe colocam, num contexto ímpar de incerteza e imprevisibilidade crescentes (Csapó & Funke, 2017; Geisinger, 2016; Kalantzis et al., 2016; World Bank Group, 2019).

Não admira, então, que a resolução de problemas esteja consignada nos documentos orientadores do processo educativo de grande parte dos países e de há várias décadas a esta parte. Se, numa fase inicial, se constituía, principalmente, como um fim em si mesmo, gradualmente, foi-se assumindo quer como conteúdo de aprendizagem quer como uma abordagem pedagógica promissora (Demirel & Dağyar, 2016; Liljedahl & Cai, 2021; Olivares et al., 2021; Tan, 2013; Walker et al., 2015).

Espanha e Portugal não são exceção e, presentemente, a resolução de problemas está explicitada em documentos enquadradores dos vários níveis de escolaridade, em particular da área da Matemática (Canavarro et al., 2021; Martins et al., 2017; Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP), 2022a, 2022b; Carvalho e Silva et al., 2023).

A tecnologia é uma das faces mais visíveis da capacidade de resolução dos problemas e desafios que se foram colocando à humanidade e/ou que esta (re)inventou e, dinamicamente, constitui-se uma ferramenta poderosíssima para resolver tais problemas e desafios (Brandão Lapa et al., 2019; Lee et al., 2017; Naikoo, 2018). Para além da sua função instrumental, mais neutra, como um meio para atingir fins específicos, a tecnologia apoia a investigação, incluindo na área da matemática, de forma determinante e molda a própria sociedade, tendo repercussões nos mais diversos domínios - científico, social, humanístico, artístico, ...

No contexto educativo, fruto da aturada investigação que se tem desenvolvido e que é alimentada, dinamicamente, pela componente educacional, as mais diversificadas tecnologias têm vindo a ganhar terreno, principalmente ao nível das políticas educativas, enquanto verdadeiras ferramentas epistémicas, ao serviço, portanto, de ativas e sólidas aprendizagens dos estudantes e nos mais diversos contextos (Aldon & Trgalová, 2019; Díaz et al., 2019; Henriksen et al., 2016; Huda et al., 2017; Kaware & Sain, 2015; Kurtz & Peled, 2016). Contraria-se, assim, a lógica de racionalidade técnica que imperou durante muito tempo.

No entanto, para que tal aconteça, tem de ser devidamente ‘orquestrada’ a adequada seleção e/ou (re)criação bem como a exploração das mais variadas tecnologias – estabelecidas ou emergentes, tangíveis e/ou virtuais –, numa lógica de complementaridade, principalmente no contexto de experiências de aprendizagem desafiantes e significantes (Costa et al., 2021; Darling-Hammond, 2015; Drijvers et al., 2020; Freiman & Tassell, 2018; Kerrigan, et al., 2018; Kukulska-Hulme 2023; Pelletier, 2023; Revans, 2017). Deste modo, concorrer-se-á para uma educação 4.0 verdadeiramente transformadora e emancipatória (Biesta, 2015; Comisión Permanente Por Otra Política Educativa, 2020; Duckworth & Tett, 2019; Hussin, 2018; Salmon, 2019; Song, 2021; Wallner & Wagner, 2016; Yacek, 2021).

Alinhadas com esta narrativa, integram o eixo temático ‘Resolução de problemas e a tecnologia’ do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EDEM) 2023 cinco textos que a seguir se apresentam.

No âmbito da comunicação "Empowering problem solving with hints: the intermediate questions approach", S. Tirado-Olivares, J. Olmo-Muñoz, P. Diago, J. Gonzalez-Calero, D. Arnau, e M. Arevalillo-Hérraez explicitam como um sistema de tutoria inteligente (HINTS) pode ser utilizado no contexto educativo, mas com o principal propósito de investigar se a utilização de perguntas intermédias no enunciado de problemas aritméticos aumenta a competência de resolução de problemas. A complementaridade de um estudo quasi-experimental com um estudo de caso permitiu concluir que tais perguntas não atuam tanto ao nível da evocação de esquemas conceptuais, mas, mais diretamente, ao nível da subdivisão da estratégia de resolução em várias etapas. Assim, a integração de perguntas intermédias no enunciado pode constituir-se um forte aliado na resolução de tarefas complexas ao nível procedimental.

M. R. Wilhelmi, A. Lasa, C. Gaita, C. Gonzalez, e F. Ugarte, na comunicação "Quantos anos tem a baleia jubarte?", mostram como uma situação contextualizada complexa pode articular diferentes níveis de conhecimento. A origem da situação é um vídeo em que se vê uma baleia-de-bossa a nadar ao lado de um caiaque perto da costa. Que idade tem esta baleia? Para responder a esta pergunta, é necessário, em primeiro lugar, matematizar a situação problemática. Em segundo lugar, encontrar modelos que descrevam o crescimento da baleia. Em terceiro lugar, obter informações relevantes para interpretar a situação. Neste processo adequada e criteriosamente orquestrado, o vídeo é

instrumentado, o GeoGebra é utilizado para a recolha de dados, os resultados são discutidos com a utilização de uma folha de cálculo e, finalmente, o GeoGebra é utilizado para desenvolver a ideia de modelo e ajustá-la aos dados experimentais, utilizando *applets* para ilustração ou experimentação com os estudantes.

Outro exemplo muito interessante de genuína orquestração está espelhado na comunicação, em poster, de M. Subtil e A. Domingos, que se focam no tema da literacia estatística, envolvendo alunos do 7.º ano de escolaridade, em contexto pandémico. Os discentes envolveram-se, ativamente, na resolução de problemas envolvendo o cálculo da média do número de casos positivos acumulados da Covid-19, diariamente atualizados no site da Direção-Geral da Saúde. A referida experiência de aprendizagem envolveu o uso de computadores, tablets ou telemóveis para acesso a motores de busca, plataforma Zoom e correio eletrónico.

Na mesma linha de orquestração didático-tecnológica, J. Santaengracia, L. Rodríguez-Muñiz e B. Palop apresentam uma comunicação em poster intitulada “Diseño de una formación sobre el Pensamiento Computacional con un enfoque multidimensional”. Os autores focam-se numa proposta de formação contínua de professores orientada para o desenvolvimento da referida capacidade no Ensino Básico e Secundário, em Espanha. Procuram, assim, contribuir para fazer face ao desafio colocado pelo novo currículo, que passa a explicitar esse conteúdo, até agora considerado marginal e não obrigatório na formação pré-universitária. O modelo integra sete oficinas práticas focadas em várias dimensões do pensamento computacional, tirando partido de ferramentas variadas tais como – materiais manipulativos, robots, folhas de cálculo, *Scratch* e sites interativos.

Finalmente, M. C. Botelho, T. Coelho e H. Rocha apresentam um trabalho subordinado ao título “Fluência representacional: A Matemática na resolução de problemas de Física”. No seu âmbito, analisam como uma docente daquela área disciplinar do ensino secundário explora e articula diferentes representações integradas na calculadora gráfica no contexto da resolução de problemas. O estudo tem repercussões no âmbito da articulação das referidas áreas.

Espera-se que a discussão em torno das diversas propostas contribua para aprofundar o conhecimento sobre as temáticas da resolução de problemas e das tecnologias e sobre a sua confluência, em particular, no contexto educacional, ao serviço de uma educação de qualidade.

Referências

- Aldon, G., & Trgalová, J. (Eds) (2019). *Technology in mathematics teaching*. Springer.
- Biesta, G. J. (2015). *Good education in an age of measurement: Ethics, politics, democracy*. Routledge.
- Bobrowicz, K., & Thibaut, J. P. (2023). The development of problem solving: An integrative approach. *Journal of Intelligence*, 11(6), 119.
- Brandão Lapa, A., Bartolomé, A. R., & Menou, M. (2019). Empoderamento e educação na cultura digital. *Revista Educação e Cultura Contemporânea*, 2019, 16(43), 419-448.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E. G., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro,

- R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. Ensino Secundário. Matemática*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.
- Comisión Permanente por Otra Política Educativa (2020). *Manifiesto por una educación transformadora y emancipadora. 25 principios e propuestas*. Foro de Sevilla. <https://eldiariodelaeducacion.com/porotrapoliticaeducativa/2020/11/16/manifiesto-por-una-educacion-transformadora-y-emancipadora-25-principios-y-propuestas/>
- Costa, C., Cabrita, I., Martins, F., Oliveira, R., & Lopes, J. B. (2021). Qual o papel dos artefactos digitais no ensino e na aprendizagem de matemática? In V. Santos, I. Cabrita, T. Neto, M. Pinheiro & J. B. Lopes (Eds.), *Matemática com vida – Diferentes olhares sobre a tecnologia* (pp. 29-44). UA Editora.
- Csapó, B., & Funke, J. (Eds.) (2017). *The nature of problem solving: Using research to inspire 21st century learning*, Educational Research and Innovation, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264273955-en>
- Darling-Hammond, L., Barron, B., Pearson, P. D., Schoenfeld, A. H., Stage, E. K., Zimmerman, T. D., Cervetti, Gina N., Tilson, J. L., & Chen, M. (2015). *Powerful learning: What we know about teaching for understanding*. John Wiley & Sons.
- Demirel, M., & Dağyar, M. (2016). Effects of problem-based learning on attitude: A meta-analysis study. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(8), 2115-2137.
- Díaz, P., Ioannou, A., Bhagat, K. K., & Spector, J. M. (Eds.). (2019). *Learning in a digital world: perspective on interactive technologies for formal and informal education*. Springer.
- Drijvers, P., Grauwin, S., & Trouche, L. (2020). When bibliometrics met mathematics Education research: the case of instrumental orchestration. *ZDM Math. Educ.* 52(7), 1455-1469.
- Duckworth, V., & Tett, L. (2019). Transformative and emancipatory literacy to empower. *International Journal of Lifelong Education*, 38(4), 366-378.
- Freiman, V., & Tassell, J. L. (Eds.). (2018). *Creativity and technology in mathematics education*. Springer.
- Geisinger, K. F. (2016). 21st century skills: What are they and how do we assess them? *Applied Measurement in Education*, 29(4), 245-249.
- Henriksen, D., Mishra, P., & Fisser, P. (2016). Infusing creativity and technology in 21st century education: A systemic view for change. *Journal of Educational Technology & Society*, 19(3), 27-37.
- Huda, M., Haron, Z., Ripin, M. N., Hehsan, A., & Yaacob, A. B. C. (2017). Exploring innovative learning environment (ILE): Big data era. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(17), 6678-6685.
- Hussin, A. A. (2018). Education 4.0 made simple: Ideas for teaching. *International Journal of Education and Literacy Studies*, 6(3), 92-98.
- Ingram N., Hatisaru V., Grootenboer P., & Beswick K. (2020) Researching the affective domain in mathematics education. In J. Way, C. Attard, J. Anderson, J. Bobis, H. McMaster, & K. Cartwright (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2016–2019*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4269-5_7
- Kalantzis, M., Cope, B., Chan, E., & Dalley-Trim, L. (2016). *Literacies*. Cambridge University Press. (2nd edition)
- Kaware, S. S., & Sain, S. K. (2015). ICT application in education: An overview. *International Journal of Multidisciplinary Approach & Studies*, 2(1), 25-32.

- Kerrigan, J. (2018). Active learning strategies for the mathematics classroom. *College Teaching*, 66(1), 35-36.
- Kukulska-Hulme, A., Bossu, C., Charitonos, K., Coughlan, T., Deacon, A., Deane, N., Ferguson, R., Herodotou, C., Huang, C-W., Mayisela, T., Rets, I., Sargent, J., Scanlon, E., Small, J., Walji, S., Weller, M., & Whitelock, D. (2023). *Innovating Pedagogy 2023: Open University Innovation Report 11*. The Open University.
- Kurtz, G., & Peled, Y. (2016). Digital learning literacies – A validation study. *Issues in Informing Science and Information Technology*, 13, 145-158.
- Lee, S., Hong, A., & Hwang, J. (2017). ICT diffusion as a determinant of human progress. *Information Technology for Development*, 23(4), 687-705. <https://doi.org/10.1080/02681102.2017.1383874>
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education* 53, 723-735 <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Camilo, J., Silva, L., Encarnação, Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. DGE. https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/22377/1/perfil_dos_alunos.pdf
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022a). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la ESO. *BOE*, 76, de 31 marzo. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con>
- MEFP (2022b). Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *BOE*, 82, de 06 abril. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con>
- Naikoo, A. A., Thakur, S. S., Guroo, T. A., & Lone, A. A. (2018). Development of society under the modern technology – A review. *Scholedge International Journal of Business Policy & Governance*, 5(1), 1-8.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28.
- Olivares, D., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2021). Roles and characteristics of problem solving in the mathematics curriculum: A review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(7), 1079-1096.
- Pelletier, K., Robert, J., Muscanell, N., McCormack, M., Reeves, M., Arbino, N., & Grajek, S., (2023). *2023 EDUCAUSE Horizon Report®. Teaching and Learning Edition*. EDUCAUSE.
- Rahman, M. M. (2019). 21st century skill “Problem Solving”: Defining the concept. *Asian Journal of Interdisciplinary Research*, 2(1), 64-74. <https://doi.org/10.34256/ajir1917>
- Revans, R. (2017). *ABC of action learning*. Routledge.
- Salmon, G. (2019). May the fourth be with you: Creating Education 4.0. *Journal of Learning for Development*, 6(2), 95-115.
- Song, Y. (2021). A review of how class orchestration with technology has been conducted for pedagogical practices. *Educational Technology Research and Development*, 69(3), 1477-1503.
- Sternberg, R. J., Glaveanu, V., Karami, S., Kaufman, J. C., Phillipson, S. N., & Preiss, D. D. (2021). Meta-intelligence: Understanding, control, and interactivity between creative, analytical, practical, and wisdom-based approaches in problem solving. *Journal of Intelligence*, 9(2), 19.

-
- Tan, O. S. (2013). *Problem-based learning innovation: Using problems to power learning in the 21st century*. Gale Cengage Learning.
- Walker, A., Leary, H., & Hmelo-Silver, C. (Eds.). (2015). *Essential readings in problem-based learning: Exploring and extending the legacy of Howard S. Barrows*. Purdue University Press.
- Wallner, T., & Wagner, G. (2016). Academic Education 4.0. In *International Conference on Education and New Developments* (Vol. 2016, pp. 155–159). World Institute for Advanced Research and Science.
- World Bank Group (2019). *The changing nature of work*. World Bank Group
- Yacek, D. W. (2021). *The transformative classroom: Philosophical foundations and practical applications*. Routledge.

Comunicações

**FORTALECENDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM HINTS: A
ABORDAGEM DAS PERGUNTAS INTERMÉDIAS**
**EMPOWERING PROBLEM SOLVING WITH HINTS: THE INTERMEDIATE
QUESTIONS APPROACH**

Sergio Tirado-Olivares

Universidad de Castilla-La Mancha, España

sergio.tirado@uclm.es

Javier del Olmo-Muñoz

Universidad de Castilla-La Mancha, España

javier.olmo@uclm.es

Pascual D. Diago

Universitat de València, España

pascual.diago@uv.es

José Antonio González-Calero

Universidad de Castilla-La Mancha, España

jose.gonzalezcalero@uclm.es

David Arnau

Universitat de València, España

david.arnau@uv.es

Miguel Arevalillo-Herráez

Universitat de València, España

miguel.arevalillo@uv.es

Resumo: O sistema de tutoria inteligente HINTS é utilizado para investigar se a utilização de perguntas intermédias num enunciado de um problema verbal de várias etapas pode ser um método eficaz para aumentar a competência na resolução de problemas aritméticos verbais. Foi realizado um estudo quasi-experimental pré-pós com 55 alunos do quinto ano, divididos num grupo de controlo e num grupo experimental (sem e com perguntas intermédias, respetivamente). Embora ambos os grupos tenham apresentado ganhos de aprendizagem sem diferenças significativas, um estudo de caso subsequente revelou que os desafios dos alunos resultavam principalmente da integração de várias etapas num plano de resolução e não da evocação de esquemas conceptuais. Os resultados qualitativos e as verbalizações dos alunos do estudo de caso

indicaram que as perguntas intermédias podem ser fundamentais para facilitar esta integração, ajudando assim o processo de resolução. Consequentemente, a inclusão de perguntas intermédias no enunciado pode ser considerada benéfica para ajudar os alunos a navegar em tarefas complexas de resolução de problemas.

Palavras-chave: sistema de tutoria inteligente, resolução de problemas verbais, perguntas intermédias.

Abstract: The intelligent tutoring system HINTS is used to investigate whether the use of intermediate questions in the statement of a multi-step word problem can be an effective method for increasing arithmetical word problem solving competence. A pre-post quasi-experimental study was conducted with 55 fifth grade students divided into a control group and an experimental group (without and with intermediate questions, respectively). While both groups exhibited learning gains with no significant differences, a subsequent case study revealed that students' challenges primarily stemmed from integrating multiple steps in a resolution plan rather than from evoking conceptual schemes. The qualitative results and students' verbalizations from the case study indicated that intermediate questions can be instrumental in facilitating this integration, thereby aiding the resolution process. Consequently, the inclusion of intermediate questions in the statement can be deemed beneficial for supporting students in navigating complex problem-solving tasks.

Keywords: intelligent tutoring system, word problem solving, intermediate questions.

Introduction

Intelligent tutoring systems (ITS) are characterised by their power to enhance students' autonomy, which is crucial in settings when presence is constrained, such as the one resulting from COVID-19. In this study, we use HINTS (Hypergraph Intelligent Tutoring System) (González-Calero et al., 2013) for the arithmetic and algebraic solving of word problems, that stands out for its ability to provide tailored assistance and its high level of granularity (Arnau et al., 2014).

Over the last few decades, researchers have sought to shed light on the importance of mental schemes to deal with the information elements of a problem statement (Verschaffel et al., 2020). Knowing about the role of the statements' wording in the generation of a proper conceptual representation of the problem (Vicente et al., 2007), we sought to leverage the affordances of HINTS. Specifically, we explored to what extent a problem statement that includes a larger number of questions related to unknown intermediate quantities can be useful to develop students' ability to solve word problems.

Theoretical framework

This study is based on the theoretical and methodological framework provided by *local theoretical models* (Fillooy, 1990; Fillooy et al., 2008). In this framework, four interrelated components articulate the processes of teaching and learning of mathematics.

First, the competence model integrates both the knowledge about the mathematical domain put into play and the description of a mathematical sign system that is sufficiently abstract to allow the decoding of all the texts that are produced in the associated teaching-learning situations. Second, the cognitive model allows us to determine the knowledge about students based on the characterization of the strategies they use, the obstacles they encounter and the errors they make and which serves to establish proximity to the expert's knowledge. Third, the teaching model contains a representation of how teachers act and

how the sequences of activities are organized. Lastly, the communication model aims to account for the exchange of messages between subjects with varying degrees of competence in the use of the mathematical sign systems involved in the teaching and learning of mathematical knowledge.

The structure of the local theoretical models matches the components of an ITS oriented to emulate the actions of a human teacher as described in Woolf (2008). This parallelism enables an effective transfer of the knowledge produced in basic research in maths education towards practical solutions based on ITS in real educational environments.

The analysis-synthesis method (Filloy et al., 2008) can describe competence in arithmetical word problem solving. The analysis is the result of an analytical reading of the problem. This process begins with the identification of the unknown quantity asked in the statement. Next, the solver tries to establish a mathematical relationship between the requested unknown quantity and other quantities that we call antecedents. If these antecedents are known quantities, the analysis process is finished. If any antecedent is an unknown quantity (an unknown intermediate quantity), the process must be iterated until all the antecedents are known. In order to establish the relationships between quantities in the analysis process, the solvers rely on a finite set of conceptual schemes (Nesher & HersHKovitz, 1994).

The synthesis process consists of undoing the path described by the analysis by executing arithmetic operations that allow the solver to answer the question in the statement. However, as regards the cognitive model, carrying out a complete analysis before synthesis is a complex task for primary school students and they tend either to carry out partial analysis-synthesis (Filloy et al., 2008) or synthesis processes, without a defined target, supported by known quantities that can be integrated into conceptual schemes (García-Moreno, 2021).

Objectives

With this theoretical framework in consideration, the objective of this study is to investigate whether the use of intermediate questions that guide the analytical reading of the problem can be an effective scaffolding method for teaching arithmetical word problem solving. In this way, the process would be reduced to partial analysis-synthesis processes and the difficulty associated with a complete analysis-synthesis process would disappear. In addition, the study aims to analyse how students articulate the presence of intermediate unknown quantities in the statement to organise the solving process.

Method

Design and participants

We conducted a quasi-experimental study using a mixed methodology. The participants, 55 fifth-grade students from the Spanish education system, were divided in two groups. All participants attended the same regular urban school with a medium to high socioeconomic status, where, according to their teachers, the student population did not show significant differences in terms of mathematical background or socioeconomic levels that should be taken into consideration. The primary language used for instruction at the school is Spanish, and it was also the main language of instruction in the research.

The first group was randomly chosen as the intervention group (hereinafter, IG). IG was composed of 27 students (8 males and 19 females). On the other hand, the second or control group (hereinafter, CG) was composed of 28 students (8 males and 20 females).

In addition, the study complied with the American Psychological Association ethical standards in the treatment of the samples.

Procedure

Both groups followed a similar procedure during the study that lasted eight weeks (1 session per week). The experimental phase was divided into three different stages. First, students of both groups completed the same paper-and-pencil test (pre-test) in order to evaluate their initial level in the resolution of word problems. This test was composed of 10 problems of different difficulty adapted to the educational level of the participants. In addition, in this session, the HINTS platform was presented to the students.

Then, over the course of six sessions, students used HINTS to autonomously solve word problems with a similar level of difficulty to those from the pre-test. However, while the statements of the problems presented to the CG only asked for the final unknown quantity, statements in IG also included questions related to intermediate unknown quantities. Figure 1 (translated into English) shows an example of a problem faced by CG whose statement asks only for the final unknown quantity. In contrast, the version for IG also included the questions “(a) How many parts are there in all?” and “(b) How much money corresponds to each part?”, asking for the intermediate unknown quantities, and (c) the same question about the final quantity.

Finally, in the last session, both groups took another paper-and-pencil test (post-test). The problems of this test were equivalent to the pre-test ones, and only the final unknown question was presented.

In addition, days later a case study was carried out with 5 of the CG students who had had the most difficulties during the post-test. For this case study, we selected three of the problems with the highest failure rate in the post-test. Then, we asked the students to solve those problems that they had not been able to solve during the post-test, but this time they would do it with HINTS. They first tried the short version of the problem (with only the final question), and if they were not able to solve it, they tried the long version (with questions for the intermediate quantities). As can be seen in Tirado-Olivares et al. (2021), from the total of 11 combinations problem-student presented, the students were able to solve 5 of them in their short version, another 5 problems were only possible to be solved in their long version, and only 1 student could not solve 1 problem in any of its versions.

It is important to point out that this study was conducted during the COVID-19 pandemic. For this reason, the classroom dynamics were modified as little as possible: students always worked autonomously with their own electronic devices under the supervision of the teachers, while researchers supervised the intervention with HINTS in regular communication with the teachers.

After the intervention, all the data collected were exported to a database for their analysis using SPSS version 24 software. Then, the pre- and post-test scores of both groups (each problem was scored 1 if its resolution was correct, or 0 if it was not) were compared. For this purpose, different descriptive and inferential statistical analyses were carried out. All of them with a significant level of .05.

The intelligent tutoring system

During the experimental phase, the students worked individually using the ITS HINTS (Arnau et al., 2014). HINTS is able to supervise both arithmetical and algebraic ways when solving word problems. Hence, HINTS can infer the solving path followed by the

user when solving a word problem and provide adaptive feedback in natural language. The teaching and communication models are determined by the configuration of HINTS, which in turn was adjusted according to the objectives of the investigation.

Specifically, in this study, on-demand aids were deactivated and the ITS only monitored and validated the student's actions. This means that the students did not receive information about what they were supposed to do nor about the reason for their errors. They only received confirmation of the validity or invalidity of the arithmetic operations they posed. This deviates from the conventional conditions in which word problems are tackled in a school setting. Yet, from a research standpoint, this deviation provides new avenues for examining student performance. Specifically, it allows observation of how students adjust their confidence and revise their strategies when the system indicates an error in their actions.

The students interact with HINTS through a button panel that includes the four basic operations and the values of the known quantities that could be used in any of the possible solving paths. When an operation proposed by the solver allows calculating a hitherto unknown quantity, HINTS generates a new button with the new value and displays it in a list with all the calculated quantities. When the solver action is associated with an incorrect resolution path (the action does not enable the calculation of an unknown quantity), the ITS provides an error message indicating that the operation is incorrect. Given the configuration of HINTS in this study, no further information is offered.

The word problem statement is presented in Spanish to the user in an upper panel of the ITS interface (see Figure 1 for the English translated interface). The only difference between the teaching processes is that, in the statements provided by HINTS, students are either asked or not asked questions about a sequence of intermediate unknown quantities that would come up with a solution path.

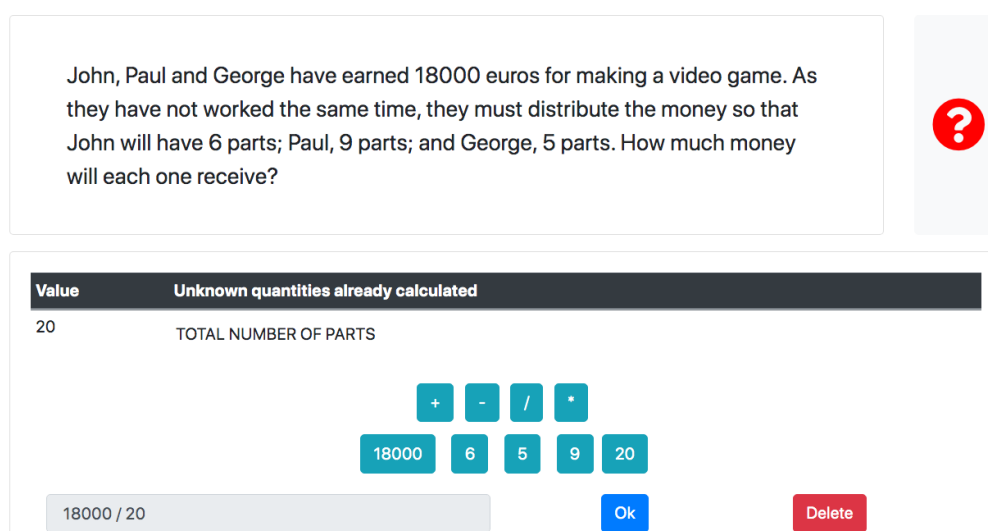


Figure 1. Example of solving a word problem with HINTS.

Results

As evidenced by the descriptive statistical data of the pre- and post-test shown in Table 1, both groups improved their performance after the intervention. These results suggest that students' autonomous work using HINTS helped them to improve their problem-solving performance.

Table 1. Descriptive data obtained in pre-test and post-test by both groups.

Test	Group	N	Mean	SD
Pre-test	CG	28	2.7	2.38
	IG	27	2.82	2.42
Post-test	CG	28	3.44	2.76
	IG	27	3.5	2.67

Source: Own elaboration.

However, an inferential analysis is necessary to compare these results. First, an independent t-test confirmed that students' prior level was comparable between group before the intervention ($t(1,52) = -.34$; $p = .7342$; $d = 0.09$). Next, the same statistical test was used to compare students' abilities after the experimental phase. Again, no statistically significant differences were found between groups ($t(1,53) = -.08$; $p = .9398$; $d = 0.02$). However, an analysis of learning gains revealed a statistically significant improvement between pre- and post-test in both groups (IG: $t(1,26) = -2.39$; $p = .0241$; $d = 0.28$; CG: $t(1,26) = -2.46$; $p = .0211$; $d = 0.28$).

The case study of Lucy

Lucy (a fictitious name to preserve student confidentiality) –one of the five selected students– was not able to solve, in the post-test, none of the three problems selected for the case study. The following excerpt shows the solving process that she followed during the case study for the problem shown in Figure 1 in its short statement version, and then in its long statement version.

Lucy (Reads short version statement) (15" silence)

Interviewer – What are you thinking about?

Lucy – Let's see, what I did in the other (post-test), which I didn't finish because I didn't get it, but I think it's wrong, is to divide this quantity (she points to 18000 button) between each of these (6, 9 and 5).

Interviewer – Try it. Why did you want to do it like that?

Lucy – Because those would be the parts corresponding to each one, but then I added it up and it didn't give me that. (...) For example, divided by 6 parts, which would be John's parts... (she inputs 18000/6, and HINTS shows the error message 'Not correct').

Interviewer – Can you think of another way to solve it?

Lucy – (25" silence) I don't know if it's done this way, but the only way I can think of is to add these three numbers (she points to buttons 6, 5 and 9) (...) to see the total (she inputs 9+5+6, and HINTS creates a '20' button representing 'Total number of parts'). Ok, so... (20" silence), I would do 18000/20 (she inputs 18000/20, and HINTS creates a '900' button representing "Money corresponding to a part").

From this moment, after one minute thinking, the student is unable to solve the problem and the researcher proposes that she moves on to the long version of the problem.

Lucy – (Reads long version statement) (5" silence). (...) The total of parts was 20, because I have added all the parts (she points to 6, 5 and 9). So, I would already have a question (she refers to question 'a', see Procedure

section) solved (she inputs $9+5+6$, and HINTS creates a '20' button representing 'Total number of parts').

Interviewer – Effectively, what you said.

Lucy – And, how much money corresponds to each part (question 'b'), well, then, 18000 divided by 20, which I've done before (she inputs $18000/20$, and HINTS creates a '900' button representing 'Money that corresponds to a part'). And then, how much money should each of them receive (question 'c' about the final unknown quantity). (8" silence) Wow!

Interviewer – What happened, why do you nod?

Lucy – Yes. I understand it, but I'm thinking how to do it (5" silence), because there would be 900, but in the 20 parts, but each one has more than one part.

Interviewer – So, what will we have to do?

Lucy – (10" silence) 900 divided by... each of these parts? (She points to 6, 5 and 9) (...) (She inputs $900/6$, and HINTS shows the error message 'Not correct') No, (10" silence) I mean... no, multiplying.

Interviewer – Why multiplying?

Lucy – Because, if there are 6 parts, I mean, he has... (5" silence) (She inputs $900*6$, and HINTS creates a '5400' button representing 'Money corresponding to John')

After this, she quickly calculates the quantities 'Money corresponding to George' and 'Money corresponding to Paul', and HINTS reports that she has solved the problem.

Interviewer – Why do you think you have been able to solve the problem now?

Lucy – As it gives you more hints. It's like it tells you what to do and you already know how to do it. Because sometimes, you know how it's done, but you don't know... you know what the result would be like, but you don't know how the process is done.

As can be seen from the transcript, the student is hesitant during the first resolution and, although she manages to calculate two quantities, she cannot reach the final solution. However, in the second resolution, the student recalculates the two quantities from the previous resolution (which correspond to questions *a* and *b* of the new statement), and then she realizes that the last step of the problem corresponds to the last question of the statement. Then, although she identifies correctly the quantities involved in the relationship, she initially relates them with an incorrect operation (division). After the error message shown by HINTS, she realises that the operation must be another (multiplication), as she explains.

The case study of Albert

Albert (fictitious name) was another student who did not solve the problems selected for the case study in the post-test. Next, we present the problem-solving process for the problem shown in Figure 1. Initially, he faced the short version of the problem:

Albert – (Reads the statement) Six parts of 18,000. I think it would be... 18,000 divided by 6. (He divides 18000 by 6: and HINTS shows the error

message 'Not correct'). Okay. (Rereads the statement). (Places the cursor on 18000). (Remains silent for 15 seconds).

Interviewer – Tell us what you're thinking, Albert, please.

Albert – Okay. I'm thinking of dividing 18,000 by 6, 18,000 by 9, and 18,000 by 5, but it doesn't work. I know it can't be addition because, I think... I don't know how it could be done. Maybe subtraction. And I think it's either dividing or multiplying. I don't know for sure. (15 seconds of silence). Ah (Sighs). I don't know.

Interviewer – You don't know?

Albert – No.

Interviewer – Do you want to skip it?

Albert – (Thinks for 15 seconds). (Rereads the problem). Yes, I want to skip it.

Since the student expresses an inability to make progress in solving the problem and confirms their desire to give up, the researcher chooses to provide them with the long version of the statement:

Interviewer – Alright. What we're going to do, Albert, is you're going to read this problem out loud.

Albert – Yes.

Interviewer – And then you're going to try to solve it again.

Albert – (Reads the long version of the statement, he pauses at the first question: 'How many parts are there in all?') Well, I would say you have to add them all up. (Repeats the question) 'How many parts are there in all?' (he inputs $9+5+6$, and HINTS creates a '20' button representing 'Total number of parts'). Okay. (Reads the second question in the problem). How much money corresponds to each part? (Repeats the question) How much money corresponds to each part? (10" silence) How much money corresponds to each part? I'm going to divide 18000 by 20 (he inputs $18000/20$, and HINTS creates a '900' button representing 'Money that corresponds to a part'). It's 900, which is the money for one part. (He inputs $900*6$, and HINTS creates a '5400' button representing 'Money corresponding to John'). 900 times 9 (He calculates the quantity 'Money corresponding to George' correctly) and 900 times 5 (he inputs $900*5$)...

Interviewer – Please, explain, Albert, what you're doing.

Albert – Yes. What I did was: I added up $6 + 9 + 5$, which gave me 20. Then, 'How much money corresponds to each part?' I divided 18,000 by 20, and it gave me 900. I then multiplied it by 6 and each one, and... (He presses "Accept" and calculates the quantity 'Money corresponding to Paul').

(HINTS displays a message indicating that the problem has been successfully solved.)

Albert – I'm done.

Interviewer – You're done.

Albert – Yes.

Interviewer – Very well. You've solved all the problems. I'm just going to ask you a couple of questions to finish.

Albert – Ok.

In the previous excerpt, we can observe that the student had no difficulty in solving the long version of the problem, and the resolution was very quick, without displaying any signs of doubt in Albert's performance. The interviewer, as a conclusion to the case study, presents some questions to the student regarding their experience with HINTS.

Interviewer – What did you think about working with HINTS?

Albert – Better because it asks you the questions... that is, the questions little by little and not all at once, not to overthink.

Interviewer – But I mean in general.

Albert – In general... (he seems to hesitate).

Interviewer – All these days you've been working with HINTS.

Albert – The help because I think we had it disabled, the part on the right. But the other part seems very good to me, there's nothing I didn't like.

The student refers to the help functionality of HINTS, which was not enabled for users in this study for research purposes.

Interviewer – The last problem you solved, the one about videogames, you couldn't do it right on paper, and at the beginning today, you couldn't either, but you eventually solved it. Why do you think you managed to solve it in the end?

Albert – I think I was able to solve it in the end because, with each thing it gave me, I thought about it, reasoned it logically. In the end, I think it just clicked.

Interviewer – What do you mean by 'each thing it gave you'?

Albert – For example, when it asked me, "How many parts are there in total?" I had to add them all up there. In contrast, in the other way, it just asked me one question, and I wouldn't have known it without having three questions to go step by step.

Interviewer – Very well. Do you think you could now solve the problem if they only gave you one question?

Albert – Yes, I believe so.

This case study highlights how transitioning to the longer version acts as a facilitator in the problem-solving process. In this case, the student, unable to make progress with the short version of the statement, quickly and confidently solves the problem when presented with the structured set of questions in the longer version.

Discussion and conclusions

The comparison of the pre- and post-tests indicates that there is a significant improvement in both groups in terms of their ability to solve word problems arithmetically. This effect

could be grounded on the common part of the instruction received in both groups. Namely, the effect of solving problems in HINTS, where immediate validation is provided at each step.

In this sense, we can conclude that the use of HINTS could increase the competence of the participants to carry out one-step analytical processes supported by the use of conceptual schemes. On the other hand, the non-existence of differences when comparing learning scores between the intervention and control groups would lead us to conclude that, in this study, the inclusion of intermediate unknowns in the statement has not resulted in a higher level of students' ability compared to a traditional version of the statements.

However, from the qualitative results of the case study and from the verbalizations of the cases presented, it could be concluded that the inquiry of unknown intermediate quantities can represent an important help during the resolution process. In this sense, we have presented evidence of two instances in which the longer version has enabled problem resolution. This indicates that students do not encounter difficulties in identifying and applying the conceptual structures of each stage in isolation. In the case of Albert, who could not calculate any intermediate values in the short version, it can be observed how the identification in the long version that it is necessary to start from an intermediate quantity (the total number of parts) is sufficient to trigger a complete and correct resolution.

In the case of Lucy, we consider it important to focus attention on the fact that during the case study, she had determined all the intermediate unknown quantities in the short version of the statement. That is, the long version of the statement, which she solved correctly, does not, in principle, provide her with any information that she did not already have at the time of abandoning the first resolution. Possibly the student found felt more confident in the second resolution because not only does she received feedback on the validity of her actions, but she also understood that there were no intermediate unknowns left to calculate. This might have allowed her to focus on determining the remaining unknown quantity from the certainty that the determination of the intermediate unknowns had been completed.

In summary, the case study confirms that students may encounter difficulties when it comes to carrying out comprehensive analysis-synthesis processes, even though they are perfectly capable of using conceptual frameworks appropriately in partial analysis-synthesis processes.

Acknowledgements

Work supported by Spanish Ministry of Science, Innovation and Universities under project PGC2018-096463-B-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and FEDER; by Valencian Regional Government (Spain) under project AICO/2021/019; by Castilla-La Mancha Regional Administration under project SBPLY/19/180501/000278; and by the Ministry of Education, Culture and Sports of Spain under grants FPU20/02375 and FPU19/03857.

References

Arnau, D., Arevalillo-Herraez, M., & Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *IEEE*

-
- Transactions on Learning Technologies*, 7(2), 155-164. <https://doi.org/10.1109/TLT.2014.2307306>
- Filloy, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. PII 1-PII 33). PME.
- Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Springer.
- García-Moreno, M. Á. (2021). *Estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la resolución aritmética de problemas usando un sistema tutorial inteligente*. Universitat de València.
- González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L., & Arevalillo-Herráez, M. (2013). Difficulties in the construction of equations when solving word problems using an intelligent tutoring system. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353-360). PME.
- Nesher, P., & HersHKovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 1-23.
- Tirado-Olivares, S., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D., & Arevalillo-Herráez, M. (2021). “No sé hacerlo, pregúntame más”. Una experiencia de resolución de problemas verbales con HINTS. In P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 681). SEIEM.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM*, 52(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, 77(4), 829-848. <https://doi.org/10.1348/000709907X178200>
- Woolf, B. P. (2008). *Building intelligent interactive tutors, student-centered strategies for revolutionizing e-learning*. Morgan Kaufmann Publishers.

¿QUANTOS AÑOS TIENE LA BALLENA JOROBADA? HOW OLD IS THE HUMPBACK WHALE?

Miguel R. Wilhelmi

Universidad Pública de Navarra, España

miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Aitzol Lasa

Universidad Pública de Navarra, España

aitzol.lasa@unavarra.es

Cecilia Gaita

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

cgaita@pucp.edu.pe

Cintya Gonzales

Universidad Pública de Navarra, España

gonzales.158370@e.unavarra.es

Francisco Ugarte

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

fugarte@pucp.edu.pe

Resumen: En los inviernos boreales y australes, las ballenas jorobadas migran hacia aguas más cálidas en los trópicos. Como todos los grandes mamíferos marinos, han sido objeto de estudios científicos y se dispone de información fiable sobre sus características biológicas y sus hábitos. En este trabajo se presentan dos actividades cuyo objetivo es el análisis de la longitud de una ballena en función de su edad. Las actividades precisan establecer conexiones entre contenidos (proporcionalidad, media aritmética, modelos funcionales), permiten resaltar la importancia de las matemáticas en proyectos STEM y muestran un uso pertinente de GeoGebra (GGB) en problemas de modelización. El desarrollo de las situaciones permite responder a cuestiones “no matemáticas” tales como “¿cuántos años tiene una ballena?”, la cual nada junto a otra o al lado de un kayak. Así, en estas situaciones se precisa combinar conocimientos matemáticos y contextuales. Por ello, el objetivo principal de esta investigación es mostrar cómo estos conocimientos, así como algunos modelos matemáticos ad hoc previamente establecidos de forma experimental, permiten interpretar una situación real y cómo la tecnología contribuye para dicha interpretación. Se concluye con algunas implicaciones y recomendaciones para la enseñanza.

Palabras clave: conexiones matemáticas, proyectos STEM, modelización, GeoGebra (GGB), ballenas jorobadas.

Abstract: In the boreal and austral winters, humpback whales migrate to warmer waters in the tropics. Like all large marine mammals, they are a scientific study-object and reliable information is available on their biological characteristics and habits. In this work, we present two activities with the objective of analysing the length of a whale as a function of its age. The activities aim to establish connections between contents (proportionality, arithmetic mean, functional models), highlight the importance of mathematics in STEM projects and show a relevant use of GeoGebra (GGB) in modelling problems. The development of the situations makes it possible to answer “non-mathematical” questions such as “how old is a whale?”, which swims next to another whale or next to a kayak. Thus, in these situations it is necessary to combine mathematical and contextual knowledge. Therefore, the main objective of this research is to show how this knowledge, as well as previously established mathematical models, allow the interpretation of a real situation and how technology contributes to this interpretation. We conclude with some implications and recommendations for teaching.

Keywords: mathematical connections, STEM projects, modelling, GeoGebra (GGB), humpback whales.

Introducción

En los currículos actuales se indica con claridad que las actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben tener componentes de realidad y utilidad, siendo necesario equilibrar lo cotidiano y lo académico (Arcadi, 2006). Es decir, los estudiantes deben percibir la conexión que tienen las ideas matemáticas trabajadas en el contexto escolar con otras disciplinas científicas, con otros ámbitos académicos, con la sociedad, la naturaleza y el entorno.

En países tan distantes como Perú (Océano Pacífico), España y Portugal (Océano Atlántico) o Australia (Océano Índico), existen realidades naturales similares cercanas al estudiante que pueden servir de vía de acceso a contenidos matemáticos relevantes en los currículos de estos países. De esta forma, tales situaciones no solo pueden ser aplicadas en contextos educativos diversos (*valor docente*), sino que pueden generar datos experimentales sobre el funcionamiento didáctico con independencia de dichos contextos (*especificidad de la dimensión epistemológica en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas*). Con otras palabras, se obtiene apoyo experimental a la *replicabilidad* de tales situaciones (*valor científico*).

Una tal situación es el caso del avistamiento de delfines o ballenas, puesto que el estudio de estos mamíferos acuáticos puede tener un interés intrínseco para los estudiantes de las diversas latitudes y contextos educativos, que en los inviernos boreales o australes pueden observar cómo estos animales migran a aguas más cálidas huyendo de los crudos inviernos ártico y antártico y buscando aguas que aseguren el alimento y garanticen condiciones adecuadas para la procreación.

En este trabajo se muestra cómo esta realidad de los grandes mamíferos acuáticos, aparentemente desconectada de las matemáticas, puede servir de punto de partida para la actividad matemática escolar. De hecho, se trata de una actividad que aúna distintos ámbitos científicos (biología, química), el uso de tecnología (software dinámico), conocimientos de ingeniería (modelización mecánica) y matemáticas (modelización matemática y aproximación polinómica).

Así, brevemente, el objetivo principal de esta investigación es mostrar cómo conocimientos contextuales, así como modelos matemáticos previamente establecidos

(en este caso basados en datos experimentales), permiten interpretar una situación real. Este objetivo se concreta en una situación contextualizada (sección 4) que permite establecer conexiones matemáticas entre contenidos:

- *Proporcionalidad*, para el desarrollo del sentido aritmético (aunque puede ser modelizado por la función lineal).
- *Media aritmética* como estimación mejor ajustada, para el desarrollo del sentido estocástico.
- *Modelos funcionales* para la estimación y la predicción, propios del sentido algebraico.

Además, el progreso en la situación está mediado por:

- Relevancia de las matemáticas en proyectos STEM.
- Importancia de la competencia en el uso de la tecnología como instrumento para la resolución de problemas. En este caso, se utiliza Excel u otra hoja de cálculo y GeoGebra (GGB) u otra interfaz gráfica.

Para alcanzar estos objetivos (establecimiento de conexiones matemáticas, desarrollo de proyectos STEM y uso pertinente de la tecnología), en la sección 2 se establece un marco teórico para los proyectos STEM, se incide en la importancia de la tecnología en este contexto y se justifica la necesidad de establecer conexiones entre objetos, procesos y significados de los diversos ámbitos matemáticos. En la sección 3 se describen cuatro modelos para estimar la edad de una ballena; en particular, de las ballenas jorobadas. Los tres primeros modelos permiten estimar la relación edad-longitud tras el parto, mientras que el cuarto modeliza el tamaño en el periodo de gestación. En la sección 4, se describe el método de enseñanza que condiciona el método de investigación y los instrumentos de toma de resultados. En la sección 5 se muestra una situación para el uso de estos modelos, que permite establecer conexiones matemáticas. Finalmente, en la sección 6 se señalan, a modo de conclusión, unas implicaciones para la enseñanza.

Proyectos STEM, uso de la tecnología y conexiones matemáticas

Los contextos STEM ofrecen una serie de ventajas en el diseño de situaciones de enseñanza y aprendizaje. En primer lugar, un proyecto que integra ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas cumple con el *principio del currículum* (NCTM, 2000), y, además, cumple un rol de *medio antagonista* dentro de una *situación didáctica* (Brousseau, 2002). Por otra parte, el uso de software en estas propuestas (por ejemplo, el empleo de *geometría dinámica*), ayuda a los estudiantes en su actividad matemática (Lasa y Wilhelmi, 2013). Una actividad que respete los principios STEM refuerza los desafíos, la invención, la autonomía y la alfabetización tecnológica (Cruz y Lupiáñez, 2019), todos ellos elementos de una situación didáctica.

Por otro lado, en muchas propuestas STEM, se observa que el contenido matemático que incluyen es muy básico y utilitario. Además, este contenido sobre todo se relaciona con la medida de magnitudes, la interpretación estadística de números y el uso de lenguaje geométrico fundamental para describir un diseño o un modelo (Lasa et al., 2020). Por ello, en estas propuestas los estudiantes no requieren de un conocimiento previo de matemáticas complejas para hacer frente a la actividad STEM. Sin embargo, las actividades suelen “encerrar” situaciones didácticas potenciales, en las que los estudiantes ponen a prueba sus capacidades personales de resolución de problemas. De hecho, en muchas ocasiones el docente puede hacer uso de estas situaciones potenciales para

desarrollar el contenido aritmético, algebraico o funcional implícito en la actividad, y, entonces, formalizar con los estudiantes su significado institucional (Godino et al., 2015). Además, Lasa et al. (2022b) muestran cómo la formalización del contenido matemático se puede mejorar con la integración de un modelo dinámico y la implementación del método científico en un laboratorio tecnológico.

En lo que respecta a los principios del NCTM, cabe resaltar aquellos que ponen el foco en el uso de tecnologías y en las conexiones matemáticas. En el resumen ejecutivo sobre los principios y estándares para las Matemáticas escolares (NCTM, 2023) se establece el principio de *tecnología* y el proceso estándar de *conexiones matemáticas*.

Principio: Tecnología. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el aprendizaje de los alumnos. Los alumnos pueden desarrollar una comprensión más profunda de las matemáticas con el uso adecuado de la tecnología. La tecnología puede ayudar a los alumnos a investigar en todas las áreas de las matemáticas y permitirles centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué deben aprender los alumnos de matemáticas y cuál es la mejor manera de aprenderlas. (NCTM, 2023, p. 3)

Proceso estándar: Conexiones. Las matemáticas no son una colección de capítulos o estándares separados, aunque a menudo se dividan y se presenten de esta manera. Más bien, las matemáticas son un campo de estudio integrado. Cuando los alumnos conectan las ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera, y llegan a ver las matemáticas como un todo coherente. Ven conexiones matemáticas en la rica interacción entre temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras materias y en sus propios intereses y experiencias. Gracias a una enseñanza que hace hincapié en la interrelación de las ideas matemáticas, los alumnos aprenden no sólo matemáticas, sino también su utilidad. (NCTM, 2023, p. 4)

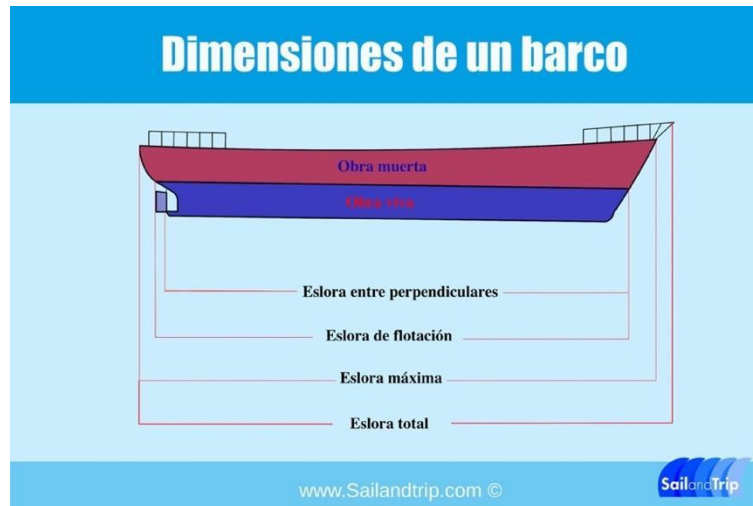
En este contexto STEM, que pone énfasis tanto en las conexiones matemáticas como en el uso de la tecnología, se diseña la actividad “¿Cuántos años tiene la ballena jorobada?” (sección 4). Antes, en la sección 3, se muestran diversos modelos que relacionan edad y longitud en los cetáceos.

Modelos para estimar la edad de una ballena según su longitud

Boye et al. (2020) analizan diversos modelos para estimar la edad de una ballena jorobada mediante diversos métodos: mecánico, biológico y químico.

Modelo Mecánico

Este modelo está basado en un principio mecánico originariamente utilizado para determinar la “pesadez” de un barco, que consiste en establecer una ratio entre el volumen de agua desalojada y la longitud de eslora de flotación (Figura 1).



Fuente: Sailandtrip (2014)

Figura 1. Dimensiones de un barco.

Este método mecánico utiliza el cálculo de la ratio desplazamiento-eslora de flotación (D/L, del inglés, *displacement-length ratio*).

La relación desplazamiento-eslora (D/L) es una expresión adimensional del peso de una embarcación en relación con su eslora en flotación. La relación D/L se calcula dividiendo el desplazamiento de una embarcación en toneladas largas (2.240 libras) por una centésima parte de la eslora de flotación (en pies) al cubo. Como el desplazamiento en toneladas largas puede expresarse como un volumen (pies cúbicos de agua de mar), y como la longitud al cubo también es volumétrica, el resultado de la fórmula D/L es adimensional, es decir, ya no está ligado a un tamaño físico concreto. (Paris, 2018)

Así, Boye et al. (2020, p.2) señalan que la edad de las ballenas jorobadas se puede calcular mediante la ecuación:

$$A = 353,85X - 19,06$$

Donde A es la edad en años y X se calcula mediante la fórmula:

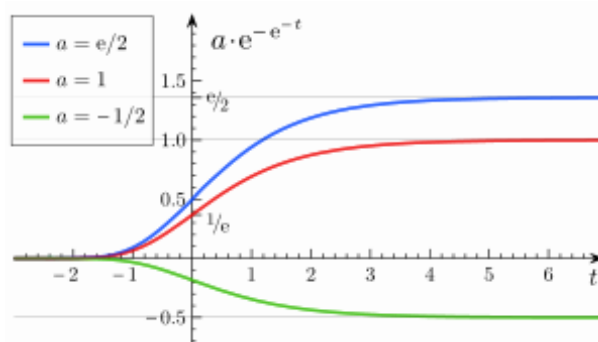
$$X = \ln \left(\frac{1 + D/L}{1 - D/L} \right)$$

Esta fórmula da un error de entre 1 y 3 años, por defecto o por exceso, siendo posible calcular el error estándar de A mediante la fórmula:

$$SE = \sqrt{938,1(X - 0,05749)^2 + 57,70}$$

Modelo biológico

Este modelo está basado en la función de crecimiento de Gompertz, de aplicación en diversos campos y, en particular, no específica para la modelización de la edad de las ballenas. Así, por ejemplo, Casas et al. (2010) aplican esta función al crecimiento de los cerdos en condiciones comerciales de producción y Martínez et al. (2010) reflexionan sobre su utilidad para estudiar el crecimiento de los animales en general. En la Figura 2 se muestra la función, donde se aprecia que el parámetro “a” es una asíntota horizontal.



Fuente: Hmong (2023)

Figura 2. Función de crecimiento de Gompertz.

En general, la función de crecimiento de Gompertz se expresa mediante:

$$f(t) = a e^{-b e^{-ct}}$$

Donde:

- e es el número de Euler ($e = 2,71828\dots$)
- a es una asíntota horizontal, ya que: $(a e^{-b e^{-ct}}) = a e^0 = a$.
- b representa un desplazamiento horizontal de la gráfica (hacia la izquierda o derecha). Así, por ejemplo, si $b = \ln(2)$, $f(0) = a/2$.
- c establece la tasa de crecimiento.

Así, según Boye et al. (2020, p. 2) en el caso de las ballenas jorobadas se tiene la siguiente fórmula:

$$Longitud = a e^{-\frac{\mu e}{a(\lambda - edad) + 1}}$$

Donde:

- a es la longitud máxima de las ballenas jorobadas.
- $\lceil$ es la pendiente máxima de la curva.
- $\lfloor$ está relacionada con la fase de retraso (por ejemplo, la ubicación de la pendiente máxima a lo largo del eje temporal).

Este modelo, es decir el valor de los parámetros a , μ , λ , se determinan experimentalmente.

Modelo químico

Este modelo está basado en la estimación de la edad por técnicas de análisis químico de los dientes mediante racemización del ácido aspártico (AAR; del inglés, *Aspartic Acid Racemization*). La AAR es una reacción química de elementos orgánicos. Esta técnica se ha utilizado también en odontología forense, tanto para la identificación humana como para la estimación de la edad dental (Teixeira et al., 2020).

La AAR es un proceso complejo, sujeto a otros procesos químicos más generales, como la ecuación de Arrhenius, que exceden la formación de la educación preuniversitaria y, por lo tanto, no es susceptible de ser abordado en un proyecto STEM en Educación Secundaria (Domènech et al., 2019; Lasa et al., 2020; Lasa et al., 2022a).

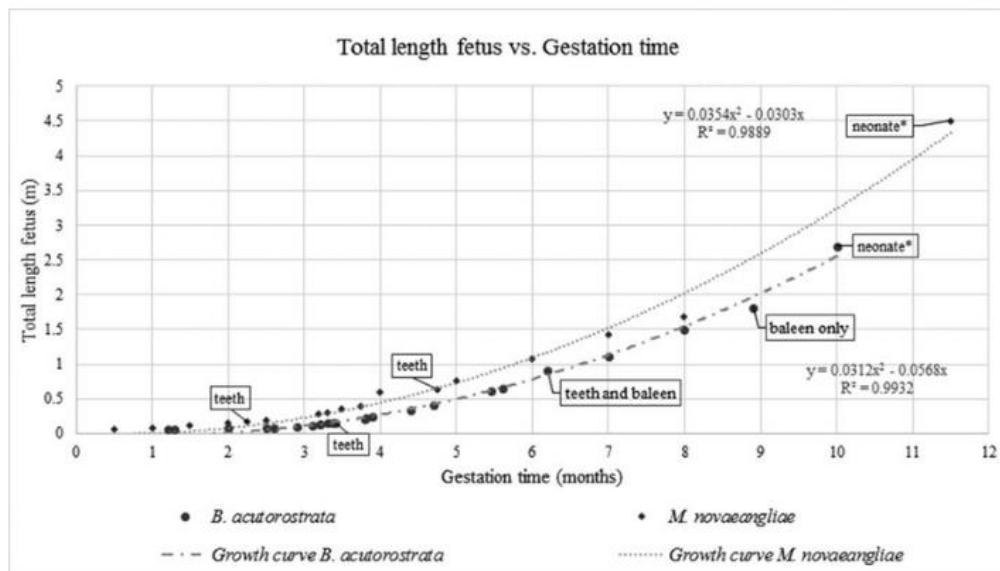
Por ello, las actividades que se pueden proponer en las etapas preuniversitarias se deben centrar en los otros dos modelos (ratio desplazamiento-eslora de flotación (D/L), $A = 353,85 \cdot \ln\left(\frac{1+D/L}{1-D/L}\right) - 19,06$ y función de crecimiento de Gompertz, $f(t) = ae^{-be^{-ct}}$). Estos modelos, si bien utilizan las funciones logaritmo y exponencial, que forman parte de los saberes básicos en el currículo (MEFP, 2022a, 2022b), lo hacen en funciones compuestas complejas en contextos no cotidianos, lo que precisa de estrategias de enseñanza adecuadas, es decir, de una *transposición didáctica* (Chevallard, 1991) pertinente. Por otro lado, tras el desarrollo de la actividad, es deseable discutir con los estudiantes la validez y alcance del modelo utilizado, incidiendo tanto en la propia idea de modelo como en la construcción del edificio matemático y la necesidad de establecer conexiones intra-matemáticas y extra-matemáticas. Así, se podrían abordar cuestiones tales como:

- 1) ¿Qué es modelizar? Modelización para estimar y para la toma de decisiones.
- 2) ¿El modelo es único? Diferentes modelos matemáticos y búsqueda del equilibrio entre la precisión de la estimación y la complejidad en el cálculo o la toma de datos.
- 3) Relación entre datos empíricos y modelos teóricos.

La situación diseñada (sección 4) se centra en la función Gompertz.

Modelo de crecimiento en el periodo de gestación

Los tres modelos descritos en las secciones anteriores sirven para estimar la longitud de la ballena ya nacida, pero no para la estimación del crecimiento en el periodo de gestación. Berta et al. (2016), apoyándose en datos empíricos, establecen que un modelo de regresión parabólico para el crecimiento (Figura 3).



Fuente: Berta et al. (2016, p. 1274)

Figura 3. Modelo de crecimiento de las ballenas jorobadas en gestación.

Este modelo parabólico de regresión establecido por Berta et al. (2016) es pues:

$$y = 0.0354x^2 - 0.0303x, \text{ con } x \in (0, 11.5)$$

Los autores garantizan la calidad de este modelo ya que el coeficiente de determinación es $R^2 = 0.9889$, lo que asegura buenas predicciones dado que la proporción de variación de los resultados explicada por este modelo es muy buena. En la Figura 3 se muestra el modelo y la nube de datos ajustados.

Si se desea unir esta función de crecimiento en la gestación con la función de crecimiento tras el parto, se puede optar trabajar con la función “trasladada”, que asume como “origen” o “momento 0” el nacimiento:

$$y = 0.0354(x + 11.5)^2 - 0.0303(x + 11.5), \text{ con } x \in (-11.5, 0)$$

Es decir:

$$y = 0.0354x^2 + 0.7839x + 4.3332, \text{ con } x \in (-11.5, 0)$$

Método instruccional y método de investigación

El proceso instruccional es *dialógico-colaborativo* (Godino et al., 2019). Esto quiere decir que la trayectoria didáctica combina momentos de diferente naturaleza:

- *Momentos con un componente adidáctico esencial*, en los que los estudiantes se adaptan de forma individual a partir de sus conocimientos previos a la situación o mediante interacción con sus pares iguales.
- *Momentos expositivo-regulativos*, en los que el profesorado da pautas explícitas al grupo-clase en relación con conocimientos, técnicas u objetivos de aprendizaje.
- *Momentos dialógicos*, en los que estudiantes y docente discuten un tema y construyen de forma conjunta un conocimiento, sintetizan un proceso de estudio o determinan cuál debe ser el siguiente paso o cómo llevarlo a cabo.

Godino et al. (2019) identifican ciertos aspectos que requieren una intervención más directiva, expositiva o transmisiva por parte del docente y otros en los que la actividad de los estudiantes se puede desarrollar de forma relativamente autónoma bajo los presupuestos de un aprendizaje constructivista. Esta combinación de momentos busca optimizar el proceso de estudio: maximizar los aprendizajes de conocimientos tanto técnicos como discursivos y minimizar los recursos temporales.

The analysis carried out support the affirmation that the optimization of learning implies a dialectic and complex combination between the roles of the teacher as instructor (transmitting) and facilitator (coach) and the roles of the student as knowledge builder and active receiver of significant information. (Godino et al., 2019, p. 158)

En esta investigación, el control del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollado según este modelo *dialógico-colaborativo* no se realiza mediante cuestionarios o pruebas pre-test o post-test, sino mediante el análisis del propio proceso comparado con la previsión de su funcionamiento. Con otras palabras, el control se sigue de una *ingeniería didáctica* (Godino et al., 2014), que contrasta el *análisis a priori* con el *análisis a posteriori*.

Esta elección del método de investigación se basa en que la experimentación se realiza con una *muestra no aleatoria*, seleccionada de forma *intencional* en el contexto de la

formación inicial del profesorado (situación 1) o de la formación continua (situación 2). Así, la investigación es de *validación interna*, es decir, busca establecer la coherencia y consistencia de los resultados de los grupos objeto de estudio, antes que la generalización (validación externa). La valoración de la consistencia de los resultados se realiza aquí mediante *triangulación* (Wilhelmi et al., 2021) de resultados extraídos mediante análisis cualitativos.

Los instrumentos de obtención de resultados son las realizaciones en GGB de los sujetos y el registro del proceso instruccional, que recoge tanto intervenciones entre pares iguales como en gran grupo. Los instrumentos de registro son: notas del docente y síntesis de información recogida en la pizarra de clase.

Situación: “¿Cuántos años tiene la ballena jorobada?”

Se propone a los estudiantes dos tareas cuyo objetivo es pasar de la proporción a la medida. Estas dos tareas se apoyan en una imagen (Figura 4) y en un vídeo (El Mundo, 2023), respectivamente.

Proporción

En la Figura 4 se puede ver una ballena hembra adulta y su cría. ¿Cuál es la razón entre sus longitudes? La determinación de la razón se realiza mediante GeoGebra (GGB). Se introduce la imagen en GGB y se miden los dos ejemplares. A continuación, se establece la relación entre las medidas.



Fuente: a) Imagen: El Troudl (2020); b) Medida en GGB: propia

Figura 4. Medida con GGB de la ballena jorobada hembra adulta y su cría.

En la Figura 4 se puede observar que la medición de la cría se realiza mediante la suma de dos segmentos, ya que la imagen muestra su cola corvada. Dado que las medidas se obtienen en GGB, se puede utilizar este mismo software para obtener la razón utilizando la vista algebraica (Figura 5).

Longitudes	Cálculo	Resultado
Vista Algebraica - A = (-0.8, -6.74) - B = (5.1, -6.74) - C = (-0.36, -4.81) - D = (4.01, -4.85) - f = 4.37 - E = (3.75, -4.79) - F = (4.98, -4.76) - g = 1.22 - G = (3.1, -4.96) - h = 0.68	Entrada: $=f/(g+h)$	Vista Algebraica - A = (-0.8, -6.74) - B = (5.1, -6.74) - C = (-0.36, -4.81) - D = (4.01, -4.85) - f = 4.37 - E = (3.75, -4.79) - F = (4.98, -4.76) - g = 1.22 - G = (3.1, -4.96) - h = 0.68 - a = 2.3

Fuente: propia

Figura 5. Cálculo GGB de la razón de longitudes entre la ballena adulta y su cría.

Esta tarea fue resuelta de forma individual (*momento con un componente adidáctico esencial*) por 26 estudiantes del Grado en Maestro en España. Como la estimación depende de cómo se trazan los segmentos, se observa que en general se tienen razones distintas. ¿Se puede aceptar alguna de ellas como “la más adecuada”? Si no es así, ¿cuál se considera? En un proceso *dialogico-colaborativo* (Godino et al., 2019), se concluye que la mejor estimación se obtiene como la media de las medidas obtenidas por el conjunto de los estudiantes. En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos. Para el cálculo de la media (M) y la desviación típica (SD) se excluyen 2 valores atípicos (*). Así, en la dinámica de clase, mediante un proceso dialógico, se aprovecha esta circunstancia para introducir esta noción de “atipicidad” y para relacionarla con un “pseudo-intervalo de confianza”, definido simplemente como el rango entre la media menos la desviación típica y la media más la desviación típica; de tal manera que un valor se considera atípico si está “claramente” fuera de este intervalo⁴.

Tabla 1. Media de razones como mejor estimación.

N	valor	N	valor	N	Valor
r01	2,34	r11	2,45	r21	2,4
r02	2,12	r12	2,39	r22	2,14
r03	2,21	r13	2,23	r23	2,8*
r04	2,16	r14	2,29	r24	2,26
r05	2,29	r15	2,4	r25	2,21
r06	2,34	r16	3,5*	r26	2,22
r07	2,31	r17	2,19		
r08	2,27	r18	2,39		
r09	2,44	r19	2,29	M	2,2917
r10	2,44	r20	2,22	SD	0,0991

Fuente: Propia

⁴ Se procede de esta forma porque el objetivo de la situación no es realizar un desarrollo de los intervalos de confianza, pero sí que es necesario motivar por qué una medida que difiere “sustancialmente” de las aportadas por mayoría debe ser desestimada.

De esta forma, se acepta que la estimación “2,29” es mejor que cada una de las individuales. Los valores “2,8” y “3,5” no se tienen en cuenta, porque se desvían “en exceso” de los valores obtenidos por la casi totalidad y, por lo tanto, se presume que se han obtenido de forma errónea, se ha trasladado incorrectamente el valor o no se ha entendido el problema.

Al término de este problema se pregunta a los estudiantes: “Pero... ¿cuánto miden la ballena adulta y su cría?” Enseguida se observa que no es posible responder a esa pregunta. En todo caso, se puede hacer una estimación basándose en las medidas de los ejemplares adultos.

The average length of a humpback is 13.4 m for a male and 13.7 m for a female, although individuals may range in length from 11.5 to 18 m long. Females tend to be 40 to 70 cm longer than males of the same age class. A humpback whale of about 13 m in length may weigh 24 to 30 tones. Sexual maturity is attained at an age of 4 to 6 years at a mean length of 11.6 m in males and 12.1 m in females. The gestation period is 11 to 11.5 months and calves are suckled for about 5 to 10 months [...] Calves associate with their mother for at least 2 years. (CRRU, 2023)

Según esta información, podemos establecer las siguientes hipótesis que:

- [H1: valor de referencia] El ejemplar adulto es una hembra.
- [H2: valor de control] La cría debería tener menos de 2 años.

Es decir, la H1 sirve para estimar el tamaño de la cría: si la ballena adulta mide 13,7m, entonces la cría mide 5,98m ($=13,7/2,29$). La H2 nos da confianza sobre esta estimación, dado que efectivamente una ballena de aproximadamente 6m está en sus primeros 2 años de vida. Esto se puede afirmar dado que al nacer las ballenas jorobadas miden 4,5m aproximadamente y crecen exponencialmente al principio. De hecho, aceptando que la longitud de la madre es realmente 13,7m se puede conjeturar que la ballena tiene aproximadamente 1 año. Más aún, si se acepta que el ejemplar adulto mide entre 11,5m y 18m se establece que la cría mide entre 5m ($=11,5/2,29$) y 7,8m ($=18/2,29$), valores que también se pueden aceptar como admisibles para una ballena de máximo 2 años.

En todo caso, la observación de que no disponer de una medida de referencia es una limitación motiva la siguiente tarea, que supone la determinación de la longitud de una ballena cuando se dispone un valor de referencia: un kayak. De hecho, en la dinámica con los 26 estudiantes se concluye precisamente que la ausencia de una referencia imposibilita la determinación de una medida: por un lado, el uso de la herramienta “zoom” (ampliación-reducción) de la imagen deja en evidencia que las dimensiones de la foto no pueden ser tomadas como referencia; por otro lado, el desconocimiento de la posición desde donde se toma la foto condiciona su tamaño relativo.

Por último, la necesidad de una “referencia” para poder estimar la longitud de un objeto, animal o persona en una foto es un resultado práctico que es preciso institucionalizar. Así se puede enunciar: “Para poder comunicar información precisa de la medida de un objeto a través de una foto se incluye en ella otro objeto del que si se conoce la medida”. Los estudiantes reconocen esta estrategia en las películas o series de investigación criminal, donde se realizan fotos colocando una regla marcada con cuadrados blancos y negros de 1cm de lado (Figura 6a). Asimismo, la posición relativa de objetos o personas es utilizada en fotografías virales (Figura 6b). De esta forma, la discusión sobre la necesidad de una referencia se realiza de forma significativa para los estudiantes. Finalmente, para

garantizar que se adquiere la técnica de medición por comparación con una distancia conocida (que ejerce la función de *escala*), se proponen actividades específicas de medición como la que se muestra en la Figura 6c.

(a) Investigación criminal	(b) Fotos virales	(c) ¿Cuánto mide el tenista?
		
Fuente: Kaninstudio (2023)	Fuente: iStock (2019)	Fuente: 123RF (2023)

Figura 6. Medida real de objetos en fotos.

Medida

La situación 2 que se describe en esta sección se realiza en el marco de una formación continua de profesorado con 30 docentes en Perú. Esa aplicación se realiza como piloto antes de su aplicación con profesorado en formación inicial. En este contexto, la situación 1 se presenta y se discute de forma breve, dado que la necesidad de una referencia que ejerza de escala se hace evidente casi desde el principio. Así, la situación 1 cumple exclusivamente una función de control para garantizar que la actividad se comprende y el objetivo es socialmente (por todo el grupo de docentes) comprendido. Además, se constata que el funcionamiento del sistema didáctico en relación con la dimensión epistemológica es equiparable al contexto español (*replicabilidad de la situación*).

La situación 2 se refiere a avistamientos de ballenas. Los avistamientos de ballenas jorobadas son comunes en muchos lugares del planeta, debido a la migración anual que realizan a aguas más cálidas, huyendo del invierno boreal en enero-febrero o del austral en julio-agosto. Además, la aparición de drones ha aumentado exponencialmente el material gráfico (fotos y vídeos) de estos avistamientos.

Se propone al profesorado un vídeo (El Mundo, 2023) en el que una ballena jorobada nada al lado de un kayak en la famosa playa de Bondi, en la bahía de Sydney (Australia). Toda la dinámica se realiza de forma dialógica, con registro de notas de clase. En la Figura 7a se puede ver un fotograma del vídeo. Dado el vídeo, se pregunta:

- ¿Es una ballena joven o adulta?
- ¿Qué edad se puede estimar que tiene?

Todo el proceso de estudio se desarrolla de forma dialógica con el profesorado, La primera observación que se realiza es procedimental: ¿cómo me puedo servir del vídeo para responder a estas preguntas? Se concluyen dos cosas:

- El kayak debe tener medidas prefijadas.
- Se debe escoger un fotograma en el que la ballena y el kayak sean comparables. Se acepta que la Figura 7a es una respuesta a esta necesidad y se utiliza GGB para calcular “unidades de longitud que luego habrá que convertir a metros”.

Ahora bien, ¿cuánto mide un kayak? En el proceso instruccional esta pregunta se responde de forma *expositiva* por el docente con el fin de reducir el tiempo de esta fase e incidir en los procesos de búsqueda de información en Internet, donde búsquedas primeras del tipo “cuánto mide un kayak” o “longitud de un kayak” arrojan informaciones no directamente utilizables, dado que se observa es que hay kayaks de muy diverso tamaño (Figura 7b).

(a) Medidas del Kayak y de la ballena con GGB	(b) Kayaks de diversos tamaños
	
Fuente: a) Fotograma: extracción propia del vídeo publicado por El Mundo (2023); b) Medida: propia.	Fuente: Toyo Aventura (2019)

Figura 7. El kayak y la ballena.

Por lo tanto, es necesario observar con detenimiento qué tipo de kayak es el del vídeo. Se observa que:

- El kayak es relativamente alargado.
- La persona navega en el mar en aguas abiertas.
- Según se puede apreciar, el piragüista navega con aparente tranquilidad (no intenta alejarse de la ballena y virar hacia la playa), lo que hace pensar que se trata de alguien experto y, por lo tanto, con capacidad para navegar en un kayak largo y estrecho de competición, lo que concuerda con la imagen.

De estas observaciones y de las búsquedas en Internet y el debate que se genera, se acepta que una buena aproximación del kayak es 5,5m.

Con este valor, observando que se tiene que mantener la proporción calculada en GGB (3,02/4,12), se estima que la ballena mide:

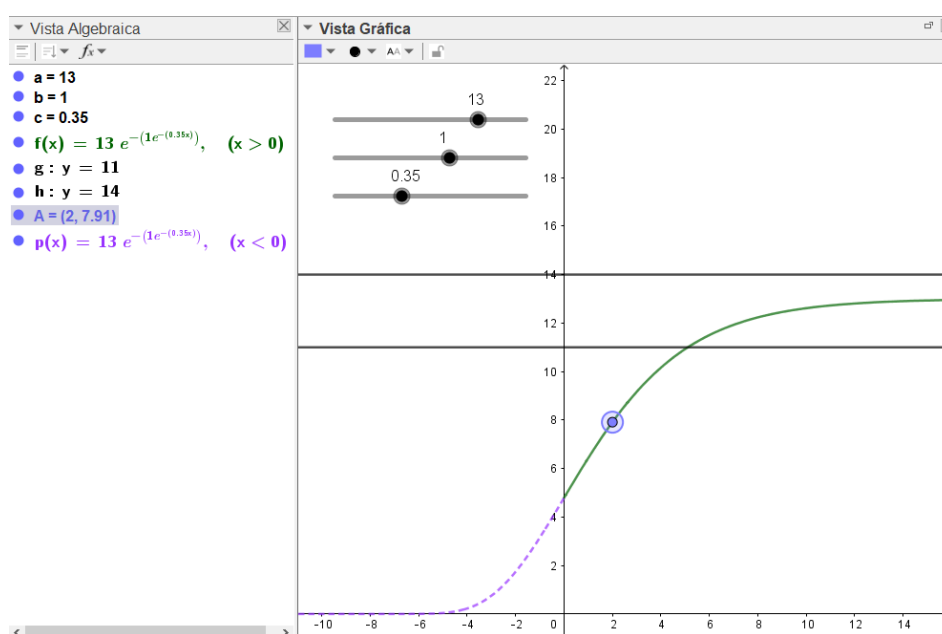
$$\frac{3,02}{4,12} = \frac{5,50}{x}$$

Luego:

$$x = \frac{4,12}{3,02} \cdot 5,50m \cong 7,5m$$

En conclusión, la ballena es joven. Más aún, se podría conjeturar que tiene unos 2 años, dado que:

- El tamaño de la ballena (7,5m) es próximo al estimado en el modelo de crecimiento de Gompertz a los 2 años (Figura 8).
- La ballena está ahora sola (el dron no muestra ningún ejemplar cercano) y las ballenas se separan de la madre al cumplir los 2 años.
- El periodo de gestación es de aproximadamente 11,5 meses y la fecundación se realiza en aguas cálidas en el invierno de cada hemisferio.
- El proceso migratorio es anual, es decir, cada año las ballenas regresan al lugar en el que sus madres fueron fecundadas.
- El vídeo es de junio de 2023 en Australia (invierno austral), así aproximadamente se han cumplido un número entero de años (1, 2, 3...) desde el parto.



Fuente: Propia.

Figura 8. Modelo de Gompertz aplicado a las ballenas jorobadas mediante GGB.

Análisis del modelo de Gompertz

El modelo de Gompertz propuesto (Figura 8) ajusta los valores aportados en la investigación de Boye et al. (2020). Epistemológicamente, esto es importante por la relación entre el modelo y los datos experimentales y, metodológicamente, porque acerca a los estudiantes el método experimental. En la Figura 9 se muestran los datos experimentales; en la Figura 10 el ajuste de estos datos al modelo de Gompertz propuesto.

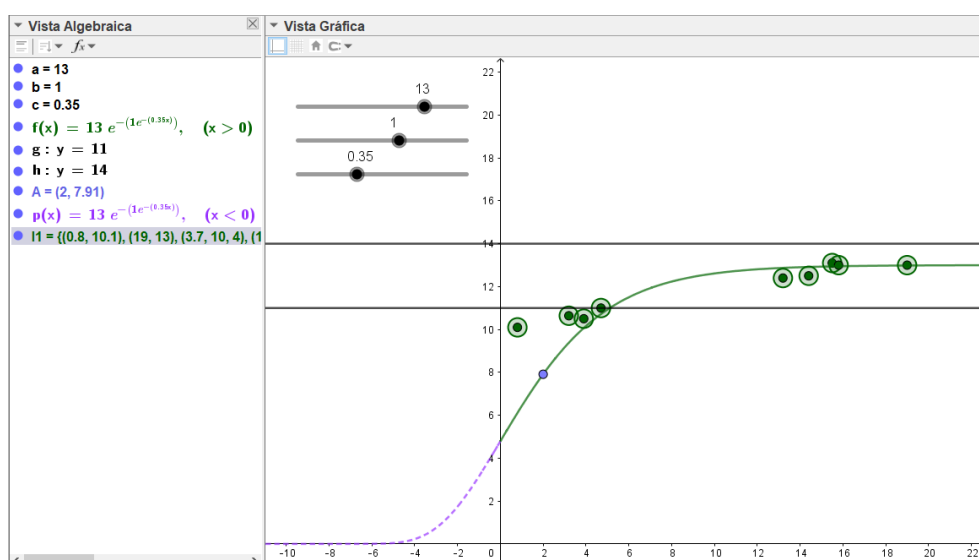
TABLE 1 | Information and calculated ages on the 12 sampled humpback whales.

ID no.	Sex	Body length (m)	Catch Location	Catch date	D/L*	AAR ages**	SE on AAR ages	pMC	SD on pMC
Mn002	F	10.10	Paamiut	29/10/2011	0,02803	0.8	7.6	105.45	0.38
Mn004	F	13.00	Ilulissat	02/10/2011	0,05379	19.0	7.7	106.01	0.4
Mn005	F	10.40	Nuuk	30/04/2012	0,03209	3.7	7.6	103.72	0.37
Mn006	M	NA	Nuuk	25/05/2013	0,04053	9.6	7.6	103.91	0.3
Mn007	M	12.40	Nuuk	02/06/2011	0,04554	13.2	7.7	105.38	0.38
Mn008	F	12.90	Nuuk	21/04/2011	0,09173	45.9	8.5	102.63	0.33
Mn009	F	13.10	Nuuk	28/12/2013	0,04885	15.5	7.7	103.01	0.31
Mn010	F	11.00	Paamiut	16/04/2014	0,03363	4.7	7.6	102.95	0.41
Mn011	M	10.50	Nuuk	18/05/2014	0,03242	3.9	7.6	104.06	0.57
Mn012	F	13.00	Nuuk	21/04/2015	0,04919	15.8	7.7	104.02	0.74
Mn013	F	10.64	Qeqortarsuaq	07/06/2013	0,03148	3.2	7.6	104.26	0.55
Mn014	F	12.50	Nuuk	27/09/2010	0,04732	14.4	7.7	104.98	0.42

D/L, ratio between D- and L-aspartic acid; AAR ages the calculated ages based on D/L; SE, standard error; pMC, percentage Modern Carbon; and SD, standard deviation.
 *Corrected for standard regressions. **Based on the fin whale (D/L)₀ and racemization rate (Nielsen et al., 2013).

Fuente: Boye et al. (2020, p. 3).

Figura 9. Edad y longitud de ballenas.



Fuente: Propia.

Figura 10. Ajuste de datos experimentales (edad-longitud) al modelo de Gompertz.

De la Figura 10 se puede observar un buen ajuste, excepto para el primer valor. Cabe conjeturar que el ejemplar “Mn002 (hembra)” ha sido o mal medida o mal calibrada la edad. De hecho, los investigadores llegan a la misma situación de incertidumbre.

[En una figura] Relación de edad y talla de las 11 ballenas jorobadas de talla conocida (círculos negros). La línea continua es una curva de crecimiento de Gompertz ajustada a los datos y las líneas discontinuas indican intervalos de confianza del 95%. El círculo blanco representa la ballena ID Mn002 donde hay incertidumbre respecto a la longitud registrada. Se asume una longitud de nacimiento (es decir, ordenada en el origen) de 4,3m (Chittleborough, 1965). (Boye et al., 2020, p. 4).

Proyección de la situación: momentos de uso de GeoGebra

El uso de *software de geometría dinámica* en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha estudiado con profundidad y detalle durante las dos primeras

décadas del siglo XXI. Tanto es así, que se pueden determinar con claridad tres *momentos* de utilización de los modelos dinámicos en los procesos de resolución de problemas, ilustración de propiedades y demostración de teoremas (Lasa y Wilhelmi, 2013).

En primer lugar, los modelos de *exploración* permiten la construcción de un modelo de resolución de problemas. Estos modelos tienen el propósito de inferir una propiedad hasta el momento desconocida. Se construye para ello un modelo que satisface las restricciones de una proposición o las condiciones iniciales de un problema. Después de manipular la construcción, los estudiantes deben obtener una conclusión que permite abordar la solución del problema. Por regla general, los docentes diseñan previamente estas construcciones o las toman de un catálogo o repositorio (p. ej., GGB-TUBE).

En los modelos de *ilustración*, se presenta a los estudiantes una infinidad de ejemplos de una propiedad. La ampliación del número de ejemplos mostrados hasta una cantidad indeterminada rompe el esquema clásico según el cual una argumentación puede ser inductiva o deductiva. Los estudiantes manipulan una construcción en la que se ilustra la veracidad de una propiedad que no da cabida a contraejemplos. Por regla general, los estudiantes en las primeras etapas de Educación Secundaria dan por válidas estas “demostraciones” empíricas y no ven la necesidad de ninguna otra demostración formal. De hecho, este es el uso principal del software de geometría dinámica a día de hoy.

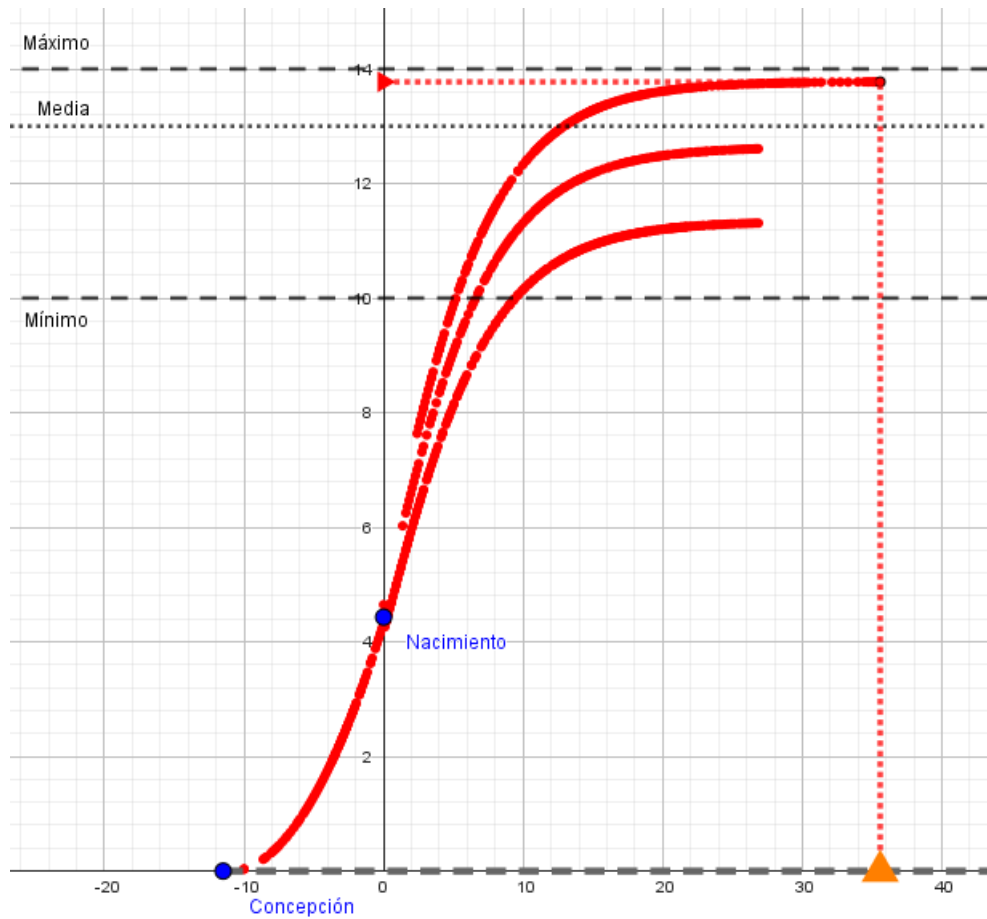
Por último, a pesar de que tradicionalmente la demostración formal de un teorema se realiza paso a paso en la pizarra, ésta se puede sustituir por una pizarra digital en la que se muestra una construcción que replica los pasos de una demostración formal. En ocasiones, sucede que los pasos de implementación del modelo dinámico difieren de los pasos formales de la demostración. En el caso que nos ocupa, disponemos de un medio material en formato Libro-GeoGebra⁵ con tres hojas de trabajo.

La construcción simula el modelo de crecimiento de una ballena jorobada mediante funciones definidas a trozos, que diferencian el periodo prenatal (función parabólica) y postnatal (función triple-exponencial con potencia negativa). La manipulación de modelos de ilustración y exploración requiere de las acciones de:

- a. *Arrastre con o sin rastro*: Se pulsa sobre un punto que desliza su rastro sobre la trayectoria de la curva, mostrando el crecimiento de un individuo particular. El rastro del punto se activa mediante un botón con *script* (Figura 11).
- b. *Deslizadores*: Permiten obtener una familia de funciones haciendo variar los parámetros que la definen. Se pueden explorar así los casos comprendidos entre el crecimiento mínimo y el máximo; en particular, el valor promedio.
- c. *Casillas de control*: Muestran las curvas funcionales superpuestas a la trayectoria del punto, para pasar de una visión puntual al modelo global del crecimiento.
- d. *“Gusanos” polinómicos*: Se trata de una actividad de modelización mediante aproximación polinómica. La construcción muestra una función polinómica, que debe pasar por unos puntos libres que el estudiante coloca sobre la curva de una función, que es compleja y cuya representación algebraica no es accesible al estudiante (Figura 12).

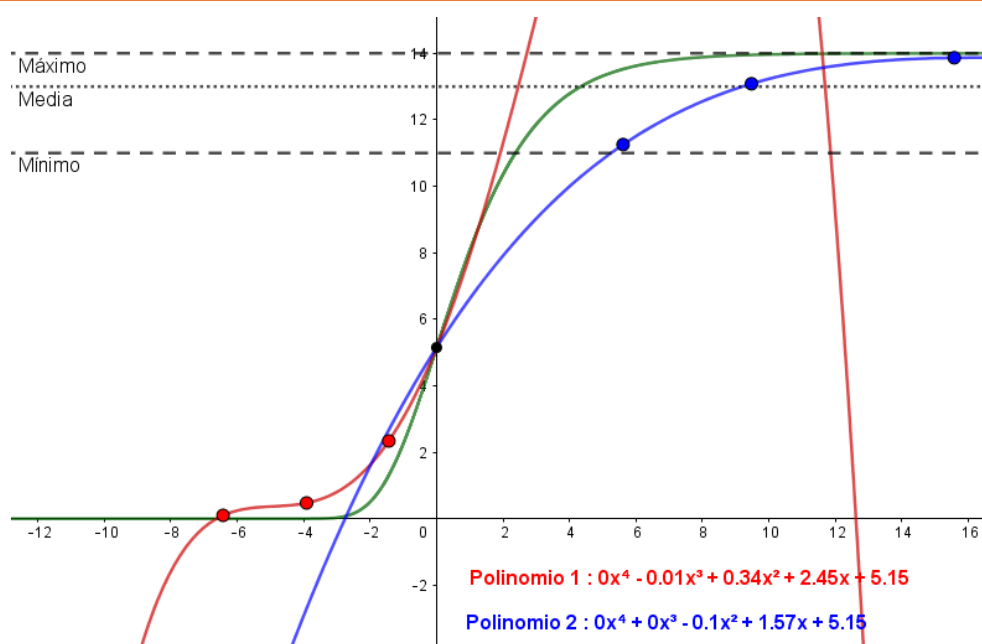
⁵ Enlace al material: <https://www.geogebra.org/m/bpjyahuq>

- e. *Medidas con GGB*: El software de geometría dinámica es tan versátil que permite incluso la medida de magnitudes sobre una fotografía insertada en su vista gráfica. Se requiere para ello únicamente de la herramienta “segmento” y una escala conocida.



Fuente: Propia.

Figura 11. Captura de imagen del modelo dinámico de ilustración.



Fuente: Propia.

Figura 12. Captura de imagen del modelo dinámico de exploración.

Implicaciones y recomendaciones para la enseñanza

Es norma general que en los currículos se incluyan expresiones que hagan referencia a la necesidad de “aplicar las matemáticas a problemas reales” (Vicente et al., 2008). Se argumenta que estos problemas son “motivadores”, pero en muchas ocasiones se obvia que en estos problemas no se suele disponer de una técnica o procedimiento estandarizado para su resolución, es muchas veces preciso modelizar y, por lo tanto, interpretar los resultados obtenidos, siendo común precisar conocimientos extramatemáticos o contextuales. En otras palabras, son problemas complejos que van a precisar el diseño de un proceso instruccional que articule fases exploratorias y autónomas de los estudiantes con otras más objetivas, reguladas y guiadas por el docente, combinando ambas con interacciones colaborativas en procesos dialógicos (Godino et al., 2019).

Las situaciones de las ballenas se desarrollan en ese contexto complejo. Los procesos de exploración y regulativos son mediados con el uso de la tecnología. En particular, se presentan modelos con GGB de los modelos funcionales, que permiten desarrollar momentos de ilustración y exploración. Esto es posible a pesar de la complejidad de la función Gompertz y al hecho de que la función edad-longitud es una función a trozos definida en tres intervalos desde el momento de la fecundación hasta la muerte. Es pues un ejemplo de una situación compleja para la que se dispone de una *transposición didáctica* (Chevallard, 1991) adecuada para su desarrollo. Esto no siempre es así, es decir, en ocasiones se puede disponer de una situación “muy potente o interesante” desde el punto de vista exclusivamente epistemológico, pero con una baja *idoneidad didáctica* (Godino et al., 2006). Así, teniendo en cuenta que “se reconoce al buen maestro de escuela por el número de materias valiosas que desiste de enseñar” (Livingstone, 1941), se debería desestimar su aplicación hasta generar las condiciones adecuadas para su gestión y control en tanto que proceso educativo.

En conclusión, sugerimos se desestime la implantación “automática”, por puro cumplimiento de la prescripción curricular, de proyectos interdisciplinarios (en particular, en el ámbito STEM) hasta que no se dispongan los medios específicos que garanticen un

proceso de estudio que involucre eficazmente a los estudiantes. Estos procesos, por la propia naturaleza de las situaciones, de los conocimientos que deben movilizarse y de los resultados obtenidos, apuntan a la necesidad de articular momentos exploratorios, colaborativos, dialógicos y objetivistas, que garanticen tanto la acción significativa de los estudiantes como la adquisición colectiva de los saberes básicos pretendidos.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto CAP PI1029, denominado “Razonamiento algebraico elemental generalizado para el desarrollo de las competencias matemáticas del currículo en Educación Secundaria”, financiado por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

Referencias

- 123RF (2023). Jugador de tenis cansado después del juego y sentar en la cancha de tenis por encima de la vista (ID 92594057) [Fotografía]. <https://n9.cl/vba8r>
- Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 3-23. https://sinewton.es/revista_numeros/063/
- Berta, A., Lanzetti, A., Ekdale, E. G., y Deméré, T. A. (2016). From teeth to baleen and raptorial to bulk filter feeding in mysticete cetaceans: The role of paleontological, genetic, and geochemical data in feeding evolution and ecology. *Integrative and Comparative Biology*, 56(6), 1271-1284. <https://doi.org/10.1093/icb/icw128>
- Boye, T. K., Garde, E., Nielsen, J., Hedeholm, R., Olsen, J., y Simon, M. (2020). Estimating the age of west Greenland humpback whales Through aspartic acid racemization and eye lens bomb radiocarbon methods. *Frontiers in Marine Science*, 6, 811. <https://doi.org/10.3389/fmars.2019.00811>
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Casas, G. A, Rodríguez, D., y Afanador, G. (2010). Propiedades matemáticas del modelo de Gompertz y su aplicación al crecimiento de los cerdos. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 23(3), 349-358. <https://n9.cl/5zw51>
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aiqué.
- Cetacean Research & Rescue Unit (CRRU) (2023). *Humpback whale* (Education: Cetacean Fact Files) [Página web]. <https://crru.org.uk/education/species/humpback-whale>
- Cruz, A., y Lupiáñez, J. L. (2019). Tareas que fomentan el desarrollo de la competencia STEM *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 90, 31-39.
- Domènech, J., Lope, S., y Mora L. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 16(2), 2203. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203
- El Troudl, H. (2020). *El enigmático carisma de las ballenas jorobadas* [Página web]. <https://n9.cl/xcp4e>
- El Mundo (2023). *Las sorprendentes imágenes de una ballena siguiendo a un kayak* [Vídeo]. <https://n9.cl/lgvzl>
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252. <https://n9.cl/biknk>

- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., y Lasa A. (2015). Algebraic reasoning levels in primary and secondary education. En *Proceedings of CERME 9* (pp. 426-432). <https://n9.cl/m1cmz>
- Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 167-200. <https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/>
- Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M., y Wilhelmi, M. D. (2019). Analysis of didactical trajectories in teaching and learning mathematics: Overcoming extreme objectivist and constructivist positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(1), 147-161. <https://doi.org/10.12973/iejme/3983>
- Hmong (2023). *Función de Gompertz*. https://hmong.es/wiki/Gompertz_function
- iStock (2019). Descubriendo la Italia Histórica: Torre de Pisa (ID 1167515839) [Fotografía]. <https://n9.cl/cht70>
- Kaninstudio (2023). Investigación de la escena del crimen: recopilación de pruebas de la escena del crimen (ID 131762936) [Fotografía]. <https://n9.cl/9knrz>
- Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 2(1), 52-64. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160>
- Lasa, A., Abaurrea, J., y Iribas, H. (2020). Mathematical content on STEM activities. *Journal on Mathematics Education*, 11(3), 333-346. <https://doi.org/10.22342/jme.11.3.11327.333-346>
- Lasa, A., Iribas, H., Belletich, O., y Wilhelmi, M. R. (2022a). Teacher degree students attitudes towards STEM activities in two Spanish universities. *U. Porto Journal of Engineering*, 8(1), 34-50. https://doi.org/10.24840/2183-6493_008.001_0005
- Lasa, A., Lizarraga, A., Sáenz de Cabezón, A., y Irañeta, I. (2022b). *STEM project case study: Construction and calibration of an electronic weighing machine*. Paper presented at the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME12, Bolzano, Italy, February 2022.
- Livingstone, R. W. (1941). *The future in education*. Cambridge University Press.
- Martínez, C. A., Rodríguez, A. P., Jiménez, A., y Manrique, C. (2010). Descripción matemática de la función Gompertz aplicada al crecimiento de animales. *Rev. Med. vet. Zoot*, 57(1), 76-80. <http://www.scielo.org.co/pdf/rfmvz/v57n1/v57n1a06.pdf>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022a). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la ESO. *BOE*, 76, de 31 marzo. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022b). Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *BOE*, 82, de 06 abril. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- NCTM (2023). *Executive summary. Principles and standards for school mathematics*. NCTM <https://www.nctm.org/>
- Paris, J. E. (2018). *Comparing design ratios*. <https://n9.cl/etcey>
- Sailandtrip (2014). Dimensiones de un barco. Eslora, manga, calado [Página web]. <https://n9.cl/xjena>

- Teixeira, G., Jacometti, V., Franco, A., y Alves da Silva, R. H. (2020). Age estimation in humans through the analysis of aspartic acid racemization from teeth: A scoping review of methods, outcomes, and open research questions. *Forensic Science International*, 331(1-3), 111154. <https://doi.org/10.1016/j.forsciint.2021.111154>
- Toyo Aventura (2019). Consejos para escoger el mejor kayak para ti [Página web]. <https://n9.cl/a30rp>
- Vicente, S., Dooren, W. van, y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, 20(4), 391-406. <https://doi.org/10.1174/113564008786542235>
- Wilhelmi, M.R., Belletich, O., Abaurrea, J., Iribas, H., y Lasa, A. (2021). Triangulation en recherche qualitative à l'aide de l'analyse statistique implicative. En J.-C. Régner et al., *Analyse statistique implicative 11* (pp. 149-167). Université Bourgogne Franche-Comté – Besançon. <https://n9.cl/xc4t6>

Posters

**DISEÑO DE UNA FORMACIÓN SOBRE EL PENSAMIENTO
COMPUTACIONAL CON UN ENFOQUE MULTIDIMENSIONAL**
**DESIGN OF A COURSE ON COMPUTATIONAL THINKING UNDER A
MULTIDIMENSIONAL PERSPECTIVE**

Juan José Santaengracia
Universidad de Oviedo, España
juanjose@uniovi.es

Luis J. Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo, España
luisj@uniovi.es

Belén Palop
Universidad Complutense de Madrid, España
b.palop@ucm.es

Resumen: La correcta introducción del Pensamiento Computacional en los currículos de primaria y secundaria en España está amenazada por la falta de docentes formados para su impartición. Se presenta un modelo de formación de profesores que incluye una presentación inicial y siete talleres prácticos que abordan las diversas dimensiones del PC: la simulación, el uso de tareas Bebras, los algoritmos de ordenación, el uso de Scratch, los autómatas, los sistemas de numeración y la integración del PC en el currículo de matemáticas. La formación se ha diseñado para que, a través de las fases de deconstrucción, co-construcción y reconstrucción del conocimiento, el profesorado consiga transformar sus conocimientos cotidianos en conocimientos profesionales acerca del Pensamiento Computacional.

Palabras-clave: pensamiento computacional, formación de profesorado, modelo realista-reflexivo.

Abstract: The correct introduction of Computational Thinking into primary school curricula in Spain is threatened by the lack of trained teachers for its implementation. A teacher training model is presented, which includes an initial presentation and seven practical workshops that address various dimensions of CT: simulation, the use of Bebras tasks, sorting algorithms, Scratch usage, automata, numeral systems, and the integration of CT into the mathematics curriculum. The training has been designed with the aim that, through the phases of deconstruction, co-construction, and reconstruction of knowledge, teachers can transform their everyday knowledge into professional knowledge about Computational Thinking.

Keywords: computational thinking, teacher training, realistic-reflexive model.

Introducción

El Pensamiento Computacional (PC) ha llegado a los currículos europeos de primaria en diferentes momentos y con enfoques distintos (European Comission: Joint Research Centre [ECJRC] et al., 2022). En ocasiones, y siguiendo la definición seminal de Wing (2008), se incorpora desde su conexión con la disciplina de la computación. En otros casos, como en España, se ha usado un enfoque menos amplio y asociado esencialmente a la programación (Palop et al., 2022a; 2022b).

Marco teórico

Pensamiento computacional

Diversos autores han definido el PC y listado sus componentes (ECJRC et al., 2022; Wing, 2008). En Palop y Díaz (en prensa), que busca llevar el concepto al aula de manera práctica, se define PC como la manera de razonar que nos permite enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva. En el trabajo de Palop y Díaz (en prensa) se consideran pilares fundamentales del PC los datos, los algoritmos y los problemas, que esquematizan en el diagrama de la Figura 1.

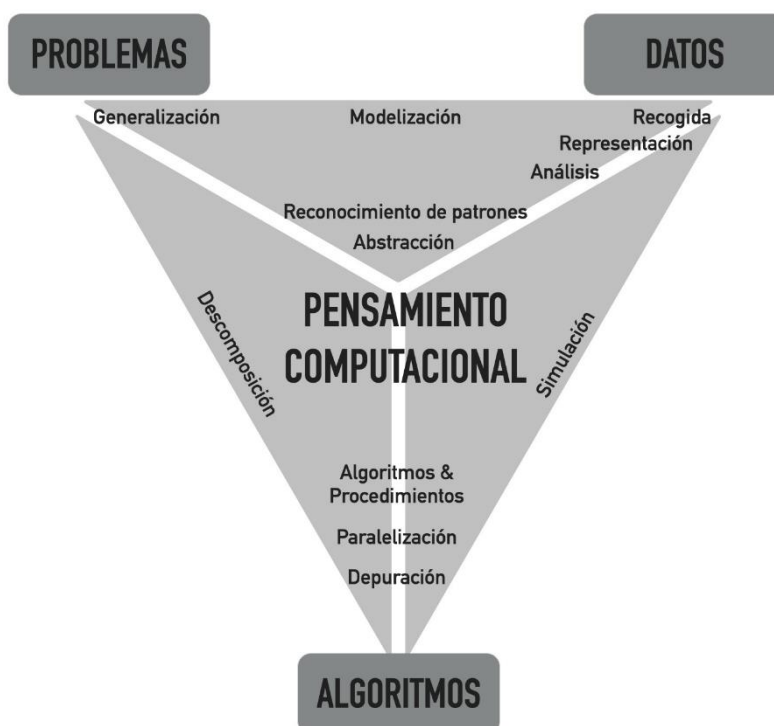


Figura 1. Configuración multidimensional de tres pilares del PC.

Modelo de formación del profesorado

Para el diseño de esta formación nos inspiramos en el modelo realista-reflexivo (Alsina y Mulà, 2019). Este modelo de formación del profesorado se inicia al reconocer inconsistencias o carencias en los conocimientos existentes en el profesorado que se desea formar. En una primera fase, a través de conflictos cognitivos, se deconstruyen los conocimientos previos, denominados en este modelo “conocimientos cotidianos”. Tras esto, a través del trabajo colaborativo se co-construyen nuevos conocimientos sobre los anteriormente deconstruidos, para finalmente reconstruirlos en una última fase de institucionalización, consiguiendo un “conocimiento profesional”.

Descripción de la formación

La formación que se presenta proporciona recursos teóricos y prácticos al profesorado generalista de primaria y al especializado en matemáticas para secundaria, a los que se asigna esta temática en el currículo oficial. La duración es de 16 horas de trabajo, organizadas en sesiones de dos horas. El diseño ha sido puesto a prueba y posteriormente refinado, analizando también las percepciones del profesorado sobre el mismo (Santaengracia et al., 2023).

La formación inicia con una charla para definir el PC como un constructo multidimensional. En ella se profundiza en su definición y en falsas creencias que suelen aparecer. Se proporciona una visión teórica del constructo según el modelo de Palop y Díaz (en prensa) al que siguen los siguientes siete talleres con materiales de libre acceso:

1. Taller de simulación de datos con hojas de cálculo. Se pide al profesorado que, a través una herramienta de hojas de cálculo, simule diferentes objetos matemáticos.
2. Taller con el material Bebras® (<https://www.bebbras.org/>). Se utilizan tareas Bebras de diferentes niveles para mostrar problemas de PC.
3. Taller de algoritmos de ordenación manipulativos. A través de un material manipulativo (preferiblemente similar a las regletas de Cuisenaire) se realizan algoritmos de ordenación en un folio.
4. Taller de Scratch® online (<https://scratch.mit.edu/>) (MIT, 2023). Se explica y utiliza el software para resolver los problemas planteados.
5. Diseño figurativo de autómatas. El profesorado debe resolver los problemas planteados dibujando autómatas de estado finito en un papel.
6. Aproximación manipulativa a los sistemas de numeración a partir de Exploding Dots® (<https://www.explodingdots.org/>). A través de este enfoque se profundiza en los sistemas de numeración y se conectan las matemáticas con el PC.
7. PC en el nuevo currículo de matemáticas. Se analiza el encaje del PC en el área de matemáticas, su descripción y sus posibilidades según los decretos de diferentes comunidades autónomas en España (MEFP, 2022)

En la charla inicial se introducen las dimensiones y se activa el proceso de deconstrucción del conocimiento, mediante la generación de conflictos cognitivos en el profesorado. Cada taller colaborativo se orienta a la co-construcción de una o más de las dimensiones del modelo. En los talleres finales (Exploding Dots y análisis del currículo) se lleva a cabo la reconstrucción del conocimiento, consensuando su encaje en el currículum de matemáticas. En la Tabla 1, se puede ver un resumen de los talleres y las dimensiones en las que se profundizan (según el esquema de la Figura 1).

Tabla 1. Taller y dimensiones asociadas.

Actividad formativa	Dimensiones
Charla inicial	Todas, se explica el modelo teórico
Excel	Simulación, análisis de datos, representación de datos, modelización, abstracción.
Bebras	Todas las dimensiones
Algoritmos de ordenación	Algoritmos y procedimientos, depuración, simulación, descomposición, abstracción
Scratch	Algoritmos y procedimientos, depuración, simulación, descomposición, reconocimiento de patrones
Autómatas	Descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, modelización, generalización
Exploding Dots	Todas las dimensiones
PC en currículo	Todas las dimensiones

Fonte: Elaboración propia

Consideraciones finales

Las formaciones deben ser diseñadas de forma que los sujetos que aprenden den sentido al conocimiento. Eso se puede lograr alternando los procesos de deconstrucción, co-construcción a lo largo de la formación. De esta forma, el centro de atención se sitúa en el docente que aprende, y no en el formador.

Referencias

- Alsina, Á., y Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability*, 11(15), 4039. <https://doi.org/10.3390/su11154039>
- European Commission: Joint Research Centre, Bocconi, S., Inamorato dos Santos, A., Chiocciariello, A., Cachia, R., Kampylis, P., Giannoutsou, N., Dagienė, V., Punie, Y., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V., & Stupurienė, G. (2022). *Reviewing computational thinking in compulsory education: State of play and practices from computing education* (A. Inamorato dos Santos, R. Cachia, N. Giannoutsou, & Y. Punie, editors) Publications Office of the European Union. <https://data.europa.eu/doi/10.2760/126955>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE (Boletín Oficial del Estado), 52, de 2 de marzo de 2022, 24386-24504.
- Palop, B., y Díaz, I. (en prensa). Pensamiento computacional en el aula. En L. Velázquez (Ed.), *Nuevos escenarios educativos, el enfoque competencial y las metodologías activas. ¿Por qué STEAM en el aula?* Grupo Magro Editores.
- Palop, B., Santaengracia, J. J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022a). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en educación matemática XXV* (p. 623). SEIEM.
- Palop, B., Santaengracia, J. J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022b). Computational thinking in the Spanish secondary school curriculum of mathematics: Meaning and implications. En W. Yang, M. Majewski, D. Meade y W. K. H. (Eds.), *Proceedings of ATCM 2022* (p. 21999). ATCM.

- Santaengracia, J. J., Palop, B., y Rodríguez-Muñoz, J. L. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional: Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars. (Eds.), *Investigación en educación matemática XXVI* (pp. 491-498). SEIEM.
- Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1881), 3717-3725. <https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118>

LITERACIA ESTATÍSTICA DE ALUNOS DO 7.º ANO EM CONTEXTO DE PANDEMIA COVID-19**STATISTICAL LITERACY OF 7TH YEAR STUDENTS IN THE COVID-19 PANDEMIC CONTEXT**

Manuela Subtil

Agrupamento de Escolas Fragata do Tejo, CICS.NOVA, Portugal

mm.pedro@campus.fct.unl.pt

António Domingos

*Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, DCSA,
CICS.NOVA*

amdd@fct.unl.pt

Resumo: Apresenta-se a resolução de um problema envolvendo o cálculo da média. O mesmo surgiu no ensino a distância em tempo de pandemia Covid-19. Os dados publicados diariamente no site da Direção-Geral da Saúde diziam respeito aos casos positivos acumulados da Covid-19. Pretendeu-se a determinação da média, relativamente ao número de novos casos, entre os dias 16 e 27 de março de 2020. Usando uma metodologia de investigação qualitativa de natureza interpretativa e descritiva, foi adotada a modalidade estudo de caso. Apesar de algumas dificuldades diagnosticadas, conclui-se que os alunos conseguiram realizar o problema e apresentaram pensamento crítico relativamente ao facto de a média ser uma medida de tendência central não representativa da evolução do número de casos positivos da Covid-19.

Palavras-chave: média, covid-19, resolução de problemas.

Abstract: The resolution of a problem involving the calculation of the average is presented. The problem has emerged in distance learning during the Covid-19 pandemic. The data presented daily on the website of the Direção-Geral da Saúde concerned the accumulated positive cases of Covid-19. The aim was to determine the average number of new cases between March 16 and 27, 2020. Using a qualitative research methodology of an interpretive and descriptive nature, a case study modality was used. The students had some difficulties, but it can be concluded that they were able to solve the problem and showed critical thinking regarding the fact that the average is a measure of central tendency that is not representative of the evolution of the number of positive Covid-19 cases.

Keywords: average, covid-19, problem-solving.

Contextualização

A nível mundial têm surgido vários apelos para a prática da resolução de problemas (RP) no desenvolvimento dos currículos de Matemática. Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007), entre o 6.º e 8.º ano, a aprendizagem matemática deve focar-se na RP. A RP deve ser aplicada a contextos do quotidiano para que os alunos tenham a oportunidade de aprender,

compreender e consolidar conceitos matemáticos (NCTM, 2007; Rivera, 2014). Os discentes devem ter a capacidade de fazer uma análise retrospectiva dos seus conhecimentos de modo a compreender os problemas e não os resolverem de uma forma ‘rotineira’ (Ponte et al., 2007; Lester, 2013). Também devem utilizar estratégias de resolução adequadas ao tipo de problema, ter espírito crítico e reflexivo de acordo com as soluções obtidas (Ponte et al., 2007).

Em Portugal, de acordo com as *Aprendizagens Essenciais de Matemática* do 7.º ano de escolaridade (Ministério da Educação (ME), 2018), a RP é uma capacidade matemática transversal que envolve a combinação de conhecimentos, capacidades e atitudes culminando com o desenvolvimento da competência, *Raciocínio e resolução de problemas* no âmbito do *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017). A RP surge como um requisito que todos os alunos devem conseguir atingir para aprenderem Matemática no século XXI (Canavarro et al., 2021).

A RP assume uma grande importância no desenvolvimento da literacia estatística onde os alunos recolhem, representam, analisam dados e interpretam os resultados (Selmer et al., 2011).

Objetivos

Apresenta-se a resolução de um problema que emergiu em contexto de ensino a distância (E@D) no âmbito da pandemia da Covid-19. A recolha dos dados incidiu entre os dias 16 e 27 de março de 2020, quando os alunos deixaram de ter ensino presencial por imposição do ME. Pretendeu-se a determinação da média relativamente ao número de novos casos, sendo que os dados que eram apresentados diariamente no site da Direção-Geral de Saúde (DGS) diziam respeito aos casos positivos acumulados da Covid-19.

Ao nível do currículo da disciplina de Matemática do 7.º ano de escolaridade (ME, 2018) procurou-se que os alunos consolidassem o conceito de média como medida de tendência central e aferissem se a média é representativa da evolução do número de pessoas infetadas pelo vírus, no período solicitado. Deste modo, os discentes deveriam desenvolver competências no domínio do PASEO (Martins et al., 2017), nomeadamente, *Raciocínio e resolução de problemas* e *Pensamento crítico e pensamento criativo*.

Metodologia

O estudo inseriu-se numa abordagem qualitativa de natureza interpretativa e descritiva, adotando-se a modalidade estudo de caso. O caso focou-se no grupo turma, em virtude de todos os alunos que se encontram inseridos num contexto de aprendizagem e desenvolvimento de competências devem adquirir literacias para poderem mobilizar num mundo em constante mudança e imprevisibilidades (Martins et al., 2017). A observação, compreensão e descrição minuciosa, recaiu na atividade de 4 grupos de 5 elementos e um grupo de quatro elementos, dos 24 alunos da turma. Os grupos foram formados aleatoriamente pela professora e categorizados por grupos G1, G2, G3, G4 e G5 (Creswell, 2012)

O estudo foi dinamizado através do uso de computadores, tablets ou telemóveis, com recurso a motores de busca, plataforma Zoom e correio eletrónico. Numa aula síncrona, através da plataforma Zoom, foi apresentado aos alunos o que se pretendia relativamente à resolução do problema, data e forma de entrega e posterior apresentação do mesmo. Posteriormente, em grupo, os discentes resolveram autonomamente o problema. Um representante de cada grupo enviou por *e-mail* o trabalho, em PDF, à professora, com o conhecimento de todos os alunos do grupo. Por fim, numa aula síncrona deu-se a

apresentação da resolução do problema pelos vários grupos, através de um representante de cada grupo. Propositadamente, a docente solicitou, em primeiro lugar, a intervenção dos grupos cujas resoluções apresentavam erro e, em segundo lugar, as resoluções que acrescentaram compreensão e atingiram o objetivo do problema. No final de todas as apresentações, realizou-se a discussão coletiva em torno de uma síntese das resoluções, onde todos os alunos tiveram a possibilidade de intervir, desde que clicassem no ícone “mão no ar”.

Os métodos para avaliação dos trabalhos basearam-se na observação indireta focada nos registos escritos dos alunos enviados por *e-mail* e na observação direta aquando a apresentação da resolução do problema e posterior discussão coletiva através de videoconferência na plataforma Zoom. A professora recorreu a uma grelha de avaliação, onde pretendeu avaliar vários parâmetros tais como: a pertinência das participações, o rigor científico e a dinamização da discussão coletiva.

Apresentação dos resultados

Cada grupo preparou um PowerPoint para um representante apresentar os dados tratados aos restantes colegas da turma. A duração de cada apresentação não ultrapassou os dez minutos.

Na resolução do problema, os grupos G3 e G5 consideraram os novos casos em cada dia, tendo realizado a diferença entre os casos totais registados entre os dias 16 e 15 de março de 2020, e assim sucessivamente (Figura 1).

Março 2020	N.º de Novos casos	N.º de casos acumulados
16	86	331
17	117	448
18	194	642
19	143	785
20	235	1020
21	260	1280
22	320	1600
23	460	2060
24	302	2362
25	633	2995
26	549	3544
27	724	4268

FONTE: Direção-geral de saúde

Cálculo da Média

Para calcular a Média (Me) deve-se somar todos os valores de um conjunto de dados e dividir-se pelo número de elementos deste conjunto.

$$\text{Média} = \frac{86+117+194+143+235+260+320+460+302+633+549+724}{12} = 4023$$

$$\text{Média} = \frac{4023}{12} = 335,25$$

Figura 1. Determinação da média do número de pessoas infetadas, considerando o número de novos casos em cada dia, pelo grupo G3.

Os restantes grupos consideraram o número de casos acumulados, tal como constava diariamente no site da DGS (Figura 2). Os alunos não revelaram capacidade de interpretação para resolver o problema. Possivelmente, foram influenciados pela forma como os dados eram apresentados.

Número de infectados do dia 16/3 a dia 27/3	
Dias	infectados
dia 16	331
dia 17	448
dia 18	642
dia 19	785
dia 20	1020
dia 21	1280
dia 22	1600
dia 23	2060
dia 24	2362
dia 25	2995
dia 26	3544
dia 27	4268
Total de infectados	21335

• Média

$$\frac{331+448+642+785+1020+1280+1600+2060+2362+2995+3544+4268}{12} (=)$$

$$(\Rightarrow) \frac{21335}{12} = 1\,777,91666666667 = 1778 \quad \text{A média é 1778}$$

Figura 2. Determinação da média do número de pessoas infectadas, considerando o número de casos acumulados, pelo grupo G1.

No entanto, o grupo que calculou corretamente a média (Figura 1), apresentou capacidade de análise e pensamento crítico, uma vez que reconheceu que esta não é representativa da evolução do número de pessoas infectadas:

A média do número de novos casos é 335, valor arredondado à unidade. A média não tem nada a ver com a realidade que se passou entre os dias 16 e 27, porque começou-se com 86 casos positivos e acabou em 724 casos de pessoas infectadas. (G3)

Por exemplo, no grupo G2, apesar de não terem calculado corretamente a média, tal como o grupo G1 (Figura 2) e o grupo G4, os alunos também revelaram capacidade de análise e pensamento crítico, uma vez que referiram que a média pode ser “enganadora”:

A média não deu uma informação real da evolução do número de casos positivos, porque como a professora disse na aula, a média é uma medida de tendência central enganadora. A média deu 1778 e no dia 27 de março, por exemplo, houve 4268 infectados. (G2)

Apesar dos grupos de alunos terem seguido caminhos diferentes para calcularem a média, conseguiram argumentar que esta medida de tendência central não deu uma informação representativa da evolução do número de casos positivos.

Na discussão coletiva, todos os alunos compreenderam que para o cálculo da média deveriam ter considerado os novos casos em cada dia, procedendo à diferença entre os casos totais registados entre os dias 16 e 15 de março de 2020, e assim sucessivamente.

Considerações finais

Apesar de algumas dificuldades relacionadas com o cálculo da média, conclui-se que os alunos apresentaram pensamento crítico, pois argumentaram que a média era uma medida de tendência central não representativa da evolução do número de casos positivos. No

entanto, alguns discentes não conseguiram interpretar a informação solicitada na pesquisa que realizaram, de acordo com o objetivo do problema e para o cálculo da média recorreram à frequência absoluta acumulada, tal como constava diariamente no site da DGS, em detrimento da frequência absoluta simples, que era o que se pretendia. No entanto, na discussão coletiva, com a monitorização da professora, os alunos compreenderam como deveriam ter realizado a determinação da média. Foi a primeira vez que os alunos fizeram uma apresentação na plataforma Zoom, em contexto de E@D. Tratou-se de uma experiência positiva, embora tivessem sido perceptíveis algumas dificuldades na partilha do ecrã e na articulação da intervenção dos alunos na discussão coletiva.

Referências

- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research, planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. (4th ed.). Pearson.
- ME (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática – 7.º ano*. DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf
- Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1&2), 245-278.
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Camilo, J., Silva, L., Encarnação, Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. DGE. https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/22377/1/perfil_dos_alunos.pdf
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2000).
- Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Guimarães, F., Breda, A., Sousa, H., Menezes, L., Martins, G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. DGIDC.
- Rivera, F. (2014). *Teaching to the math common core state standards: Focus on kindergarten to grade 5*. Sense Publishers.
- Selmer, S., Bolyard, J., & Rye, J. (2011). Statistical reasoning over lunch. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17(5), 274-281.

FLUÊNCIA REPRESENTACIONAL: A MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FÍSICA

REPRESENTATIONAL FLUENCY: MATHEMATICS IN PHYSICS' PROBLEM SOLVING

Maria do Carmo Botelho

*CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
Portugal*

mcb177696@campus.fct.unl.pt

Tânia Coelho

*CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
Portugal*

ta.coelho@campus.fct.unl.pt

Helena Rocha

*CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa,
Portugal*

hcr@fct.unl.pt

Resumo: Este estudo centra-se na utilização e articulação de diferentes representações com recurso à tecnologia, na disciplina de Física. Pretende-se descrever como uma professora integra as diferentes representações disponibilizadas pela calculadora gráfica (CG), no ensino secundário, durante a resolução de problemas. A metodologia adotada para esta investigação é de natureza qualitativa com orientação interpretativa, recorrendo-se ao estudo de caso de uma professora de Física do 10.º ano, com larga experiência no uso da CG. A recolha de dados deu-se através da observação de aulas, entrevistas semiestruturadas e recolha de documentação. As conclusões indicam que a professora, quando recorre à CG, articula diferentes representações, de acordo com o conteúdo da disciplina.

Palavras-chave: fluência representacional, integração da tecnologia, matemática, física.

Abstract: This study focuses on the use and articulation of different representations in Physics, using technology. The aim is to describe how a high school teacher integrates the different representations provided by the graphing calculator (GC) in problem solving. The methodology adopted is qualitative with an interpretative approach, using a case study of a 10th grade Physics teacher with extensive experience in the use of GC. Data collection was conducted through classroom observation, semi-structured interviews, and document collection. The conclusions indicate that when the teacher uses GC, she articulates different representations in different ways, according to the content.

Keywords: representational fluency, integration of technology, mathematics, physics.

O papel da Matemática é reconhecido por vários autores no processo de análise de estratégias e metodologias no ensino e aprendizagem de Física (Hansson et al., 2019; Pospiech et al., 2019). Compreender a descrição física dum determinado fenómeno envolve a mobilização de diferentes representações matemáticas, como por exemplo no estudo e análise da relação entre grandezas físicas (Pols et al., 2021). Assim, o uso de diferentes representações revela-se essencial para a comunicação e raciocínio sobre conceitos de aplicação matemática (Dreher et al., 2016). No entanto, apesar da integração da tecnologia na sala de aula permitir o acesso a diversas representações (Thurm & Barzel, 2020), existem poucos estudos sobre a articulação destas representações no processo de ensino (Rocha, 2016). A fluência representacional não consiste apenas no conhecimento de como trabalhar um conceito através de diferentes representações, articulando-as entre si, mas também no conhecimento do contributo que cada representação pode trazer à compreensão de um conceito e, conseqüentemente, no conhecimento de qual a representação mais adequada em cada momento (Zbiek et al., 2007). A integração da tecnologia permite analisar a fluência representacional através da flexibilidade que o professor revela, ao transitar entre representações com tecnologia (Rocha, 2016).

Com base no estudo de Coelho et al. (no prelo), pretendemos caracterizar a fluência representacional duma professora de Física, num contexto de resolução de problemas com recurso à CG. Especificamente, pretendemos dar resposta à seguinte questão: Na resolução de problemas de Física, como se caracterizam as articulações entre diferentes representações com a calculadora gráfica mobilizadas pelo professor?

A metodologia adotada é de natureza qualitativa e interpretativa, com base num estudo de caso de uma professora de Físico-Química do 10.º ano com larga experiência no uso de tecnologia. Para a recolha de dados recorreu-se a entrevistas semi-estruturadas, observação de aulas, e recolha documental. Para a análise de dados foram consideradas as representações habitualmente utilizadas no estudo de funções, disponibilizadas na CG: algébricas, gráficas, numéricas (Friedland & Tabach, 2001) e tabulares (Brown & Mehilos, 2010) e o conceito de fluência representacional com recurso à tecnologia de Rocha (2016) e Zbiek et al. (2007).

Neste estudo apresenta-se apenas uma das tarefas propostas nas aulas observadas. O problema em análise, tem como foco a caracterização dos elementos de uma pilha, através do estudo da expressão algébrica $U = \varepsilon - rI$ (sendo U – diferença de potencial; ε – força eletromotriz; r – resistência interna e I – intensidade da corrente elétrica), que relaciona as grandezas U e I . É solicitado, que através da equação da reta de ajuste aos dados experimentais, fosse obtido r e ε , de acordo com as orientações: regista na tabela da CG os valores de U e I , em unidades SI e, a partir da mesma, obtém o gráfico de $U=f(I)$. Pretendia-se, com a inserção dos dados recolhidos das variáveis U e I no menu *lista e folha de cálculo* da CG (Numérica→Tabular), relacionar os valores inseridos, com as ordenadas e abcissas dos pontos da representação gráfica de $U=f(I)$. Das representações tabular e gráfica dos pontos obtidos (Tabular→Gráfica), transitou-se para a representação gráfica da reta (Gráfica→Gráfica), obtendo-se a equação da reta (Gráfica→Algébrica) (Figura 1).

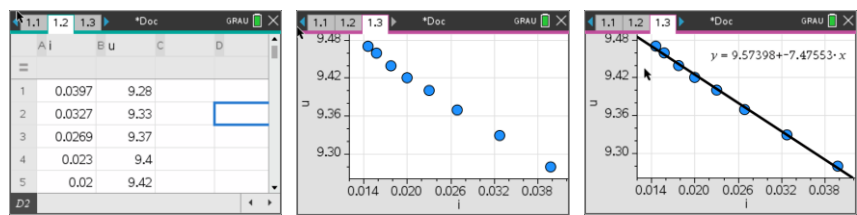


Figura 1. Sequência das representações utilizadas

Através da equação $y = 9,574 - 7,476x$, passa-se da representação gráfica para a algébrica, permitindo comparação com a expressão algébrica $U = \varepsilon - rI$ (Gráfica→Algébrica→Algébrica). Com a expressão $U = 9,574 - 7,476I$, concluiu-se que a pilha tem uma resistência interna $r = 7,476\Omega$ e força eletromotriz $\varepsilon = 9,574V$ (Algébrica→Numérica). Desta forma, para obtenção de r e ε , a professora mobilizou diferentes representações (Brown & Mehilos, 2010; Friedland & Tabach, 2001) revelando fluência representacional com recurso à tecnologia (Rocha, 2016; Zbiek et al., 2007). Na Tabela 1 apresentam-se alguns exemplos das sequências das representações utilizadas.

Tabela 1 Sequência de representações mobilizadas pela professora com base em Rocha (2019)

Representação		Professora
Numérica→Tabular	Abordagem	Organização dos dados recolhidos na tabela
	Exemplo	Regista na tabela os valores de U e I
Tabular→Gráfica	Abordagem	Obtenção do gráfico de pontos
	Exemplo	A partir da tabela, desenha o gráfico dos pontos
Gráfica→Gráfica	Abordagem	Comparação das representações gráficas
	Exemplo	A partir do gráfico dos pontos, obtém o gráfico de $U=f(I)$
Gráfica→Algébrica→Numérica	Abordagem	Analisar reta de ajuste obtida pela CG e comparar a equação da reta de ajuste com o modelo teórico
	Exemplo	Determina a reta de ajuste, com $U = \varepsilon - rI$
Algébrica→Algébrica	Abordagem	Analisar dados obtidos na reta de ajuste
	Exemplo	Compara equação de reta com $U = \varepsilon - rI$, onde $r = 7,48\Omega$ e $\varepsilon = 9,57V$

A fluência representacional, de acordo com Rocha (2016) e Zbiek et al. (2007), não se limita ao conhecimento de como trabalhar um conceito recorrendo a diferentes representações, mas também, à forma como são articuladas. Este conhecimento permitiu à professora articular diferentes representações, com recurso à CG, com o objetivo de facilitar a compreensão do fenómeno físico em questão.

O estudo da fluência representacional do professor de Físico-Química, poderá permitir uma maior e melhor mobilização dos conhecimentos matemáticos na resolução de problemas de física. Desta forma, ao fomentar a articulação com a disciplina de Matemática, poderá incentivar abordagens mais integradas e eficazes que beneficiam tanto professores quanto alunos.

Agradecimentos

Este trabalho é apoiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., que concedeu uma bolsa de doutoramento à primeira autora (2021.04983. BD) e financiou o projeto TecTeachers (2022.03892.PTDC).

Referências

- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538. <https://doi.org/10.2307/41183116>
- Coelho, T., Botelho, M. C., & Rocha, H. (no prelo). Fluência representacional numa abordagem tecnológica em Matemática e Física. In *VII Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): Livro de atas*. Instituto Politécnico de Bragança.
- Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2), 363-382. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9633-6>
- Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In A. A. A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). NCTM.
- Hansson, L., Hansson, Ö., Juter, K., & Redfors, A. (2019). A case study of the role of mathematics in physics textbooks and in associated lessons. In G. Pospiech, M. Michelini, & B. Eylon (Eds.), *Mathematics in physics education* (pp. 293-316). Springer.
- Pols, C. F. J., Dekkers, P. J. J. M., & de Vries, M. J. (2021). What do they know? Investigating students' ability to analyse experimental data in secondary physics education. *International Journal of Science Education*, 43(2), 274-297. <https://doi.org/10.1080/09500693.2020.1865588>
- Pospiech, G., Michelini, M., & Eylon, B. (Eds.). (2019). *Mathematics in physics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9>
- Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 35(2), 53-64. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrw005>
- Rocha, H. (2019). The impact of technology on the teachers' use of different representations. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME11* (pp. 2731-2738). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Thurm, D., & Barzel, B. (2020). Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM*, 52, 1411-1422. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01158-6>
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Information Age Publishing.

GRUPO DE DISCUSSÃO 3

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E FORMAÇÃO DE PROFESSORES E EDUCADORES

PROBLEM SOLVING AND TEACHER EDUCATION

Alexandra Gomes

Instituto de Educação da Universidade do Minho, Portugal

magomes@ie.uminho.pt

María Teresa González Astudillo

Universidad de Salamanca, España

maite@usal.es

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

A resolução de problemas é uma capacidade matemática fundamental, que assume um papel central nos currículos de Matemática desde os anos 80 do século passado, com a publicação da *Agenda para a ação* do NCTM (NCTM, 1980), onde era apresentada como devendo constituir o foco do ensino da Matemática. Em Portugal, a importância desta capacidade é também reconhecida desde há muito, surgindo como uma orientação curricular importante na *Renovação do currículo de Matemática* (APM, 1988). A resolução de problemas, como atividade matemática, tem uma longa história, como mostram Stanic e Kilpatrick (1989), mas o reconhecimento da sua importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática deve-se principalmente ao trabalho de Pólya, em especial dado o grande impacto da publicação *How to solve it* (Pólya, 1945). Para além das conhecidas “quatro fases”, Pólya estabelecia uma importante distinção entre exercício, uma tarefa em que os alunos já conhecem o processo de resolução, e problema, uma tarefa em que é necessário conceber e concretizar uma estratégia original de resolução.

Um problema é um dos diversos tipos de tarefa que pode ser proposto aos alunos numa aula de Matemática (Ponte, 2005). Muitas tarefas, sem terem a aparência de um problema bem formulado, assumem, no entanto, um carácter problemático, tendo, por isso, grande interesse para o ensino-aprendizagem. É o caso, por exemplo, das investigações e explorações. Além disso, não se pode perder de vista que a noção de problema é relativa ao aluno a quem a tarefa é proposta, dependendo das suas capacidades e conhecimentos prévios. O que é um difícil problema para um dado aluno, pode não passar de um simples exercício para outro aluno, que sabe perfeitamente como o resolver.

Reconhecendo-se a importância dos problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, cabe, naturalmente, ao professor introduzi-los na sua prática. O professor tem de ser capaz de selecionar problemas cuja resolução possa ser uma atividade produtiva para os seus

alunos, seja porque proporcionam a introdução de ideias matemáticas importantes que os estes ainda não estudaram, seja porque possibilitam a aplicação cuidadosa de conceitos e procedimentos matemáticos já antes estudados pelos alunos. Embora a resolução de problemas seja uma atividade matemática que os professores reconhecem como importante, como mostra o estudo *Matemática 2001* (APM, 1998), a verdade é que não é tão usada na sala de aula como se poderia esperar, sobretudo na sua vertente mais interessante, para a introdução de novos conceitos e procedimentos matemáticos.

Torna-se assim bem claro que a introdução da resolução de problemas matemáticos na prática de ensino é, também, ela própria, problemática em termos profissionais, requerendo muito investimento na formação dos professores e educadores, o tema deste Grupo de Discussão do EIEM. Trata-se de um domínio já com uma tradição de estudo muito significativa, mas que se tem renovado à medida que evoluem as noções de resolução de problemas, prática profissional do professor e formação e desenvolvimento profissional. Neste encontro surgem associações interessantes da resolução de problemas a outras capacidades matemáticas como a formulação de problemas e o estabelecimento de conexões bem como surgem conceitos muito relevantes relativos à formação de professores como as tarefas de aprendizagem profissional, a identidade matemática e os estudos de aula.

O estudo de aula (em inglês, *lesson study*), que pode ser realizado com professores em serviço ou com futuros professores, representa uma pequena investigação sobre a prática profissional de um grupo que trabalha colaborativamente para tentar perceber como resolver um problema da aprendizagem dos alunos (Fujii, 2018; Ponte et al., 2016; Stigler & Hiebert, 1999). No estudo de aula estão presentes os momentos essenciais do trabalho do professor, a preparação da aula, a sua realização e reflexão, realizados com um aprofundamento que vai muito além do que é habitual. É isso que lhe confere o seu carácter investigativo: a aula é preparada em detalhe, e essa preparação tem por base um estudo prévio em que se consideram elementos relevantes para o ensino-aprendizagem da questão identificada. Além disso, a aula é observada por todo o grupo, que recolhe dados sobre a aprendizagem dos alunos com base em instrumentos de coleta de dados preparados com antecedência. As observações feitas e as resoluções dos alunos permitem a todo o grupo analisar em que medida a tarefa proposta e o trabalho realizado na aula permitiu ou não levar os alunos a efetuarem as aprendizagens visadas, saber se é necessário fazer alterações na tarefa ou na dinâmica da aula, ou conceber um plano de aula totalmente diferente. Trata-se, portanto, de um trabalho que vai muito além do simples emitir de opiniões, e que tem por base estudo, discussão em grupo colaborativo e tirar conclusões com base em evidência empírica. Perceber que aprendizagens podem fazer efetivamente os professores neste processo formativo e como este pode ser conduzido de modo a produzir os resultados pretendidos são importantes questões para investigação.

Neste grupo de discussão, foram apresentadas dez contribuições que exploram diversos aspetos relacionados com a resolução de problemas e a formação de professores e educadores. A primeira contribuição concentra-se em conceitos associados à resolução de problemas.

No estudo “*Formulação de problemas na formação inicial de professores*”, de Alexandra Gomes, é abordada a análise dos problemas formulados por futuros educadores/professores do 1.º CEB, com o objetivo de investigar a qualidade desses problemas. Reconhecendo que os professores desempenham um papel vital na criação de oportunidades de aprendizagem de formulação de problemas para os seus alunos, mas

geralmente não têm experiência nessa formulação, torna-se evidente a necessidade de desenvolver conhecimentos sobre formulação de problemas durante a sua formação. No contexto de uma unidade curricular de Mestrado, os estudantes foram desafiados a criar problemas com base em livros de literatura infantil. Esses problemas foram posteriormente analisados quanto ao seu tipo e nível de complexidade cognitiva. O estudo conclui que a maioria dos problemas formulados eram do tipo “problemas de processo”, que requeriam a aplicação de procedimentos com conexões para a sua resolução.

Cinco estudos apresentados neste grupo de discussão abordam o Estudo de Aula como processo de desenvolvimento profissional. Destes, dois foram conduzidos com professores em serviço, enquanto os três restantes envolveram futuros professores.

Filipa Faria, João Pedro da Ponte, Margarida Rodrigues e Marisa Quaresma apresentam uma investigação qualitativa intitulada “*Seleção, adaptação e reflexão sobre uma tarefa de proporcionalidade direta num estudo de aula: o passeio de bicicleta*”. Este estudo foi realizado com um grupo de quatro professoras de Matemática num Estudo de Aula. O principal objetivo desse estudo era identificar os aspetos que o grupo de professoras levava em consideração ao selecionar, adaptar e, posteriormente, refletir sobre uma tarefa relacionada à proporcionalidade direta destinada a uma turma do 6.º ano. A recolha dos dados referentes às sessões em que as professoras realizaram a seleção, adaptação e reflexão da tarefa, foi feita recorrendo a gravações em áudio. Posteriormente, esses dados foram submetidos a uma análise de conteúdo. Os resultados obtidos sugerem que a colaboração e a reflexão entre as professoras, ao longo das sessões, contribuíram para que considerassem implicitamente princípios gerais, como a adequação da tarefa aos objetivos da aula, o nível de desafio apropriado e o estímulo ao desenvolvimento de conhecimentos básicos. Dessa forma, ao longo da reflexão, as professoras consideraram que a tarefa final foi promotora da aprendizagem dos alunos.

O estudo realizado por Ana Lúcia Miguens, João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma, intitulado “*Seleção e adaptação de tarefas de resolução de problemas para a promoção do pensamento computacional*”, investiga de que maneira o estudo de aula promove o entendimento dos professores em relação ao Pensamento Computacional, a sua posição no currículo de Matemática, o seu processo de ensino e as dificuldades a ele associadas. Além disso, os autores exploram a interligação entre esse conhecimento e a seleção, desenho e sequenciamento de tarefas de resolução de problemas, com o propósito de fomentar o desenvolvimento do Pensamento Computacional.

No estudo intitulado “*Promover o raciocínio matemático dos alunos através de problemas: aprendizagens de uma futura professora durante um estudo de aula*”, Micaela Martins e João Pedro da Ponte investigaram como uma futura professora de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, no último ano de sua formação inicial, desenvolve seu conhecimento didático ao longo de um estudo de aula. Especificamente, o foco estava na promoção do raciocínio matemático dos alunos por meio da resolução de problemas. Utilizando uma abordagem qualitativa e interpretativa, a investigação analisou as experiências e o discurso da futura professora durante o estudo de aula, com ênfase nas fases de preparação de uma aula e reflexão após a aula. Além disso, foram consideradas a análise que a futura professora fez no seu relatório de estágio sobre os processos de raciocínio demonstrados pelos alunos e as conclusões que retirou dessa análise. Os resultados revelaram que, inicialmente, a tarefa de selecionar atividades que incentivavam a justificação representou um desafio para a futura professora. A discussão sobre as representações a privilegiar levou a futura professora a prestar uma atenção mais criteriosa às características das tarefas que promovem os processos de raciocínio dos

alunos, enriquecendo o seu conhecimento didático nesse aspeto. O trabalho minucioso na preparação da aula, impulsionado pela colaboração e com foco na tarefa, levou a futura professora a compreender a influência das tarefas propostas no trabalho dos alunos, contribuindo, assim, para o desenvolvimento de seu conhecimento sobre como promover o raciocínio matemático na sala de aula.

No trabalho intitulado “*Do planeamento à reflexão: o trabalho dos futuros professores numa tarefa sobre pirâmides*”, da autoria de Linda Cardoso, João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma, o objetivo central foi identificar os elementos do conhecimento didático que os futuros professores mobilizam durante o processo de estudo de aula, bem como destacar as atividades desse estudo de aula que potenciam o desenvolvimento desses elementos. Este estudo foi conduzido numa turma do 1º ano de mestrado em formação de professores dos primeiros anos. Os dados apontam para o fato de que as futuras professoras mobilizam e desenvolvem o seu conhecimento relacionado ao planeamento de aulas, particularmente em relação a tarefas exploratórias, dificuldades e estratégias de resolução, bem como na observação da aprendizagem dos alunos. Esse desenvolvimento ocorre quando as futuras professoras estabelecem objetivos, resolvem e analisam a tarefa, antecipam dificuldades e estratégias de resolução, observam as resoluções dos alunos durante a aula e, por fim, refletem e comparam as suas expectativas iniciais com os resultados obtidos.

Gimo José Maundera analisa as “*Ações do futuro professor na resolução de tarefas num estudo de aula*”. Este estudo, conduzido em Moçambique, envolveu a análise das ações do futuro professor relacionadas à condução das atividades dos alunos, episódios significativos e métodos de orientação durante o processo de ensino e aprendizagem na sala de aula. A aula foi realizada na 9.ª classe e incluiu a participação de duas professoras da escola, dois futuros professores, um professor universitário e o investigador. Os dados foram recolhidos por meio de análise documental, gravações e observação da aula de investigação. O estudo revela que os futuros professores tendem a apoiar e informar os alunos durante a resolução de tarefas.

Continuando a explorar o desenvolvimento profissional, mas remetendo para outros processos formativos, apresentam-se três outros contributos.

No estudo, “*Formação de professores de matemática e a resolução de problemas em tarefas de aprendizagem profissional*”, Rosana Maria Luvezute Kripka, Alessandro Jacques Ribeiro e Márcia Aguiar partilham os resultados de uma investigação que se concentrou na identificação de oportunidades de aprendizagem profissional e no desenvolvimento profissional docente, propiciadas por meio de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), num processo formativo com abordagem exploratória. A formação destinou-se a professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, e visava explorar os diferentes tipos de raciocínios matemáticos. A investigação, de natureza qualitativa com um paradigma interpretativo, envolveu a participação de 50 professores que atuavam na rede pública de ensino de um município localizado no Rio Grande do Sul, Brasil. Os dados foram recolhidos através de observações e de um questionário com perguntas abertas. A análise dos dados teve como objetivo responder a duas questões principais: *De que modo emergem oportunidades de aprendizagem profissional, propiciadas por meio de uma TAP, quando professores da educação básica discutem e analisam, coletivamente, diferentes estratégias de resolução de um problema envolvendo padrões e regularidades? De que modo as TAP podem propiciar o desenvolvimento profissional docente?* Constatou-se que ocorreram oportunidades de aprendizagem profissional, especialmente durante o desenvolvimento

do problema aberto da TAP e nas discussões em grupo. A participação ativa dos professores, facilitada pela abordagem e pela partilha de conhecimentos, estimulou reflexões sobre suas próprias práticas. Isso permitiu o aprofundamento de seus conhecimentos matemáticos e didáticos, bem como a ampliação de percepções sobre os processos de ensino e aprendizagem, resultando num desenvolvimento profissional docente.

María Elena Irigoyen Carrillo, María Teresa González Astudillo e Angelina Alvarado Monroy, no seu estudo, “*La resolución de un problema de probabilidad como un medio para establecer la identidad matemática de docentes*”, concentram-se na questão da Identidade Matemática. As autoras, definem a Identidade Matemática como uma estrutura afetiva dinâmica que codifica a distinção da pessoa durante a atividade matemática, tanto individualmente quanto coletivamente. Relatam sobre a Identidade Matemática de três professores da educação básica no México, à medida que experimentam um problema de probabilidade num ambiente baseado em jogos, colaboração e exploração. Para isso, foi usada a metodologia de estudo de caso para identificar traços na Identidade Matemática, considerando aspetos cognitivos e emocionais relacionados à participação e ao comprometimento dos professores com a tarefa matemática.

Essa análise possibilitou estabelecer a Identidade Matemática de cada professor com base em suas características distintivas. Os resultados convidam-nos a refletir sobre como as condições do design de tarefas matemáticas, focadas na resolução de problemas, podem transformar de forma positiva a Identidade Matemática do professor, de modo que isso possa ser refletido em sua relação com os alunos.

A contribuição de Louise Lima e de Ariana Cosme, intitulada “*Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação: perspectiva dos professores, sobre as estratégias pedagógicas para uma aprendizagem significativa da matemática*” apresenta um recorte de uma investigação realizada no âmbito do Doutorado em Ciências da Educação da primeira autora, com foco num de seus objetivos específicos: a compreensão das escolhas e decisões pedagógicas feitas por professores visando promover uma aprendizagem significativa em matemática. O desenho da investigação baseia-se numa abordagem qualitativa, no contexto do paradigma fenomenológico-interpretativo, empregando o método de Estudo de Caso interpretativo, etnográfico e educacional. A investigação concentra-se em dez professores de oito turmas do Ensino Básico, distribuídas em três escolas pertencentes a um Agrupamento de Escolas Públicas em Portugal. A recolha de dados englobou observação participante, entrevistas semiestruturadas, observação direta, *focus groups* e análise de documentos pessoais. Posteriormente, os dados passaram pela técnica de Análise de Conteúdo. As autoras examinam informações relacionadas à subcategoria “estratégias pedagógicas para promover a aprendizagem significativa em matemática”, que se insere na categoria “gestão e organização do trabalho pedagógico”, integrada na dimensão “intencionalidade pedagógica”. Os resultados apontam para a importância da cuidadosa seleção de problemas matemáticos e a diversificação de sua apresentação. Além disso, os professores demonstram uma preferência por atividades de aprendizagem em pares, valorizando discussões coletivas e o compartilhamento de estratégias, adotando uma abordagem flexível que promove a cooperação.

Por fim e alterando o foco dos professores para os seus formadores, Pablo Giadas, Laura Muñoz-Rodríguez e Luis J. Rodríguez-Muñoz discutem a formação dos formadores de professores em Espanha na sua contribuição “*¿Cómo se forman los formadores de profesores de matemáticas? La situación española*”. A figura dos formadores de

professores de Matemática engloba diversos perfis de formação e trajetórias profissionais diferentes. Portanto, o objetivo deste trabalho é analisar a formação recebida pelos formadores de professores de Matemática e identificar diferentes caminhos para se tornar um formador de professores de Matemática. Para isso, foram recolhidas informações de 157 formadores de professores de Matemática espanhóis por meio de um questionário e, posteriormente, esses dados foram analisados estatisticamente. Conclui-se que, na sua maioria, os formadores de professores de Matemática espanhóis seguem três trajetórias formativas para se tornarem formadores de professores.

Referências

- APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. APM.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. APM.
- Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winslow, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1-21). Springer.
- NCTM (1980). *An agenda for action*. NCTM.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *BOLEMA*, 30(56), 868-891.
- Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). NCTM & Lawrence Erlbaum.
- Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press.

Comunicações

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL
MATHEMATICS TEACHER TRAINING AND PROBLEM SOLVING IN PROFESSIONAL LEARNING TASKS

Rosana Maria Luvezute Kripka

Universidade Federal do ABC, Brasil

rlkripka@gmail.com

Alessandro Jacques Ribeiro

Universidade Federal do ABC, Brasil

alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Márcia Aguiar

Universidade Federal do ABC, Brasil

marcia.aguiar@ufabc.edu.br

Resumo: Esta pesquisa busca identificar oportunidades de aprendizagem profissional e do desenvolvimento profissional docente, obtidas por meio de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), em um processo formativo com abordagem de ensino exploratória. O processo formativo para professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental visou explorar os processos do raciocínio matemático. A pesquisa é qualitativa, com paradigma interpretativo. Participaram 50 professores que atuavam na rede pública de ensino de uma cidade do Rio Grande do Sul, Brasil. Os dados recolhidos foram: a observação da formadora e um questionário para os professores com perguntas abertas. A análise interpretativa dos dados visou responder: *De que modo emergem oportunidades de aprendizagem profissional, propiciadas por meio de uma TAP, quando professores da educação básica discutem e analisam, coletivamente, diferentes estratégias de resolução de um problema envolvendo padrões e regularidades? De que modo as TAP podem contribuir com o desenvolvimento profissional docente?* Constatou-se que ocorreram *oportunidades de aprendizagem profissional* no desenvolvimento da tarefa matemática da TAP e nas discussões coletivas realizadas. A participação dos professores, propiciada pela abordagem e a partilha de conhecimentos propiciaram momentos reflexivos sobre suas próprias práticas. Isso possibilitou o aprofundamento de conhecimentos matemáticos e didáticos e a ampliação de percepções sobre os processos de ensino e de aprendizagem, o que contribuiu com o desenvolvimento profissional docente dos participantes.

Palavras-chave: formação de professores de matemática, tarefas de aprendizagem profissional, ensino exploratório, oportunidades de aprendizagem profissional, desenvolvimento profissional docente.

Abstract: This article presents research results on the identification of professional learning opportunities and teaching professional development, obtained through a Professional Learning Task (TAP), in a training process with an exploratory approach. The training was aimed at mathematics teachers in the final years of Elementary School, aiming to explore different types

of mathematical reasoning. The research is qualitative, with an interpretative paradigm. 50 teachers who worked in the public education network of a city located in RS/BR participated. Data collection was carried out through observation and a questionnaire with open questions. The interpretative analysis of the data aimed to answer: How do professional learning opportunities emerge, provided through a TAP, when basic education teachers collectively discuss and analyze different strategies for solving a problem involving patterns and regularities? How TAP can contribute teacher professional development? It was concluded that professional learning opportunities occurred in the development of the open problem of the mathematical task and in the collective discussions held. The active participation of teachers, provided by the approach, and sharing of knowledge provided moments of reflection about their own practices. This enabled the deepening of mathematical and didactic knowledge and the expansion of perceptions about the teaching and learning processes, which contributed to the professional teaching development of the participants.

Keywords: mathematics teacher training, professional learning tasks, exploratory teaching, professional learning opportunities, teacher professional development.

Introdução

As dificuldades de aprendizagem em matemática frequentemente são foco de investigação na área da Educação Matemática (Eberhardt & Coutinho, 2011). No Brasil, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira aponta que essas dificuldades aumentaram após o período pandêmico, ao divulgar os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica 2021 (pesquisa com 5,3 milhões de estudantes de 72 mil escolas públicas e privadas, que representa 71,2% dos alunos previstos). Os resultados indicam a necessidade de aprimoramento dos conhecimentos docentes para que possam contribuir com a diminuição de tais dificuldades.

No Brasil, atualmente está em vigor a BNCC – Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que destaca a necessidade dos educadores matemáticos conhecerem diferentes abordagens didáticas, especialmente aquelas que consideram processos exploratórios em sala de aula, de modo a propiciar ambiente de aprendizagem que estimulem o desenvolvimento de competências gerais da educação.

Visando contribuir com a minimização dos problemas de ensino e de aprendizagem ocorridos nas escolas brasileiras, Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) têm sido usadas em processos formativos de modo a estimular o desenvolvimento profissional docente de professores de Matemática (Ribeiro et al., 2020; Jardim et al., 2023).

Nesse artigo apresentamos resultados de uma pesquisa qualitativa sobre identificação de oportunidades de aprendizagem profissional e do desenvolvimento profissional docente, propiciadas por meio de uma TAP, em formação continuada de professores de matemática na região Sul do Brasil, desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório. As perguntas orientativas de pesquisa foram: *De que modo emergem oportunidades de aprendizagem profissional, propiciadas por meio de uma TAP, quando professores da educação básica discutem e analisam, coletivamente, diferentes estratégias de uma tarefa matemática? De que modo as TAP podem contribuir com o desenvolvimento profissional docente?*

Enquadramento Teórico

Tarefas Matemáticas (TM) e Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP)

Stein e Smith (1998) definem tarefa: “como um segmento da actividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular” (pp. 22).

Ponte (2005), em relação aos tipos de tarefas destaca: os problemas, os exercícios, as investigações e as explorações. Afirma que os exercícios, ao propiciarem ao aluno o uso de conhecimentos prévios, são usados com o propósito de consolidação. Quanto ao uso resolução de problemas, o objetivo consiste em propor desafios aos alunos, de modo a desenvolverem suas capacidades matemáticas por meio de descobertas, incentivando-os à aprendizagem de conceitos. Esclarece que para uma tarefa ser considerada um problema é preciso ter um grau de dificuldade elevado, de modo que o estudante não tenha um processo imediato para resolvê-la. Sobre as tarefas de exploração indica que são do tipo abertas e relativamente fáceis, mas que apresentam um elevado grau de desafio, permitindo o uso de diferentes estratégias de resolução. Em relação às investigações matemáticas, indica que estas se assemelham muito às resoluções de problemas, mas que se propõe o envolvimento dos alunos desde a formulação de questões a serem resolvidas, o que pode levar a diferentes soluções, o que não acontece no caso de um problema, onde todas as informações e perguntas já estão colocadas.

Stein e Smith (1998) sugerem que uma diferenciação importante sobre as tarefas que se refere ao seu nível cognitivo. Uma tarefa de “baixo” nível cognitivo seriam caracterizadas por (i) memorização ou (ii) procedimentos sem conexões. No caso das tarefas de “alto” nível cognitivo estariam associadas à (i) procedimentos com conexões e (ii) tarefas do tipo fazendo matemática. Ponte (2005) destaca a duração e o contexto como dimensões importantes, sendo que uma tarefa pode ser curta ou longa. Designa “projeto” como um exemplo de tarefa que é de longa duração e que partilha muitas das características das investigações.

As tarefas matemáticas podem ser desenvolvidas por estudantes e professores como um meio para o ensino e para a aprendizagem. Já as Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) são destinadas exclusivamente aos professores, sendo planejadas e realizadas como meios para oportunizar aprendizagens dos professores.

As TAP são elaboradas a partir de tarefas matemáticas e de “registros de prática”, tais como, vídeos ou narrativas de episódios de aulas, produções dos alunos, análise de materiais didáticos etc. (Ball et al., 2014). Diversas pesquisas enfatizam o papel que TAP assumem como mediadoras na construção/aprofundamento de conhecimentos dos professores a partir de suas experiências em sala de aula (Smith, 2001; Ribeiro & Ponte, 2019).

O trabalho com a TAP pode propiciar aos professores processos de reflexão e construção de conhecimentos específicos matemáticos, pedagógicos e curriculares a partir de fragmentos e experiências reais de sala de aula. (Ribeiro & Ponte, 2019). Corroborando com essas ideias, White et al. (2013) e Ball et al. (2014) indicam que os processos formativos propiciam oportunidades de aprendizagem docente quando levam o professor a discutir coletivamente e a refletir com os seus pares, retirando-o de seu isolamento. Desse modo, processos de formação continuada nos quais se propõe o uso de TAP, ao promoverem o aprofundamento de conhecimentos matemáticos e didáticos sobre um tema, contribuem com o desenvolvimento profissional docente (Ribeiro & Ponte, 2019).

As TAP são parte integrante do modelo teórico metodológico *PLOT* (*Professional Learning Opportunities for Teachers* – Oportunidades de Aprendizagem Profissional para Professores) o qual tem por objetivo organizar o *design* dos processos formativos. O modelo PLOT possui três domínios: (i) Papel e Ações do Formador (PAF); (ii) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP); (iii) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP) (Ribeiro & Ponte, 2020). Para esta pesquisa vamos focar apenas as TAP.

No modelo PLOT, do ponto de vista da dimensão conceitual, a abordagem do ensino exploratório tem como objetivo promover o desenvolvimento do conhecimento profissional docente (tanto do conhecimento específico matemático, como do conhecimento didático). Na dimensão operacional, trabalha-se com uma TAP composta por uma tarefa matemática de alto nível cognitivo e por registros de práticas autênticas, recolhidas em salas de aulas.

Ensino Exploratório

Ponte (2005) destaca que essa abordagem se dá ênfase às tarefas de exploração. O papel do aluno é de participação ativa, ou seja, de trabalho autônomo na exploração da tarefa matemática (individualmente, em pequenos grupos ou em plenária) e de interação colaborativa com o professor e colegas. O papel do professor é de guia (ou de mediador da aprendizagem) e de gestor, sendo responsável por orquestrar produtivamente as discussões matemáticas coletivas. A comunicação é estimulada por meio de discussões colaborativas, de modo a propiciar reflexões e compreensões dos conceitos matemáticos abordados. Destaca-se que, no ensino exploratório a resolução de problemas é considerada uma tarefa matemática apropriada quando apresenta um desafio elevado (mas adequado ao nível de ensino) e é aberta, ou seja, permite o uso de diferentes estratégias matemáticas em sua resolução, de modo a estimular a percepção de conexões entre diferentes significados dos conceitos matemáticos envolvidos.

A abordagem exploratória possibilita aos estudantes desenvolver o raciocínio, conhecimentos e capacidades em Matemática e também assumir uma perspectiva muito mais positiva sobre o que é esta ciência como atividade humana (Ponte et al., 2020).

Nessa abordagem, uma aula é desenvolvida em quatro fases: (i) introdução da tarefa; (ii) resolução autônoma pelos estudantes (em pequenos grupos); (iii) discussão coletiva das resoluções com toda a turma e (iv) sistematização das aprendizagens realizadas (Oliveira et al., 2013). Destaca-se que alguns autores reúnem as duas últimas fases e consideram apenas três fases (Ponte et al., 2020).

Nessa modalidade o papel do professor é essencial para que os alunos desenvolvam suas compreensões matemáticas e mobilizem os diferentes tipos de raciocínios. (Ponte et al., 2020). Assim, exige o apoio dos professores em relação ao trabalho autônomo dos alunos, na promoção das interações, do diálogo, da socialização de ideias matemáticas, incentivando os alunos a justificarem os seus pensamentos nas estratégias de resolução utilizadas (Jesus et al., 2018).

O planejamento da aula, nessa perspectiva, é fundamental, especialmente no que se refere à antecipação de possíveis resoluções e reações dos estudantes no decorrer da tarefa. Assim, o professor será capaz de responder adequadamente a grande parte das questões dos estudantes, bem como enfrentar os desafios que emergem na gestão das discussões, durante sua realização (Serrazina, 2017).

Desenvolvimento Profissional Docente (DP)

O conceito de desenvolvimento profissional vêm sendo objeto de pesquisa de diversos estudos (Ponte (1994, 1998), Nóvoa (2009), Day (2001), Fiorentini (2008); Mizukami (2013)) com objetivo de investigar estratégias que possam contribuir com os processos de formação de professores. É um processo de longo prazo que decorre de oportunidades de aprendizagem e de experiências ao longo da vida do professor (Fiorentini, 2008). Day (2001), ressalta que esse processo é complexo e diversificado:

É o processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, reveem, renovam e ampliam, individual ou coletivamente, o seu compromisso com os propósitos morais do ensino, adquirem e desenvolvem, de forma crítica, juntamente com as crianças, jovens e colegas, o conhecimento, as destrezas e a inteligência emocional, essenciais para uma reflexão, planificação e prática profissionais eficazes, em cada uma das fases das suas vidas profissionais. (pp. 20-21)

Mizukami (2013), aponta a escola como um local de referência para a aprendizagem docente e apresenta uma concepção de desenvolvimento profissional docente como um processo complexo e contínuo que ocorre ao longo da vida do sujeito.

Nessa linha, Fiorentini (2008), apresenta o desenvolvimento profissional docente como um processo diacrônico “que tem início antes de ingressar na licenciatura, estende-se ao longo de toda a sua vida profissional e acontece nos múltiplos espaços e momentos da vida de cada um, envolvendo aspectos pessoais, familiares, institucionais e socioculturais” (pp. 4-5). Ou seja, resulta de aprendizagens advindas de trajetórias profissionais e pessoais.

Ponte (1994) indica que estudos sobre práticas e investigações coletivas sobre saberes e conhecimentos constituídos, relativos tanto aos conteúdos de ensino, como as questões pedagógicas, são estratégias que possibilitam o desenvolvimento profissional, pois envolvem uma formação docente que considera articulações entre conhecimentos teóricos e práticos. Destaca que esses conhecimentos docentes podem ser desenvolvidos pelos próprios professores num processo de interação e práticas coletivas. Ponte (1998) também se refere à importância da participação ativa do professor em seu próprio desenvolvimento docente e de suas aprendizagens em suas experiências ao longo da vida, resultando de combinações de processos formais e informais.

Nóvoa (2009) destaca a importância de se conceber os processos formativos de professores considerando a responsabilidade social da promoção do desenvolvimento profissional docente, que preparem para atuação docente numa sociedade que está em constante evolução. Segundo o autor, os processos formativos devem considerar o “contexto de responsabilidade profissional, sugerindo uma atenção constante a necessidade de mudanças nas rotinas de trabalho, pessoais, coletivas ou organizacionais” (p. 35).

Considerando os apontamentos teóricos apresentados, compreende-se que oferecer processos de formação continuada, por meio da abordagem do ensino exploratório, possibilita aos docentes a participação de ambientes interativos e colaborativos, os quais estimulam o desenvolvimento profissional docente, tanto do ponto de vista teórico, como do ponto de vista prático. Ao explorar diferentes conhecimentos, estratégias, perspectivas e conexões, tanto do ponto de vista de conhecimentos específicos de conteúdo, como do ponto de vista de conhecimentos pedagógicos, ou do currículo, os docentes tem a oportunidade de aperfeiçoarem seus conhecimentos docentes teóricos ou práticos, o que os prepara para futuras atuações em seus próprios contextos da sala de aula.

Contexto da formação e encaminhamento metodológico da pesquisa

O curso de formação de professores de Matemática foi realizado em uma cidade do Rio Grande do Sul, Brasil, vinculada à Secretaria da Educação Municipal e contou com uma formadora (primeira autora do artigo). Foi oferecida em dois turnos (de quatro horas cada), manhã e tarde. Participaram 50 professores (35 de manhã e 15 de tarde, os quais

compareceram conforme suas disponibilidades de trabalho. Os professores lecionavam para alunos dos anos finais do ensino fundamental (idades entre 11 e 15 anos).

A formação foi desenvolvida por meio de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), elaborada pelo grupo ForMatE⁶ (Formação Matemática para o Ensino), com o propósito de explorar os diferentes processos de raciocínios matemáticos envolvidos na resolução de uma tarefa potencialmente significativa, conforme os pressupostos teóricos do modelo *PLOT* (Ribeiro & Ponte, 2020). Inicialmente foram socializadas com os professores os conceitos principais sobre a proposta formativa, por meio de *slides*, esclarecendo o que são as TAP e quais eram os principais conceitos sobre assuntos processos de “raciocínio matemático” a ser discutido e aprofundado, usando como texto base o artigo de Ponte et al. (2020). Na sequência, foi desenvolvido o Trabalho com a TAP, conforme o planejamento do Quadro 1, na qual foi utilizada a tarefa matemática apresentada na Figura 1.

Quadro 1. Planejamento da proposta formativa

— Acolhida e apresentação inicial.
— Trabalho com a TAP • Trabalho individual realizado para responder a Tarefa Matemática, contendo questões destinadas aos alunos. • Formação de pequenos grupos para discussões: ○ Socialização das estratégias e percepção das diferentes formas de resolução. ○ 1ª parte – Analisando respostas dos estudantes. ○ 2ª parte – Antecipando ações do professor. • Intervalo. • Plenária (com todos os professores) ○ Socialização de ideias e estratégias. ○ Sistematização das conclusões.
— Questionário avaliativo sobre a formação, com seguintes perguntas abertas: (1) Quais suas impressões gerais sobre a formação? (por exemplo: A proposta formativa foi adequada? O tempo para o desenvolvimento foi bom? Etc.); (2) A formação contribuiu com seu desenvolvimento docente? Se sim, de que modo? (3) Contribuições? Sugestões? Críticas?

Fonte: Autores.

A presente pesquisa caracteriza-se pela abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), considerando, para análise de dados, a perspectiva interpretativa do construtivismo social (Crotty, 1998). A recolha de dados foi realizada (i) por meio da observação participante no desenvolvimento da TAP, (conforme o planejamento da proposta formativa apresentada no Quadro 1) realizado pela primeira autora e (ii) por meio das respostas do questionário final aplicado, totalizando 41 registros escritos dos professores. Destaca-se que 9 professores não responderam ao questionário avaliativo, pois tiveram necessidade de se ausentar antes do término da formação. Os dados coletados foram organizados de tal modo que permitissem a análise interpretativa, visando responder as perguntas orientativas da pesquisa, apresentadas na introdução. Após o trabalho individual de exploração da tarefa matemática, os professores formaram grupos de 4 a 5 participantes, nomeados por G1, G2, etc, para que pudessem discutir coletivamente a resolução da tarefa em pequenos grupos. A formação dos grupos foi aleatória.

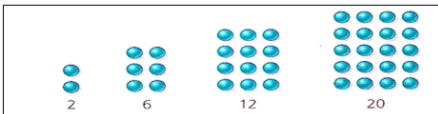
⁶ O grupo ForMatE (Formação Matemática para o Ensino) é atualmente coordenado pelos professores Alessandro J. Ribeiro e Márcia Aguiar, da Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, SP, BR.

Tarefa de Aprendizagem Profissional

"A professora Talita propôs a tarefa a seguir em sua turma de ensino médio."

Tarefa Matemática

Observe a sequência de figuras:



a) Qual é a figura da próxima posição?

b) Qual o padrão existente? Explique.

c) De que outras maneiras você pode representar a relação existente entre a posição e a quantidade de bolinhas dessa sequência? Explique cada maneira.

d) Escreva uma expressão algébrica que represente a quantidade de bolinhas na *n-ésima* posição? Justifique a expressão algébrica.

(Adaptada de Walle, J. A. Van de. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Trad: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre, Brasil: Artmed, 6a ed., 2009, 584p.)

A professora Talita organizou seus alunos para trabalharem em pequenos grupos e não fez nenhuma intervenção durante a realização da tarefa. As respostas dos estudantes estão apresentadas abaixo."

Fonte: Autores.

Figura 1: Tarefa de Aprendizagem Profissional utilizada no processo formativo.

Resultados

No trabalho inicial com a TAP, os participantes resolveram individualmente a Tarefa Matemática. Pela observação da formadora, percebeu-se que alguns professores se mostraram um pouco inseguros ao se depararem com a proposta exploratória. Mas ao se reunirem nos pequenos grupos, eles foram se envolvendo no processo e a maioria conseguiu perceber as regularidades e o padrão propostos. Apenas o grupo G3 (manhã), apesar de terem reconhecido regularidades, não conseguiu chegar na generalização solicitada. De modo geral, a maioria dos grupos chegou à generalização, apresentando a representação algébrica $n(n + 1)$ e apenas dois grupos chegaram à forma equivalente $n^2 + n$, sendo um grupo por meio da propriedade distributiva e outro grupo pela percepção do padrão de quadrados perfeitos.

As justificativas mais comuns para explicar o padrão se referiam ao aumento na próxima posição de uma unidade na quantidade de bolinhas, nas linhas e colunas, onde o aumento da quantidade total de bolinhas corresponderia ao produto entre essas quantidades. Alguns grupos se referiram ao aumento no tamanho da base e da altura e a quantidade total de bolinhas corresponderia ao produto entre elas. Foi possível perceber que muitos grupos pensaram na ideia da multiplicação entre números e que outros pensaram intuitivamente na área do retângulo. No entanto, apenas um grupo G2 (manhã) se referiu ao cálculo da área explicitamente.

O grupo G3(manhã), que não conseguiu chegar na generalização, observou que iniciando em 2 na primeira posição, a quantidade de bolinhas era aumentada pelo próximo número par, ou seja:

Posição 1: 2

Posição 2: $6 = 2 + 4$

Posição 3: $12 = 6 + 6$

Posição 4: $20 = 12 + 8$

O raciocínio abdutivo, que se refere à formalização da conjectura, estava correto. Mas, para se obter o próximo valor, sempre seria necessário saber o valor anterior, o que dificultou o raciocínio indutivo, ou seja, a generalização, pois pensaram de modo recursivo. O problema dessa estratégia foi considerar a variação a partir da quantidade anterior, enquanto, no problema, a variável se referia à posição.

A maioria dos grupos usou os raciocínios abdutivo (conjectura: a quantidade total de bolinhas seria a quantidade de bolinhas das colunas multiplicada pela quantidade de bolinhas das linhas) e indutivo (generalização: percepção do padrão e introdução da variável n , referente à posição), conforme apresentam as Figuras 2 e 4.

Posição	Número de bolinhas
1	$2 = 1 \times 2$
2	$6 = 2 \times 3$
3	$12 = 3 \times 4$
4	$20 = 4 \times 5$
...	... $+1$
n	$n \times (n + 1)$

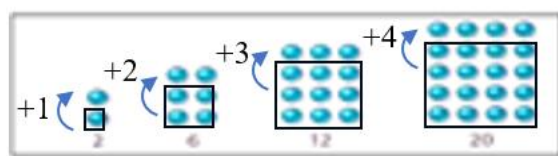
Fonte: (Autores, 2023)

Figura 2. Estratégia utilizada pela maioria dos grupos

Outra resolução que foi percebida pelos grupos G1 (manhã) e G2 (tarde) estava relacionada aos quadrados perfeitos, conforme ilustram a Figura 3 e a Figura 4.

Ao se reunirem em pequenos grupos, ao socializarem suas estratégias de resolução, perceberam que havia mais que um modo de reconhecer o padrão e isso os ajudou na compreensão das diferentes interpretações do problema.

Na plenária, alguns professores foram capazes de usar o raciocínio dedutivo nas justificativas apresentadas, como a percepção que as formas algébricas $n(n + 1)$ e $n^2 + n$ eram equivalentes, por meio da propriedade distributiva, o que não havia sido percebido ainda na maioria dos pequenos grupos.



Fonte: (Autores, 2023)

Figura 3. Estratégia de resolução envolvendo quadrados perfeitos

Na sequência do artigo, para apresentarmos as percepções escritas dos participantes, utilizamos fragmentos de respostas codificadas pelo número da questão, pelo número do professor e o ano no qual foram coletados os dados. Como exemplo, o código (1. P37, 2023), se refere à resposta da pergunta 1 do professor 37, recolhido em 2023. Também estão inseridas em itálico, para diferenciá-las de citações diretas.

Posição	Número de bolinhas
1	$2 = 1^2 + 1$
2	$6 = 2^2 + 2$
3	$12 = 3^2 + 3$
4	$20 = 4^2 + 4$
...	... iguais
n	$n^2 + n$

Fonte: (Autores, 2023)

Figura 4. Estratégia utilizada por dois grupos relacionada aos quadrados perfeitos.

Resolução A

a) A figura tem 30 bolinhas com 6 de altura e 5 de largura.

b) O padrão existente é que cada sequência aumenta uma bolinha de altura e uma de largura.

c) O padrão é que a largura tem bolinhas igual a posição e a altura é igual a posição mais 1.

d) $q = L \times A$
 q = quantidade de bolinhas
 q = largura iguala posição da figura (p)
 L = largura iguala posição + 1.
 A = altura iguala posição + 1.
 $q = p \times (p + 1)$

Resolução B

a) 2, 6, 12, 20, 30

b) 2, 4, 6, 8, 10, 12

A cada soma se adiciona 2 ao número que está na soma

c) A cada soma se coloca a mesma quantidade de bolinhas no horizontal e no vertical

d) 7

Fonte: (Autores, 2023)

Figura 5. Resoluções de alunos A e B (amostras reais) utilizadas na TAP.

Em relação à parte sobre análise dos registros reais dos estudantes, os professores inicialmente ficaram em dúvida em relação aos tipos de raciocínios empregados nas resoluções A e B (ver Figura 5). Os professores destacaram que não tinham conhecimento sobre os diferentes tipos de raciocínio e que, geralmente, se referiam ao raciocínio, usado em matemática, como “raciocínio lógico”. Conforme as discussões nos grupos ocorriam, os professores foram esclarecendo suas dúvidas e se apropriando dos conceitos. Nas avaliações escritas, alguns professores indicam que trazer esse conhecimento sobre os diferentes tipos de raciocínio foi um aspecto positivo da formação, pois perceberam novas perspectivas com o trabalho na resolução de problemas com os estudantes, conforme as respostas:

Pensar no desenvolvimento dos tipos de raciocínio diferentes nas resoluções de problemas propostos foi adequado. (1. P37, 2023)

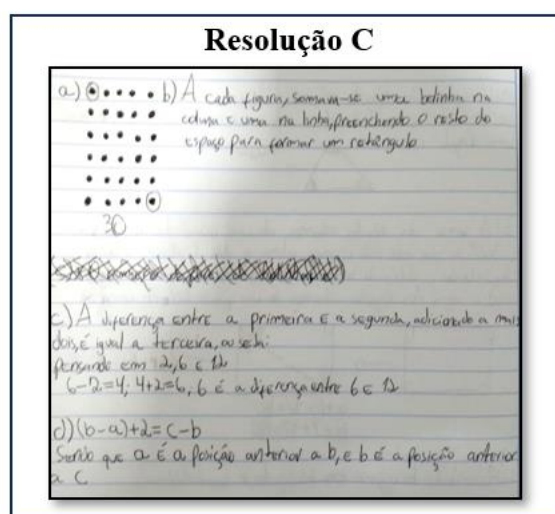
A formação contribuiu para minha formação, pois nunca tinha estudado essas teorias e não tinha pensado em aplicar desse modo questões que já conhecia. (2. P36, 2023)

Mas, pela análise das respostas escritas, verificou-se que para alguns professores, ainda persistiu a compreensão de que o raciocínio matemático se referia apenas ao raciocínio

logico (dedutivo). Essa ideia é tão presente para esses professores que alguns continuaram a usar na linguagem natural apenas o termo com o qual já estavam habituados pode ser observado na resposta:

A formação foi muito interessante e essa proposta de aplicação do raciocínio lógico através da aplicação de atividades exploratórias é bem significativa para os alunos. (1. P30, 2023)

Na continuidade da TAP, ao desenvolverem a “2ª parte – Antecipando ações do professor” o objetivo era que os professores, ao observarem os desenvolvimentos reais dos estudantes B e C, percebessem quais eram as dificuldades que eles encontraram para chegar no processo de generalização. E que antecipassem possíveis encaminhamentos práticos, antecipando quais seriam suas ações para ajudar os alunos a encontrarem caminhos, que levassem a alguma resolução possível.



Fonte: (Autores, 2023)

Figura 6. Resolução do aluno C utilizada na TAP.

A escuta das discussões ocorridas nos pequenos grupos permitiu perceber que as interações foram produtivas. E, durante a plenária, percebeu-se que foram muito mais significativas e esclarecedoras. A formadora solicitou aos grupos com diferentes compreensões que apresentassem suas percepções, o que permitiu aos professores dialogarem e refletirem juntos sobre elas. Por meio da socialização, das discussões e das mediações da formadora, o grupo conseguiu chegar a significados consensuais, o que ajudou a compreensão de vários grupos que não haviam ainda conseguido compreender e explicar os raciocínios utilizados pelos estudantes nos protocolos analisados. Isso se revela na escrita dos professores:

Achei a formação muito produtiva, tanto as discussões com os colegas, quanto as diversas formas de resolução do mesmo problema. A propósito, ao meu ver, foi adequada, pois vejo diversas formas de aplicar isso nas aulas. (1. P41, 2023)

Também indicaram a importância de se colocar no lugar do aluno antes da aplicação da tarefa matemática em sala de aula, para perceberem dificuldades que auxiliam no planejamento de ações futuras, como indicam:

A formação contribuiu, principalmente por nos colocar na posição do aluno, trocar ideias, diferentes pensamentos, raciocínio com os colegas. (2. P2, 2023)

Sim, desafia aos professores colocar em prática aquilo que aprendemos com os alunos. Não focar apenas nos acertos, mas valorizar os erros, como forma de auxiliar os alunos a aprenderem a partir dos erros. Vou ler mais sobre os tipos de raciocínios e tentar identificá-los nas atividades desenvolvidas pelos alunos. (2. P2, 2023)

De modo geral, a análise das respostas finais escritas permitiu constatar que os professores perceberam alguns objetivos importantes visados na formação, pensados como meios para promover o *desenvolvimento profissional docente* dos participantes. Destacaram o fato da abordagem didática da TAP contribuir com o desenvolvimento do conhecimento didático e matemático do professor, ao apresentar uma proposta com abordagem exploratória, que pode ser aplicada em suas salas de aula:

A formação foi muito importante. Muito aprendizado. Uma forma diferente de pensar o ensino da matemática. (1. P10, 2023)

Sim. Procuro sempre levar os estudantes a pensarem com base nos seus conhecimentos. Acredito que esse tipo de abordagem estimula o estudante a confiar em sua capacidade de pensar individual e coletivamente. A formação me trouxe ideia de metodologias possíveis para a sala de aula. (1. P14, 2023)

A afirmação do professor (1. P10, 2023) provavelmente se refere à ampliação de seus conhecimentos teóricos e práticos envolvidos na proposta de exploração de uma tarefa matemática aberta, a qual possibilita a liberdade de resolução e a percepção de conexões entre os diferentes conceitos matemáticos envolvidos.

Alguns professores ressaltaram as contribuições das discussões realizadas para suas aprendizagens docentes, afirmando que essas propiciaram trocas, reflexões e ampliação de percepções, como segue:

Contribui para a reflexão do trabalho docente, para a troca de ideias entre os pares. (2. P17, 2023)

Sim, contribuiu – Amplia as percepções e as formas de pensar e resolver as questões. Com o grupo e a socialização das questões aumenta os pontos de vista sobre os conteúdos que podemos explorar. (2. P40, 2023)

Perceberam uma importante característica da abordagem do ensino exploratório, que consiste em colocar, em sala de aula, o aluno como centro da aprendizagem:

A formação abordou um assunto fundamental, que é a necessidade de o estudante ser o protagonista na busca das soluções de problemas. (1. P3, 2023)

Discussão dos resultados e conclusões

As análises realizadas permitiram verificar vários momentos nos quais ocorreram *oportunidades de aprendizagem profissional*. Um deles ocorreu durante a observação dos pequenos grupos, na socialização e reflexão sobre suas experiências em relação à resolução do problema proposto, quando as interações colaborativas sobre as diferentes estratégias matemáticas utilizadas contribuíram para o aprofundamento do conhecimento

matemático específico. Os professores reconheceram a importância da escolha de uma tarefa matemática exploratória que possibilita diferentes tipos de resolução para envolver os estudantes no processo ativo de aprendizagem e para possibilitar a ampliação de compreensões sobre os conceitos envolvidos, Assim, propiciou-se, por meio da TAP, a (re)significação de conhecimentos matemáticos e didáticos necessários para o aperfeiçoamento da prática do professor, o que corrobora com os apontamentos teóricos de Ribeiro & Ponte, (2019). Além disso, verificou-se que percepções dos professores se aproximam dos aspectos indicados na investigação de Jesus et al. (2018), ou seja, que essa modalidade de ensino exploratório possibilita ao estudante a compreensão em matemática por meio da construção de estratégias próprias, e do incentivo à explicação de suas próprias estratégias e pensamentos.

Outro momento ocorreu durante as discussões e reflexões coletivas, quando afirmaram verbalmente que a metodologia propiciou aprendizagens coletivas, retirando-os do isolamento que sentiam na condução de suas práticas, o que corrobora com os apontamentos das pesquisas de White et al. (2013) e Ball et al. (2014). Nos pequenos grupos, as discussões sobre as diferentes estratégias de resolução e erros dos estudantes, partindo da análise de registros de prática autênticos, com objetivos de compreender os raciocínios utilizados e de pensar ações docentes para fomentar a aprendizagem na sala de aula, propiciaram aos professores reflexões sobre as suas próprias práticas o que também favoreceu a *aprendizagem profissional* e contribuiu com o *desenvolvimento profissional docente* dos professores participantes. Esse resultado corrobora os apontamentos de **Smith (2001)** e Ribeiro & Ponte (2019) quando indicam que processos formativos vinculados às práticas favorecem as oportunidades de aprendizagem docente e contribuem com o desenvolvimento profissional docente.

Nas discussões ocorridas na plenária, quando houve a interação de todos os participantes, a mediação da formadora na gestão das discussões também favoreceu as *oportunidades de aprendizagem profissional*. Verificou-se que houve troca de conhecimentos matemáticos específicos entre os participantes, por meio da socialização das diferentes estratégias utilizadas na resolução do problema, o que permitiu o aprofundamento dos conceitos abordados, a exemplo das formas algébricas equivalentes percebida. Foi possível perceber tanto pelas falas, como pelos registros escritos, que trocas de conhecimentos e reflexões percebidas nas discussões, realizadas nos pequenos grupos ou no grande grupo, propiciaram aprendizagens docentes e contribuíram com o *desenvolvimento profissional* dos professores, pois possibilitaram o aprofundamento de conhecimentos matemáticos e didáticos e a ampliação de suas percepções sobre os processos de ensino e de aprendizagem. o que corrobora com os resultados apontados nas pesquisas de Ribeiro et al. (2020) e Ribeiro & Ponte (2019, 2020).

Em relação aos registros escritos, foi possível perceber que a maioria dos professores perceberam que a experiência os possibilitou conhecer um novo método de ensino, que é apropriado aos contextos atuais da sala de aula, possibilitando ao estudante assumir uma postura ativa em relação à sua aprendizagem. Também se identificou que alguns professores perceberam a importância da prática de “antecipar”, conforme definido em Stein et. al (2008) e da realização do planejamento das tarefas matemáticas no ensino exploratório, segundo apresenta Serrazina (2017), para se promover processos de ensino e de aprendizagem adequados. Também notaram a importância da orquestração das discussões em sala de aula para se promover aprendizagens pretendidas, no uso de tarefas matemáticas cognitivamente exigentes, conforme indicado por Stein et al. (2008). Também se verificou que alguns professores continuarem usando o termo “raciocínio lógico” como sinônimo de “raciocínio matemático”, o que indica que o tempo da

formação foi curto para produzir alguma mudança significativa em suas percepções sobre a existência de diferentes processos de raciocínio matemático e sobre suas diferenciações.

Do ponto de vista da formadora, constatou-se a importância de se trabalhar com TAP com a abordagem exploratória segundo as orientações do modelo PLOT (Ribeiro & Ponte (2020), pois a proposta possibilitou a participação ativa, colaborativa e reflexiva dos professores no processo, estimulou o desenvolvimento de diferentes processos de raciocínio matemático verificados em suas resoluções e a percepção de conexões entre eles, e possibilitou o conhecimento de uma estratégia de ensino-aprendizagem nova para a maioria deles (abordagem exploratória), o que contribuiu com o *desenvolvimento profissional docente* dos participantes, tanto do ponto de vista do conhecimento específico de matemática, como do ponto de vista do conhecimento didático.

Como trabalhos futuros, planeja-se propiciar momentos mais longos formativos, de modo a investigar se os aspectos teóricos abordados nessa formação, aliados a momentos de experimentações práticas dos próprios professores, contribuem com mudanças de compreensões e de práticas efetivas dos professores participantes.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio recebido pelo primeiro autor, em forma de uma bolsa de pós-doutorado, à Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Ministério da Educação do Brasil), processo **88887.808174/2023-00**.

Referências

- Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.
- Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, 62(3), 317-335. <http://dx.doi.org/10.1080/00071005.2014.959466>
- Bogdan, R. C., & Biklen S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Trad. Maria J. Alvarez, Sara B. dos Santos, Telmo M. Baptista. Porto Editora.
- Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process*. Sage.
- Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto Editora.
- Eberhardt, I. F. N., & Coutinho, C. V. S. (2011). Dificuldades de aprendizagem em matemática nas séries iniciais: Diagnóstico e intervenções. *Vivências*. 7(13), 62-70.
- Fiorentini, D. (2008) A pesquisa e as práticas de formação de professores de Matemática em face das políticas públicas no Brasil. *Bolema*, 29, 43-70.
- Jardim, V B. F., Ribeiro, A. J., & Aguiar, M. (2023). O uso de Tarefas de Aprendizagem Profissional para o ensino da estrutura algébrica de Grupos na Licenciatura em Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16 (42), 1-21.
- Jesus, C. C., Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. M. (2018). Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. *Educação. Matemática Pesquisa*, 20 (2), 21-46.
- Mizukami, M. G. N. (2013). Escola e desenvolvimento profissional da docência. In B. A. Gatti, A. C. Silva Júnior, M. D. S. Pagotto, & M. G. Nicoletti (Eds.). *Por uma política nacional de formação de professores* (pp. 23-54). Editora Unesp.
- Nóvoa, A. (2009) *Professores: Imagens do futuro presente*. EDUCA.

- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(3), 1-25.
- Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Atas do ProfMat 1998* (pp. 27-44). Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. (1994). O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Educação e Matemática*, 31, 9-12.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Ribeiro, A. J., Aguiar, M., & Trevisan, A. L. (2020). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. *Quadrante*, 29(1), 52-73. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23010>
- Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, 21(2), 49-74.
- Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké*, 28, 01-20.
- Serrazina, L. (2017) Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.). *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 9-32). Associação de Professores de Matemática.
- Smith, M. S. (2001) *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268–275.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- White, A. L., Jaworski, B., Agudelo-Valderrama, C., & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 393-430). Springer.

**LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD COMO UN
MEDIO PARA ESTABLECER LA IDENTIDAD MATEMÁTICA DE
DOCENTES**

**A PROBABILITY PROBLEM SOLVING AS A MEAN FOR ESTABLISHING
TEACHERS MATHEMATICS IDENTITY**

María Elena Irigoyen Carrillo

Universidad de Salamanca, España

elena.irigoyen@usal.es

María Teresa González Astudillo

Universidad de Salamanca, España

maite@usal.es

Angelina Alvarado Monroy

Universidad Juárez del Estado de Durango, México

aalvarado@ujed.mx

Resumen: Recientemente se han tratado temas relacionados con las creencias, actitudes, emociones, motivación e interés que posee un individuo respecto a la matemática, sosteniendo la idea que tanto los estudiantes como los docentes desarrollan identidades con respecto a las prácticas matemáticas en las que están involucrados, basadas, a su vez en una red más amplia de identidades en las que intervienen aspectos socioculturales, preferencias e intereses. Específicamente para Goldin (2007) la identidad matemática (IM) se concibe como una estructura afectiva que codifica el sentido personal de uno mismo –quién soy– respecto a las matemáticas y que se modifica a lo largo del tiempo. En nuestro estudio hemos definido a la IM como una estructura afectiva dinámica que codifica la distinción de la persona durante la actividad matemática tanto en lo individual como en lo colectivo. En esta comunicación se informa sobre la IM de tres docentes de educación básica en México al experimentar un problema de azar y probabilidad, desde un espacio basado en el juego, la colaboración y exploración. Para ello, se ha recurrido a la metodología de estudio de caso a fin de reconocer rasgos en la IM, desde un enfoque cognitivo y afectivo, relacionados con la participación y el compromiso de los docentes con la tarea matemática. Dicho análisis ha permitido establecer la IM de cada docente mediante sus rasgos distintivos. Los resultados invitan a reflexionar sobre cómo las condiciones del diseño de tareas matemáticas, desde un enfoque de resolución de problemas, podrían transformar positivamente la IM del docente de una manera que pueda ser proyectada hacia sus estudiantes.

Palabras clave: resolución de problemas, identidad matemática, profesores, probabilidad.

Abstract: Recently, topics related to beliefs, attitudes, emotions, motivation and interest that an individual has regarding mathematics have been discussed, supporting the idea that both students and teachers develop identities with respect to the mathematical practices in which they are involved. based, in turn, on a broader network of identities in which sociocultural aspects, preferences and interests intervene. Specifically for Goldin (2007), mathematical identity (MI) is

conceived as an affective structure that encodes one's personal sense of self – who I am – with respect to mathematics and that modifies over time. In our study we have defined MI as a dynamic affective structure that encodes the person's distinctiveness during mathematical activity both individually and collectively. This communication reports on the MI of three basic education teachers in Mexico when experiencing a problem of chance and probability, from a context based on play, collaboration and exploration. To this end, the case study methodology has been used in order to recognize features in MI, from a cognitive and affective approach, related to the participation and commitment of teachers with the mathematical task. This analysis has made possible to establish the MI of each teacher through their distinctive features. The results invite us to reflect on how the conditions of the design of mathematical tasks, from a problem-solving approach, could positively transform the teacher's MI in a way that can be projected towards their students.

Keywords: problem solving, mathematics identity, teachers, probability.

Antecedentes y justificación

Estudios como Alston et al. (2007) y Schoor et al. (2010) han tratado temas relacionados con las actitudes, emociones, motivación e interés que posee un individuo respecto a la matemática. En ellos se sostiene que tanto los estudiantes como los docentes desarrollan identidades con respecto a las prácticas matemáticas en las que están involucrados. Concretamente, Goldin (2007) menciona diversas nociones de estructuras afectivas para referirse a esas redes complejas de creencias, valores, emociones, actitudes y episodios de cada individuo, que permiten llevar significados matemáticos desde una experiencia concreta hasta significados personales. Específicamente, la IM, la concibe como una estructura afectiva que codifica el sentido personal de uno mismo; "quién soy" con respecto a las matemáticas.

Dicha estructura no necesariamente incorpora las matemáticas de una manera positiva, puede incorporar un sentimiento de apropiación (o no apropiación) de las matemáticas; una voluntad o falta de voluntad para hablar, trabajar en ellas o pensar cómodamente en formas matemáticas; y, un sentido emocionalmente importante o una creencia en la propia capacidad matemática o la falta de ella. En este sentido, el individuo puede considerar que posee ciertas habilidades o capacidades matemáticas notables, pero también puede considerarse como alguien que no puede aprender matemáticas.

La IM se describe como una estructura dinámica que se modifica a lo largo del tiempo, de modo que las historias personales desde la enseñanza y el aprendizaje se moldean y se convierten en parte de sus identidades. En este estudio hemos definido a la IM *como una estructura afectiva dinámica que codifica la distinción de la persona durante la actividad matemática tanto en lo individual como en lo colectivo*. De modo que, las experiencias personales relacionadas con la vivencia de situaciones de enseñanza y aprendizaje, así como la interacción con otros docentes, la modifican.

En un entorno escolar, los estudiantes poseen un espectro de creencias y expectativas de sus compañeros y maestros que influyen en sus interacciones sociales y en las propias expectativas sobre las matemáticas, lo que significa aprenderlas y la forma en que se desarrollan sus habilidades. Se considera que el logro alcanzado, como resultado de sus tareas académicas, se ve afectado por las expectativas que tienen sobre el propio desempeño y por la consideración acerca del valor que se asigna a la tarea en sí y a sus resultados (Kloosterman y Gorman, 1990).

Las expectativas de éxito en una tarea matemática pueden guiar el grado de participación y compromiso hacia la misma. Este compromiso puede estar asociado con el nivel de utilidad que se reconozca y por la “propia relación” que se tenga con la matemática. Más aún, se puede llegar a pensar que el éxito y el fracaso se atribuyen a la capacidad y que el esfuerzo rara vez resulta en un cambio significativo en sus patrones de éxito. En ese sentido, resulta conveniente centrarse en el desarrollo profesional del docente y su IM, partiendo del hecho que ésta podría ser proyectada hacia sus estudiantes, así como en las condiciones del diseño de las tareas matemáticas y del espacio donde se interactúa para transformar y modificar su IM.

En estas circunstancias se reconocen los beneficios cognitivos y motivacionales del trabajo en colaboración. Por su parte, Järvenoja y Järvelä (2009) destacan que las emociones en situaciones de trabajo colaborativo, las formas de actuación, entre ellas la regulación de las emociones compartidas, son negociadas y construidas entre los miembros del grupo en un contexto y no sólo resultan ser procesos individuales influenciados por otros. Así, cada persona se convierte en un agente de autorregulación de conocimientos y emociones únicos que pueden crear grandes desafíos en contextos sociales interactivos.

Dicho esto, resulta conveniente reflexionar sobre cómo las condiciones del diseño de ambientes de aprendizaje que posibiliten la participación de los docentes desde sus habilidades cognitivas y afectivas, el intercambio de ideas, el desarrollo de habilidades comunicativas y sociales, el trabajo colaborativo, entre otras, podrían transformar la IM de una manera positiva. En estos escenarios, invitar a los docentes a compartir las experiencias personales con sus pares sobre algún tema o experiencia dentro del aula podría conducir al desarrollo de una identidad más adecuada respecto a las matemáticas y su enseñanza.

La situación de aprendizaje que aquí se considera se remite a las formas de enseñanza de la probabilidad en México en educación básica, que enfatiza la importancia de promover competencias para identificar, utilizar y comprender los sistemas de azar y de la incertidumbre. Estudios como (Cardeñoso y Azcárate, 2004; Franco y Alsina, 2022) que han tratado temas relacionados con las concepciones y conocimientos del profesor para enseñar probabilidad, reportan conocimientos deficitarios del profesorado para la enseñanza de contenidos como aleatoriedad, azar y probabilidad. Estos y otros autores como Batanero et al. (2015) señalan que dichas lagunas de conocimiento son debidas a la escasa o nula formación recibida, mismas que causan inseguridad para tratar estos contenidos en las prácticas de enseñanza, resultando frecuente que los profesores de matemáticas de educación básica se refieran a la probabilidad como el área que mayor dificultad les representa para impartirla, llegando muchas veces a relegar su estudio y abordaje en clase (Insunza y Guzmán, 2011).

Por tal motivo se subraya la necesidad de incidir en la mejora del profesorado en la enseñanza de la probabilidad, mismas que impulsen el desarrollo de un pensamiento crítico y de resolución de problemas; un pensamiento matemático para interpretar y modelar situaciones; y para el desarrollo de diversas habilidades que repercuten de forma significativa en una alfabetización científica y en la toma de decisiones de los individuos.

En acuerdo con lo anterior, en esta investigación se ha planteado como objetivo establecer la IM de tres docentes de educación no universitaria en México a través de su compromiso al experimentar un problema de azar y probabilidad desde un espacio de colaboración y exploración en el aula. Reconociendo que, las formas de actuación y participación de cada docente durante la resolución de la tarea están en consonancia con objetivos de logro

particulares, y en gran medida, relacionadas con los aspectos sociales del aprendizaje dentro del aula y de acuerdo a su contexto.

Metodología

En esta investigación se ha seguido la metodología de estudio de caso (Yin, 2016), de corte cualitativo, a fin de reconocer rasgos en la IM de tres docentes de educación básica al experimentar un problema titulado *¿Puedo tomar ventaja?* que implicó explorar y analizar un conjunto de dados con propiedades particulares desde un espacio basado en el juego y la exploración. Dicho problema promueve el desarrollo de habilidades relacionadas con la recolección y organización de datos, técnicas de conteo y agrupación para determinar probabilidades, así como el análisis de situaciones de riesgo.

Los tres profesores que participaron voluntariamente en la investigación contaban con la experiencia docente descrita a continuación:

C1: Profesor con 3.5 años de servicio en nivel primaria

C2: Profesor con 25 años de servicio en nivel secundaria

C3: Profesora con 4.5 años de servicio en nivel bachillerato

La tarea consistió en estudiar el efecto del lanzamiento de un conjunto de tres dados de diferente color cuyos valores de las caras se indican entre los paréntesis: dado rojo (3, 3, 5, 5, 7, 7), dado verde (2, 2, 4, 4, 9, 9) y dado azul (1, 1, 6, 6, 8, 8). En el juego, participaban dos personas. Cada persona debía elegir un único dado del conjunto y durante una partida ambos jugadores lo lanzaban de forma simultánea. La persona ganadora en cada lanzamiento era aquella cuyo dado mostraba el número más alto. En una partida, que generalmente se conformó por 15 o más lanzamientos, el triunfo le correspondía a quien ganó un mayor número de veces. El problema consistió en identificar cuál de los dados era el mejor [considerando como mejor aquel dado con mayor posibilidad de ganar] y por qué, así como la estrategia para tener una mayor ventaja sobre el contrincante durante el juego.

Para la experimentación se emplearon conjuntos de dados en físico y la aplicación virtual <https://crispu93.github.io/dados/> (Figura 1).



Figura 1. Dados A, B y C en físico y en la aplicación virtual.

Recolección y análisis de datos

Para la implementación se emplearon dos sesiones de entre 2 y 3 horas cada una, siendo la primera presencial y la segunda virtual síncrona. En total se contó con la participación de nueve docentes organizados en tres equipos: 1, 2 y 3. Los casos de estudio C1 y C2 pertenecieron, ambos, al equipo 1, mientras que el caso C3 formó parte del equipo 2.

Dicha implementación se organizó en tres momentos principales: 1) presentación del problema a nivel grupal; 2) experimentación con el conjunto de datos y análisis de probabilidades por equipo; y, 3) presentación y socialización en plenaria de los resultados obtenidos y conexión con otras situaciones similares. Durante todo el proceso se contó con la participación de dos facilitadoras cuya labor principal fue el acompañamiento y monitoreo de los equipos, resolviendo dudas y facilitando el material necesario.

Las producciones generadas a nivel individual y de equipo, así como las grabaciones de audio y videograbaciones de las sesiones permitieron analizar las intervenciones de los docentes que dieron cuenta de parte de su IM a través del compromiso y la implicación con la tarea de forma colaborativa.

Para el análisis de los datos se consideró una versión adaptada de las estructuras de compromiso propuestas por Goldin et al. (2011) que las definen como construcciones idealizadas e hipotéticas, análogas en muchos aspectos a las estructuras cognitivas, y que describen complejas interacciones afectivas y sociales durante la actividad a medida que los involucrados abordan tareas conceptualmente desafiantes. Implican un deseo motivador, acciones y comportamientos sociales para satisfacer algún deseo, creencias, secuencias de estados emocionales, meta-afecto, estrategias y más aspectos de tipo conductual, afectivo y social de una persona. Dichas estructuras ayudan a explicar los patrones recurrentes y dinámicos de interacción de las personas en torno a las matemáticas.

Específicamente para esta investigación se han retomado algunas de las estructuras de compromiso y se han extendido para enfatizar en la participación y compromiso del docente durante la resolución del problema que ayudan a señalar aspectos relacionados con la IM del docente: actitudes matemáticas, reacciones emocionales, creencias acerca de uno mismo como aprendiz de matemáticas, creencias suscitadas en el contexto social y, valores y principios asociados con la matemática. En la Tabla 1 se describen las estructuras empleadas y se corresponden con sus claves.

Tabla 2. Claves de las estructuras de participación y compromiso de la persona.

Clave	Descripción
CP1	<i>Hago el trabajo:</i> busca completar una tarea matemática asignada correctamente siguiendo las instrucciones dadas, cumpliendo así con una obligación implícita.
CP2	<i>Realmente estoy en esto (la tarea me atrapa):</i> Aquí el deseo es experimentar la actividad. El estudiante está intrigado por las matemáticas o el proceso de resolución de problemas, "desconectando" otros elementos del entorno.
CP3	<i>Cuido tus ideas:</i> escucha las ideas de los demás e interviene para indagar y/o enfatizar en ellas promoviendo espacios de discusión y reflexión.
CP4	<i>Evalúa mi respuesta:</i> requiere de valoración externa para asegurarse que sus soluciones tienen sentido y poder avanzar. Esta situación podría fomentar o entorpecer su confianza matemática.
CP5	<i>Mira cómo lo hago:</i> el deseo motivador es obtener una "recompensa" inmediatamente o en el futuro "observa cómo lo hago y dame tu opinión".
CP6	<i>Quiero ir más allá:</i> profundiza en las ideas más de lo solicitado. Brinda ejemplos y diferentes soluciones para ampliar la estructura asociada con los problemas.

CP7 *Te cedo la responsabilidad:* está involucrado en la tarea, pero prefiere que alguien más explique, comunique o trabaje con las matemáticas del problema.

CP8 *Mira que inteligente soy:* desea impresionar a los demás (o, posiblemente, a sí mismo) con su habilidad matemática, conocimiento o genio.

Fuente: Elaboración propia recuperando parte de las estructuras del compromiso de Goldin et al. (2011).

Resultados

En este apartado se resalta parte del proceso de resolución del problema ¿Puedo tomar ventaja? de los equipos 1 y 2, donde se ubican nuestros casos de estudios, y algunas de las intervenciones de los docentes durante la actividad matemática que evidenciaron elementos de las estructuras de participación y compromiso descritas en la sección anterior.

En un inicio el equipo 1, quien registró los resultados de diversos lanzamientos por parejas de dados (verde-azul y rojo-verde) llegó a la conclusión de que el dado verde era el mejor, pues en su registro contaba con un mayor número de victorias. Posteriormente, al comparar y analizar los valores de las caras de los dados concluyeron que el dado verde resultaba victorioso sobre el azul; el azul sobre el rojo; y, el rojo sobre el verde, asumiendo que en cada pareja el dado ganador contaba con 10 valores favorables en comparación con el otro dado que solo contaba con 8. En estas circunstancias nuestro caso de estudio C1 resaltó:

C1: Hay 10 donde gana el dado verde y 8 en las que gana el azul, entonces si sumamos esas posibilidades dan un total de 18. Entonces cada que juegan dos dados hay 18 posibilidades de los dados que pueden ganar. En el caso de nosotros solo había 9 posibilidades. La diferencia del de ellos al de nosotros [refiriéndose a la producción del equipo 3] es que ellos contemplaban las dos opciones de los dados, o sea las dos caras de los dados que tienen el mismo número y nosotros nomás consideramos uno, pues porque se nos hizo más práctico utilizar un solo número, pues al final es solo un número ¿verdad?, no va a variar y no va a haber diferencia si ponemos las dos caras, pues la proporción va a ser la misma... No sé si me di a entender.

Dado Rojo vs Dado Verde = Ganador Dado Rojo
Dado Rojo vs Dado Azul = Ganador Dado Azul
Dado Verde vs Dado Azul = Ganador Dado Verde

Rojo								Verde					
	3	5	7			2	4	9			2	4	9
1	1,3	1,5	1,7	A z u l	1	1,2	1,4	1,9	R o j o	3	3,2	3,4	3,9
6	6,3	6,5	6,7		6	6,2	6,4	6,9		5	5,2	5,4	5,9
8	8,3	8,5	8,7		8	8,2	8,4	8,9		7	7,2	7,4	7,9

Figura 1. Ejemplo de producciones del equipo 1.

En este fragmento se puede reconocer su intento por describir e interpretar soluciones de otros equipos, a la vez que establece conexiones y relaciones entre las diferentes aproximaciones. La forma en que reconoce las distintas combinaciones de valores que se pueden obtener al lanzar los dados verde y azul da señal de su capacidad para sintetizar información, así como de su preocupación por que sus procesos y formas de pensamiento sean comprendidas [CP2, CP3, CP6].

A partir de esta intervención y en compañía de una facilitadora se discutieron preguntas como: ¿Qué pasa si se usan las 6 caras de cada dado? ¿Cómo se verían esas posibles soluciones? En grupo se concluyó que habría un total de 36 casos (combinaciones) posibles y no solo 18 posibilidades; 20 a favor del dado ganador y 16 a favor del dado contrincante, llegando así a trabajar la probabilidad clásica de los eventos. Vale la pena resaltar la noción de probabilidad de nuestro caso de estudio C2 y cómo la reconoce como una situación de incertidumbre.

C2: Por eso nosotros, cuando obtuvimos estos resultados, quisimos comprobarlos. Cuando estábamos jugando parecía que no íbamos a llegar al resultado... En los últimos resultados siempre ganaba el verde y lo quisimos comprobar.

C2: Y la cuestión es cómo estamos hablando de probabilidad...Pregunta para mi grupo, no sé si sea cien por ciento seguro ese resultado... Existe la probabilidad de que gane, pero no es cien por ciento seguro ¿verdad?... por la cuestión del azar puede salir otro resultado.

Se identifica en sus acciones un intento por probar o demostrar las conjeturas o hipótesis descritas, así como el planteamiento de preguntas para disipar dudas, las cuales, desde una valoración externa, pudieron favorecer el desarrollo de la confianza durante la actividad matemática [CP4].

Posteriormente, se retomó el análisis realizado por los equipos 2 y 3 quienes durante la experimentación compararon los tres dados de forma simultánea. Sus experimentos consistieron en lanzar los tres dados al mismo tiempo otorgando la victoria a aquel con la cara de mayor valor (Figura 2). En un inicio concluyeron que los tres dados tenían las mismas probabilidades de ganar. Su razonamiento partió de que, al comparar las tres posibles parejas de dados (verde-azul, azul-rojo, rojo-verde), en cada una resultaba ganador un dado distinto.

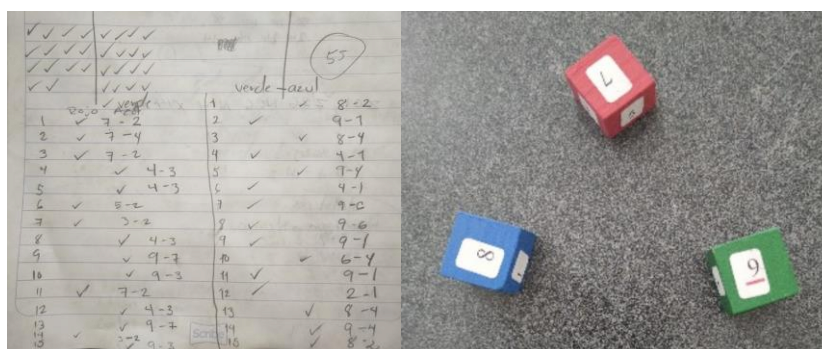


Figura 2. Ejemplo de producciones del equipo 2.

A partir de las propuestas, el equipo 1 enriqueció su análisis de las posibles combinaciones a través de un diagrama de árbol, llegando a concluir que los dados azul y verde tenían una mayor probabilidad de ganar. Es decir, de las 27 posibilidades que determinaron al lanzar los tres dados, en 10 casos asignaron como ganador al azul, en otros 10 al verde y en los 7 restantes al rojo. Cabe señalar que, antes de realizar el análisis, el equipo también experimentó con algunos lanzamientos para anticipar cuál(es) dado(s) podría(n) tener la ventaja.

Al comparar de manera organizada las posibles combinaciones de caras, C1 evidenció acciones para sintetizar información mediante el uso de diversas representaciones para organizarla y presentarla. Buscando, en la medida de lo posible, probar o demostrar las conjeturas planteadas [CP6].

Para dar seguimiento a la actividad y reflexionar sobre lo sucedido a los equipos se les brindó un espacio para conversar sobre la existencia o no de una estrategia ganadora, y particularmente sobre la siguiente situación: *Supongan que están participando en un campeonato de dados (con las mismas condiciones del juego) donde se ha añadido la siguiente regla: el jugador que resulte ganador en una partida puede decidir quién elegirá primero su dado en la siguiente partida, ¿qué estrategia utilizarían para tener una mayor ventaja sobre su contrincante?* En estas circunstancias, los docentes comentaron:

C1: Usted me corrige profe; si me equivoco [se dirige a uno de sus compañeros], voy a anotar las respuestas que considero. Tendría mayor ventaja el escoger en segundo lugar el dado, porque así podemos tomar el dado que tiene mayores probabilidades de ganarle al dado que escogió el contrincante. Por ejemplo: si el contrincante escoge el dado azul, nosotros podríamos escoger el dado verde.

C2: Sí, yo creo que la estrategia ganadora será llegar al juego y dejar que mi contrincante escoja su dado y ya con mis conocimientos previos del juego elijo el que me convenga... Y sí, nos funcionó ¿verdad profe?

En estas circunstancias C1 asume un papel de responsable al ser quien propone y motiva a participar, de igual forma brinda ejemplos, sin ser solicitados, para ampliar sus explicaciones y profundizar en el tema [CP6]. Por su parte, C2, escucha las ideas de su compañero y retoma la idea central. Dichas acciones podrían evidenciar la necesidad de valoración externa para asegurarse que sus formas de pensamiento tienen sentido y que ha comprendido lo solicitado [CP1, CP4].

Además, pudieron conversar sobre la similitud entre el juego de los dados y el Piedra, Papel o Tijera (PPT) y se reflexionó sobre la posibilidad de construir un nuevo conjunto de dados con las mismas características (propiedad de no transitividad).

C1: La diferencia sería que el juego de piedra, papel o tijeras (PPT) es más justo por las probabilidades. Estaba pensando y se los quería platicar, no nos pidió diferencia ¿verdad?, pero a lo mejor es importante reconocer las diferencias y similitudes. Ay, a lo mejor me equivoco, acá va a haber empates.

Facilitadora: ¿Será posible elaborar un nuevo conjunto de dados con esas mismas características?

C1: [Inmediatamente responde que sí] Nada más le sumamos uno a todas las caras... [retoma una producción] dejen ver si la puedo hacer en Excel. (Figura 3)

C2: Allí se ve [se refiere a un diagrama que comparte su compañero] que lo más seguro es que haya empates ... ¿Eso quiere decir que el juego del PPT es más justo?

C2: Para las matemáticas no hay imposibles

Se puede identificar un intento por determinar nuevas relaciones, propiedades y conexiones matemáticas en situaciones similares para construir propias interpretaciones [CP6]. Específicamente el caso C2 atribuye al área de matemática un rasgo de supremacía.

Dado Azul	Dado Verde	Dado Rojo	Mientras haya una estructura similar en cuanto a las cantidades, los valores deben estar seleccionados permitiendo que se encuentren dentro de rangos establecidos para ganarle a una cara determinada.
1			
	2		
		3	
	4		
		5	
6			
		7	
8			
	9		

Figura 3. Ejemplo de producciones del equipo 1: análisis de los tres dados.

Por su parte, el equipo 2 continuó discutiendo ideas sobre cómo tener una estrategia para tener ventaja sobre el contrincante. Aquí, nuestro caso de estudio C3 hace notar parte de sus dudas relacionadas con la toma de decisiones dentro del juego.

C3: Entramos en una serie de confusiones, ¿qué va a pasar cuando el contrincante tome el dado con mayor probabilidad de ganar?... mi compañero va a comentar esas conclusiones.

C3: En la actividad, esos quince lanzamientos ¿fueron elegidos al azar? [Hace referencia a las reglas del juego] Ahorita que estaba comentando mi compañero quise relacionar el número de lanzamientos como más garantizados con las caras [considera el puntaje más alto que se puede tener] no sé si entienden mi idea, es más, no me hagan caso.

Dicho caso regularmente cedía la oportunidad para presentar ideas y responder a las preguntas de la facilitadora a sus compañeros de equipo [CP7]. Como se observa en los diálogos, aunque logró conjeturar una relación entre el número de lanzamientos de una partida y los puntajes que se pueden obtener con los dados, decidió abandonar la idea del análisis al reconocer que tal vez su idea no estaba lo suficientemente bien planteada [CP4].

Es importante señalar que, durante los espacios de conversación en equipo y de manera grupal, figuró en gran medida la participación de solo uno de los integrantes, quien regularmente compartió los procesos de resolución seguidos por el equipo, brindó explicaciones y buscó interpretar, en repetidas ocasiones, las formas de pensamiento de sus compañeros de equipo. Aunque para esta investigación dicho caso no fue estudiado de manera central, se podría informar que sus formas de intervención evidencian rasgos de una estructura de tipo CP8.

Conclusiones

La resolución del problema promovió un espacio de exploración y trabajo colaborativo. La experimentación (el juego) y el análisis del conjunto de dados permitió la emergencia de una diversidad de caminos de solución y estrategias, así como del uso de diferentes formas de representación entre las que se destacan el uso de tablas y esquemas. Las condiciones del espacio, formas de interacción, participación y compromiso con la tarea a nivel individual, equipo y grupal entre los docentes participantes dieron lugar al reconocimiento de rasgos distintivos de la IM de los tres casos de estudio.

El caso C1 se reconoce como alguien con estructuras notorias en *Realmente estoy en esto* al sentirse atraído por la tarea con el deseo de experimentar. Sus intervenciones evidencian su interés por las matemáticas y el proceso de resolución del problema.

Además de *Mira cómo lo hago* donde el deseo motivador consiste en invitar a observar sus procesos, la forma en que lo hace con el interés de recibir una opinión.

Además de ubicarlo en la estructura *Quiero ir más allá* pues regularmente hizo intentos por profundizar en las propias ideas y de otros más de lo solicitado. En su caso brinda ejemplos constantemente y conecta con situaciones similares a ¿Puedo tomar ventaja? tal es el caso de PPT.

El caso C2, a partir de la exploración, se identifica como alguien con estructuras *Hago el trabajo* al tratar de resolver el problema de probabilidad cumpliendo así con la obligación implícita de trabajar. Raramente intenta ir más allá de lo solicitado. Por otro lado, se considera como alguien definido en *Cuido tus ideas*, dado que constantemente escucha y retoma las ideas de los demás para indagar o enfatizar en ellas. Por otro lado, puede considerarse como alguien con estructura *Evalúa mi respuesta* pues en reiteradas ocasiones requiere de la valoración de sus compañeros de equipo y grupo para asegurar o confiar en que sus soluciones tienen sentido, tal y como lo hace notorio en los diálogos al plantear preguntas para poder avanzar en sus propias propuestas.

El caso C3 se reconoce como alguien con una estructura de *Hago el trabajo* y *Cedo la responsabilidad* a quien percibo con capacidad de hacerlo mejor. Esto con la intención de *Mantenerse alejado de los problemas*, lo que invita a reflexionar sobre una posible desconfianza de su propia capacidad en matemáticas, aún y cuando la reconoce como útil e importante.

En la investigación se reconoce cómo las creencias sobre las propias capacidades y habilidades, la dinámica de la sesión (espacios de conversación a nivel equipo y grupal), la concepción de la matemática como área y los comportamientos socioculturales influyen en la forma en que se desarrolla y se hace notoria la IM del docente. En el caso de C3, sería interesante reflexionar sobre cómo la interacción con personas que figuran en estructuras como *Mira que inteligente soy* podría repercutir en sus formas de participación.

Referencias

- Alston, A., Goldin, G., Jones, J., McCulloch, A., Rossman, C., y Schmeelk, S. (2007). The complexity of affect in an urban mathematics classroom. En L. Lamberg, y L. Wiest, *Exploring mathematics education in context: Proceedings of the 29th annual meeting of PME-NA* (pp. 326–333). University of Nevada.
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa* 10(1), 11-34. <https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001>
- Franco, J., y Alsina, Ángel. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: Una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7-16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16>
- Goldin, G. (2007). Aspects of affect and mathematical modeling processes. En R.A. Lesh, E. Hamilton, y J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education*. (pp. 281-296). Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G., Epstein, Y., Schorr, R. y Warner, L. (2011). Beliefs and engagement structures: Behind the affective dimension of mathematical learning. *ZDM Mathematics Education*, 43, 547-560. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0348-z>
- Insunza, S, y Guzmán, M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación matemática*, 23, 63 –95.

- Järvenoja, H. y Järvelä, S., (2009). Emotion control in collaborative learning situations: Do students regulate emotions evoked by social challenges? *British Journal of Educational Psychology*, 79 (3), 463–481. <https://doi.org/10.1348/000709909X402811>
- Kloosterman, P., y Gorman, J. (1990). Building motivation in the elementary mathematics classroom. *School Science and Mathematics*, 90(5), 375–382.
- Schoor, R., Epstein, Y., Warner, M. y Arias, C. (2010). Don't disrespect me: Affect in an urban math class. En P. Lesh, C. Galbraith, R. Haines y A. Hurford (eds.) *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 313–325). Springer.
- Yin, R. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. SAGE Publications Ltd.

**SELEÇÃO, ADAPTAÇÃO E REFLEXÃO SOBRE UMA TAREFA DE
PROPORCIONALIDADE DIRETA NUM ESTUDO DE AULA: O PASSEIO DE
BICICLETA**

**SELECTION, ADAPTATION AND REFLECTION ABOUT A DIRECT
PROPORTION TASK IN A LESSON STUDY: THE BIKE RIDE**

Filipa Faria

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

filipa.faria@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Margarida Rodrigues

CIED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

margaridar@eselx.ipl.pt

Marisa Quaresma

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

mq@campus.ul.pt

Resumo: Este estudo tem como objetivo identificar os aspetos considerados por um grupo de professoras na seleção, adaptação e, posterior, reflexão, de uma tarefa sobre proporcionalidade direta para uma turma de 6.º ano. Trata-se de um estudo qualitativo, conduzido com um grupo de quatro professoras de Matemática num estudo de aula. Analisamos os dados, recolhidos por gravação áudio, referentes às sessões nas quais as professoras realizaram a seleção, adaptação e, posterior reflexão, de uma tarefa. Os dados são analisados com recurso à análise de conteúdo, considerando os princípios gerais para a seleção de tarefas adequadas num estudo de aula. Os resultados sugerem que, a colaboração e reflexão entre as professoras, ao longo das sessões, apoiou a consideração implícita desses princípios gerais, tais como ser apropriada ao objetivo da aula, ter um nível de desafio adequado e potenciar o desenvolvimento de conhecimentos básicos. Assim, ao longo da reflexão, as professoras consideraram que a tarefa final foi promotora da aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: estudo de aula, formação de professores, tarefas, resolução de problemas, proporcionalidade direta

Abstract: This study aims to identify the aspects considered by a group of teachers when selecting and adapting, and then reflecting on, a task on direct proportion for a 6th grade class. This is a qualitative study conducted with a group of four mathematics teachers in a lesson study. Data

were collected by audio recording from the sessions in which the teachers carried out the selection, adaptation and subsequent reflection of a task. The data is analyzed using content analysis, considering the general principles for selecting suitable tasks in a lesson study. The results suggest that the collaboration and reflection between the teachers throughout the sessions supported the implicit consideration of these general principles, such as being appropriate to the aim of the lesson, having an adequate level of challenge and enhancing the development of basic knowledge. Thus, throughout the reflection, the teachers considered that the final task was conducive to the students' learning.

Keywords: lesson study, teacher training, tasks, problem solving, direct proportionality

Introdução

As tarefas matemáticas são um recurso imprescindível ao ensino-aprendizagem da disciplina. Estas podem ser de diferentes tipos, de acordo com diferentes autores, sendo necessárias tarefas com determinadas características a um ensino-aprendizagem através da resolução de problemas (Ponte, 2005; Swan, 2017; Takahashi, 2021). A resolução de problemas tem destaque nos documentos curriculares, sendo considerada “uma atividade central da Matemática, na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes” (Canavaro et al., 2021, p. 3). Contudo, a sua promoção acarreta alguns desafios para os professores, nomeadamente a seleção de tarefas que promovam o desenvolvimento desta competência por parte dos alunos, através da exploração de diferentes estratégias de resolução ou a conexão entre diferentes representações (Fujii, 2018, Takahashi, 2021).

O estudo de aula (Stigler & Hiebert, 1999), processo de desenvolvimento profissional em ampla disseminação em Portugal, posiciona-se como promissor para a formação de professores em serviço, em grande parte pelo trabalho realizado em torno da exploração de tarefas e da planificação de aulas que promovem a resolução de problemas. No entanto, os estudos realizados evidenciam que os professores “aprenderam a vantagem de colocar questões mais abertas, mas não apresentam evidências de como isto ajudou os alunos a desenvolverem estratégias para a resolução de problemas” ou, ainda, evidências de como os professores reagiram quando os seus alunos mostravam dificuldade com a resolução de problemas (Benedict et al., 2023, p. 11).

De acordo com Benedict et al. (2023), existem fontes de conhecimento que potenciam o desenvolvimento profissional dos professores durante o estudo de aula, nomeadamente os recursos de aprendizagem, como tarefas. A investigação também reconhece o contributo que a seleção de tarefas adequadas e desafiantes tem na qualidade da aprendizagem dos alunos (Takahashi, 2021). Neste sentido, o trabalho realizado pelos professores a partir de uma tarefa, e a sua relação com a aprendizagem dos alunos, são dimensões a aprofundar pela investigação em educação. Assim, nesta comunicação procuramos identificar os aspetos considerados por um grupo de professoras na seleção e adaptação, e posterior reflexão num estudo de aula, de uma tarefa sobre proporcionalidade direta para uma turma de 6.º ano.

O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores, originário do Japão, que contribui para a sua formação através da colaboração e reflexão entre professores (Stigler & Hiebert, 1999). No seu propósito, este processo não corresponde a um momento de avaliação dos professores participantes, mas sim a um trabalho detalhado e focado na melhoria das aprendizagens dos alunos, através de

eventuais mudanças na prática dos professores, nomeadamente no que diz respeito à seleção dos recursos e à gestão da aula (Stigler & Hiebert, 1999; Fujii, 2014; 2018).

Desta forma, o estudo de aula é estruturado segundo um ciclo de atividades (Fujii, 2018), movido pela definição de um objetivo de aprendizagem (i) considerando as dificuldades dos alunos ou eventuais mudanças curriculares, sendo este objetivo que irá impulsionar a etapa de planeamento de uma aula de investigação (ii), nas quais os professores estudam documentos curriculares e investigações acerca do conteúdo matemático selecionado, exploram e selecionam tarefas e planificam em detalhe uma aula de investigação. A aula planificada é levada à prática por um dos professores participantes e observada pelos restantes colegas (iii), cujo foco de observação recai sobre a atividade matemática dos alunos. Na fase seguinte, os dados provenientes da condução desta aula e da respetiva observação são alvo de discussão-pós aula (iv), na qual os participantes discutem acerca de todos os momentos da aula, inclusive sobre o contributo da tarefa para a aprendizagem dos alunos. A última etapa deste ciclo constitui um momento de reflexão retrospectiva (v), no qual os professores refletem sobre a sua participação em todas as etapas do processo e o seu impacto na sua prática e, consequentemente, na aprendizagem dos seus alunos, bem como uma antecipação de futuras questões e objetivos de investigação.

Ainda que a investigação tenha vindo a identificar adaptações ao processo de estudo de aula, ou conceções alternativas, que podem comprometer os seus contributos para a formação de professores (Fujii, 2014), Benedict et al. (2023) consideram que o estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional promissor e elencam alguns catalisadores deste processo, tais como os recursos de aprendizagem, nomeadamente tarefas, currículo e a presença de um profissional especializado no conteúdo selecionado.

As tarefas como pilar do estudo de aula

Uma especificidade do estudo de aula é a natureza da aula que é expectável ser planificada pelo grupo de professores. Como salienta Fujii (2018), o estudo de aula e a aprendizagem através da resolução de problemas são duas rodas do mesmo carro, ou seja, uma combinação necessária ao sucesso quer do estudo de aula, quer da resolução de problemas.

De acordo com Fujii (2018), o ensino-aprendizagem através da resolução de problemas requer quatro fases numa aula. Na primeira, o professor introduz o problema e os alunos compreendem-no, sendo que a segunda fase se inicia com o trabalho autónomo dos alunos na resolução desse problema. A terceira fase inicia-se com a comparação e discussão em torno das resoluções dos alunos e, por fim, a quarta fase diz respeito à síntese da aula. Esta estrutura da aula é concordante com a estrutura da abordagem exploratória (Ponte, 2005), amplamente reconhecida em Portugal, que considera três fases: introdução da tarefa, trabalho autónomo e discussão e síntese. Tanto na resolução de problemas como na abordagem exploratória, há uma tarefa deliberadamente selecionada pelo professor para trabalhar na aula. Como salientam Ponte (2005) e Fujii (2018), é pouco familiar para os professores a condução de uma aula a partir de uma única tarefa, no entanto, para os professores japoneses, por exemplo, a eficácia desta abordagem revela-se na qualidade da aprendizagem dos seus alunos.

A resolução de problemas é, assim, uma das dimensões associadas ao estudo de aula, intrinsecamente ligada à definição de um objetivo de aprendizagem específico e inerente à exploração de tarefas durante a fase de planeamento por parte dos professores participantes (Doig et al., 2011; Fujii, 2015; Takahashi, 2021). Para Takahashi (2021), a resolução de problemas relaciona-se forçosamente com o propósito de os alunos

aprenderem Matemática – devem aprender a pensar matematicamente, ao invés de memorizarem fórmulas e factos matemáticos. Pensar matematicamente envolve, para Takahashi (2021), uma compreensão conceptual, fluência procedimental, competência estratégica, adaptação do raciocínio, e disposição produtiva. Para o autor, a resolução de problemas desenvolve todas estas dimensões, tornando-se uma abordagem ideal à aprendizagem da Matemática.

Para que ocorra a resolução de problemas, são necessárias tarefas adequadas, sendo a sua exploração um dos pilares do estudo de aula. Existem quatro tipos de tarefas usualmente utilizadas nos estudos de aula, de acordo com Doig et al. (2011): tarefas para abordar diretamente um conceito; tarefas para desenvolver um processo matemático; tarefas escolhidas rigorosamente para uma sequência de aprendizagem; e, por fim, tarefas que abordam uma conceção alternativa que possa existir por parte dos alunos. Para Fujii (2015), além destes quatro tipos de tarefas, existem cinco princípios gerais para que uma tarefa seja considerada adequada: (i) aborda Matemática apropriada e valiosa considerando o objetivo da aula; (ii) é interessante para os alunos; (iii) tem um nível de desafio adequado; (iv) admite diferentes resoluções; e (v) potencia o desenvolvimento de conhecimentos básicos.

O ensino-aprendizagem da proporcionalidade direta

O raciocínio proporcional consiste, para Lamon (2007), na elaboração de relações estruturais entre quatro quantidades “num contexto envolvendo simultaneamente covariação de quantidades e não variação de razões ou produtos” (p. 638). Para Silvestre e Ponte (2012) este raciocínio envolve, além da compreensão da natureza multiplicativa da proporcionalidade direta, a capacidade de distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são e, ainda, não ser afetado pelos dados, contexto e representação presentes num determinado problema.

Ainda que problemas de proporcionalidade direta possam ser resolvidos com conhecimento de frações equivalentes, relações numéricas ou a aplicação da regra de três simples, o entendimento de proporcionalidade depende da compreensão da existência de uma constante (k) numa função linear $y = kx$, com k diferente de 0. Compreender o significado das quantidades presentes num problema, das suas variáveis e da constante permitem a compreensão de proporcionalidade (Lamon, 2007). A proporcionalidade direta, um tipo de proporcionalidade possível, ocorre, por sua vez, quando duas quantidades mudam no mesmo sentido, ou seja, ambas aumentam ou ambas diminuem na mesma proporção, sendo sempre constante a razão entre essas quantidades.

Existem diferentes tipos de problemas para trabalhar a proporcionalidade direta, tais como problemas de valor omitido e comparação, e ainda problemas pseudoproporcionais nos quais não se verifica uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis, mas pela sua estrutura ou enunciado os alunos assumem que se verifica (Silvestre & Ponte, 2012). Na literatura, estão elencadas várias estratégias de resolução possíveis em problemas de proporcionalidade direta, sendo exemplos a estratégia escalar (quando se relacionam dados de uma mesma variável) e a estratégia funcional (quando se relacionam dados de diferentes variáveis) (Lamon, 2007).

A investigação, em Portugal, já se debruçou sobre vários aspetos do ensino-aprendizagem da proporcionalidade direta. No estudo realizado por Silvestre (2012), foi analisado o desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano, com recurso a uma unidade de ensino de natureza exploratória. Através da sua investigação, a autora concluiu, por exemplo, que os alunos passaram a distinguir melhor relações de

proporcionalidade direta de outras que não o são e, ainda, que aumentaram a utilização de estratégias proporcionais e a utilização de tabelas durante a resolução de problemas. Já a investigação desenvolvida por Baptista et al. (2012), que ocorreu num contexto de estudo de aula no qual os professores optaram por trabalhar a proporcionalidade direta, identificou aprendizagens dos professores acerca dos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos, seleção das tarefas, gestão da comunicação na sala de aula e colaboração profissional. No que diz respeito à seleção das tarefas, os participantes do estudo realizado por Baptista et al. (2012) evidenciaram uma maior reflexão sobre a importância de realizar tarefas de exploração e investigação, bem como sobre as suas potencialidades e desafios e, ainda, o importante contributo do trabalho colaborativo entre todos os professores participantes na seleção de tarefas enquadradas nas orientações curriculares.

Metodologia

Participantes

Este estudo foi conduzido em Portugal, entre dezembro e maio de 2022. As quatro professoras que constituíram o grupo – Patrícia, Ana, Rita e Cátia – lecionavam Matemática a turmas de 5.º e 6.º ano na mesma escola. Esta foi a primeira vez que se envolveram num estudo de aula, sendo a participação voluntária. Ainda que o projeto educativo da escola valorize momentos de coadjuvação, potenciando a partilha de materiais tal como tarefas, esta foi a primeira oportunidade na qual as professoras puderam participar juntas num processo colaborativo de desenvolvimento profissional. Os nomes das professoras participantes são fictícios, preservando o seu anonimato. A primeira autora desta comunicação desempenhou o papel de facilitadora deste estudo de aula.

Recolha e análise dos dados

Dada a natureza do seu objetivo, este estudo é de caráter qualitativo e recorre à análise de conteúdo (Bogdan & Biklen, 1994). Os dados foram recolhidos ao longo das sessões de estudo de aula (Tabela 1), com recurso a gravação áudio, nomeadamente durante a fase de planeamento da aula de investigação, a fase de discussão pós-aula e de reflexão. Nesta comunicação analisamos dados provenientes do diálogo entre as professoras nestas fases e, ainda, a tarefa selecionada (Ponte et al., 2010) e adaptada, conduzida e realizada em aula pelos alunos e, posteriormente, alvo de reflexão pelas professoras.

Tabela 1. Estrutura do estudo de aula.

Fases do estudo de aula	Sessões
Definição do objetivo	Sessões 1 a 3
Planeamento da aula de investigação	Sessões 4 a 7
Exploração de diferentes tarefas	Sessão 4
Reflexão sobre discussões coletivas e análise de tarefas realizadas pelos alunos	Sessão 5
Discussão sobre tarefas para desenvolver o raciocínio matemático e seleção (V0) e adaptação da tarefa (versão 1) <i>O passeio de bicicleta</i>	Sessão 6
Readaptação (versão 2)	Sessão 7
Condução e observação da aula de investigação	Sessão 8
Discussão pós-aula	Sessão 9
Partilha de experiência com outro grupo de professores	Sessão 10
Sessão de seguimento	Sessão 11
Reflexão retrospectiva	Sessão 12

O objetivo da aula de investigação foi definido como *reconhecer situações de proporcionalidade direta num enunciado verbal ou numa tabela e indicar uma das constantes de proporcionalidade, explicando o seu significado dado o contexto*. A tarefa final, após seleção e adaptação por parte das professoras, desafia os alunos a explorar as relações entre o tempo de utilização e o preço de utilização de uma bicicleta em duas empresas diferentes. Para identificar os aspetos considerados pelas professoras na seleção e adaptação da tarefa, e a sua posterior reflexão, recorremos dedutivamente aos princípios elencados por Fujii (2015): (i) aborda Matemática apropriada e valiosa considerando o objetivo da aula; (ii) é interessante para os alunos; (iii) tem um nível de desafio adequado; (iv) admite diferentes resoluções; e (v) potencia o desenvolvimento de conhecimentos básicos.

Resultados

De acordo com as fases do estudo de aula, durante o planeamento da aula de investigação, as professoras, colaborativamente, tomaram decisões acerca da seleção e adaptação da tarefa. O contributo do trabalho em torno da tarefa para o seu desenvolvimento profissional prolongou-se nas fases seguintes, nomeadamente na fase de discussão pós-aula. Uma vez que a reflexão sobre a tarefa nesta última fase tem também como alicerce a atividade matemática efetivamente realizada pelos alunos, consideramos adequado organizar os resultados em duas secções: selecionar e adaptar a tarefa e refletir sobre a realização da tarefa.

Selecionar e adaptar a tarefa

A sessão 4 iniciou com a exploração de várias tarefas, selecionadas previamente pela facilitadora, considerando a unidade temática. A partir desta exploração, as professoras elencaram dificuldades que identificam habitualmente nos alunos, tais como interpretar enunciados e, ainda, identificar problemas onde não existe proporcionalidade ou situações de pseudoproporcionalidade. As professoras anteciparam como estratégias de resolução habituais a realização de operações com frações, a identificação de frações equivalentes e o cálculo da proporção. Consideraram ainda que os alunos recorrem, maioritariamente, a estratégias multiplicativas, que utilizam a linguagem natural, e que têm relativa facilidade em compreender o significado da constante no contexto do problema. Apenas quando questionadas pela facilitadora, identificaram a possibilidade de os alunos determinarem diferentes constantes, de acordo com a estrutura da estratégia utilizada. No que respeita às representações, não foi evidente que habitualmente explorassem tabelas ou gráficos no ensino da proporcionalidade direta.

Entre as sessões 4 e 5, as professoras aplicaram, nas suas aulas, algumas das tarefas exploradas durante as sessões. Assim, na sessão 5 realizaram a exploração da atividade matemática dos seus alunos perante estas tarefas, no sentido de identificar o seu conhecimento e os seus possíveis processos de resolução em tarefas de proporcionalidade direta. A sessão continuou com a exploração de novas tarefas sobre proporcionalidade direta.

Assim, na sessão 6, após a exploração das novas tarefas na sessão anterior, as professoras selecionaram a tarefa *O passeio de bicicleta* (Figura 1) (versão original – V0), que não tinha sido realizada pelos alunos, para a aula de investigação. O contributo de Patrícia, que iria conduzir a aula de investigação, foi decisivo para a seleção desta tarefa. De acordo com a professora, esta era uma tarefa “interessante” e, por isso, pareceu-lhe a mais adequada. As restantes professoras concordaram com Patrícia.

4. O Pedro e a Margarida foram passear ao Parque das Nações e decidiram alugar bicicletas. O Pedro escolheu a empresa *Ciclotour* e a Margarida a *YBike*, cujas tabelas de preços são as seguintes:¹

<i>Ciclotour</i>	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
30	3
45	4,5
60	6
90	9

<i>YBike</i>	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
20	1,5
40	4
60	6,5
90	10

4.1. Em alguma das empresas o preço a pagar é diretamente proporcional ao tempo de utilização da bicicleta? Explica o teu raciocínio.

4.2. Nalguma das empresas é possível prever o preço a pagar pelo aluguer da bicicleta, durante 120 minutos? Justifica a tua resposta.

Figura 1. Tarefa original “O passeio de bicicleta” (Ponte et al., 2010).

Ao retomar a exploração desta tarefa, o foco recaiu, inicialmente, sobre alguns aspetos do enunciado:

Facilitadora – Então, qual é o objetivo específico desta aula?

Patrícia – Introduzir a proporcionalidade direta... Por isso vou mais para a escolha daquela [O passeio da bicicleta]...

Facilitadora – A pergunta 4.1. poderia ser adaptada considerando que é para introduzir o conceito da proporcionalidade direta?

Patrícia – Podemos perguntar “É sempre o mesmo em função do tempo” ou perguntar se é constante... Substituir a parte do diretamente proporcional.

Rita – Ou “Mantém-se sempre o mesmo preço?”

Patrícia – Em alguma das empresas o preço a pagar é sempre o mesmo em relação ao tempo de utilização? Poderia ser assim, sim... Ou se a gente perguntar “Em algumas das empresas o preço a pagar por minuto é sempre o mesmo? Explica o teu raciocínio”.

Cátia – Independentemente do tempo que andes...

Rita – Ou podia ser “Qual era a empresa que escolhidas? E porquê?”

Patrícia – Eles podem responder a que está mais perto, ou que é vermelha, ou a que é verde...

Esta troca de ideias entre as professoras, levou à reformulação do enunciado da tarefa (Figura 2) (V1). Esta reformulação por parte das professoras procurou tornar a tarefa mais apropriada considerando o objetivo da aula e, também, por se tratar de uma introdução ao conceito onde termos como proporcionalidade direta e constante não faziam parte do

reportório dos alunos. Decidiram, desta forma, que a questão a colocar aos alunos deveria ser “Qual das empresas deverão escolher para o seu passeio? Explica o teu raciocínio”.

O Pedro e a Margarida foram passear ao Parque das Nações e decidiram alugar bicicletas. No parque das Nações há apenas duas empresas de aluguer de bicicleta a empresa *Ciclotour* e a *YBIke*, cujas tabelas de preços são as seguintes:

CICLOTOUR 	
Tempo(minutos)	Preço (euros)
30	3
45	4,5
60	6
90	9

YBIKE 	
Tempo(minutos)	Preço (euros)
20	1,5
40	4
60	6,5
90	10

Qual das empresas deverão escolher para o seu passeio? Explica o teu raciocínio.

Figura 2. Tarefa “O passeio de bicicleta” adaptada (V1).

Além da reformulação do enunciado, Ana trouxe para discussão os valores que estão presentes em ambas as tabelas e questionou:

Ana – Não seria melhor, mais eficaz, se os valores do tempo que aparecem [nas tabelas] fossem iguais, não? Não deveria ser?

Patrícia – Mas com estes consegues estabelecer, por exemplo, a relação com o 20 e o 40 [tempo], que é do dobro, por exemplo...

Carla – Nas minhas turmas, como o 60 está nas duas tabelas eles chegam aqui e vão comparar este preço, digo eu, e vão escolher o mais barato!

Facilitadora – Patrícia, o que acha acerca dos valores presentes na tabela?

Patrícia – Está bom.

Tanto Ana como Carla refletiram sobre os valores presentes na tabela, sendo que Carla começa por antecipar que os alunos poderiam apenas comparar o que acontece em ambas as empresas com 60 minutos de utilização. Assim, as professoras parecem considerar de que forma os valores da tabela podem influenciar o nível de desafio e potenciar, ou não, o aparecimento de diferentes resoluções. Na sessão 7, esta questão e a formulação do enunciado da tarefa foi retomada pela facilitadora:

Facilitadora – Será que a questão como está formulada apoia que os alunos consigam identificar esta relação de proporcionalidade direta?

Patrícia – Eu acho que vou ter alunos a dividir o 3 por 30 e outros a dividir o 30 por 3... E depois essas razões vão ter significados diferentes. Não sei, eles até podem fazer “Ando 20 minutos aqui e outros minutos ali que fica mais barato”, porque a pergunta é essa...

Facilitadora – E as colegas o que acham?

Cátia – Eu acho que devia estar lá a alínea com o tempo e eles tinham que completar a tabela.

Patrícia – Numa consegues completar porque existe proporcionalidade direta, na outra não dá. ...

Cátia – Eles teriam de ver primeiro que 20 minutos é metade de 40 minutos, mas que 1,5€ não é metade de 4€.

Rita – Mas, Cátia, eu acho que aí eles nem vão olhar para o 40 [minutos].

Cátia – Por isso é que eu acho que assim eles não vão ver o que há de proporcionalidade numa e noutra não.

Patrícia – Ah, eu já estou a ver a tua questão! Na minha ideia eles olham para o 30 e para o 20 e na tua ideia eles podem olhar para o 40, é isso? Para chegar ao valor para 10 minutos...

Cátia – O que eu achava era que devíamos lá por, dos dois lados, 10 minutos e o espaço para pôr o preço, 30 minutos e o espaço para por o preço.

Ao longo da sessão, os valores a colocar na tabela foram sendo discutidos antecipando possíveis relações que os alunos pudessem vir a estabelecer em ambas as empresas. As professoras decidiram que, na tarefa final (Figura 3) (V2), as tabelas teriam os mesmos valores de tempo e que, além de solicitarem para completarem a tabela, os alunos deveriam procurar prever o preço a pagar por 120 minutos de utilização, questão presente na tarefa original, mas desconsiderada na primeira versão adaptada.

O Pedro e a Margarida foram passear ao Parque das Nações e decidiram alugar bicicletas. No parque das Nações há apenas duas empresas de aluguer de bicicleta a empresa *Ciclotour* e a *YBIke*, cujas tabelas de preços são as seguintes:

CICLOTOUR 	
Tempo(minutos)	Preço (euros)
10	
20	
30	3
40	4
60	6
70	
90	9

YBIKE 	
Tempo(minutos)	Preço (euros)
10	
20	1,5
30	
40	4
60	6,5
70	
90	10

1. Completa as tabelas.

2. O Pedro e a Margarida querem andar de bicicleta durante 120 minutos. Eles conseguem prever o valor a pagar em cada uma das empresas? Justifica.

Figura 3. Tarefa *O passeio de bicicleta* adaptada (V2).

Refletir sobre a realização da tarefa

Na sessão de discussão pós-aula, as professoras mostram-se bastante surpreendidas pela atividade matemática dos alunos durante a tarefa, nomeadamente Patrícia, que conduziu a aula:

Patrícia – Eu acho que correu muito bem para a tarefa que foi!... Muito honestamente surpreenderam-me [os alunos]. E, apesar de não haver proporcionalidade na segunda tabela [YBIke] eles tentarem preenchê-la com lógica. O que eu mais gostei foi eles tentarem estabelecer relações entre os números.

A reflexão continuou com as contribuições de Cátia, Ana e Rita, considerando os diferentes grupos que observaram durante o trabalho autónomo. Já Patrícia, devido ao seu

conhecimento da turma, enalteceu a participação de alunos que não intervinham habitualmente e a linguagem matemática por estes utilizada:

Cátia – O que eu observei num dos grupos é que eles tentaram assim: dividiram este, dividiram este e este. E depois disseram “Não dá, temos que arranjar outra estratégia para ver o padrão”.

Patrícia – Isso é vocabulário que eles ganham. Gostei muito, não estava à espera destas palavras... E há uma miúda que diz “Mas isto não tem lógica”, não sei se repararam. E esta miúda nunca faz apresentações dos trabalhos, recusa-se... E aqui ela sentiu necessidade de intervir. E valorizei isso, pronto, pode não ser nada de Matemática, mas vejo-me agradada com algumas descobertas que acabei por fazer da turma. [E] o Diogo é muito fraquinho, mas ele esteve muito envolvido!... Ele assumiu um papel no grupo.

Também Ana e Rita consideram que os alunos estiveram motivados durante a resolução da tarefa e que se envolveram em processos matemáticos pertinentes à consecução do objetivo da aula:

Ana – No grupo que eu observei disseram “Com esta estratégia só conseguimos preencher metade da tabela, então isto não faz sentido”. Ainda tentaram encontrar o preço por minuto... Foram andando para trás e para a frente, sem nunca desistir.

Rita – Foram para a questão dois porque não conseguiam preencher [a segunda tabela]. Pegaram nos 120 minutos, verificam que 2×60 tem um preço diferente de 3×40 , então disseram que não há regularidade.

Ao refletirem durante a discussão pós-aula, as professoras reforçaram o interesse dos alunos, a adequabilidade do desafio matemático e o desenvolvimento de conhecimentos básicos, tais como a impossibilidade de previsão num contexto onde não existe proporcionalidade direta.

Discussão

Após a seleção da tarefa, as professoras debruçaram-se na sua adaptação considerando que o objetivo específico da aula seria iniciar a exploração da proporcionalidade direta, a partir do reconhecimento de situações com este tipo de proporcionalidade e identificação de uma constante. Assim, a reformulação do enunciado gerou bastante discussão e reflexão por parte das professoras, promovendo consequentemente a antecipação de possíveis estratégias e dificuldades dos alunos, sendo esta uma das especificidades do trabalho desenvolvido no estudo de aula (Fujii, 2018).

Considerando os tipos de tarefas identificados por Doig et al. (2011), o enunciado e a reestruturação das tabelas e seleção dos respetivos valores tornaram-na numa tarefa adequada à promoção do desenvolvimento de processos matemáticos associados à exploração da proporcionalidade direta, tal como a exploração de regularidades, identificação de constantes, e a possibilidade de estabelecer, ou não, previsões.

As professoras anteciparam como é que a atividade matemática dos alunos poderia variar, de acordo com os valores presentes nas tabelas e com a formulação das questões. Este aspeto concorre também para um dos princípios gerais elencados por Fujii (2015) no que diz respeito ao nível de desafio adequado da tarefa. Para as professoras, era essencial que os valores presentes na tabela, e as questões, motivassem os alunos a explorar diferentes

relações numéricas, nomeadamente na empresa YBike, para apoiá-los na identificação desta situação não proporcional.

A decisão de manter a questão associada à previsibilidade, presente na tarefa original, retirada na versão 1 e retomada para a versão final da tarefa, potenciou o desenvolvimento de conhecimentos básicos (Fujii, 2015), no contexto da proporcionalidade direta, particularmente a possibilidade de fazer previsões apenas em contextos onde existe um padrão de variação bem definido como é o de proporcionalidade direta. Assim, a tarefa final verificou-se apropriada e valiosa considerando o objetivo da aula, um dos princípios gerais identificados por Fujii (2015).

Na reflexão durante a discussão pós-aula, as professoras enaltecem o empenho dos alunos, o que concorre para a o princípio de selecionar tarefas que sejam interessantes. A tarefa, considerando as adaptações realizadas, tornou-se num problema de valor omisso, incluindo uma situação não proporcional, em que a comparação entre as situações era necessária para a conclusão, por parte dos alunos, da existência, ou não, de situações de proporcionalidade direta.

Ao partilharem as suas observações acerca da atividade matemática dos alunos, as professoras identificaram que as suas estratégias foram de natureza multiplicativa, um aspeto que contribui para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, e que compreenderam o significado das quantidades, das variáveis e da constante identificada (Lamon, 2007; Silvestre & Ponte, 2012).

Conclusão

Nesta comunicação, com base numa análise de dados de natureza dedutiva, identificamos os aspetos considerados por um grupo de professoras na seleção e adaptação, e posterior reflexão sobre uma tarefa sobre proporcionalidade direta para uma turma de 6.º ano. A colaboração e reflexão entre as professoras, nomeadamente durante a adaptação da tarefa, potenciou a consideração dos princípios gerais elencados por Fujii (2015) para a seleção de tarefas. Destes princípios, destacaram-se, nesta fase, o selecionar uma tarefa apropriada ao objetivo da aula e que tivesse um nível de desafio adequado. Assim, a tarefa e todo o processo a esta inerente evidenciou ser, tal como apontam Benedict et al. (2023) um catalisador do desenvolvimento profissional dos professores no estudo de aula e, particularmente neste caso, em relação ao seu conhecimento didático acerca do ensino-aprendizagem da proporcionalidade direta. A reflexão realizada na discussão pós-aula, própria do estudo de aula, apoiou, por sua vez, a compreensão da atividade matemática dos alunos por parte de todas as professoras. Estas consideraram que o objetivo definido para a aula foi atingido com sucesso. Na fase de reflexão, destacaram-se como princípios a tarefa ter sido interessante para os alunos, dado o seu envolvimento, e ainda o desenvolvimento de conhecimentos básicos.

Deste modo, estes resultados evidenciam que o estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional que contribui para o conhecimento das tarefas e da aprendizagem, por parte dos professores, favorecendo por isso a qualidade da aprendizagem dos alunos. Sendo as tarefas um dos pilares do estudo de aula, será necessário que o trabalho efetuado pelos professores ao longo deste processo contemple aspetos como os elencados por Fujii (2015).

Uma limitação deste estudo é apenas serem analisados dados referentes à seleção, adaptação e reflexão de uma única tarefa, no tópico da proporcionalidade direta, deixando em aberto a possibilidade destes aspetos se tornarem diferentes, ou mais ou menos específicos, com outras tarefas deste ou de outros tópicos matemáticos. No futuro será

pertinente o estudo da permanência ou alteração dos aspetos elencados por Fujii (2015) nas discussões entre os professores durante as sessões do estudo de aula aquando do trabalho em torno de outro tipo de tarefas mencionadas por Doig et al. (2011), como, por exemplo, em tarefas escolhidas rigorosamente para uma sequência de aprendizagem.

Referências

- Baptista, M., Ponte, J. P., Velez, I., Belchior, M., & Costa, E. (2012). O lesson study como estratégia de formação de professores a partir da prática profissional. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática – Práticas de ensino de matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 494-505). SPIEM.
- Benedict, A. E., Williams, J., Brownell, M. T., Chapman, L., Sweers, A., & Sohn, H. (2023). Using lesson study to change teacher knowledge and practice: The role of knowledge sources in teacher change. *Teaching and Teacher Education*, 122, 103951. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103951>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação* (Trad. M. J. Álvares, S. B. Santos & T. M. Baptista). Porto Editora.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Doig, B., Groves, S., & Fujii, T. (2011). Lesson study as a framework for preservice teachers' early field-based experiences. In L. Hart, A. Alston, & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 181-200). Springer.
- Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries: Misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development*. 16(1), 65-83.
- Fujii, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. In A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273-286). Springer.
- Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winslow, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1-21). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7>
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Information Age.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010). O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades. Tarefas para o 1.º e o 2.º ciclos do Ensino Básico. *Materiais de apoio ao professor. Projeto IMLNA — Promover a aprendizagem matemática em números e álgebra*. IE e UBI.
- Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: Percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa].
- Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2012). Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: Uma abordagem exploratória. *Interacções*, 59, 137-158.
- Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. The Free Press.

- Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 144, 67-72.
- Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving: A pedagogical approach from Japan*. Routledge.

**PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS ATRAVÉS DE
PROBLEMAS: APRENDIZAGENS DE UMA FUTURA PROFESSORA
DURANTE UM ESTUDO DE AULA**

**PROMOTING STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING THROUGH
PROBLEMS: A PROSPECTIVE TEACHER'S LEARNING DURING A
LESSON STUDY**

Micaela Martins

*IE-UL – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Agrupamento de Escolas
Moinhos da Arroja, &ISCTE – Instituto Universitário de Lisboa, Portugal*

msterceiro@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Procuramos perceber como é que uma futura professora de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, no seu último ano da formação inicial, desenvolve o seu conhecimento didático durante um estudo de aula, em particular, sobre a promoção do raciocínio matemático dos alunos através da resolução de problemas. Seguindo uma abordagem qualitativa e interpretativa, analisamos situações do trabalho e o discurso dessa futura professora durante um estudo de aula, nomeadamente nas fases de preparação de uma aula e de reflexão sobre essa aula. Olhamos também para a análise que fez, no seu relatório de estágio, sobre os processos de raciocínio que os alunos evidenciaram e as conclusões que retirou dessa análise. Os resultados mostram que, inicialmente, foi desafiante para a futura professora selecionar tarefas que promovessem a justificação. Trocar ideias sobre as representações a privilegiar levou a futura professora a um olhar mais cuidado para as características das tarefas que promovem os processos de raciocínio dos alunos, desenvolvendo o seu conhecimento didático sobre este aspeto. O trabalho detalhado na preparação da aula, fomentado pela partilha de ideias em ambiente colaborativo, e com destaque na tarefa, levou a futura professora a compreender a influência das tarefas propostas no trabalho dos alunos, o que também contribuiu para o desenvolvimento do seu conhecimento sobre a promoção do raciocínio matemático em sala de aula.

Palavras-chave: raciocínio matemático, resolução de problemas, formação inicial de professores, conhecimento didático, estudo de aula.

Abstract: We aim to understand how a prospective secondary school mathematics teacher develops her didactic knowledge during a lesson study, in her last year of initial teacher education, in particular, regarding promoting students' mathematical reasoning through problem-solving problems. Using a qualitative and interpretative approach, we analyzed the work and the discourse of this prospective teacher during a lesson study, particularly in the phases of preparing the lesson and reflecting on it. We also look at the analysis she made, in her internship report, about the reasoning processes that the students used and the conclusions she pointed out from that analysis. The results show that it was initially challenging for her to select tasks that promote justification. Sharing ideas about the representations that should be preferential, led the prospective teacher to pay more attention to the characteristics of tasks that promote students' reasoning processes,

developing their didactic knowledge on this aspect. The detailed work in preparing the lesson, prompted by the sharing of ideas in a collaborative environment, and with emphasis on the task, led the future teacher to understand the influence of the proposed tasks on the students' work, which also contributed to the development of their knowledge about promoting mathematical reasoning in the classroom.

Keywords: mathematical reason, problem-solving, initial teacher education, didactical knowledge, lesson study.

Introdução

O *raciocínio matemático* é um processo fundamental para a aprendizagem e compreensão da Matemática (NCTM, 2014; OECD, 2021). Pela sua relevância na aprendizagem dos alunos, o raciocínio tem tido grande destaque no currículo da Matemática em Portugal. Os documentos curriculares atuais sugerem que as ações dos professores devem garantir que os alunos sejam confrontados com situações que envolvam “a formulação de conjecturas, a justificação da sua validade ou refutação e a análise crítica de raciocínios produzidos por outros” (DGE, 2021, p. 3), envolvendo tarefas “poderosas e desafiantes” (DGE, 2021, p. 6). Além disso, apontam a *resolução de problemas* como “uma atividade central da Matemática, na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes” (DGE, 2021, p. 3).

No entanto, promover o raciocínio matemático através da resolução de problemas, constitui um desafio para os professores, uma vez que precisam compreender o que é que estas capacidades envolvem e, além disso, saber como as promover em sala de aula (Brodie, 2010; Davidson et al., 2019). Para futuros professores, esta tarefa é particularmente desafiante pois a sua experiência de sala de aula é reduzida, refletindo-se em conhecimentos pouco aprofundados sobre a prática letiva e sobre os alunos (Mendes et al., 2022; Stylianides et al., 2013).

Uma das estratégias que tem sido apontada pela literatura como um processo formativo bastante influente na formação inicial de professores é o estudo de aula (Leavy & Hourigan, 2016; Ponte, 2017). Este processo de desenvolvimento profissional baseia-se numa dinâmica de trabalho colaborativo com natureza refletiva e foca-se na aprendizagem dos alunos (Fujii, 2018). A partir deste trabalho, os futuros professores são envolvidos em discussões sobre vários aspetos relacionados com a prática, onde a reflexão surge como elemento natural, o que promove o desenvolvimento do seu conhecimento.

Apesar de existirem vários estudos que apontam o estudo de aula como um processo formativo com potencialidades na formação inicial de professores em Portugal (Martins et al., 2021; Ponte et al., 2023; Vieira et al., 2022), reconhece-se a necessidade de aprofundar como é que o estudo de aula pode apoiar os futuros professores a desenvolverem o seu conhecimento nos diferentes domínios (González et al., 2023; Magnusson et al., 2021). Assim, procuramos perceber como é que uma futura professora de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, no seu último ano da formação inicial, desenvolve o seu conhecimento didático durante um estudo de aula, em particular, no que respeita à promoção do raciocínio matemático dos alunos através da resolução de problemas.

A promoção do raciocínio matemático em sala de aula

O *raciocínio matemático* permite “ir além de exemplos específicos de forma a reconhecer e apoiar relações gerais” (Lannin et al., 2011, p. 9), isto é, ultrapassa a memorização de conceitos ou da repetição de procedimentos e envolve a construção de novas ideias a partir das relações entre ideias conhecidas. Assim, é um elemento essencial na aprendizagem da Matemática, pois leva os alunos a compreender os conceitos e os procedimentos que utilizam e o que significam os seus resultados (NCTM, 2014).

Em termos práticos, o raciocínio matemático ocorre através de diferentes processos interligados, sendo *conjeturar*, *generalizar* e *justificar* considerados os processos-chave (Mata-Pereira & Ponte, 2017; Stylianides et al., 2013). *Conjeturar* envolve fazer afirmações que se presume serem verdadeiras, mas que ainda não foram provadas. *Generalizar* consiste em formular conjeturas gerais sobre conceitos, procedimentos ou propriedades de um conjunto de objetos. Já *justificar* é apresentar razões para validar uma ideia através de uma afirmação ou sequência lógica de afirmações já conhecidas como verdadeiras (Jeannotte & Kieran, 2017; Lannin et al., 2011).

As tarefas assumem um papel de destaque quando o objetivo é a promoção do raciocínio dos alunos (NCTM, 2014). Quando estes trabalham nas tarefas que lhes são propostas, envolvem-se na “avaliação de situações, na seleção de estratégias, na elaboração de conclusões lógicas, no desenvolvimento e na descrição de soluções, e no reconhecimento de como essas soluções podem ser aplicadas” (OECD, 2021, p. 14). Portanto, é importante propor tarefas que promovam o uso de diferentes estratégias e representações de resolução, bem como questões com graus variados de desafio matemático, isto porque tarefas desafiadoras são potenciadoras do raciocínio matemático. Porém, se o seu grau de desafio for demasiado elevado, os alunos podem ficar desmotivados e rapidamente perdem o interesse (Brodie, 2010).

Procurando identificar as características que promovem o raciocínio matemático, Mata-Pereira e Ponte (2017) avançaram com quatro princípios, apontando que

... as tarefas devem incluir: (i) uma diversidade de questões de diferentes graus de desafio, destacando-se problemas e questões exploratórias, mas também exercícios; (ii) perguntas que suscitem generalizações; (iii) questões que solicitem a justificação de respostas e de estratégias de resolução; e (iv) questões que permitam uma variedade de estratégias de resolução. (p. 173)

Em Portugal, o Projeto REASON desenvolveu investigação por forma a apoiar professores e futuros professores a desenvolver conhecimento sobre como promover o raciocínio matemático em sala de aula. Entre vários produtos resultantes do projeto, salienta-se o livro “Raciocínio matemático e formação de professores” (REASON, 2022) que inclui um conjunto de princípios para promover o raciocínio matemático dos alunos, aqui apresentados na Figura 3.

1. Incluir questões que permitam uma <u>variedade de estratégias de resolução</u>	Princípios gerais
2. Incluir questões que envolvam uma <u>variedade de representações</u>	
3. Incluir questões que incentivem e favoreçam a <u>reflexão</u> sobre os processos de raciocínio utilizados	
4. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações baseadas na <u>observação de semelhanças e diferenças</u> entre objetos	Princípios específicos para promover a generalização
5. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações a partir do <u>conhecimento prévio</u>	
6. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações por <u>transformação das condições da situação</u>	
7. Incluir questões que solicitem ou incentivem a justificação de <u>respostas</u> , ou de <u>estratégias</u> de resolução, ou de afirmações matemáticas.	Princípios específicos para promover a justificação
8. Incluir questões que solicitem ou incentivem <u>justificações de natureza diversa</u> , nomeadamente, com base na coerência lógica, com recurso a exemplos genéricos ou contraexemplos, por exaustão ou absurdo	
9. Incluir questões que solicitem a <u>identificação justificada da verdade ou falsidade</u> de afirmações matemáticas	
10. Incluir questões que solicitem ou incentivem a <u>análise por parte do aluno de justificações</u> apresentadas por outros	Princípios específicos para promover a classificação
11. Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização de <u>objetos</u> com base na identificação de características desses objetos	
12. Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização hierárquica ou partitiva de <u>classes</u>	

Figura 3. Princípios, relativos às tarefas, para promover o raciocínio matemático dos alunos (REASON, 2022, pp. 105-106)

Quer na proposta de Mata-Pereira e Ponte (2017), quer na proposta avançada em REASON (2022), não se pressupõe que, para promover o raciocínio dos alunos, as tarefas propostas tenham que incluir todas as características apresentadas. Mas, considerar a inclusão destes princípios, de forma paulatina, poderá ter efetivo impacto na promoção do raciocínio dos alunos.

O estudo de aula na formação inicial de professores

Os futuros professores enfrentam uma série de desafios que condicionam, à partida, o desenvolvimento do seu conhecimento didático e o seu processo formativo. Estes desafios situam-se sobretudo na seleção e adaptação de tarefas, na planificação de aulas com antecipação do trabalho dos alunos e preparação da comunicação a estabelecer, e ainda na condução das aulas (Martins et al., 2021; Mendes et al., 2022; Stylianides et al., 2013).

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional, com origem no Japão, que tem mostrado potencialidades na formação inicial e contínua de professores (González et al., 2023; Leavy & Hourigan, 2016; Ponte et al., 2023). Todo o trabalho durante um estudo de aula foca-se na aprendizagem dos alunos. De forma colaborativa, os professores identificam um problema no ensino e aprendizagem, definem um objetivo e fazem a planificação detalhada de uma aula. Aqui, consideram todos os aspetos relacionados com a aula e com a aprendizagem dos alunos, desde aspetos gerais como a tarefa a propor, a aspetos mais específicos tais como as palavras e números a usar na tarefa a propor ou as perguntas a colocar durante a aula. Após um dos professores

conduzir esta aula, voltam a reunir para refletir sobre a aprendizagem dos alunos (Fujii, 2018).

O potencial do estudo de aula na formação de professores relaciona-se com o facto de os futuros professores terem oportunidade para partilhar as suas ideias e experiências com os seus colegas, com supervisor e com o professor cooperante que acompanham durante o estágio, quando planificam e refletem sobre uma aula. Uma vez que preparam a aula neste ambiente de partilha, estando envolvidos no desenho da tarefa, antecipando o trabalho e as possíveis dificuldades dos alunos, e preparando as suas ações para a aula, têm a oportunidade de desenvolver o seu conhecimento sobre prática e sobre a aprendizagem dos alunos, mas também de aprofundar o seu conhecimento matemático (Vieira et al., 2022; Willems & Bossche, 2019). Ao conduzir a aula que eles próprios prepararam, ou ao observar os colegas nesse papel, conseguem ver, na prática, o que planificaram, baseando-se na teoria que exploraram (Ponte, 2017). Estas experiências, para e na sala de aula, promovem uma reflexão sobre a prática, e permite encontrar estratégias para a melhorar. Assim, os futuros professores são envolvidos em experiências próximas daquelas que encontrarão na sua prática futura (González et al., 2023; Leavy & Hourigan, 2016), refletindo sobre a prática e concluindo sobre como podem melhorar a prática, o que constitui uma forma privilegiada para desenvolver o seu conhecimento didático (Ponte & Chapman, 2016; Ramos-Rodríguez et al., 2017).

Metodologia e contexto da investigação

Esta comunicação baseia-se num estudo de aula, realizado numa instituição de ensino superior em Portugal, no contexto do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, entre setembro e dezembro de 2019. O estudo de aula envolveu a participação de duas futuras professoras, Mónica e Olívia, a frequentar o último ano da sua formação inicial e, portanto, em contexto de estágio curricular numa escola. Ambas tinham na base da sua formação a Licenciatura em Matemática e, no ano letivo anterior, tiveram unidades curriculares relacionadas com diferentes áreas, nomeadamente Didática da Matemática, Sociologia, Psicologia, e Avaliação. Estas eram as únicas futuras professoras que estavam a ser orientadas pela supervisora da instituição de ensino superior. Nenhuma das futuras professoras tinha experiência de ensino, embora tenham observado diversas aulas conduzidas por professores experientes no ano letivo anterior. Além disso, ambas acompanhavam alunos numa perspetiva informal de explicações individuais.

O estudo de aula foi preparado e conduzido em conjunto pela supervisora e pela investigadora (primeira autora), pelo que ambas se reuniam regularmente para analisar o trabalho que estava a ser desenvolvido e para preparar as sessões subsequentes. O estudo de aula teve 9 sessões com cerca de duas horas cada sessão e foi estruturado como se apresenta na tabela.

Tabela 2. Organização das sessões do estudo de aula

Sessões 1, 2 e 3	Identificação de problemas no ensino e aprendizagem Reconhecimento geral do tópico matemático a explorar Reconhecimento geral de aspetos didáticos na planificação de uma aula Definição do objetivo de aprendizagem
Sessões 4, 5 e 6	Planificação da aula
Sessão 7	Condução da aula
Sessões 8 e 9	Reflexão sobre a aprendizagem dos alunos e sobre o processo estudo de aula

Os participantes foram então as duas futuras professoras, a supervisora e a investigadora. Sempre que esteve disponível, o professor cooperante, que acompanhava o estágio curricular das futuras professoras e era o titular das turmas de intervenção, também esteve presente nas sessões do estudo de aula. Dada a calendarização da escola onde as futuras professoras estavam a realizar o estágio, o professor cooperante decidiu que a aula de investigação seria no 7.º ano de escolaridade, tendo como objetivo rever a proporcionalidade direta como relação entre duas variáveis.

Considerando o objetivo desta comunicação, focamo-nos no percurso formativo da futura professora Mónica, uma vez que o seu problema de investigação do relatório de estágio se focava na relação entre as representações fornecidas nos enunciados das tarefas e as justificações dadas pelos alunos, centrando o seu trabalho na promoção do raciocínio matemático dos alunos. Aquando da realização do estudo de aula, ainda só tinha tido oportunidade de fazer leituras flutuantes sobre os processos de raciocínio matemático e a sua relação com as representações.

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados inclui observação participante pela investigadora, com a construção de um diário de bordo, gravações áudio das sessões de planificação da aula de investigação (identificadas como Sx) e das sessões de reflexão (identificadas como Rx), os documentos produzidos durante o estudo de aula (tais como as tarefas discutidas e adaptadas para propor aos alunos, o plano da aula e as reflexões escritas), assim como o relatório final da futura professora (RF). Seleccionámos apenas a aula preparada durante o estudo de aula, que corresponde à primeira aula planificada e conduzida por Mónica durante o seu estágio curricular. No entanto, a futura professora preparou e conduziu mais duas aulas. Estas três aulas representaram a sua própria recolha de dados para a elaboração do relatório de estágio.

Os dados foram inicialmente selecionados de acordo com o objetivo da comunicação e agrupados em dois momentos, sobre os quais incide a apresentação de resultados: preparar a tarefa e refletir sobre o trabalho dos alunos durante a aula. De seguida, seleccionámos situações representativas do trabalho e do discurso da futura professora que perspetivavam a promoção do raciocínio matemático dos alunos. Essas situações foram categorizados com base nos princípios apontados por Mata-Pereira e Ponte (2017) em relação às características de tarefas que promovem a justificação, a saber:

- [P1] propor questões com diferentes graus de desafio, com ênfase em problemas e questões exploratórias, mas também exercícios;
- [P2] propor questões que permitam diversas estratégias de resolução;
- [P3] propor questões que solicitem a justificação de respostas e de estratégias de resolução.

Esta análise foi inicialmente feita pela primeira autora, tendo o segundo autor realizado uma análise independente, considerando a categorização definida. Ambos os autores reuniram para chegar a um consenso.

Todos os participantes foram informados sobre os objetivos da investigação e foram recolhidas as autorizações necessárias para a recolha e divulgação dos dados, seguindo os princípios éticos indicados pela AERA (2011). Para garantir o anonimato dos participantes, todos os nomes aqui usados são pseudónimos.

Resultados

Preparar a tarefa

Aquando da data da aula de investigação, cujo objetivo era rever a proporcionalidade direta como relação entre duas variáveis, era expectável que os alunos fossem capazes de reconhecer esta relação através de representações tabelares e gráficas, assunto trabalhado com eles no ano letivo anterior. Baseando-se no conhecimento que tinha sobre os seus alunos, o professor cooperante também afirmou que estes seriam capazes de determinar valores relativos a situações de proporcionalidade direta usando a regra de três simples ou fatores multiplicativos.

A partir destas premissas, a supervisora pediu às futuras professoras que seleccionassem tarefas que permitissem que os alunos usassem diferentes estratégias de resolução e várias representações [P2], e que se aproximassem das características dos problemas, incluindo ainda questões com diferentes graus de desafio [P1]. A primeira tarefa proposta por Mónica (Figura 4) apresentava, de facto, uma diversidade de representações, mas não correspondia ao pedido da supervisora:

Supervisora – Não pode ser só posto assim, para eles [os alunos] identificarem o que é o diagrama [sagital], o que é que é a tabela, o que é que é o gráfico.
... Para mim este exercício vai aos níveis cognitivos mais baixos. (S2)

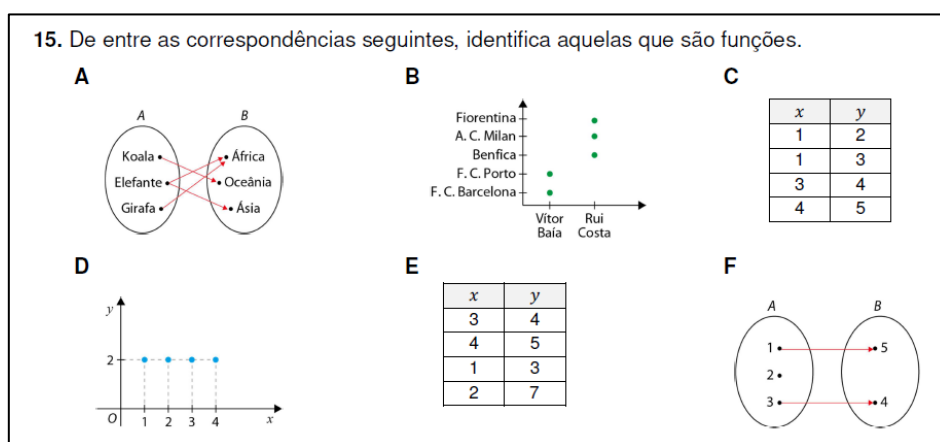


Figura 4. Primeira tarefa proposta por Mónica (S2).

Assim, a investigadora decidiu recordar o texto de Ponte (2005) sobre os diferentes tipos de tarefas e as suas características, que sabia ter sido explorado pela supervisora com as futuras professoras no ano anterior. Recordar a distinção entre *exercício*, *exploração* e *problema* (Ponte, 2005), levou Mónica a reconsiderar a tarefa que tinha selecionado:

Mónica – Eu usaria [a tarefa que propus] para adaptar a um problema ... por exemplo, [usar] estes tipos de representações de funções ... [e] perguntar qual deles é que representaria aquela [determinada] situação. (S2)

Olhar novamente para as características das tarefas pareceu despertar a atenção da futura professora em relação à construção das questões da tarefa. Esta atenção ficou ainda mais evidente com a segunda tarefa que Mónica propôs numa sessão posterior (Figura 5). Nesta

tarefa, os alunos poderiam utilizar diferentes estratégias para responder à questão [P2] e teriam que, implicitamente, justificar a sua resposta [P3]. Além disso, a tarefa tinha características de um problema [P1] uma vez que “está perfeitamente indicado o que é dado e o que é pedido” (Ponte, 2005, p. 4) e “é uma tarefa fechada, mas com um elevado desafio” (Ponte, 2005, p. 8).

A avó da Joana esqueceu-se de abastecer o automóvel com gasolina e a estação de serviço mais próxima fica a 80km do sítio onde se encontra.

O medidor do combustível indica-lhe que só tem 6 litros.

Será que a avó da Joana consegue chegar à estação?

Sabendo que:

- A uma velocidade média de 40km/h, o automóvel consome 4L a cada 100Km e, por cada 20km a mais de velocidade consome mais um litro;
- São 23h10min e a estação encerra as 0h00min.

Ajuda a avó da Joana a entender se tem ou não possibilidade de alcançar a estação de serviço no tempo que lhe resta.



Figura 5. Segunda tarefa proposta por Mónica (S4).

Perante as tarefas propostas pelas futuras professoras, e após a sua resolução, surgiu a análise dos pontos fortes e fracos de cada uma delas, considerando, por um lado, o objetivo da aula e, por outro lado, a promoção do raciocínio matemático dos alunos a partir da relação entre as representações dadas no enunciado e as justificações que os alunos poderiam dar. A partir desta análise, o grupo optou por adaptar uma tarefa de um manual escolar (Figura 6) que incluía várias questões com diferentes graus de desafio [P1] (por exemplo, a questão *a*) tem um nível de desafio mais reduzido do que a questão *d*), permitia o uso de diversas estratégias de resolução [P2] (os alunos poderiam recorrer a diferentes procedimentos e representações para resolver as questões), e pedia a justificação das respostas [P3] (como, por exemplo, de forma explícita, na questão *b*)).

na EN, cidade costeira
 É em Aveiro, a chamada Veneza de Portugal, onde se
 podem encontrar os famosos ovos moles, uma das
 riquezas gastronómicas da região.

Na pastelaria Flôr de Sal, cada ovo mole custa
 quarenta-cêntimos.

Sabendo que um barco, quando
 chega à lota, traz caixas de bacalhau

Na porta dessa pastelaria encontra-se afixada uma tabela de preços onde alguns valores não são
 perceptíveis. Observa:



15 caixas vêm com o
 bacalhau congelado;
 Caixas com ± 25 Kg;
 Cada quilograma de
 bacalhau custa 13€.

$$25 \times 13 = 325 \text{ €}$$

↓
 1 caixa

Número de ovos moles	Preço
6	2,4 €
	4 €
12	
	8 €

Deixar
 a tabela

Nº caixas	Preço
2	650 €
16	1950 €
10	3250 €
14	3900 €

a) Completa a tabela com os valores em falta, apresentando o teu raciocínio. ✓

b) Considera que tens 3 € para comprar caixas de bacalhau. Quantos podes comprar? Terás direito a troco? Explica o teu raciocínio. ✓

c) Representa através de um gráfico cartesiano a informação dada pela tabela.

d) Seja x o número de ovos moles e y o seu preço. Para cada par ordenado (x, y) , encontra a razão $\frac{y}{x}$. Interpreta os resultados obtidos no contexto da situação. ✓

e) Seja f a função que ao número de ovos moles comprados, x , faz corresponder o preço a pagar, y . Escreve uma expressão algébrica que represente a função f .

→ pensar numa alternativa: representação gráfica para interpretar

Figura 6. Tarefa adaptada do manual escolar Pi7 – Volume 1, ASA (acesso online) e analisada na S4, com as anotações realizadas durante a sessão⁷.

Considerando a intenção de Mónica de promover a justificação, o grupo sentiu necessidade de repensar a ordem das questões. Na primeira versão da tarefa (Figura 6, a preto), os alunos começariam por preencher uma tabela que relacionava o número de caixas de bacalhau com o seu preço para, de seguida, representar a situação graficamente e, por fim, escrever uma expressão algébrica representativa da situação. Apesar de a tarefa permitir diferentes estratégias de resolução [P2], a investigadora incitou as futuras professoras a analisar se deveriam, ou não, explorar todas as representações com os alunos:

Investigadora – Queremos que eles [os alunos] trabalhem todas as representações [como Mónica sugeriu]? Ou vamos privilegiar algumas?

Olívia – [Vamos optar pela] representação gráfica ... porque o diagrama sagital é o que eles [os alunos] mais trabalham.

⁷ Nota: A seta que se apresenta relativa à questão e) refere-se à questão c). Como a figura representa um documento de trabalho durante a sessão do estudo de aula, esta falta de rigor cometida pelo grupo de trabalho não foi corrigida nesta comunicação.

...

Mónica – O gráfico e a tabela como pressuposto de [os alunos] chegarem à expressão algébrica ... que vai ao nível da generalização. Também queremos isso ... Eles pela tabela conseguem melhor [chegar à generalização] do que pelo gráfico. (S4)

As futuras professoras consideraram que deveriam evitar o diagrama sagital. Primeiro, consideraram usar a representação gráfica, mas depois decidiram privilegiar a tabela, mantendo a linguagem natural do enunciado, e encaminhar os alunos para a escrita da expressão algébrica através dos fatores multiplicativos, e com questões de desafio variado, procurando não apenas solicitar justificações [P3], como também promover a generalização.

Depois de desenharem uma primeira versão da tarefa, e considerando as ideias que foram partilhadas durante as sessões do estudo de aula, Mónica trouxe para a discussão a utilização da palavra “razão” numa das questões (Figura 7):

Mónica – Devemos usar a palavra ‘razão’ ou ‘determinar o valor de’? Porque, ao dizer que é uma razão, a palavra já os conduz para as proporções. (S5)

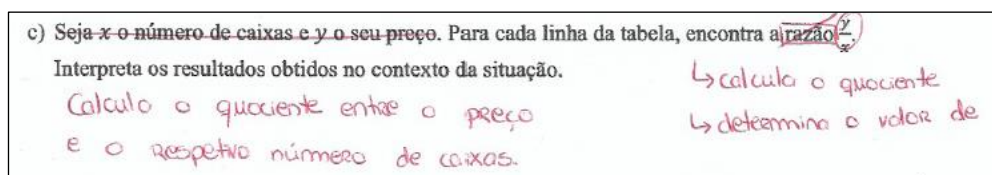


Figura 7. Adaptações à questão c) da tarefa (S5)⁸.

Como pretendiam que os alunos recorressem sobretudo aos fatores multiplicativos como estratégia para chegar à expressão algébrica da situação, as futuras professoras decidiram reformular esta questão uma vez que a palavra “razão” poderia levar os alunos a estruturar as suas resoluções apenas através da regra de três simples, o que limitaria as estratégias que poderiam seguir [P2] e dificultaria a generalização.

Refletir sobre o trabalho dos alunos durante a aula

Sobre as representações que foram privilegiadas na redação da tarefa, Mónica começou por se referir à tabela, afirmando que lhe “permitiu analisar a interpretação dos alunos acerca de informações matemáticas apresentadas” (RF). A futura professora exemplificou através do trabalho de um dos grupos de alunos, que apresentou uma interpretação errada:

[Os alunos] conseguiram determinar corretamente o preço de uma caixa, mas não utilizaram esse valor nas restantes operações ... ao utilizarem 650 como fator multiplicativo ... apresentaram falta de conexão entre as informações fornecidas na tabela e os dados obtidos. (RF)

Mónica concluiu que os alunos interpretaram erradamente a relação entre 650€ e o número de caixas correspondentes (no caso, 650€ seria o preço a pagar por duas caixas), influenciando a restante resolução da tarefa. Porém, quando lhes foi pedido para justificar, um dos alunos do grupo disse:

⁸ Nota: A questão c), evidenciada na Figura 5 (S5), corresponde à questão d) da Figura 4 (S4).

Se duas caixas são 650 euros, se nós dividirmos por 2 temos o dinheiro de uma caixa que é 325 euros ... Para sabermos quantas caixas são 1950 euros, fomos somando 325 até chegar ao número (excerto da justificação de um aluno durante a discussão coletiva, Fonte: RF)

Apesar da confusão com o valor, em euros, de uma caixa, Mónica reconheceu que os alunos compreenderam a informação dada no problema e souberam aplicar um procedimento baseado em somas sucessivas para encontrar o valor pedido.

Ao analisar o trabalho dos restantes grupos de alunos, Mónica concluiu então que, no geral, os alunos “demonstraram oralmente entender a relação de proporcionalidade entre os valores, reconhecendo assim o objetivo específico atribuído a esta primeira alínea” (RF). Assim, apesar de a tabela ter apoiado os alunos a justificar as suas resoluções em alguns casos [P3], noutros casos pareceu ter criado alguma confusão.

Em relação à escrita da expressão algébrica, com vista à generalização, Mónica explicou que, durante a aula, teve de apoiar os alunos nesta questão:

[Nós] previmos que eles poderiam ter dúvidas em alguns aspetos. Não previmos, por exemplo, que eles conseguissem generalizar oralmente, mas que tivessem dificuldades em escrever matematicamente. Algebricamente ... Houve outros [alunos] que ficaram só pela linguagem corrente. (R2)

Assim, ela sugeriu que os alunos comesçassem por escrever as suas ideias em linguagem natural e, de seguida, procurassem traduzir para linguagem simbólica (como, por exemplo, na Figura 8), sendo o ponto de partida para generalização em representação algébrica [P2]:

[Os alunos] demonstram estabelecer uma conexão de ideias entre todas as informações fornecidas e recolhidas ao longo da [resolução da] tarefa, deixando também evidente que conseguem generalizar situações matemáticas para valores desconhecidos com recurso a representações simbólicas. (RF)

O número de caixas vezes 325 dá sempre o seu preço

$$C \times 325 = p$$

Figura 8. Produção de um dos grupos de alunos (RF).

Embora tivesse como objetivo que os alunos conseguissem formular uma generalização através da escrita de uma expressão algébrica que representasse a situação, Mónica valorizou a capacidade dos alunos em generalizar através de palavras, destacando o trabalho de um dos grupos na justificação da sua resolução [P3]:

[O grupo de alunos] validou o processo de generalização, apresentando uma explicação ... [e] recorreu ainda a representações icónicas [tabela] para organizar as informações obtidas. (RF)

Analisando a questão c) (Figura 7), na qual se pretendia que os alunos dessem sentido ao valor 325 no contexto da situação, Mónica concluiu que “a interpretação das informações fornecidas relacionou-se essencialmente com o entendimento da palavra ‘quociente’

presente no enunciado” (RF). Assim, se a preocupação durante a preparação da tarefa se prendia com a limitação que a palavra “razão” poderia trazer para a diversidade de procedimentos usados pelos alunos [P2], após a análise do trabalho destes, o destaque foi para a palavra “quociente”:

A maioria dos alunos conseguiu interpretar parte das informações fornecidas, mais propriamente a palavra “quociente” como sendo o resultado da divisão entre o preço e o número de caixas. (RF)

Assim, a adaptação do enunciado desta questão, especialmente relativa à sua redação, pareceu ter contribuído para que os alunos conseguissem “interpretar totalmente o objetivo da tarefa ... estabelecendo uma conexão de ideias com informações já fornecidas, o que lhes permitiu concluir que o valor encontrado representava o preço de uma caixa de bacalhau” (RF), como, por exemplo, representado na Figura 9.

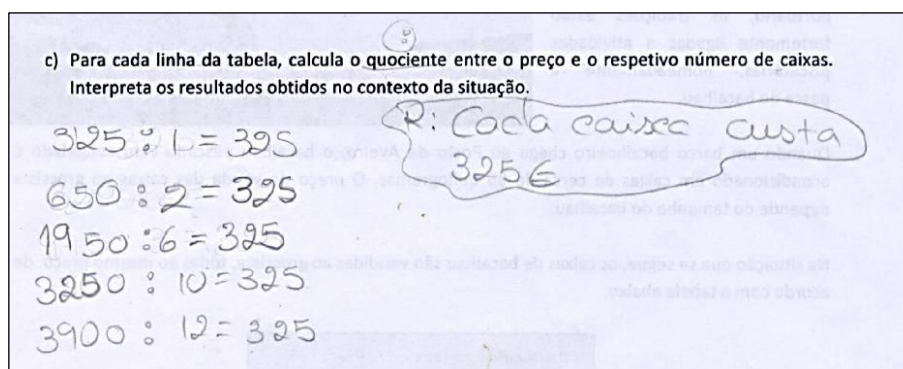


Figura 9. Produção de um dos grupos de alunos em resposta à questão c) (RF).

Conclusão

A discussão sobre as características das tarefas e sobre as representações a privilegiar para promover a justificação influenciou o desenho da tarefa, em especial, a ordem e a redação das questões. Inicialmente, Mónica perspetivava propor aos alunos apenas o reconhecimento de diferentes formas de representar uma função. No entanto, de forma diferente dos resultados de Santos et al. (2019), analisar as potencialidades e as fragilidades das tarefas propostas levou a futura professora a compreender a influência das representações e das palavras utilizadas, relativas ao tópico matemático em exploração, nas estratégias de resolução dos alunos e nos seus processos de raciocínio. Assim, mobilizar o conhecimento matemático para a resolução das tarefas e para a troca de ideias sobre as representações a privilegiar, levou a futura professora a olhar com mais cuidado para as características das tarefas, privilegiando problemas que [P1] incluíssem questões com diferentes graus de desafio, que [P2] possibilitassem a resolução através de diferentes estratégias, e que [P3] solicitassem justificações, desenvolvendo assim dimensões do seu conhecimento didático.

Refletir sobre a própria prática permite ao futuro professor compreendê-la melhor, levando-o a procurar estratégias para a melhorar (Ramos-Rodríguez et al., 2017). Semelhante aos resultados de Davidson et al. (2019), neste estudo, analisar o trabalho dos alunos, baseando-se na partilha de ideias que ocorreu nas sessões de reflexão durante o estudo de aula, também contribuiu para que a futura professora compreendesse a influência das tarefas nos processos de raciocínios dos alunos.

Desta forma, os resultados mostram que, durante um estudo de aula, os futuros professores têm várias oportunidades para desenvolver o seu conhecimento didático sobre

como promover o raciocínio matemático dos alunos, nomeadamente através: (i) da resolução de tarefas que exijam a mobilização do seu conhecimento matemático; (ii) de discussões que permitam a partilha de ideias com diferentes pontos de vista em relação a aspetos didáticos; (iii) de uma planificação detalhada da aula que vão conduzir, baseada na troca de perspetivas; e (iv) de reflexões sobre a aprendizagem dos alunos a partir da análise das suas produções à luz dos objetivos pré-definidos.

Preparar professores para que possam desenvolver seus conhecimentos à luz das necessidades da sociedade que se caracteriza por mudanças sistemáticas não é uma tarefa fácil (Ponte & Chapman, 2016). Nesta investigação, destaca-se o contributo das atividades de estudo de aula no desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores, nomeadamente o planeamento detalhado de aulas, em ambientes de partilha de experiências e de discussão de ideias, bem como a reflexão centrada na aprendizagem dos alunos. Assim, mostramos que o estudo de aula tem potencial para preparar os futuros professores para a sua atividade profissional, proporcionando-lhes conhecimentos práticos para serem agentes ativos no desenvolvimento dos seus conhecimentos e na busca pela constante melhoria da sua prática.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito da UIDEF – Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (UIDB/04107/2020).

Referências

- AERA. (2011). Code of ethics. *Educational Researcher*, 40(3), 145-156. <https://doi.org/10.3102/0013189X11410403>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8>
- Davidson, A., Herbert, S., & Bragg, L. A. (2019). Supporting elementary teachers' planning and assessing of mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 1151-1171. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9904-0>
- DGE. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática – 7º ano*. Ministério da Educação e Ciência.
- Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winslow, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ni Shuilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1-21). Springer.
- González, G., Villafañe-Cepeda, W., & Hernández-Rodríguez, O. (2023). Leveraging prospective teachers' knowledge through their participation in lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(1), 79-102. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09521-4>
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Lannin, J., Ellis, A., & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.
- Leavy, A. M., & Hourigan, M. (2016). Using lesson study to support knowledge development in initial teacher education: Insights from early number classrooms. *Teaching and Teacher Education*.

- Education*, 57, 161-175. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.04.002>
- Magnusson, J., Kullberg, A., Innabi, H., Knutsson, L., Von Otter, A. M., & Landström, J. (2021). Prospective teachers' opportunities to develop PCK from participation in learning study. *Educational Action Research*, 1-17. <https://doi.org/10.1080/09650792.2021.1997779>
- Martins, M., Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2021). Os desafios da abordagem exploratória no ensino da Matemática: Aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 343-364. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a16>
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4>
- Mendes, F., Delgado, C., & Brocardo, J. (2022). Challenges faced by preservice teachers in planning and exploring tasks that promote mathematical reasoning. *Acta Scientiae*, 24(4), 147-182. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7123>
- NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.
- OECD. (2021). *PISA 2021 Mathematics Framework*. OECD.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(2), 169-181. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016-0021>
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English, & D. Kisrshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 275-296). Routledge.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2023). Prospective mathematics teachers' views of their learning in a lesson study. *PNA - Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 17(2), 117-136. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i2.23896>
- Ramos-Rodríguez, E., Flores Martínez, P., & Ponte, J. P. (2017). An approach to the notion of reflective teacher and its exemplification on mathematics education. *Systemic Practice and Action Research*, 30, 85-102. <https://doi.org/10.1007/s11213-016-9383-6>
- REASON (2022). *Raciocínio matemático e a formação de professores*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Santos, L., Oliveira, H., Ponte, J. P., & Henriques, A. (2019). Pre-service teachers' experiences in selecting and proposing challenging tasks in secondary classrooms. In *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 11* (pp. 3762-3769). IGPME.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1463-1490. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9>
- Vieira, R., Ponte, J. P., & Mata-Pereira, J. (2022). Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(73), 822-843. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10>
- Willems, I., & Bossche, P. Van. (2019). Lesson Study effectiveness for teachers' professional learning: A best evidence synthesis. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 8(4), 257-271. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2019-0031>

Posters

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

PROBLEM POSING IN INITIAL TEACHER TRAINING

Alexandra Gomes

CIEC- IE, Universidade do Minho, Portugal

magomes@ie.uminho.pt

Resumo: Os professores desempenham um papel vital na criação de oportunidades de aprendizagem de formulação de problemas para os seus alunos, mas geralmente não têm experiência nessa formulação. É, pois, essencial que durante a sua formação, eles desenvolvam conhecimentos sobre formulação de problemas. O estudo aqui apresentado, de natureza qualitativa, tem como objetivo compreender melhor os tipos de problemas que futuros educadores/professores do 1.º CEB formulam e o nível de exigência cognitiva desses problemas. No âmbito de uma UC de Mestrado, os estudantes foram desafiados a formular problemas que posteriormente foram analisados. Concluiu-se que a maior parte dos problemas formulados são problemas de processo e que requerem a aplicação de procedimentos com conexões.

Palavras-chave: formulação de problemas, problemas matemáticos, formação inicial de professores.

Abstract: Teachers play a vital role in creating problem-posing learning opportunities for their students, but they often lack problem-posing experience. It is therefore essential that during their training, they develop knowledge about problem formulation. The study presented here, of a qualitative nature, aims to better understand the types of problems that future educators/primary school teachers formulate and the level of cognitive demand of these problems. Within the scope of a Master's course, students were challenged to formulate problems that were later analyzed. It was concluded that most of the problems formulated are process problems and demand the use of procedures with connections.

Keywords: problem posing, mathematical problems, initial teacher training.

Tarefas de formulação de problemas e formação de professores

As tarefas influenciam não só o que os alunos aprendem, mas a forma como aprendem. É através das tarefas que os alunos desenvolvem o seu conhecimento matemático, o seu sentido do que significa fazer matemática e o modo como compreendem a natureza da matemática (Jones & Pepin, 2016; Stein et al., 2000).

As tarefas de formulação de problemas são geralmente exigentes do ponto de vista cognitivo, porque muitas vezes impõem que os formuladores reflitam sobre aspetos mais amplos da estrutura e do objetivo. Tais tarefas podem promover a compreensão concetual dos alunos, fomentar a sua capacidade de raciocinar e comunicar matematicamente e captar o seu interesse (Yao et al., 2021, Zhang & Cai, 2021). A formulação de problemas matemáticos também requer criatividade (Papadopoulos, 2022).

Considera-se a formulação de problemas como a criação de um novo problema a partir de uma situação ou experiência, ou a reformulação de um determinado problema (Silver, 1995; Cai & Hwang, 2021).

A investigação tem mostrado que a formulação de problemas tem o potencial de afetar a capacidade de resolução de problemas dos alunos e as suas disposições em relação à matemática (Grundmeier, 2003). Na verdade, a formulação de problemas é fundamental no ensino, quer quando os professores colocam problemas aos alunos, quer quando os ajudam a tornarem-se melhores formuladores de problemas (Cai & Hwang, 2021). Para que os professores se sintam confortáveis e integrem eficazmente a formulação de problemas nas suas aulas, conforme sugerido pela literatura, é essencial que experimentem a formulação de problemas durante a sua formação inicial e desenvolvam os seus conhecimentos e competências na criação de problemas matemáticos (Chapman, 2012; Grundmeier, 2003).

Metodologia

Este estudo tem como objetivo compreender melhor os tipos de problemas que os estudantes formulam e o nível de exigência cognitiva desses problemas. A metodologia apresenta características de um estudo descritivo e interpretativo, baseado no paradigma qualitativo (Creswell & Poth, 2016). Foi desenvolvido numa unidade curricular inserida no Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º CEB e envolveu 25 estudantes (futuros educadores/professores).

A experiência de formulação de problemas ocorreu em 3 momentos separados ao longo do semestre. Em cada um deles, foi pedido aos estudantes para, em grupo, formularem problemas, destinados a alunos do 1.º CEB, tomando um livro de literatura infantil como contexto. De acordo com Marston (2014), a história e as ilustrações podem constituir um estímulo para os professores resolverem e formularem problemas e para aplicarem e integrarem os conceitos em situações relevantes ou quotidianas. Os estudantes resolveram as tarefas em pequenos grupos, que serão designados de G1 a G8. Os dados consistiram nos problemas que os estudantes formularam.

Todos os problemas formulados foram analisados, usando-se os seguintes critérios: por um lado, fez-se a classificação dos problemas, considerando o processo de resolução. Optou-se pela classificação apresentada por Boavida *et al.* (2008), por ser simples e se adequar ao nível de escolaridade a que se destinam os problemas. Assim, tem-se: (a) problemas de cálculo, que, para a sua resolução apenas necessitam da identificação das operações a realizar; (b) problemas de processo, que requerem a utilização de estratégias de resolução para encontrar a solução; e (c) problemas abertos, demandam uma escolha prudente entre vários caminhos possíveis.

Por outro lado, analisou-se a exigência cognitiva da tarefa de acordo com Stein *et al.* (2000): (a) memorização, que envolve a reprodução de fatos, fórmulas, regras ou definições previamente aprendidas; (b) procedimentos sem conexões, focados na resposta correta e não na compreensão; (c) procedimentos com conexões, em que se estabelecem conexões entre múltiplas representações e os procedimentos gerais não podem ser seguidos sem pensar; e (d) fazer matemática que exige pensamento complexo.

Este póster debruça-se sobre os problemas formulados no 3.º momento, a partir do último livro selecionado para ser usado pelos estudantes, “Se os bichos se vestissem como gente” de Luísa Ducla Soares.

Alguns resultados

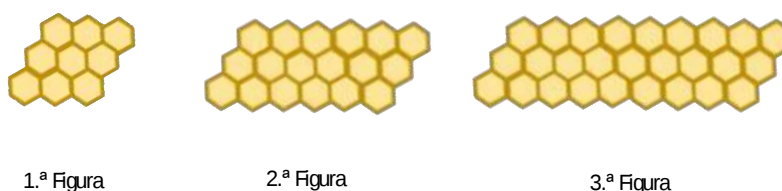
Ao analisar os problemas criados pelos estudantes, observou-se que os grupos se focaram em apenas duas páginas do livro. Quatro grupos optaram por formular os problemas inspirados na informação, textual e gráfica, da página dedicada à centopeia (Figura 1, à esquerda), enquanto os outros grupos criaram problemas a partir da informação dedicada às abelhas (Figura 1, à direita).



Figura 1. Páginas utilizadas pelos estudantes.

Considerando o critério de classificação dos problemas, constatamos que a maior parte dos problemas formulados são problemas de processo. Como exemplo, veja-se o problema proposto pelo G8 (Figura 2):

A construção da colmeia das abelhas resultou de um longo processo. As figuras seguintes mostram a evolução da mesma:



a) Quantos hexágonos terá a próxima figura?

Figura 2. Problema formulado pelo G8.

Neste problema são apresentados alguns termos de uma sequência sendo que para o resolver é necessário descobrir a lei de formação, ou seja, é necessário encontrar uma estratégia que conduza à solução.

Dois problemas são de cálculo (exemplo na Figura 4) e um pode ser considerado aberto (Figura 3):

A centopeia Fifi precisa de comprar sapatos. No entanto, ela decidiu que queria sapatos de duas cores diferentes. Quantos pares de sapatos de cada cor terá de comprar? (G4)

Figura 3. Problema formulado pelo G4.

Este problema oferece a oportunidade de explorar várias soluções, baseadas em diversas premissas. Assim, os alunos poderiam explorar regularidades, formular conjecturas, desenvolvendo o raciocínio (Boavida et al., 2008).

No que diz respeito ao critério de exigência cognitiva, não identificamos nenhum problema que se baseie na mera memorização. Encontramos dois problemas que requerem a execução de procedimentos sem conexões, conforme ilustrado a seguir.

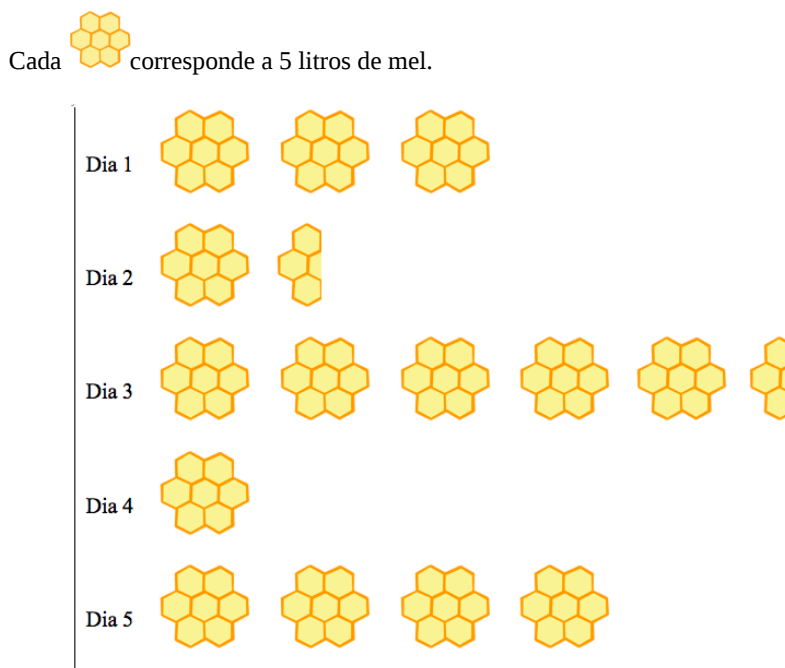
A centopeia foi a uma loja para comprar sapatos. Comprou pares de sapatos de três cores diferentes. No total gastou 1005€.

Sabendo que gastaria 1500€ se não tivesse tido desconto, de quanto foi o desconto obtido?

Figura 4. Problema formulado pelo G1.

Adicionalmente, encontramos um problema que pode ser considerado como requerendo procedimentos com conexões ou mesmo fazer matemática (Figura 5):

Na fábrica das abelhas é produzido o melhor mel do mundo, mas para o fazerem, todas os dias têm de usar uma nova touca e um novo avental. Cada abelha produz 0,5 litros de mel por dia. Atenta no gráfico abaixo:



- Quantas abelhas terão trabalhado no dia 3?
- No final dos cinco dias, quantas toucas e quantos aventais terão sido utilizados?

Figura 5. Problema formulado pelo G7.

Para a resolução deste problema os alunos têm que interpretar o pictograma e relacionar a quantidade de mel produzida por dia com o n.º de abelhas, o que envolve o raciocínio proporcional. Ou seja, a resolução deste problema exige envolvimento com conceitos e estimula os alunos a fazer conexões com ideias matemáticas relevantes (Stein et al., 2000).

Considerações finais

Os estudantes participantes neste estudo tiveram oportunidade de se envolverem na formulação de problemas, partindo de situações livres e variadas. Constatou-se que todos os grupos foram capazes de formular problemas matemáticos. Apesar da falta de

experiência anterior com a formulação de problemas, a maior parte dos grupos criou problemas interessantes que exigiam o desenvolvimento de estratégias e processos cognitivos de alto nível. Estes resultados parecem sugerir que é importante os estudantes experimentarem a formulação de problemas durante sua formação inicial (Chapman, 2012; Saleh et al., 2020). Isso desafia-os a envolverem-se na formulação de tarefas ricas de resolução de problemas.

Referências

- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Cai, J., & Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 1403-1416.
- Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. *PNA*, 6(4), 135-146.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2016). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications.
- Grundmeier, T. A. (2003). *The effects of providing mathematical problem -posing experiences for K--8 pre-service teachers: Investigating teachers' beliefs and characteristics of posed problems*. [Tese de doutoramento, New Hampshire University, EUA]. <https://scholars.unh.edu/dissertation/127>
- Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2), 105-121.
- Marston, J. (2014). Identifying and using picture books with quality mathematical content: Moving beyond “Counting on Frank” and “The Very Hungry Caterpillar”. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(1), 14-23.
- Papadopoulos, I., Patsiala, N., Baumanns, L., & Rott, B. (2022). Multiple approaches to problem posing: Theoretical considerations regarding its definition, conceptualisation, and implementation. *Center for Educational Policy Studies Journal*, 12(1), 13-34.
- Saleh, S. F., Purwanto, P., Sudirman, S., & Hidayanto, E. (2020). Pre-service elementary school teachers' awareness of posing mathematical pseudo-problems. *TEM Journal*, 9(3), 1252-1261.
- Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: mathematical and pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematical Education*, 27, 67-72.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 937-949.
- Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: Insights from an analysis of teaching cases. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 961-973.

**DO PLANEAMENTO À REFLEXÃO: O TRABALHO DOS FUTUROS
PROFESSORES NUMA TAREFA SOBRE PIRÂMIDES**
**FROM PLANNING TO REFLECTION: THE WORK OF FUTURE TEACHERS
IN A TASK ABOUT PYRAMIDS**

Linda Cardoso

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

lindacardoso28@gmail.com

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Marisa Quaresma

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal

mq@campus.ul.pt

Resumo: A investigação tem como objetivo identificar que aspetos do conhecimento didático os futuros professores mobilizam durante o estudo de aula e que atividades do estudo de aula potenciam o desenvolvimento desses aspetos. O estudo foi realizado numa turma do 1.º ano de mestrado de formação de professores dos primeiros anos. Os dados sugerem que as futuras professoras mobilizam e desenvolvem o seu conhecimento sobre planeamento de aulas com tarefas exploratórias, dificuldades e estratégias de resolução e observação da aprendizagem dos alunos. Esse desenvolvimento ocorre quando definem objetivos, resolvem e analisam a tarefa, antecipam dificuldades e estratégias de resolução, observam as resoluções dos alunos na aula e refletem e comparam o que tinham previsto com o que aconteceu.

Palavras-chave: estudo de aula, formação inicial, futuros professores, conhecimento didático, tarefa.

Abstract: This research aims to identify which aspects of didactic knowledge prospective teachers mobilize during lesson study and which lesson study activities promote the development of these aspects. The study was carried out during the 1st year of the initial teacher education master's program for early years teachers. The data suggests that prospective teachers mobilize and develop their knowledge of planning lessons with exploratory tasks, difficulties and solution strategies and observing students' learning. This development occurs when they define goals, work on the task, anticipate difficulties and solution strategies, observe students' solutions in the research lesson, and reflect on and compare what they had planned with what happened.

Keywords: lesson study, initial teacher education, primary teachers, didactic knowledge, task.

Introdução

Durante a formação inicial os futuros professores aprendem e aprofundam o seu conhecimento sobre os conteúdos que vão lecionar, sobre como ensinar e sobre como agir e comportar-se como professor (Strutchens et al., 2016). No estudo de aula, um grupo trabalha pormenorizadamente no planeamento de uma aula, de ensino exploratório, possibilitando reflexões e discussões sobre tarefas, organização e condução da aula, dificuldades dos alunos e observação da aprendizagem dos alunos (Murata, 2011). Este processo tem mostrado que o estudo de aula pode proporcionar o desenvolvimento de conhecimento didático e matemático, estabelecendo conexões entre si (Murata, 2011). No entanto, ainda foi pouco aprofundado o uso do estudo de aula na formação inicial de professores em Portugal. Assim, este estudo tem como objetivo identificar que aspetos do conhecimento didático os futuros professores mobilizam durante o estudo de aula e que atividades do estudo potenciam o seu desenvolvimento.

Estudo de aula e conhecimento dos futuros professores

Ponte et al (2017) referem que é necessário existir na formação de professores dispositivos de formação que possibilitem não só o desenvolvimento dos professores, mas que tenham também em consideração os interesses dos envolvidos e os objetivos formativos. Os autores indicam a importância dos futuros professores resolverem e discutirem sobre tarefas, estratégias de resolução e dificuldades dos alunos para desenvolverem o seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Matemática. O estudo de aula é um processo formativo através do qual os participantes planeiam, discutem e refletem sobre uma aula, e que possibilita aos futuros professores uma ligação entre teoria e prática. O facto de ser um processo formativo de reflexão e colaborativo, que tem como foco o aluno e que possui uma aula de investigação (Murata, 2011), são aspetos que tornam o estudo de aula um processo com grandes potencialidades para ser usado na formação inicial.

Metodologia

A investigação segue uma abordagem qualitativa. O estudo de aula foi realizado no 1.º ano de um mestrado para professores dos primeiros anos. O processo formativo foi constituído por cinco sessões e foi desenvolvido com 25 futuros professores, que trabalharam em pequenos grupos. Foi analisado um grupo constituído por quatro futuras professoras que se mostraram bastante envolvidas no processo ao longo das sessões. Participaram também no processo a professora do ensino superior, que orientou as sessões, a professora titular de uma turma de 3.º ano, que lecionou a aula de investigação, e a investigadora (primeira autora).

Os dados foram recolhidos através de observação das sessões com gravação áudio e registo no diário de bordo e de recolha documental dos materiais produzidos pelos futuros professores durante as sessões, nomeadamente a resolução da tarefa e o plano de aula, e a reflexão final escrita. Os dados foram analisados com base no modelo de Carrillo-Yañez et al. (2018), com foco no conhecimento didático (KFLM, KMT e KMLS). As categorias de análise não são incluídas neste resumo por razões de espaço, mas serão incluídas no poster.

Resultados

No planeamento da aula, as futuras professoras começaram por resolver a tarefa “vamos conhecer pirâmides”⁹, em que a primeira questão se foca no estudo das pirâmides dadas aos alunos. A professora do ensino superior pediu para anteciparem possíveis resoluções e dificuldades dos alunos. O grupo identificou três possíveis dificuldades:

O(a) aluno(a) não contabiliza a face da base da pirâmide ... aquando da contagem dos vértices, contabiliza apenas os da base e esquece-se do vértice no topo da pirâmide ... O(a) aluno(a) confunde os conceitos de face, vértice e/ou aresta (*plano de aula*)

Neste momento do planeamento, as futuras professoras mobilizaram o seu conhecimento sobre possíveis resoluções, estratégias e dificuldades. Através das discussões em grupo tiveram ainda possibilidade de aprofundar este conhecimento ao partilharem ideias entre si.

Na aula de investigação, a futura professora do grupo que observou a aula procurou registar as resoluções e intervenções dos alunos:

Um dos elementos ... afirma “trouxe outra pirâmide!” – o que demonstrou que o aluno ainda não distingue pirâmide de prisma, a figura que trouxe era um paralelepípedo ... Contam as suas faces “quatro!” – a resposta correta é 5, não contam a base. (*notas de campo, futura professora A*)

Enquanto observou, a futura professora fez algumas inferências, tendo em consideração o que já tinha discutido com o seu grupo sobre possíveis estratégias e dificuldades. Para além disso, registou uma dificuldade que o grupo não tinha antecipado.

Na reflexão pós-aula, o grupo analisou cada uma das respostas dos alunos e comparou com o que tinha antecipado:

É possível inferir [que o] primeiro exercício terá sido difícil para os alunos ... os alunos já não se recordavam do que caracterizava uma pirâmide ... As resoluções analisadas apresentavam incorreções... No que diz respeito aos processos de raciocínio presentes recorreram à... classificação ... comparação ... generalização ... O grupo tinha previsto que os alunos poderiam não contabilizar a base da pirâmide como uma face da mesma, o que se verificou (*reflexão final escrita do grupo*)

Na reflexão, as futuras professoras analisaram as respostas dos alunos, compararam com o que tinham pensado inicialmente e refletiram também sobre os processos de raciocínio dos alunos.

Conclusão

Neste estudo de aula, as futuras professoras mobilizaram aspetos do conhecimento matemático para resolverem a tarefa e aspetos do conhecimento didático para planearem pormenorizadamente a aula e refletirem sobre o que observaram. O processo possibilitou o desenvolvimento do conhecimento didático ao proporcionar aos futuros professores vivenciar o planeamento de uma aula que foi colocada em prática e sobre a qual posteriormente refletiram. Para além disso, o trabalho de resolução da tarefa, antecipação

⁹ Disponível em:

http://reason.ie.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2023/01/EBOOK_BROCHURAS_GEOM_12S.pdf

de dificuldades e resoluções dos alunos, a observação e registo de notas de campo e a posterior reflexão em que compararam o que planearam com o que aconteceu foram atividades do processo que potenciaram o desenvolvimento de conhecimento didático dos futuros professores.

Referências

- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. (2018), The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(1), 71-94. <https://doi.org/10.12802/relime.17.2013>.
- Strutchens, M. E., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J. P., Cyrino, M. C. de C. T., & Zbiek, R. M. (2016). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-38965-3>.

**SELEÇÃO E ADAPTAÇÃO DE TAREFAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
PARA A PROMOÇÃO DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL**

**SELECTION AND ADAPTATION OF PROBLEM-SOLVING TASKS FOR THE
PROMOTION OF COMPUTATIONAL THINKING**

Ana Lúcia Bento Miguens

Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Portugal

amiguens@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Portugal

mq@campus.ul.pt

Resumo: A integração do Pensamento Computacional no currículo de Matemática é um tema de crescente interesse e representa um novo desafio para os professores. Embora o Pensamento Computacional já esteja presente no currículo português, ainda há um conhecimento limitado sobre o que os professores precisam saber para desenvolver esta capacidade transversal nos seus alunos. Parte de uma investigação mais abrangente, este poster apresenta como o entendimento dos professores sobre o Pensamento Computacional, o seu lugar no currículo de Matemática, o seu ensino e as suas dificuldades informa o processo de formação de professores, especificamente ao nível da seleção e adaptação de tarefas de resolução de problemas para a promoção do Pensamento Computacional.

Palavras-chave: pensamento computacional, resolução de problemas, tarefas, 1.º ciclo, estudo de aula.

Abstract: The integration of Computational Thinking into the Mathematics curriculum is a subject of growing interest and represents a novel challenge for teachers. Although Computational Thinking is already present in the Portuguese curriculum, there is still limited knowledge of what teachers need to know to develop the student's said transversal capacity. A part of a broader investigation, this poster presents how teachers' understanding of Computational Thinking, its place in the Mathematics' curricula, its teaching and learning and the difficulties associated with it informs teachers professional development process, specifically regarding the selection and adaptation of problem-solving tasks for the promotion of computational thinking.

Keywords: computational thinking, problem solving, tasks, primary school, lesson study.

Formação de professores para o ensino do Pensamento Computacional

A integração do Pensamento Computacional (PC) no currículo de matemática é um assunto de crescente interesse em muitos países e representa um novo desafio para os professores. Embora já esteja presente no currículo português, ainda há limitações no conhecimento sobre o que os professores precisam de saber para orientar o desenvolvimento dessa capacidade transversal nos seus alunos e integrá-la efetivamente na sua prática letiva. Uma forma de ultrapassar esta dificuldade consiste em investir em processos colaborativos de formação de professores que ocorrem na escola e em promover a reflexão sobre a prática docente. O estudo de aula (EA) reúne estas características e, por isso, demonstra ser um contexto promissor para o desenvolvimento profissional dos professores (Ponte et al., 2020), que também já é reconhecido por ser eficaz na implementação de novos currículos de matemática (Ni Shuilleabhain & Seery, 2018). Este processo estimula a construção de conhecimentos práticos, a partilha de experiências e a procura por soluções contextualizadas e consiste no estudo, planificação, observação e reflexão das aulas, por parte dos professores (Murata, 2011).

Metodologia

Neste poster é apresentado como quatro professores, do 1.º ciclo de uma escola pública de Lisboa, entendem o PC, o seu lugar no currículo de matemática, o seu ensino e as suas dificuldades. Também é partilhado a forma como estes dados informam o processo de EA, através do qual os investigadores procuram desenvolver o conhecimento dos professores relativamente ao ensino do PC em Matemática – objetivo geral da investigação em que este poster se insere. A investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e envolve quatro professores do 1.º ciclo. O design metodológico é o de observação participante, com recurso ao estudo de caso, pois este envolve a imersão do investigador na comunidade a estudar, possibilita uma aquisição detalhada e abundante de dados, essenciais para identificar padrões e colocar hipóteses sobre o fenómeno a estudar (Jorgensen, 1989). Os dados são recolhidos através de entrevistas semiestruturadas, observação participante e recolha documental, utilizando gravações de vídeo e áudio das sessões. Os dados serão tratados através de uma análise dedutiva e indutiva.

Fundamentação teórica

As oportunidades de aprendizagem que consideram o PC em Matemática são caracterizadas por “uma abordagem estruturada de resolução de problemas em que se é capaz de resolver e/ou transferir a solução de um problema matemático para outras pessoas ou máquinas” (Kallia et al., 2021, p. 23), em que é possível desenvolver práticas de decomposição, abstração, identificação de padrões, algoritmia e depuração (Canavarro et al., 2021). Comum ao PC e ao EA está a resolução de problemas, que é um dos aspetos cruciais do ensino da Matemática do modelo de EA japonês, em que o foco está na atividade/experiência Matemática com tarefas ricas e significativas para os alunos (Fujii, 2018). A dinâmica das aulas observada nestes contextos, é também recomendada para o ensino da matemática em Portugal, em que o professor deve proporcionar momentos em que os alunos exploram uma tarefa, nomeadamente problemas, e sistematizam os conhecimentos co-construídos (Canavarro et al., 2021).

É importante lembrar que o PC é uma capacidade que se desenvolve ao longo do tempo e que experiências pontuais são insuficientes para o seu desenvolvimento. Além disso, o PC não tem um ‘conteúdo’ que precise ser ensinado, ele é desenvolvido em contexto, através de tarefas que exigem que os alunos reconheçam a sua necessidade e o mobilizem,

conforme apropriado. O PC pode ser desenvolvido em diversos contextos de aprendizagem e promovido através de tarefas *unplugged*, isto é, experiências de aprendizagem sem recurso a um processador computacional e tarefas *plugged-in*, que recorrem a ferramentas de computação (Grover, 2022), ambas essenciais para uma progressão e aquisição de competências. Há indícios em como a progressão de atividades *unplugged* para *plugged-in* é essencial para que os alunos apreciem o poder da computação (Grover, 2022). Para tal, é fundamental que a planificação dos professores estabeleça uma ponte entre as diversas tarefas, que devem ter uma natureza distinta e um elevado grau de desafio (exploração, problemas, investigação e modelação), assim como permitir uma variedade de estratégias de resolução, e suscitar processos de pensamento e práticas de PC.

Considerações finais

Na medida em que esta é uma investigação que se encontra ainda numa fase inicial, espera-se que, no decorrer deste modelo colaborativo do EA os professores estudem aprofundadamente a Matemática e o material curricular relacionado com o objetivo das aulas – promoção do PC. Discutam sobre como é que as tarefas se enquadram na sequência de aprendizagem, reflitam sobre a importância da proposta do problema naquele momento e sobre como é que permite expandir o conhecimento dos alunos, tendo em conta o currículo. Mais tarde, deverão, igualmente, antecipar as possíveis respostas dos alunos ao problema, incluindo equívocos e soluções incorretas, a fim de planear como os abordar durante a discussão coletiva. Pois, como referem Stigler e Hiebert (1999), no ensino da matemática pela resolução de problemas “os professores devem ajudar os alunos a perceber que passar de estratégias complicadas para outras mais simples é algo conveniente e inteligente a fazer” (p. 183). Prevê-se que esta preparação extensiva ajudará os professores a selecionar e adaptar os melhores problemas para usar nas suas aulas.

Referências

- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática - 3.º ano*. Ministério da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/a_e_mat_3.o_ano.pdf
- Fujii, T. (2018). Lesson Study and Teaching Mathematics Through Problem Solving: The Two Wheels of a Cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics Lesson Study Around the World* (pp. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1
- Grover, S. (2022). Computational Thinking Today. In A. Yadav & U. D. Berthelsen (Eds.), *Computational Thinking in Education* (1st ed., pp. 18–40). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003102991-2>
- Jorgensen, D. (1989). *Participant Observation*. SAGE Publications, Inc. <https://doi.org/10.4135/9781412985376>
- Kallia, M., van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 159–187. <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1852104>
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. In L. C. Hart, A. S. Alston, & A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (1st ed., pp. 1–12). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1

-
- Ni Shuilleabhain, A., & Seery, A. (2018). Enacting curriculum reform through lesson study: a case study of mathematics teacher learning. *Professional Development in Education*, 44(2), 222–236. <https://doi.org/10.1080/19415257.2017.1280521>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7–11. <http://hdl.handle.net/10451/44393>
- Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving in the classroom*. In [http://lst-iiep.iiep-unesco.org/cgi-bin/wwwi32.exe/\[in=epidoc1.in\]/?t2000=011347/\(100\)](http://lst-iiep.iiep-unesco.org/cgi-bin/wwwi32.exe/[in=epidoc1.in]/?t2000=011347/(100)). The Free Press.

AÇÕES DE UM FUTURO PROFESSOR NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS NUM ESTUDO DE AULA

ACTIONS OF A PROSPECTIVE TEACHER IN SOLVING TASKS IN A LESSON STUDY

Gimo José Maundera

Universidade Púnguè, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

gmaundera@yahoo.com.br

Resumo: O estudo tem por objetivo compreender as ações de um futuro professor que se evidenciam na resolução de uma tarefa, num estudo de aula realizado em Moçambique. O enquadramento teórico incide sobre tarefas e estudo de aula. O estudo é qualitativo e interpretativo. Analisamos as ações de um futuro professor, relacionadas à condução da atividade dos alunos, episódios relevantes e forma de orientação durante o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. O estudo de aula decorreu na 9.^a classe, envolvendo duas professoras da escola, dois futuros professores, um professor universitário e o investigador. Foram analisados documentos, gravações e observações durante a aula de investigação. O estudo revela as ações do futuro professor durante a resolução de tarefas numa aula de investigação.

Palavras-chave: tarefa, resolução de problemas, estudo de aula.

Abstract: The aim of this study is to understand the actions of a prospective teacher when solving a task in a lesson study carried out in Mozambique. The framework focuses on tasks and lesson study. The research is qualitative and interpretative. We analyse the actions of a prospective teacher, related to leading the students' activity, relevant episodes, and the form of guidance during the teaching and learning process in the classroom. The lesson study took place in grade 9, involving two teachers from the school, two prospective teachers, a university lecturer, and the researcher. Documents, recordings, and observations during the research lesson were analysed. The study shows the actions of the prospective teacher during the solution of tasks in a research lesson.

Keywords: task, problem solving, lesson study.

Introdução

O processo de aprendizagem de futuros professores pode decorrer a partir da resolução de uma sequência de tarefas matemáticas de natureza exploratória na sala de aula. Um estudo de aula envolve o planeamento colaborativo de uma aula, chamada de aula de investigação, que é lecionada por um docente e observada pelos demais, de modo a explorar uma questão de pesquisa, cujo foco é a aprendizagem dos alunos (Ponte, 2017). Neste poster, apresento parte do projeto de investigação em curso intitulado “O Desenvolvimento do Conhecimento Didático de Futuros Professores de Matemática no Estudo de Aula em Moçambique”, focando a resolução de duas questões de uma sequência de tarefas. O poster apresenta as ações de um futuro professor a partir de dois episódios na sala de aula.

Enquadramento teórico

Ponte (2005) refere que “existem muitos tipos de tarefa matemática ... os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação” (p. 5). Na perspetiva de Abrantes (1989), “a resolução de problemas consiste numa larga variedade de processos, atividades e experiências, e o ensino da matemática deveria refletir essa diversidade” (p. 9). Ponte (2005) afirma que “um problema é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio” (p. 8). No entanto, existem diversos tipos de tarefas matemáticas, que podem ser consideradas problemas para alunos de determinadas idades, quando não conhecem o método a ser usado na tarefa (Ponte, 2005). Apresentamos um estudo sobre a resolução de tarefas para compreender as ações de um futuro professor relacionadas com a gestão da aprendizagem (Ponte et al., 2013) que se mostram na resolução de tarefas num estudo de aula (Stigler & Hiebert, 1999). De acordo com Mata-Pereira (2018), essas ações incluem “convidar, informar/ sugerir, apoiar/ guiar e desafiar” (p. 20).

Metodologia

O estudo tem abordagem qualitativa de carácter interpretativo, centrado numa aula ministrada por um futuro professor, Artur (nome fictício), sem experiência de ensino. A aula de estatística, com duração de 90 minutos, foi realizada na 9.^a classe da escola secundária, envolvendo duas professoras da escola, dois futuros professores, um professor da universidade e o investigador.

Os dados foram recolhidos através da observação, tomada de notas no diário de bordo e gravações áudio. Analisamos duas questões, tendo em considerações as ações do futuro professor na condução da resolução de tarefa relacionadas com processos matemáticos e gestão de aprendizagem na sala de aula.

Resolução de tarefas

Episódio 1

O futuro professor Artur distribuiu os enunciados, indicando as normas de resolução aos alunos, sugerindo que trabalhassem em pares:

1. Escola Secundária S, conduz pesquisas semanais em aproximadamente 8 salas da 9.^a classe para determinar a idade média dos alunos. Em 4 de Julho de 2022, a idade média dos alunos era de 14 anos. Identifique a população e a amostra. Justifica a resposta.

Figura 10. Tarefa número 1 do enunciado.

Artur – A questão número 1 têm 9 minutos. Basta dar os 9 minutos é só saltar para outra questão, a resolução não deve ser de uma pessoa se vocês são três devem contribuir ideias.

Aluno C – Eu não estou a entender.

Artur – Não está a entender o quê?

Aluno C – As perguntas!

Aluno D – Docente, posso dar uma ideia?

Artur – OK! Alguém conseguiu entender alguma coisa nesse enunciado?

Naquele momento, a turma dividiu-se em duas opiniões. O professor apoiou, por meio de questões direcionadas aos alunos:

Artur – O que seria uma população? E o que seria uma amostra? (...) o que é uma população e o que é uma amostra? [Silêncio] Alguém sabe?

Aluno E – Não!

Aluno D – Sim...

Aluno F – Senhor professor posso falar!

Artur – Pode falar: o que é população?

Aluno F – População é o conjunto de pessoa que habita numa determinada região.

Artur – Ele disse que a população é o conjunto de pessoas...

Aluno F – Que habita numa determinada região. [completa]

Artur – Que habita numa determinada região, mas a população que estamos a tratar aqui... essa é definição acho de geografia, não é isso?

Vários alunos – Sim

Artur – A população que estamos a falar aqui é da estatística. População seria o quê?

Aluno G – É um conjunto (...) é um conjunto cujo elementos tem uma ou mais características comuns.

Artur – Perceberam?

Vários alunos – Sim!

Artur – Perceberam sim, então já podem resolver o número 1.

O professor apresentou exemplos de população e amostra através de situações concretas. Proporcionou argumentos e tentou validar as respostas dos alunos a partir de sugestões.

Aluno – Então é para definir população e amostra?

Artur – Não!

Artur – Vamos responder à questão número 1.

Aluno I – Estou sozinha

Artur – Número 1 é para identificar população e identificar a amostra. Eu não disse para definir. Identificar o que é para ti?

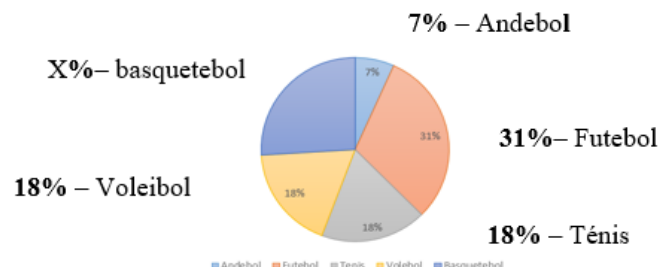
Aluno I – Eu não sei!

Artur – OK! É para dizer população é isso! Amostra é isso, não é para definir.

Episódio 2

Artur fez leitura e orientou a resolução da questão 2:

1. Organize os dados numa tabela de frequência. O gráfico circular seguinte representa a percentagem dos 104 participantes nos jogos desportivos escolares da província de Manica.



a) Qual é a percentagem dos participantes que praticam basquetebol? Justifica a resposta?

Figura 2: Tarefa número 2 do enunciado

Artur – Depois de dizer que são quantos participantes é para justificar porque são 5 e se são 8 porque são 8.

Aluno F – Justificar? Rsr rsr rsr.

Artur – Estamos no número 2 alínea b) não é isso?

Alguns alunos – alínea a)

Artur – Como?

Alguns alunos – alínea a)

Aluno – Professor, esse círculo é de quantos graus professor?

Artur – 360°.

Aluno A – Sim 360°.

Artur – A soma das percentagens deve dar 100%. E já está na hora, vamos entregar.

Artur procurou orientar os alunos para resolverem o problema de forma independente e terem capacidade de apresentar justificações.

Conclusão

Nos dois episódios analisados, o futuro professor interagiu com os alunos na sala de aula. No primeiro episódio, Artur procurou convidar e conduzir a resolução da tarefa de forma menos clara através de perguntas direcionados aos alunos enquanto no segundo episódio remeteu os alunos a encontrar a solução da tarefa quando, por exemplo, disse “depois de dizer que são quantos participantes é para justificar porque são 5 e se são 8 porque são 8”. Este estudo evidencia que, na aula de investigação realizada neste estudo de aula, as ações do professor são caracterizadas pela tendência de apoiar e informar os alunos nos momentos de resoluções de tarefas (Mata-Pereira, 2018).

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7-10 e 35.

- Mata-Pereira, J. (2018). *As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula*. [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/34861>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(1), 55-81. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/22627>.
- Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(2), 169-181. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016-0021>
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. The Free Press.

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO-
APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO: PERSPETIVAS DOS PROFESSORES
SOBRE AS ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS PARA UMA APRENDIZAGEM
SIGNIFICATIVA DA MATEMÁTICA**

**PROBLEM SOLVING AS A TEACHING-LEARNING-ASSESSMENT
METHODOLOGY: TEACHERS' PERSPECTIVES ON PEDAGOGICAL
STRATEGIES FOR MEANINGFUL LEARNING OF MATHEMATICS**

Louise Lima

*Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & Centro de Estudos
Interdisciplinares em Educação e Desenvolvimento, Portugal*

louise.lima@fc.up.pt

Ariana Cosme

Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto, Portugal

ariana@fpce.up.pt

Resumo: A partir da experiência de planificação e conceção de uma aula orientada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, este póster apresenta as perspetivas de 10 professores sobre as estratégias pedagógicas para uma aprendizagem significativa da matemática. Com uma abordagem qualitativa, na perspetiva do paradigma fenomenológico-interpretativo, com recurso ao método de estudo de caso; os dados foram recolhidos através de entrevistas semiestruturadas e submetidas à análise de conteúdo. Os resultados apontam para a importância da seleção criteriosa de problemas e da diversificação da sua apresentação; valorização das discussões coletivas e da partilha de estratégias, a partir de uma abordagem curricular mais flexível, que promova a cooperação.

Palavras-chave: decisões pedagógicas, gestão do trabalho pedagógico, intencionalidade pedagógica, aprendizagem matemática, ensino da matemática.

Abstract: Based on the experience of planning and designing a class guided by the teaching-learning-assessment methodology through Problem-Solving, this poster presents the perspectives of 10 teachers on pedagogical strategies for meaningful mathematics learning. With a qualitative approach, from the perspective of the phenomenological-interpretive paradigm, using the case study method; data were collected through semi-structured interviews and subjected to content analysis. The results point to the importance of carefully selecting problems and diversifying their presentation; valuing collective discussions and sharing strategies, based on a more flexible curricular approach that promotes cooperation.

Keywords: pedagogical decisions, management of pedagogical work, pedagogical intentionality, mathematical learning, mathematics teaching.

Ensinar-Aprender-Avaliar através da Resolução de Problemas: Breve enquadramento

Este poster centra-se na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas (MEAARP) enquanto uma orientação pedagógica que considera o ensino, a aprendizagem e a avaliação como para a aprendizagem como ações integradas num processo em que a Resolução de Problemas atravessa a construção do conhecimento durante uma aula de matemática (Lima, 2020). Neste sentido, assumimos que problemas são situações em que não conhecemos uma solução imediata, mas precisamos resolvê-las. Por isso, reconhecemos que resolver problemas e Resolução de Problemas não são sinónimos (Stanic & Kilpatrick, 1989), uma vez que o conceito de Resolução de Problemas pode pressupor uma atividade com potencial para proporcionar desafios intelectuais e desenvolver a compreensão matemática pelos alunos (Cai & Lester, 2012).

Na MEAARP, o ponto de partida é a proposição de um “problema que possa disparar o desenvolvimento de conceitos e técnicas matemáticas já conhecidas, com vista à aprendizagem de um novo tópico” (Lima, 2020, p. 32), através da construção de “um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas” (Onuchic, 1999, p. 215). Assim, através de uma planificação que possa dar suporte ao desenvolvimento das aprendizagens dos alunos, haja a seleção de um problema que possibilite a construção e compreensão dos conceitos antes mesmo de serem apresentados em linguagem formal (Lima, 2020). Após a apresentação do problema, há a resolução em pequenos grupos para posterior discussão e análise dos resultados em turma – o que inclui o consenso. Posteriormente, há a sistematização, a formulação e a resolução de novos problemas.

Aspetos metodológicos

Este trabalho insere-se noutro mais amplo (Lima, 2020). Neste póster, centrar-nos-emos nas perspetivas de 10 professores sobre as estratégias pedagógicas para uma aprendizagem significativa da matemática a partir de uma experiência de planificação e conceção de uma aula orientada pela MEAARP.

A metodologia assentou numa abordagem qualitativa, subordinada ao paradigma fenomenológico-interpretativo (Amado, 2017), com recurso ao método de estudo de caso (Morgado, 2016). O estudo foi desenvolvido no ano letivo 2017/2018 e contou com a participação voluntária de dez docentes de oito turmas do Ensino Básico de três escolas de um agrupamento de escolas públicas portuguesa. Os dados apresentados neste poster foram recolhidos através de entrevistas semiestruturadas, sendo posteriormente submetidos à análise de conteúdo. Esta investigação cumpriu com todos os requisitos éticos para a condução de estudos em educação.

Estratégias pedagógicas para uma aprendizagem significativa da matemática: principais resultados

Os professores inicialmente referiam que já trabalhavam com a Resolução de Problemas. Após contactarem com textos sobre o ensino através da Resolução de Problemas, reconheceram que a construção de situações de aprendizagem que partem de problemas pode ser propulsora de uma aprendizagem significativa da matemática, refletindo que ainda não tinham desenvolvido uma aula orientada pela MEAARP.

Ao refletirem sobre a experiência do desenvolvimento de uma aula orientada por esta metodologia, dão relevância à planificação, que inicialmente era uma prática ausente no cotidiano dos professores. Referem que permite antecipar situações e permite uma melhor organização dos tempos e espaços. Aqui, dão ênfase a uma seleção criteriosa dos

problemas matemáticos, que podem ser apresentados aos alunos de diversos modos como por meio de jogos, encenações e situações do cotidiano.

No âmbito da etapa de resolução do problema em pequenos grupos, os professores refletem sobre como apoiar os alunos sem comprometer o desafio epistemológico. Neste sentido, referem que procuram a construção de um diálogo que permita a reflexão, a experiência, o erro e a reformulação. Assim, ao envolver os alunos na solução de problemas, os professores consideram que contribuem para a compreensão dos conceitos matemáticos e estimulam a criatividade no processo de resolução de problemas, numa perspectiva em que aprender matemática não é apenas sobre a memorização de fórmulas, mas sim sobre compreender e desenvolver a capacidade de aplicar conceitos em contextos diversos.

Relativamente à etapa de análise e discussão dos resultados da MEAARP, os professores reconhecem as discussões coletivas (Ponte, 2017) e a partilha de estratégias para a resolução de um problema como fundamentais para o confronto de perspectivas, negociação de significados e a construção conjunta de conhecimento. No entanto, referem que o desafio é promover a comunicação, mas também a reflexão e cooperação, o que exige desenvolver estratégias para a compreensão dos alunos sobre as dinâmicas e sobre o objetivo de um trabalho em grupo.

Para o desenvolvimento de uma aula orientada pela MEAARP, os professores reconhecem a complexidade da gestão do tempo, em que a monodocência é uma oportunidade para ultrapassar esse desafio e para promover um trabalho interdisciplinar – que pode acontecer com a seleção de um problema que encontre outras áreas que não apenas a matemática.

De um modo geral, encontraram na MEAARP uma orientação pedagógica, que poderá ter o seu desenvolvimento adaptado para que todos os alunos tenham a oportunidade de aprender e progredir.

Referências

- Amado, J. (2017). A investigação em educação e seus paradigmas. In J. Amado (Ed.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (3ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? *Boletim GEPEM*, 60, 147-162. <https://doi.org/10.4322/gepem.2014.008>
- Lima, L. (2020). *O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: Intencionalidades, ações e reflexões dos docentes* [Tese de doutoramento, Universidade do Porto].
- Morgado, J. C. (2016). *O estudo de caso na investigação em educação* (2ª ed.). De facto Editores.
- Onuchic, L. L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In M. A. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas* (pp. 199-218). Editora Universidade Estadual Paulista.
- Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula*, (pp. 33-56). Associação de Professores de Matemática.
- Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). NCTM & Lawrence Erlbaum.

**CÓMO SE FORMAN LOS FORMADORES DE PROFESORES DE
MATEMÁTICAS? LA SITUACIÓN ESPAÑOLA**
**HOW ARE MATHEMATICS TEACHER EDUCATORS TRAINED? THE
SPANISH SITUATION**

Pablo Giadas

Universidad de Oviedo, España

giadaspablo@uniovi.es

Laura Muñoz-Rodríguez

Universidad de Oviedo, España

munizlaura@uniovi.es

Luis J. Rodríguez-Muñiz

Universidad de Oviedo, España

luisj@uniovi.es

Resúmen: La figura de los formadores de profesores de matemáticas (FPM) agrupa diferentes perfiles de formación y diferentes recorridos profesionales. Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar la formación recibida de los FPM, e identificar diferentes vías para convertirse en FPM. Para ello se ha recogido información de 157 FPM españoles a través de un cuestionario y, posteriormente, se han analizado estadísticamente estos datos. Se concluye que los FPM españoles siguen de forma mayoritaria tres trayectorias formativas.

Palabras clave: desarrollo profesional, formación inicial, formadores de profesores de matemáticas.

Abstract: The figure of mathematics teacher educators (MTE) is associated with different knowledge profiles and different ways of becoming one of them. Therefore, the aim of this paper is to analyze the training by MTE, and to detect different ways of becoming an MTE. To this end information was collected from 157 Spanish MTE by means of a questionnaire, and these data were subsequently statistically analyzed. It is concluded that Spanish MTE mostly follow three training paths.

Keywords: professional development, initial training, mathematics teacher educators.

Introducción

La figura de los FPM ha recibido una especial atención en los últimos años dentro de la investigación en educación matemática (Avalos-Rogel y Hernández-Escobar, 2021). En la literatura se encuentran diferentes términos para referirse a esta figura, siendo algunos de estos mathematics educator o didactician (Giadas et al., 2023). La existencia de diferentes perfiles de los FPM (Superfine y Pitvorec, 2021) y la ausencia de una única

forma de convertirse en FPM abre la puerta a profundizar en esta figura. Además, Beswick y Goos (2018) señalan la necesidad de investigar las diferentes formas en las que los FPM adquieren su conocimiento. Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar la formación superior recibida por los FPM, e identificar diferentes vías para convertirse en FPM en el contexto español y responder a: ¿Qué formación inicial presentan los FPM?.

Metodología

Este estudio se realizó con FPM de diferentes universidades españolas a través de un cuestionario en el que se abordaron aspectos relativos al perfil, la formación y la experiencia profesional. Este cuestionario fue elaborado por expertos de la Red MTSK (<https://redmtsk.net/>) y forma parte de un estudio más amplio. El cuestionario se envió a 405 FPM, de los que respondieron 157. Los datos se recogieron a través de la plataforma Microsoft Forms®, y se analizaron a través del software libre RStudio, realizando descripciones estadísticas.

Una vez recogidos los datos se analizaron los relativos al área de conocimiento de la formación académica de los FPM.

Resultados

Atendiendo a las respuestas proporcionadas por los FPM en el cuestionario acerca de su formación, recogidas en la Tabla 1, se detecta que predominan los estudios en el área de matemáticas durante la primera etapa de formación, correspondiente al grado o licenciatura. Sin embargo, dentro de las siguientes etapas de la formación, como son el máster y el doctorado, se aprecia un reparto más equilibrado entre el área de matemáticas y el área de educación matemática siendo esta última la más representada en ambos casos. Además, también se observa en la opción "No Aplica" como un número elevado de los FPM no han realizado estudios de máster ni de doctorado.

Tabla 1. Formación Inicial FPM.

Área conocimiento	Grado	Máster	Doctorado
Matemáticas	131	47	47
Educación	15	26	5
Educación Matemática	5	50	63
Pedagogía	2	3	4
No Aplica	4	31	38

Fuente: Elaboración Propia.

Por otro lado, se han detectado las trayectorias formativas más frecuentes seguidas por los FPM españoles participantes de este estudio, es decir, se han observado las diferentes combinaciones en los estudios de grado, máster y doctorado realizadas por los FPM.

A la vista de la Figura 1 se aprecia que los estudios de grado más representados son los relativos al área de matemáticas y, además, se detecta que los FPM (131) que han realizado estudios de grado del área de matemáticas (corona azul) se reparten en dos grandes grupos: los FPM (45) que realizaron estudios de máster pertenecientes a la misma área y, por otro lado, los FPM (38) que han cursado másteres del área de educación matemática. Asimismo, los FPM de cada uno de los grupos antes señalados, han realizado sus estudios de doctorado en la misma área que han realizado los estudios de máster, siendo estas áreas matemáticas y educación matemática respectivamente.

En el caso de los FPM (15) que han cursado estudios propios de la educación en el grado (corona naranja), se detecta cómo de forma mayoritaria han realizado estudios del área

de educación matemática durante su formación de máster y doctorado. Esta situación se deja ver también en la Figura 1 con el caso de los FPM (5) que han realizado sus estudios de grado en el área de la educación matemática (corona verde).

Por último, en lo que respecta a los FPM (2) que han realizado sus estudios de grado en el área de la pedagogía (corona roja), en la Figura 1 se puede apreciar cómo los FPM han seguido caminos formativos diferentes. Uno no ha cursado ni estudios de máster ni de doctorado, mientras que el otro ha dirigido su formación en primer lugar, hacia el área de educación en el máster y finalmente, hacia el área de educación matemática en el doctorado.

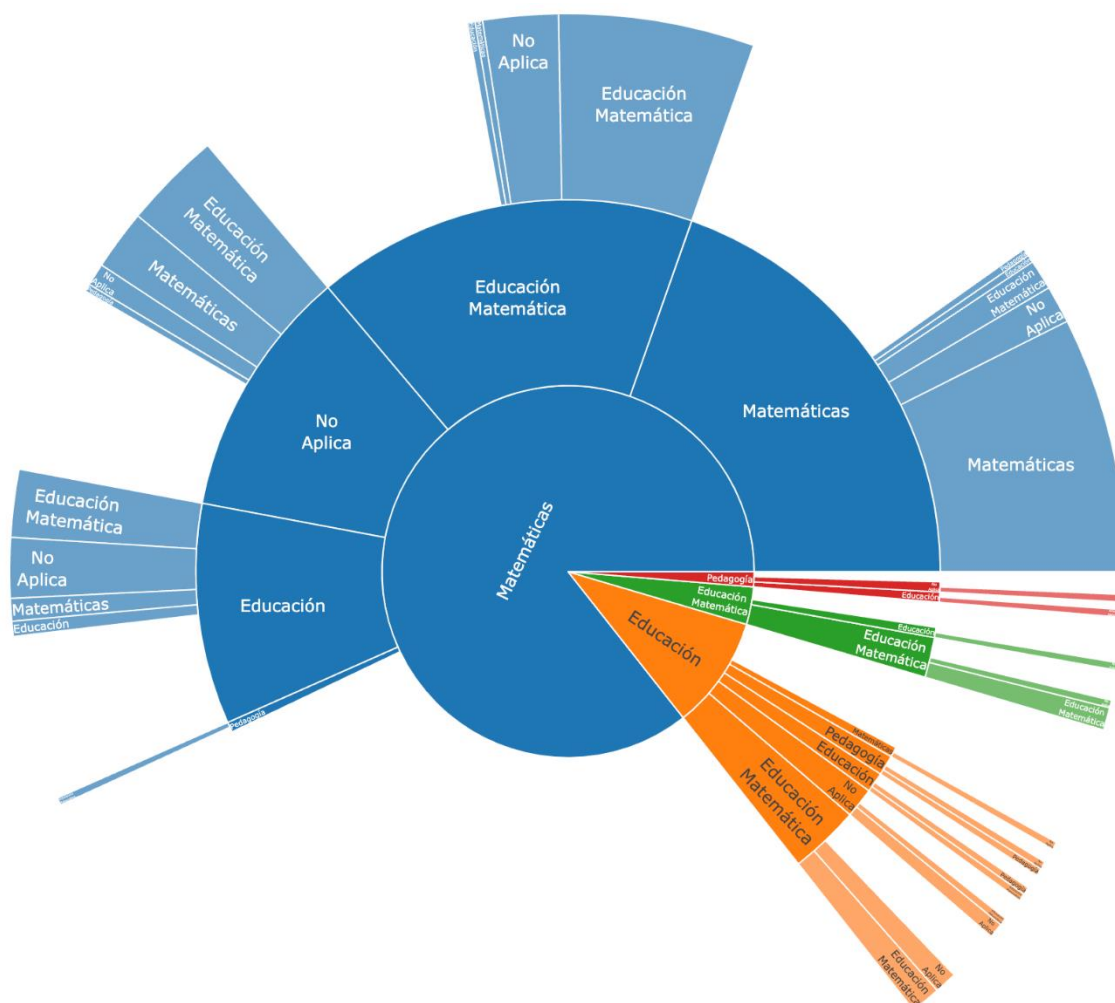


Figura 1. Trayectorias formativas de los FPM.

Conclusiones

Las trayectorias formativas seguidas por los FPM son variadas. Atendiendo al objetivo del estudio y a los resultados obtenidos, se han podido establecer diferentes recorridos formativos para convertirse en un FPM. Estos principales recorridos detectados pasan por: (1) realizar estudios de matemáticas durante todos los niveles de formación universitaria, es decir, grado, máster y doctorado; o (2) realizar estudios de matemáticas durante el grado y después realizar estudios en el área de la educación matemática durante el máster y el doctorado, siendo esta una trayectoria ya señalada en Avalos-Rogel y Hernández-Escobar (2021); o (3) realizar estudios en área educativa durante el grado, y posteriormente durante el máster y el doctorado cursar estudios relativos al área de la

educación matemática. También se debe subrayar que un número elevado de los FPM han señalado en algunas preguntas la opción "No Aplica". Este hecho se puede deber al momento en el que hayan realizado su formación universitaria en España o a la forma que había para acceder a la figura de FPM, ya que en los años 90 no era necesario estar en posesión de un doctorado para trabajar como FPM en España, y los estudios oficiales de máster no se implantaron hasta 2005.

De esta manera, estas conclusiones abren la posibilidad de relacionar estas trayectorias formativas no solo con las trayectorias formativas que podrían seguir FPM de otros países, sino también con otras variables que pueden influir en estos recorridos como puede ser la edad, la concepción sobre qué es formar a profesorado de matemáticas, etc., así como con el resto de la información recogida en otras partes del cuestionario no analizadas en este póster.

Referencias

- Avalos-Rogel, A., y Hernández-Escobar, M. (2021). Determinantes del conocimiento de los formadores de profesores en educación secundaria en México. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 154-161). RED MTSK.
- Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 417–427.
- Giadas, P., Muñoz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñoz, L. J. (2023). ¿Qué características debe tener un formador de profesorado de matemáticas? En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp.275-282). SEIEM.
- Superfine, A. C., y Pitvorec, K. (2021). Using community artifacts to support novice math teacher educators in teaching prospective teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(Suppl 1), 59-75.



sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática