Investigação em Educação Matemática

2018

A Aula de Matemática

sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

Livro de Atas do EIEM 2018

Encontro de Investigação em Educação Matemática

A Aula de Matemática

Editores:

Alexandra Rodrigues, Ana Barbosa, Ana Santiago,

António Domingos, Carlos Carvalho, Cláudia Ventura,

Conceição Costa, Helena Rocha, José Manuel Matos,

Lurdes Serrazina, Mária Almeida, Paula Teixeira,

Renata Carvalho, Ricardo Machado, Susana Carreira

Local:

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

Título:

Livro de Atas do EIEM 2018, Encontro de Investigação em Educação Matemática

ISSN: 2182-0023

Editores:

Alexandra Rodrigues, Ana Barbosa, Ana Santiago, António Domingos, Carlos Carvalho, Cláudia Ventura, Conceição Costa, Helena Rocha, José Manuel Matos, Lurdes Serrazina, Mária Almeida, Paula Teixeira, Renata Carvalho, Ricardo Machado, Susana Carreira.

Corpo de revisores:

Alexandra Gomes, Ana Baioa, Ana Barbosa, Ana Boavida, Ana Caseiro, Ana Henriques, Ana Isabel Silvestre, Ana Paula Jahn, Ana Rosa Furtado, António Borralho, António Guerreiro, António Júlio Aroeira, Carlos Carvalho, Catarina Cruz, Catarina Delgado, Cecília Costa, Cecília Monteiro, Célia Mestre, Conceição Costa, Corália Pimenta, Cristina Loureiro, Cristina Martins, Cristina Morais, Diego Lieban, Eliane Maria Araman, Elisabete Cunha, Elsa Barbosa, Elsa Fernandes, Ema Mamede, Floriano Viseu, Helena Gil Guerreiro, Helena Martinho, Hélia Jacinto, Hélia Oliveira, Hélder Martins, Isabel Cabrita, Isabel Vale, Isolina Oliveira, Joana Brocardo, Joana Conceição, Joana Mata-Pereira, José António Fernandes, José Duarte, Justina Neves, Kátia Medeiros, Katyane Massante, Leonor Santos, Lina Brunheira, Lucy Alcântara, Luís Menezes, Manuel Saraiva, Manuel Vara Pires, Márcia Aguiar, Marisa Quaresma, Margarida Rodrigues, Maria Teresa Astudillo, Mária Almeida, Neusa Branco, Nuno Martins, Paula Barros, Rosa Antónia Ferreira, Rui Candeias, Sandra Carvalho, Sandra Nobre, Teresa Monteiro, Teresa Pimentel, Wagner Valente.

Edição:

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

Gabinete de Edição:

Ricardo Machado

Apoios

Instituto Politécnico de Coimbra

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL)

Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento da FCT-UNL

Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Turismo Centro de Portugal

ÍNDICE

TEMA DO ENCONTRO

A AULA DE MATEMÁTICA

Este Encontro tem como propósito principal refletir sobre a aula de Matemática e os diferentes atores que nela participam. Tratando-se de um espaço de partilha de conhecimentos e um contexto privilegiado de aprendizagens pretende-se apresentar e discutir a investigação que tem vindo a ser desenvolvida neste domínio, quer a nível nacional quer internacional. A abrangência do tema conduz-nos a uma grande diversidade de domínios e cenários, muitas vezes consubstanciados na dimensão escolar, onde a aula tem o seu espaço próprio bem definido e delimitado.

Na preparação da temática optou-se por um conjunto de sessões plenárias que visitam o tema do encontro desde uma visão histórica onde o José Manuel Matos propõe uma incursão pela História da Educação Matemática, o Alexander Maz-Machado lança um olhar sobre a formação dos futuros professores e o Arthur Powell se centra no tópico dos números fracionários no contexto da própria aula. Esta dinâmica que coloca o acento tónico em contextos tão diferenciados poderá ser consubstanciada na realização do painel plenário dedicado à investigação da aula de matemática onde o estudo de aula, o estudo da sua cultura e a utilização de vídeos podem ajudar a compor o puzzle que a temática encerra.

A investigação que vem sendo produzida neste domínio é cada vez mais aprofundada e diversificada sendo possível identificar uma grande variedade de trabalhos e contextos. Para poder enquadrar esta diversidade procurou-se agrupar a investigação produzida em quatro eixos temáticos que correspondem a outros tantos grupos de discussão, a saber: *Investigando a aula*, *A comunicação na aula de matemática*, *O professor e a aula de matemática* e *O aluno e a aula de matemática*. Espera-se com esta dinâmica enriquecer o conhecimento sobre o ambiente social da aula e os diferentes aspetos da sua cultura.

No eixo temático, *Investigando a aula*, assume-se que a aula continua a ser o contexto central do ensino e aprendizagem da matemática escolar. O estudo de registos e documentos do passado ajuda-nos a recontextualizar o significado das suas dinâmicas e dos seus traços estruturantes e a projetar o que se espera e defende para a educação do século XXI. Não apenas os papéis dos alunos e dos professores requerem uma permanente e renovada investigação, como os recursos, cada vez mais abundantes e acessíveis, trazem implicações e desafios acrescidos para a matemática que se aprende e compreende na aula de matemática. As próprias fronteiras da aula tenderão a tornar-se menos estanques, mercê da necessidade de articulações entre áreas do saber, que se reconhecem imprescindíveis para a abordagem de problemas cada vez menos tipificados. Por isso, na aula de matemática, as tarefas e as propostas de trabalho, bem como as atitudes e as metodologias desempenham funções essenciais. Neste eixo são múltiplas as dimensões que estarão em foco na investigação e no estudo da aula, que se distribuem por oito comunicações. Em particular destacam-se as práticas da aula; a cultura da aula; os recursos, materiais, tarefas e metodologias; a diferenciação pedagógica e estratégias de avaliação e a interdisciplinaridade e integração das STEM.

No eixo temático, *A comunicação na aula de matemática*, reconhece-se que a investigação em educação matemática tem evidenciado a importância do desenvolvimento de capacidades transversais em paralelo com a aquisição de conhecimentos matemáticos. Sublinha-se ainda que, para que os alunos aprendam de forma eficaz e significativa, o papel do professor é determinante na aula de matemática.

O estudo de registos e documentos do passado tem vindo a reforçar que a opção por estratégias ativas de aprendizagem, que mantenham os alunos intelectualmente, fisicamente e socialmente envolvidos, tem um impacto positivo no seu desempenho. Práticas desta natureza criam oportunidades para que os alunos resolvam e formulem problemas, discutam ideias com os seus pares e com o professor e desenvolvam o espírito crítico. Neste âmbito surgem, por exemplo, o questionamento e as discussões coletivas que têm vindo a despertar o interesse por parte de investigadores e professores de Matemática. O professor tem um papel essencial na criação de um ambiente propício a que os alunos se envolvam na resolução da(s) tarefa(s) proposta(s), mas também na gestão de interações que facilitem a comunicação matemática. Falar, ouvir e escrever sobre matemática, ajuda a organizar e consolidar o pensamento e a expressar ideias matemáticas de forma coerente e precisa. Através da comunicação, as ideias transformam-se em objetos de reflexão, podendo ser analisadas, discutidas e refinadas. A promoção desta cultura de sala de aula implica que o professor crie um ambiente que motive a participação e o envolvimento dos alunos, colocando questões desafiantes, ouvindo/lendo os seus argumentos. A possibilidade de integrar uma comunidade matemática, através do discurso ou mesmo da escrita, traz aos alunos vantagens não só ao nível do desenvolvimento da linguagem, mas também ao nível da compreensão conceptual. Este eixo acomoda assim nove comunicações que abordam as várias vertentes da comunicação acima descritas.

No eixo temático, *O professor e a aula de matemática*, reconhece-se que a formação e o desenvolvimento profissional do professor são determinantes para as opções que este assume na sala de aula. É o seu conhecimento, aquilo que valoriza e o contexto onde se encontra inserido que determinam as experiências de aprendizagem que proporciona aos seus alunos. Mas esse conhecimento profissional envolve uma multiplicidade de dimensões que decorrem da sua formação inicial e contínua, mas também das experiências que teve ocasião de vivenciar e de processos de socialização, onde a interação com os pares e as oportunidades de desenvolver trabalho colaborativo são elementos importantes. A aula de matemática surge assim como o campo aglutinador do trabalho do professor numa dupla vertente que se une num ciclo único: por um lado a aula de Matemática é o foco do trabalho do professor, onde as opções previamente assumidas são implementadas; e, por outro lado, é um ponto de partida para a reflexão e o desenvolvimento profissional do professor.

Da planificação da aula, onde a escolha das tarefas e a forma de as implementar são aspetos centrais e onde a vertente histórica não deixará de estar presente; à sua implementação, operacionalizando diferentes recursos (nomeadamente os tecnológicos) e assumindo dinâmicas de aula diferenciadas; até à fase de reflexão entre pares, que termina e reinicia um novo ciclo – estas são as grandes etapas em torno das quais se organiza a discussão das dez comunicações apresentadas neste eixo e onde a formação inicial e contínua se apresentam de forma transversal.

No quarto e último eixo temático, *O aluno e a aula de matemática*, assume-se que o ambiente de aprendizagem, na aula de matemática, é essencial para promover aprendizagens significativas sobre: conceitos matemáticos, resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática entre outros. O envolvimento dos alunos em dinâmicas de trabalho individuais e cooperativas na aula, são fundamentais para que se promovam momentos de trabalho autónomo e discussões coletivas que apoiem a construção e a partilha de conhecimento matemático. O aluno na aula de matemática desempenha um papel fulcral, por exemplo, nas suas aprendizagens matemáticas e na interpretação do que a Matemática é, através do que acontece à sua volta.

As aprendizagens do aluno são apoiadas pelo processo de representar, uma maneira de modelar a matemática e uma forma dele mostrar o seu pensamento sobre a matemática. Professor e alunos usam geralmente variadas representações na aula de matemática. As representações podem ser utlizadas para ajudar a compreender conceitos e processos matemáticos abstratos, aumentar a flexibilidade do pensamento, facilitar a resolução de problemas e reduzir a ansiedade de fazer matemática. No processo de aprendizagem pode ser usada: uma única representação; mais que uma representação em paralelo; ligações entre representações paralelas; integração de representações e ligações flexíveis entre elas.

Este eixo é composto por dez comunicações, onde as investigações apresentadas se focam essencialmente nas aprendizagens dos alunos e no processo de representar.

A vitalidade da investigação sobre o tema reflete-se ainda no número de posters propostos, dez, que este ano não foi possível apresentar no interior dos grupos de discussão devido à grande quantidade de comunicações aceites. Ainda assim, na estrutura destas atas, os posters foram distribuídos pelos grupos e acomodados às suas temáticas. Para a sua apresentação e discussão foi reservado um espaço próprio no programa do encontro.

Com esta publicação esperamos contribuir para um conhecimento mais profundo das dimensões sociais e culturais da aula, num avanço significativo da investigação que vem sendo produzida em Portugal e congratulamo-nos com a presença de investigadores estrangeiros, como é o caso de Espanha, Estados Unidos, Brasil e Angola, de onde nos chegaram trabalhos de investigação que se cruzam com os produzidos em Portugal e que consolidam e ampliam o nosso conhecimento científico sobre o tema da *Aula de Matemática*.

A Comissão Científica

CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS

REVISITANDO A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – FUNDAMENTOS, METODOLOGIAS E TEMÁTICAS[1]

José Manuel Matos

Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, UIED

Resumo: Discute-se o lugar da investigação histórica no campo mais geral da Educação Matemática. Problematiza-se a viabilidade de usar a disciplina escolar de Matemática como objeto de estudos históricos e a posição destes estudos no campo de Educação Matemática. Após uma revisão sobre procedimentos historiográficos e sua aplicação a uma História da Educação Matemática, discutem-se três exemplos problematizando a articulação entre os dois campos. O primeiro apoia o estudo da cultura da matemática escolar do atual ensino profissional com uma perspetiva histórica. O segundo usa uma abordagem histórica para compreender a formação do conhecimento pedagógico do conteúdo em professores de Matemática. O terceiro usa construtos atuais sobre a números racionais para questionar abordagens em livros de texto do passado.

O desenvolvimento recente na área da história da educação matemática (HEM) pode ser visto através de vários indicadores como a realização de congressos internacionais específicos de âmbito regional ou mundial, a formação e consolidação de grupos de trabalho e pesquisa, a publicação de edições especiais em revistas científicas, o surgimento de periódicos específicos e de livros de síntese (por exemplo, Karp e Schubring, 2014 ou Furinghetti e Karp, 2018). O tema também tem ganho visibilidade nas publicações internacionais de educação matemática. Por exemplo, no último *Handbook of Research in Mathematics Education* (Clements e outros, 2013) encontramos diversos capítulos incorporando reflexões sobre o passado na discussão das problemáticas atuais.

Este texto assume-se como um ponto de reflexão pessoal após mais de um decénio de pesquisa sobre o passado do ensino da matemática que se iniciou com a identificação de um programa de pesquisa (Matos, 2007) mas que necessita hoje de refletir sobre a relação entre a investigação em HEM e a investigação em educação matemática. Ele parte de um *lugar*, o campo de educação matemática, com os seus procedimentos de análise e o seu processo próprio de construção de um texto, seguindo a terminologia de Certeau (1982). Não será certamente a única perspetiva a partir da qual questionar o tema, mas é a que parece próxima da minha experiência profissional.

Assim, como educador matemático, interessa-me questionar a prática da investigação histórica procurando saber da sua relevância, dos seus propósitos e dos métodos de realização da pesquisa para os problemas do ensino e da aprendizagem da matemática. Englobo nos termos educação matemática e educador matemático todos os que realizam

[1] Este texto é um aprofundamento do artigo Matos, J. M. (2018). O lugar da pesquisa histórica na Educação Matemática. *REP's - Revista Eventos Pedagógicos, 9*(2), 625-644. doi:DOI: 10.30681/2236-3165 e foi apoiado por fundos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/CED/02861/2016

essencialmente trabalhos de investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática. Estão pois aqui incluídos, para além de membros de instituições de ensino superior, professores de outras instituições. Incluo no termo HEM, para além do estudo do passado do ensino da matemática em contextos formais ou informais, a investigação sobre a história do próprio campo educação matemática.

Não abordo aqui a problemática da utilização do conhecimento e materiais do passado nas aulas de matemática. Essa linha de investigação, representada pelo *International Study Group on History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) e a *European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* realiza os seus próprios seminários (ESU) e tem estado presente em congressos internacionais (CERME, ICME). O seu propósito é sobretudo contribuir para o melhoramento da qualidade das aprendizagens usando a história como motivação ou como material de base para explorações matemáticas em aula.

Os trabalhos de António Miguel (2005) têm alguns pontos de contacto com as reflexões que aqui desenvolvo, embora o seu propósito seja o de articular a educação matemática com a história, a filosofia e a sociologia da matemática desenvolvendo um programa de pesquisa que interligue aqueles campos com a formação de professores.

Numa primeira secção abordarei as reflexões sobre a educação matemática enquanto disciplina de pesquisa. Questionarei depois a viabilidade de usar a disciplina de matemática escolar como objeto de estudos históricos seguida da problematização da posição dos estudos históricos no campo de educação matemática. Após uma revisão sobre procedimentos historiográficos e sua aplicação a uma HEM, terminarei com três exemplos de estudos na área.

Tradições de investigação em educação matemática

A diferenciação do campo da educação matemática faz-se a partir dos anos 1960 quando o centro de atenção se começa a deslocar da resposta imediata a problemas de prática de aula, a *didática*, e se passa a desenvolver uma vertente de investigação, procurando não apenas novos métodos de ensino, mas questionando que métodos funcionam, como aprendem os alunos, como os professores gerem as suas aulas, e que paradigmas e metodologias de pesquisa são adequadas para responder a estas questões (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013). Desde então o campo não tem deixado de crescer e abrange hoje todas as dimensões relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática.

Embora de início a reflexão dos educadores matemáticos sobre o seu próprio trabalho fosse incipiente, a partir de meados da década de 1970 o impulso para a elaboração teórica e a reflexão tornou-se mais visível. Hans-Georg Steiner liderou esse impulso e desenvolve um primeiro esboço epistemológico, formando um círculo de estudo internacional denominado *Teoria da Educação Matemática*, que realizou cinco conferências até 1992, e se constituiu como grupo especial regular em conferências internacionais debatendo a natureza, as possibilidades, os limites e a legitimidade da educação matemática como campo científico (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013). A relação entre a educação matemática e outros campos do conhecimento (psicologia, educação, sociologia, matemática, etc.), o poder explicativo de paradigmas concorrentes, a viabilidade de teorias locais, a relação entre teoria e prática, e reflexões sobre a mudança curricular estiveram entre as muitas contribuições desse grupo. Steiner defendia que a educação matemática é um campo de estudo de pleno direito. Situada na área da educação, tem relações interdisciplinares com diversas áreas do saber como a psicologia, a antropologia, a história e a filosofia, das quais utiliza teorias, modelos ou paradigmas (Steiner e outros, 1984). A história, e em particular a história da matemática, seria uma destas disciplinas.

Em Portugal esse trabalho de reflexão encontra eco logo no primeiro ProfMat de 1985 com uma sessão de discussão sobre as propostas de Steiner e, mais tarde, a partir de 1990, nos trabalhos do Grupo TEM (Teoria da Educação Matemática) que culminaram na publicação de textos sobre sociologia da matemática (Boavida e outros, 1998).

Desde o seu início, e apesar de estar centrada nos problemas do ensino e da aprendizagem, a educação matemática assumiu formas bastante diversificadas consoante os modos de educação, formação cultural e formação em pesquisa dos seus membros. Na tentativa de caracterizar essa diversidade, Alan Bishop (1998) distinguiu três tradições de investigação, e usou-as como pano de fundo para uma reflexão sobre a relação entre pesquisa e prática educacional. Essa perspetiva é particularmente útil quando, nas produções atuais (artigos, livros, comunicações em congressos, etc.), imperam os relatos de investigações empíricas em formato estandardizado: objetivos-revisão da literatura-análise de dados-conclusões.

Uma primeira tradição apontada por Bishop é a tradição pedagógica, que valoriza o papel dos professores refletindo sobre a sua prática, sendo a experiência e a observação as principais componentes da pesquisa. Está presente desde o início procurando novos métodos de ensino. A tradição do cientista empírico, a segunda, acredita que é possível uma explicação da realidade educacional e o processo de pesquisa concentra a atenção nos métodos de obtenção dessa evidência, por vezes recorrendo a métodos quantitativos. Finalmente a tradição do filósofo escolástico pretende estabelecer uma posição teórica rigorosamente argumentada. A realidade do ensino é aqui uma manifestação imperfeita dessas propostas teóricas. Deteta-se a diversidade de tradições não apenas em diferenças entre países, mas também no modo como a investigação é valorizada nos diversos países (ver por exemplo, Boero e Szendrei, 1998).

Se nos primórdios da educação matemática dominava a tradição pedagógica, nos dias de hoje, embora imperando a tradição do cientista empírico, observamos uma muito maior diversidade quer nas problemáticas, quer nos paradigmas, quer ainda nas metodologias usados pelos educadores matemáticos que pode ser apreciada em trabalhos recentes (por exemplo, Clements e outros, 2013 ou Sriraman e English, 2010).

Bishop, no entanto, não abordou a tradição francófona usualmente denominada *Didactique des Mathématiques* consolidada a partir dos anos 1980 e que é de particular importância para este trabalho. Entendida pelos seus aderentes como estando próxima da aula de matemática, a *Didactique* pretende estudar o processo de disseminação do conhecimento matemático, com maior ênfase no estudo do seu ensino (Artigue e Douady, 1986). Uma das suas ideias basilares é a de que o saber matemático escolar é o produto de um saber prévio produzido na academia[2]. A transformação de um no outro é operada pela *transposição didática* explicitada por Yves Chevallard (1991) que a caracteriza como o processo pelo qual o saber científico (*savoir savant*) se transforma em saber ensinado (*savoir enseigné*).

Nenhuma destas tradições de investigação tem, no entanto, produzido muita reflexão sobre a relação entre a educação matemática e a disciplina de história. Até há pouco

[2] Para caracterizar a *Didactique*, Artigue e Douady (1986) distinguem quatro “sub-sistemas” do sistema didático: o saber ensinado e a transposição didática, o sujeito que aprende, as situações didáticas, e o contrato didático.

tempo, nos textos em língua inglesa, encontramos sobretudo trabalhos discutindo o uso de temas do passado nas aulas na linha do programa do HPM. Ocasionalmente, refere-se que a história será um dos campos que influenciam a educação matemática, a par da psicologia, da sociologia, da filosofia, etc. Steiner, por exemplo (Steiner e outros, 1984), alude à história, mas parece referir-se essencialmente à história da matemática e à sua influência nos currículos. O panorama é um pouco diferente quando observamos o meio ibero-americano. Aqui, pelo menos desde o primeiro congresso ibero-americano de história do ensino da matemática (Matos e Saraiva, 2011), é comum serem apresentados textos refletindo sobre a relação entre história e educação matemática.

A autonomia das disciplinas escolares

Antes de prosseguir importa questionar a viabilidade de uma HEM. Segundo Guy Brousseau, um dos proponentes da *Didactique des Mathématiques*, boa parte dos problemas do ensino e da aprendizagem da matemática são "irredutivelmente" matemáticos:

> Existem problemas em educação matemática que são irredutivelmente matemáticos — por exemplo, a escolha de problemas, a organização das atividades matemáticas para fins didáticos, a análise da compreensão em matemática, [e] ... a estruturação do discurso matemático. ... Não existe uma conjunção de disciplinas clássicas que explique o funcionamento desta parte irredutivelmente matemática do ensino. ... Uma abordagem científica [a esta parte] é e será essencialmente o trabalho de um matemático. (Brousseau, citado por Sierpinska e Kilpatrick, 1998, p. 528)

Assim, segundo parece concluir-se das suas palavras, algumas das atividades que se costumam considerar como sendo da responsabilidade dos docentes de matemática no ensino primário e secundário, deveriam ser "irredutivelmente" atribuídas a matemáticos que explicitariam os conteúdos, a sequência e mesmo critérios de compreensão dos alunos.

Noutro texto (Matos, 2006) discuti a génese da matemática escolar, pondo em causa o conceito de transposição didática. Para além de mostrar que o primeiro livro de matemática impresso em Portugal em 1519, o *Tratado da pratica darismetyca* de Gaspar Nicolas, é também (e sobretudo) um livro didático, apontei exemplos de inversão da transposição didática nos quais é o saber escolar que molda o próprio conteúdo matemático.

Procurando entender a matemática escolar como fenómeno cultural, diversos autores têm questionado o construto transposição didática, apontando que as disciplinas escolares não são meras vulgarizações de áreas de conhecimento produzido nas academias (Belhoste, 1998; Chervel, 1990; Faria Filho e outros, 2004; Julia, 1995; Miguel, 2005; Viñao, 2006), e a crítica mais forte vem precisamente de autores franceses. Belhoste (1998), em particular, destaca como matemáticos e professores de matemática constituem duas comunidades de prática que visam a propósitos diferentes tanto no domínio da pesquisa quanto no da ação pedagógica e são condicionadas pela realização de outras práticas sociais. Embora matemáticos e professores de matemática ensinem, para os primeiros esta é uma atividade secundária, enquanto que, para os segundos, ela está no cerne da sua identidade. Esta posição de Bruno Belhoste poderia ser reforçada recorrendo às reflexões interligando a educação matemática e a sociologia da matemática (Miguel, 2005; Moreira e Matos, 1998). E Chervel, propondo que a reflexão sobre a cultura escolar deveria estar centrada no conceito de "disciplina" e não de "saber", aponta que:

> Minhas pesquisas não confirmam em nada a existência de um grupo social independente da escola, cuja função seria a de transformar o saber erudito em saber ensinável. Ao contrário, elas me levam a ver na escola (em sentido amplo) um lugar de produção de cultura, de uma cultura escolar, de conteúdos de ensino, de "disciplinas". É preciso, portanto, apresentar um outro quadro teórico no qual se possa conceber a escola como criadora de "conteúdos culturais". (citado em Miguel, 2005, pp. 144-5)

Um argumento semelhante é usado por Schubring (referido em Miguel, 2005) propondo que as pesquisas no terreno da história da educação matemática deveriam evitar qualquer separação entre produção e reprodução da cultura. O investigador deveria evitar trabalhar, implícita ou explicitamente, com o pressuposto maniqueísta que associa produção com invenção e ensino com socialização, divulgação ou recepção passiva da cultura.

Do mesmo modo que se critica a teoria da "subordinação passiva" da matemática escolar à matemática académica, nas palavras de Miguel (2005), critica-se igualmente a visão de que as disciplinas escolares seriam essencialmente determinadas por grandes movimentos sociais e culturais, tornando desnecessárias histórias específicas de cada disciplina, permitindo assim diferenciar a história das disciplinas escolares de uma história geral da educação (Chervel, 1990; Faria Filho e outros, 2004; Julia, 1995; Viñao, 2006).

Em suma, estes autores realçam a importância de considerar que escolas e professores não são meros reprodutores, quer de áreas do saber científico como subentende a transposição didática[3], quer de determinantes sociais e culturais globais. As disciplinas escolares, em particular, estabelecem interações mais amplas e englobam "não somente as práticas docentes em aula, mas também as grandes finalidades que presidiram a sua constituição e o fenómeno de aculturação em massa que ela [a escola] determina" (Chervel, 1990, p. 184).

> [As disciplinas escolares] são criações espontâneas e originais do sistema escolar (...). E porque o sistema escolar é detentor de um poder criativo insuficientemente valorizado até aqui é que ele desempenha na sociedade um papel que não se percebeu que era duplo: de fato ele forma não somente os indivíduos, mas também uma cultura que vem por sua vez penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global. (Chervel, 1990, p. 184)

As disciplinas escolares têm pois um lugar próprio e em certa medida autónomo o que legitima o estudo da sua história como área de pesquisa.

---

[3] A apreciação que faço à transposição didática não deve ser lida como uma crítica aos trabalhos atuais de investigação francófona em HEM, que conta aliás com alguns dos intervenientes mais ativos na área.

O lugar da história na educação matemática

Segundo a minha experiência, é comum os educadores matemáticos reagirem aos estudos históricos com um misto de curiosidade e de distanciamento. Para muitos, é muito interessante conhecer os detalhes desta ou daquela reforma, saber como uma corrente de pensamento influenciou formas de ensinar, aprender como eram usados antigos materiais manipuláveis, ou apreciar os modos como uma personalidade moldou de forma decisiva os métodos de ensino, ou escreveu livros inovadores. Mas simultaneamente esses educadores matemáticos não conseguem vislumbrar uma ligação entre esses temas e os seus interesses investigativos contemporâneos. Os estudos históricos aparecem como uma galeria de retratos de antepassados ou objetos de museu, sem dúvida interessantes, mas que não tem relevância para os problemas dos nossos dias. Alguns vão mesmo mais longe, considerando a investigação histórica como um tema a que não se deve dar grande atenção.

Mesmo nos textos de reflexão sobre educação matemática é muito raro encontrar menções à investigação em HEM e mesmo quando as há, não é claro se os autores se referem à HEM ou à importância da reflexão histórico-epistemológica sobre os temas matemáticos (ver, por exemplo, Boero e Szendrei, 1998; Steiner e outros, 1984). Boa parte desta postura radica na a-historicidade da formação e da investigação em educação matemática, especialmente a radicada na tradição do cientista empírico. Devemos tomar em conta que a investigação em HEM é muito recente e apenas agora, com a publicação de textos de síntese, está em condições de poder passar a figurar como um tema curricular na formação de professores e na formação avançada em educação matemática e assim passar a fazer parte da literacia do educador matemático.

Pretendo defender que a pesquisa histórica não deve ser uma mera curiosidade ou enfeite e justificarei com três argumentos: de identidade, de qualidade e de intervenção. O argumento *identitário* postula que a identidade do campo educação matemática está incompleta sem o conhecimento dos problemas do ensino e da aprendizagem no passado. A defesa da importância da identidade é também usada noutros contextos, por exemplo, foi (e é) recorrentemente utilizado para sustentar a identidade de nações, de povos, ou de grupos sociais (Prost, 1996). Do mesmo modo sustento que da formação de um educador matemático, ou de um professor, deveria fazer parte o conhecimento do passado da sua área.

Em última análise, o argumento da identidade desemboca no segundo argumento, o da *qualidade* que pretende chamar a atenção para o facto de que um saber filiado nas ciências sociais não pode deixar de estabelecer pontos de contacto com as suas origens, tornando mais sustentadas as visões do presente. Apenas com esse conhecimento podemos vislumbrar como as coisas são e porque são assim e não de outra forma. Alguns exemplos podem tornar mais claro o argumento. É o conhecimento do passado que nos permite compreender as velhas (de mais de 100 anos) raízes da valorização de um ensino centrado no aluno (ver por exemplo, Palma, 2008), ou, por oposição, descobrir a modernidade da visão do professor como um profissional ativo e reflexivo em nítido contraste com as visões do professor como peça do mecanismo escolar sujeita a atualizações ou reciclagens (Matos, 2017). É ainda uma perspetiva histórica que nos permite conhecer melhor como o desenvolvimento curricular em matemática envolve o exercício de poder dos diversos intervenientes e como isso condiciona o currículo (Matos, 2018). É pois o conhecimento do passado que nos permite sustentar a coerência de um projeto: de onde vimos, para onde vamos (Prost, 1996).

O terceiro argumento, o da *intervenção*, pode parecer paradoxal. Seguindo José Mattoso, um medievalista português,

> para mim, portanto, a História não é a comemoração do passado, mas uma forma de interpretar o presente. Ao descobrir a relação entre o ontem e o hoje, creio poder decifrar a ordem possível do mundo, imaginária, porventura, mas indispensável à minha própria sobrevivência, para não me iludir a mim mesmo no caos de um mundo fenomenal, sem referências nem sentido. (Mattoso, 1997, p. 22)

Da primeira vez que encontrei esta frase, achei-a de difícil aceitação. Como pode Mattoso considerar que o estudo dos acontecimentos na Idade Média, a sua área de referência, tenha relevância para o presente?[4] Questão similar pode ser colocada ao estudo da HEM. Como pode o conhecimento de modos esquecidos de ensinar matemática, de modelos e materiais ultrapassados pela tecnologia, de conteúdos matemáticos já esquecidos, ajudar-nos no presente? E, no entanto, como nos alerta Antoine Prost (1996), os estudos históricos estão condenados à irrelevância se não cuidarem de mostrar a sua pertinência. Posto de outro modo, os sábios do mundo de hoje já não podem viver confinados à sua torre de marfim. A função social de uma HEM que renuncie a dizer algo sobre os problemas atuais é portanto muito pequena. Procurarei argumentar precisamente no sentido da relevância da pesquisa histórica para o estudo contemporâneo da educação matemática recorrendo mais à frente a três exemplos.

Desenvolvendo estudos históricos

Na síntese final do livro *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* torna-se patente a dificuldade de um consenso sobre critérios de qualidade para a investigação em educação matemática ou sequer da viabilidade de tal projeto (Sierpinska e Kilpatrick, 1998). É justamente no contexto da discussão sobre critérios de qualidade que, no capítulo de Ellerton e Clements (1998), aparece uma (a única nesse livro?) referência a trabalhos em HEM que defende que alguns critérios de qualidade propostos por outros investigadores dificilmente se aplicam aos estudos do passado e a argumentação a que recorrem ajuda-nos a aprofundar o conceito de qualidade dos estudos históricos.

Segundo eles, alguns critérios de qualidade para a investigação em educação — *relevância, validade, originalidade, rigor e precisão* e *relacionamento* — parecem poder aplicar-se a estudos em HEM, embora seja difícil de discutir a "relevância" de alguns estudos históricos e os termos "rigor e precisão" devessem ser substituídos por "abrangente e minucioso" ("comprehensive and thorough", no original, Ellerton e Clements, 1998, p. 159) que não significam exatamente a mesma coisa. Já os critérios de o estudo ser *reprodutível* ou *objetivo* não se podem aplicar a estudos históricos (nem a investigações interpretativas, acrescento).

E de facto, nos dias atuais ninguém se propõe realizar uma história (ou uma antropologia, ou uma sociologia) objetiva, dada a natureza idiossincrática de tais estudos. Desde os anos 1970 que os historiadores deixaram de centrar a discussão sobre

[4] O leitor interessado pode consultar Mattoso (1988) para observar como o autor relaciona a génese de Portugal com a compreensão do país atual.

a "cientificidade" do seu trabalho na correspondência entre o passado e a explicação histórica, procurando antes encontrar formas de, embora reconhecendo a semelhança estilística entre o discurso histórico e a ficção, assumir a possibilidade da construção de um conhecimento verdadeiro, construído recorrendo a provas e controles (Chartier, 2007). Nesse sentido, Prost (1996) propõe a utilização dos termos *distanciamento* e *imparcialidade* em vez de objetividade.

Steiner na sua Teoria da Educação Matemática (Steiner e outros, 1984) propunha que os educadores matemáticos usassem teorias, modelos, paradigmas de disciplinas associadas (psicologia, sociologia, antropologia, etc.). Seguindo a sua visão, sugiro que, para desenvolver estudos históricos de qualidade, o educador matemático deve usar as ferramentas do historiador, não apenas por uma questão de credibilidade do seu trabalho, mas sobretudo para poder chegar a *textos* (no sentido de Certeau, 1982) fiáveis.

Um primeiro passo é compreender a distinção entre história e memória. A memória, individual ou coletiva, é a nossa visão dos acontecimentos passados, decantada e recomposta pelos anos, pelas vivências e pelas interações sociais (Prost, 1996). Embora a memória seja uma das fontes do historiador e o trabalho rigoroso e sistemático de recolhas de memórias seja muito importante[5], a história escreve-se confrontando fontes e envolve um processo sistemático de reflexão sobre os vestígios do passado.

Certeau (1982) carateriza a operação historiográfica como uma relação entre três áreas. Em primeiro lugar, um *lugar* de onde o historiador trabalha. É aqui "que se instauram os métodos, que se delineia uma topografia de interesses, que os documentos e as questões que lhe serão propostas, se organizam" (p. 67). Em segundo lugar, o historiador recorre a um conjunto de *procedimentos e regras de análise*, isto é, separa, reúne, e transforma os vestígios do passado criando documentos e procedendo à sua análise. Finalmente, o historiador procede à validação de resultados e a construção de um *texto*.

Uma excelente revisão dos procedimentos historiográficos pode ser encontrada em Valente (2007). Seguindo de perto as propostas de Prost (1996), ele propõe que na base da investigação historiográfica estão os factos, entendidos como uma construção do historiador.

> Os fatos históricos são constituídos a partir de traços, de rastros deixados no presente pelo passado. Assim, o trabalho do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para construir os fatos. Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, a partir das marcas do passado, segundo as regras de uma crítica. (Valente, 2007, p. 31)

Os factos históricos já não são constituídos pela introdução de um sentido na objetividade mas aparecem na própria análise (Certeau, 1980). Para o estabelecimento desses factos, o historiador recorre às suas questões de investigação.

> O método histórico envolve a formulação de questões aos traços deixados pelo passado, que são conduzidos à posição de fontes de pesquisa por essas questões,

[5] Através, por exemplo, da história oral.

> com o fim da construção de fatos históricos, representados pelas respostas a elas. (Valente, 2007, p. 32)

Não existem factos independentemente dos propósitos de pesquisa e estes são condicionados pelo conhecimento prévio sobre o tema, e, na senda das tradições propostas por Bishop (1998), pela educação, pela formação cultural e pessoal do próprio pesquisador. São estes factos que permitem ao historiador o estabelecimento de periodizações, o encadeamentos de acontecimentos, conjeturar causas e atribuir responsabilidades.

Apesar de o historiador partir de um *lugar*, existem procedimentos metodológicos que permitem uma crítica aos pressupostos e preconceitos desse lugar e um deles é a exigência de uma *desnaturalização* dos elementos contemporâneos. O investigador deve metodologicamente questionar os contextos em análise, sujeitando a crítica todos os elementos que lhe pareçam *naturais*. Posto de outro modo, o investigador necessita de se afastar criticamente de categorias atuais que, naturalmente, lhe aparecem como naturais, passe o pleonasmo. Se o não fizer, a pesquisa histórica ficará contaminada por categorias que fazem sentido no presente, mas que, usadas acriticamente no passado, cegam o pesquisador.

O requisito de desnaturalização leva Valente (2007) a distanciar-se da tradição francófona de educação matemática. Segundo esta concepção, uma HEM deveria ser uma história de um saber e não de uma disciplina e só teria viabilidade através de uma forte ligação à história da matemática. Valente (2007) mostra-se muito crítico das consequências desta perspectiva, assumindo como particularmente nefasto para a pesquisa em HEM o conceito de transposição didática. O postulado de que a matemática escolar (*savoir enseigné*)procede necessariamente da matemática ciência (*savoir savant*) impede que seja realizada uma desnaturalização.

Valente considera ainda (2007) que a produção em HEM não deve estar subordinada a imperativos didáticos imediatos como ele entende que a tradição da *Didactique des Mathématiques* requer.

> O diálogo da produção histórica com o presente, com o dia-a-dia das salas de aula, não pode ser relegado por uma produção sem comprometimento com a contemporaneidade. (...) Mas esse diálogo deve ser problematizador. Um diálogo problematizador diz respeito à desnaturalização dos elementos presentes no cotidiano das práticas pedagógicas, que envolvem o ensino de matemática. (Valente, 2007, p. 38)

Tomemos um exemplo para explicar melhor o conceito de desnaturalização. Imaginemos que se pretendia estudar a formação de professores de Matemática no ensino secundário português. Um início apressado tomaria o termo “professores de Matemática no ensino secundário português” no seu sentido natural (atual) e ignoraria diversos problemas que este termo implica. Em primeiro lugar, não podemos assumir como certa a própria disciplina de Matemática que só estabiliza a sua designação e os seus conteúdos bem dentro da segunda metade do século XIX. Depois, apenas podemos falar de professores de Matemática, isto é, de um corpo de especialistas em ensinar este tema, quando esta profissão se estabiliza, o que apenas ocorre já no século XX. Certamente que antes havia pessoas (professores?) que ensinavam matemática no ensino secundário, mas os grupos de docência agregavam várias disciplinas (Matemática com

Física, Química, Ciências Naturais, Desenho ou Trabalhos Manuais, por exemplo) e os docentes acumulavam o ensino da matemática com o de outras disciplinas. Acresce que os requisitos de acesso à "profissão" eram tão permissivos e os salários tão baixos que a falta de indivíduos com formação científica adequada conduzia a que médicos ou militares, por exemplo, arredondassem os proventos da sua profissão exercendo funções letivas (Matos, 2014).

Do mesmo modo, outras categorias atuais podem revelar-se armadilhas para o historiador (programas, escolas, exames, etc.). Usar acriticamente categorias atuais para realizar investigações históricas não produzirá certamente trabalhos de qualidade.

Três exemplos

No grupo de investigação sobre educação matemática da Unidade de Investigação e Desenvolvimento da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa temos procurado refletir sobre o modo como estudos históricos podem contribuir para as problemáticas contemporâneas da educação matemática. Em fundo está a preocupação em saber o que é, de onde vem e como muda a matemática escolar entendida como um fenómeno cultural. Posto de outro modo, procura-se entender o saber matemático como imerso na cultura matemática escolar tecida pelos significados atribuídos pelos diferentes intervenientes (Geertz, 1973): alunos, professores, académicos, governantes, etc. Esta história cultural busca pois as formas criativas de apropriação que os agentes escolares (professores, alunos, funcionários, etc.) fazem dos normativos e busca no interior da escola os vestígios das práticas que aí foram desenvolvidas. Destacarei três exemplos de trabalhos de pesquisa realizados com forte intervenção deste grupo de investigação.

Num primeiro exemplo sintetizado em Rodrigues (2014) mas também desenvolvido parcialmente em Moura (2016) e Novaes (2012), o objetivo de estudar a cultura matemática escolar em escolas profissionais portuguesas foi cumprido através de uma compreensão temporal alargada que envolveu o estudo dos programas envolvendo temas matemáticos das disciplinas das diversas escolas profissionais criadas a partir da segunda metade do século XIX, bem como análises comparativas de livros de texto. Foi assim possível caraterizar as componentes desta cultura em momentos históricos distintos.

Um segundo exemplo, publicado essencialmente em Matos e Monteiro (2011) e mais aprofundado em Monteiro (2018), estudámos o conhecimento didático do conteúdo de professores de Matemática do ensino secundário desenvolvido nas dissertações (Conferências Pedagógicas) de futuros professores produzidas no Liceu Pedro Nunes em Lisboa durante os anos 1950 e 60. O estudo partiu da conjectura inicial que a cultura escolar nas escolas portuguesas de ensino secundário centradas na formação de professores vai incorporar gradualmente a construção curricular das ideias inovadoras da Matemática Moderna.

Aplicando os requisitos da investigação histórica, foi pesquisado o *corpus* relevante, neste caso os textos das Conferências Pedagógicas que tinham sido publicados na *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura*, a revista do Liceu. Esta primeira recolha foi completada por uma busca no arquivo histórico do Liceu que permitiu encontrar mais Conferências e nalguns casos recuperar texto originais, por vezes mais longos ou que incluíam comentários dos professores metodólogos responsáveis pelo acompanhamento dos futuros professores. O levantamento foi apoiado ainda por outra documentação (legislação, atas de exames) e por entrevistas a antigos formandos. Aplicando método da análise de conteúdo, foi possível englobar em cinco grandes categorias os temas tratados nas dissertações: finalidades do ensino da matemática, os novos temas matemáticos, metodologias para o ensino da matemática, propostas de aplicação das novas propostas pedagógicas, e as experiências de Matemática Moderna. Estudos semelhantes foram desenvolvidos no âmbito da Telescola (Matos e Almeida, 2010) ou das Escolas Normais Superiores (Matos, 2017b).

No âmbito de uma HEM, o trabalho permitiu aprofundar o que já se sabia sobre a introdução da Matemática Moderna em Portugal, nomeadamente o papel que aquele Liceu desempenhou ao longo de dez anos como centro da preparação e experimentação das novas ideias pedagógicas. O estudo das cinco categorias permitiu conhecer a abrangência dos temas em discussão durante a formação de professores no Liceu, julgar as influências nacionais e internacionais e estabelecer ligações com outros acontecimentos desde o princípio do século XX.

Mas o nosso *lugar* de educadores matemáticos também permitiu *a posteriori* estabelecer uma ligação com a discussão contemporânea em torno do conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo*. Os trabalhos de Lee Shulman (1987) foram os primeiros que destacaram a especificidade do conhecimento profissional docente e estimularam uma nova compreensão do conhecimento docente. Shulman propõe que o conhecimento profissional docente inclui, para além do conhecimento pedagógico geral e do conhecimento científico, o conhecimento pedagógico do conteúdo que ele caracteriza como

> [uma] fusão de conteúdos e pedagogia numa compreensão de como tópicos, problemas e assuntos específicos são organizados, representados e adaptados aos distintos interesses e capacidades dos alunos e apresentados para ensino. (Shulman, 1987, p. 8)

Este tipo de conhecimento é indissociável da prática pedagógica e expressa-se através de uma *bricolage* apenas passível de ser desenvolvida em contextos de aula ou de escola. As ideias de Shulman constituíram uma visão que contrariava a corrente dominante sobre estudos sobre professores, na época ainda muito limitada ao estudo das concepções. Desde então, a maior parte dos estudos que se têm debruçado sobre o conhecimento profissional do professor têm procurado, numa dimensão individual, dissecar as suas componentes, procurar exemplos de como o professor o vai gerando ao longo da sua vida profissional, ou ainda refletir sobre o seu estatuto epistemológico.

A investigação histórica que efetuámos (Matos e Monteiro, 2011) permitiu compreender como o conhecimento pedagógico do conteúdo foi sendo lentamente construído, não ao nível individual, mas no seio de uma comunidade profissional. Pudemos distinguir três períodos: um primeiro que se inicia em 1957 e se estende até cerca de 1962 em que são propostos temas relacionados com a Matemática Moderna em geral e em que as Conferências se centram em explorações conceptuais das novas ideias. Neste primeiro período os estagiários e o metodólogo recompuseram o conhecimento do conteúdo: a matemática moderna introduzia novos temas matemáticos que são recompostos de uma forma relevante para o ensino secundário. Num segundo período, até 1965, embora os temas propostos continuem a ser de âmbito geral, começam a aparecer as primeiras propostas curriculares concretas, mas ainda sem serem efectuadas aplicações práticas. Foi como se, durante este período, fosse necessário inventar e testar conceptualmente a linguagem, a sequências, as novas representações, etc. antes de as aplicar na aula. Num último período, com efeitos a partir de 1965, reflete-se sobre a experiência pedagógica de introdução da Matemática Moderna nos últimos anos do ensino secundário. A componente prática do uso da matemática em aula é agora muito vincada.

Este trabalho sugere que, num contexto de grande alteração curricular, não foi possível iniciar imediatamente a recomposição pedagógica sem antes os professores se apropriarem dos novos conteúdos científicos. No entanto, para que tal acontecesse, foi necessário re-escrever o próprio conhecimento científico de um modo adaptado às finalidades do ensino secundário. Assim, e ainda sem incluir estudos sobre a utilização na aula, os primeiros trabalhos incidiram numa recomposição do conhecimento científico, escolhendo os temas relevantes, selecionando sequências apropriadas, desenvolvendo termos, definições e símbolos adequados, etc. O conhecimento científico de que fala Shulman teve aqui que ser reelaborado pelos próprios professores. Note-se ainda que este estudo longitudinal sobre o conhecimento do professor apenas poderia efetuado recorrendo a um estudo de longa duração.

Um terceiro exemplo pode ser apreciado nos trabalhos em curso de Rui Candeias (Candeias, 2017; Candeias e Monteiro, 2016) centrados na formação de professores para o ensino primário em Portugal e no conceito de número racional positivo[6]. Numa primeira fase foram estudados os normativos legais que balizaram essa formação, desde a formação de professores em escolas de ensino mútuo até 1974 (parcialmente publicada em Candeias e Matos, 2016), discutindo os diversos modelos de formação que foram sendo concebidos e aplicados. Acompanhando o crescimento da rede pública de escolas normais, foi feito um levantamento dos critérios de acesso, das disciplinas e dos exames finais, relevando em cada caso os requisitos matemáticos envolvidos. Após este estudo, Candeias efetuou um levantamento dos livros de texto que incluíam conteúdos sobre o ensino da matemática usados naquelas escolas. Finalmente decidiu estudar, a partir da análise de livros de didática, a forma como era feita a primeira abordagem aos números racionais não negativos, na formação de professores do ensino primário, em diferentes épocas. Um dos aspetos estudados é o enquadramento das propostas didáticas dos livros do período em estudo num modelo contemporâneo que trabalha com os diferentes significados que as frações, em contexto escolar, podem assumir (Monteiro e Pinto, 2005).

Do ponto de vista da HEM, o seu trabalho propôs uma sequência de etapas de desenvolvimento das escolas normais. Foi possível conhecer a evolução dos conteúdos matemáticos, destacando em particular a inclusão de temas visando dotar as escolas primárias de capacidades de um embrião de formação profissional (agricultura, agrimensura, comércio), ou a diferenciação de formação entre os dois sexos (mais temas matemáticos e mais avançados para alunos, menos temas e uma visão matemática mais prática para alunas). Foi ainda possível detetar os modos como duas correntes programáticas (a Escola Nova primeiro e a Matemática Moderna depois) influenciaram as abordagens metodológicas dos livros de texto.

Do ponto de vista mais geral da educação matemática, o estudo vai permitir, por um lado, validar o modelo contemporâneo que trabalha com os diferentes significados que as frações podem assumir em contexto escolar (Monteiro e Pinto, 2005)e, por outro, conhecer os momentos em que esses diferentes significados foram aparecendo nos livros de didática.

[6] O trabalho de Candeias apenas incide sobre os racionais positivos, pelo que, para uma economia de escrita, passarei a mencionar apenas o termo “racionais”.

No entanto, foram necessários cuidados especiais para realizar esta ligação aos temas contemporâneos. Em contexto escolar, as frações podem assumir diferentes significados que implicam procedimentos didáticos diferentes. O modelo escolhido por Candeias (Monteiro e Pinto, 2005) distingue seis significados:

1. a relação parte-todo de uma unidade contínua,
2. a relação parte-todo de uma unidade discreta,
3. o quociente entre dois números inteiros representados pela fração a/b,
4. o operador partitivo multiplicativo, em que a fração a/b transforma o cardinal de um conjunto discreto,
5. a medida, em que se compara uma grandeza com outra, tomada como unidade.
6. a razão entre as duas partes do mesmo todo.

Estes seis significados, desenvolvidos a partir de materiais contemporâneos, pretendem descrever todos os significados que as frações poderiam assumir na literatura educativa. Mas seria possível encontrar estes significados nos livros de texto do passado?

A primeira etapa consistiu pois em *desnaturalizar* o modelo, começando pelos próprios números racionais. O conceito de número racional inserido na sequência naturais -> inteiros -> racionais -> reais -> complexos apenas aparece em meados do século XX como consequência da valorização da unidade da matemática e do uso da linguagem dos conjuntos trazidos pela Matemática Moderna. O termo é anacrónico antes do século XX. Foi pois necessário estar atento a outras terminologias que se referissem às coleções de números que hoje designamos como racionais ("quebrados", "decimais", "frações", etc.).

Recorrendo a uma análise de conteúdo, foram identificadas as ocorrências de "números racionais" nos livros de texto e desenvolvidas categorias sem cuidar de as fazer corresponder com as categorias previstas no modelo. Só então, numa segunda etapa, estas novas categorias foram confrontadas com os seis significados do modelo. Se se tivesse invertido esta sequência corria-se o risco de adulterar os significados do passado ao forçá-los numa categorização definida no presente. Podia mesmo acontecer que o investigador se tornasse cego a modelos, processos, argumentações do passado que conduzissem a significados distintos.

Em todos os exemplos foram constituídos factos, periodizações, encadeamentos através de procedimentos de análise histórica e finalmente desenvolvido um texto. Em todos houve especial cuidado com o processo de desnaturalização. Enquanto nos primeiros exemplos a reflexão com relevância para a educação matemática foi feita após a conclusão da investigação histórica, no último, a preocupação de validação de um modelo contemporâneo ditou um especial cuidado de desnaturalização do conceito (números racionais) e uma análise de conteúdo autónoma. De novo, a validação do modelo só ocorreu já na fase final do estudo.

Concluindo

A partir do lugar de educador matemático, procurei argumentar no sentido da viabilidade de uma HEM que se constitua simultaneamente como uma área de investigação histórica e que dialogue com os problemas presentes da educação matemática. Considerando a educação matemática um campo de reflexão e ação, argumentei da sua viabilidade centrada essencialmente na abertura de perspetivas possibilitada pelas perspetivas de uma história cultural e pelo postulado da autonomia das disciplinas escolares suportados na adoção das melhores práticas historiográficas contemporâneas. Terminei apresentando três exemplos.

Este tipo de trabalho integrando paradigmas distintos podia ser desenvolvido recorrendo apenas a um saber histórico? Acompanhando Miguel (2005), penso que não. As especificidades da cultura matemática nas escolas profissionais, os conteúdos matemáticos escolares, ou as distinções entre os modelos de números racionais apenas poderiam ser apreciados através do lugar de um educador matemático. Mas simultaneamente apenas uma historiografia, com a sua desnaturalização, a sua crítica das fontes, entre outros, conseguiria desenvolver aqueles trabalhos.

Agradecimentos

Agradeço a Cecília Monteiro, Elmha Coelho e Rui Candeias os comentários a uma versão preliminar deste texto.

Referências

Artigue, M. e Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue Française de Pédagogie, 76*, 69-88.

Belhoste, B. (1998). Pour une réevaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, *4*, 289-304.

Bishop, A. J. (1998). Research, effectiveness, and the practioners' world. Em A. Sierpinska e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (Vol. 1, pp. 33-45). Dordrecht: Kluwer.

Boavida, A. M., Canavarro, A. P., Mourão, A. P., Moreira, D., Guimarães, H. e Matos, J. M. (Eds.). (1998). *Sociologia da Matemática*. Lisboa: APM.

Boero, P. e Szendrei, J. R. (1998). Research and results in mathematics education: some contradictory aspects. Em A. Sierpinska e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 197-212). Dordrecht: Kluwer.

Candeias, R. (2017). A matemática na formação dos professores do ensino primário: a proposta de José Moreirinhas Pinheiro (1923-2017) para o ensino dos decimais. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática, 3*(3), 55-67.

Candeias, R. e Matos, J. (2016). A matemática na formação dos professores do ensino primário em Portugal, da reforma pombalina de 1772 até 1910. *Perspectiva, 34*(1), 41-66.

Candeias, R. e Monteiro, C. (2016). A matemática na formação dos professores do ensino primário: análise de uma proposta didática de Alberto Pimentel Filho (1875 – 1950) para o ensino das frações. Em M. Chaquiam, I. A. Mendes e W. R. Valente (Eds.), *Anais do III Congresso Ibero-americano de Educação Matemática* (pp. 823-839). Belém.

Certeau, M. (1982). *A escrita da história*. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Chartier, R. (2007). *La história o la lectura del tiempo*. Barcelona: Gedisa.

Chervel, A. (1988/1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação, 2*, 177-229.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2ª ed.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clements, M., Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J. e Leung, F. (Eds.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Nova Iorque: Springer.

Ellerton, N. e Clements, M. (1998). Transforming the international mathematics education research agenda. Em A. Sierpinska e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 153-155). Dordrecht: Kluwer.

Faria Filho, L. M., Gonçalves, I. A., Vidal, D. G. e Paulilo, A. L. (2004). A cultura escolar como categoria de análise e como campo de investigação na história da educação brasileira. *Educação e Pesquisa, 30*(1), 139-159.

Furinghetti, F. e Karp, A. (Eds.). (2018). *ICME-13 Monographs. Researching the History of Mathematics Education: An International Overview*. Springer.

Furinghetti, F., Matos, J. M. e Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. Em A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273-302). Nova Iorque: Springer.

Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures*. Nova Iorque: Basic Books.

Julia, D. (1995). La culture scolaire comme objet historique. *Paedagogica Historica. International Journal of the History of Education, Suppl. Series, vol. I*, 353-382.

Karp, A. e Schubring, G. (Eds.). (2014). *Handbook on the History of Mathematics Education*. Londres: Springer.

Matos, J. M. (2006). Constituição de um saber matemático: a aritmética no Portugal da primeira metade de quinhentos. *Revista Brasileira de História da Matemática, 6*(12), 139-163.

Matos, J. M. (2007). História do ensino da matemática em Portugal — a constituição de um campo de investigação. Em J. M. Matos e W. R. Valente (Eds.), *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos* (pp. 8-20). São Paulo: GHEMAT.

Matos, J. M. (2014). Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. Em A. Karp e G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 291-302). Londres: Springer.

Matos, J. M. (2017a). A Educação Matemática entre reflexão e prática *VIII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática — Conferencias* (pp. 152-158). Andújar: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Matos, J. M. (2017b). O desenvolvimento do conhecimento profissional do professor de matemática pelas Escolas Normais Superiores portuguesas (1911-1930). *Cadernos de História da Educação, 16*(3), 666-683.

Matos, J. M. (2018). Desenvolvimento curricular na matemática escolar. Em A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira e R.

Machado (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 34-51). Lisboa: APM.

Matos, J. M. e Almeida, M. C. (2010). A comunicação de ideias matemáticas no início da Telescola — linguagem, representações e práticas curriculares. Em J. M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho e P. C. Teixeira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática. Comunicação no ensino e na aula de matemática* (pp. 304-319). Lisboa: SPIEM.

Matos, J. M. e Monteiro, T. M. (2011). Recompondo o conhecimento didático do conteúdo durante o início da matemática moderna em Portugal (1956-69). *REMATEC, Revista de Matemática, Ensino e Cultura, 6*(9), 7-25.

Matos, J. M. e Saraiva, M. (Eds.). (2011). *Actas do I Congresso Ibero-americano de História da Educação Matemática*. Caparica: UIED.

Mattoso, J. (1988). *Identificação de um país. Ensaio sobre as origens de Portugal, 1096-1325*. Lisboa: Editorial Estampa.

Mattoso, J. (1997). *A escrita da história — teoria e métodos*. Lisboa: Editorial Estampa.

Miguel, A. (2005). História, filosofia e sociologia da educação matemática na formação do professor de matemática: um programa de pesquisa. *Educação e Pesquisa, 31*(1), 137-152.

Monteiro, C. e Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática, 14*, 89-107.

Monteiro, T. (2018). *Formação de Professores de Matemática no Liceu Normal de Pedro Nunes (1956-1969).* (Tese de Doutoramento), Universidade Nova de Lisboa.

Moreira, D., e Matos, J. M. (1998). Prospecting Sociology of Mathematics from Mathematics Education. Em P. Gates e T. Cotton (Eds.), *Mathematics Education and Society* (pp. 262-267). Nottingham: Nottingham University.

Moura, E. C. (2016). *O ensino de matemática em duas escolas profissionalizantes: Brasil e Portugal, no período de 1942 a 1978.* (Tese de doutoramento), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro.

Novaes, B. D. (2012). *O Movimento da Matemática Moderna no ensino técnico industrial no Brasil e em Portugal: impactos na cultura escolar.* (Tese de doutoramento), PUC Paraná, Curitiba.

Palma, H. I. M. (2008). *A matemática na escola primária. Um olhar sobre o ensino da Matemática nas escolas portuguesas desde o final do século XIX até à década de 70 do século XX.* (Mestrado Tese de mestrado), Universidade de Lisboa, Lisboa.

Prost, A. (1996). *Douze leçons sur l'histoire*. Paris: Éditions du Seuil.

Rodrigues, A. (2014). *A matemática no ensino profissional. Os programas e as representações dos professores.* (Tese de doutoramento), Universidade da Beira Interior.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1-22).

Sierpinska, A. e Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. Em A. Sierpinska e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 527-548). Dordrecht: Kluwer.

Sriraman, B. e English, L. (Eds.). (2010). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. Londres: Springer.

Steiner, H.-G., Balacheff, N., Mason, J., Steinbring, H., Steffe, L. P., Brousseau, G., . . . Christiansen, B. (Eds.). (1984). *Theory of Mathematics Education (TME)*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Valente, W. R. (2007). História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2*(2), 28-42.

Viñao, A. (2006). La História de las disciplinas escolares. *Historia de la Educación: Revista interuniversitaria, 25*, 243-269.

INVESTIGANDO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS CON LOS MAESTROS EN FORMACIÓN

Alexander Maz-Machado

Universidade de Córdoba

Resumen: *La formación matemática que se imparte a los futuros maestros es de crucial importancia porque son estos quienes han de iniciar a los alumnos de Educación infantil y primaria en el aprendizaje de los conceptos matemáticos básicos. Esto ha hecho que sean objeto de frecuentes investigaciones sobre variados temas como por ejemplo sus procesos de aprendizaje de las matemáticas, sus actitudes, creencias y concepciones tanto de las matemáticas como de su enseñanza.*
En ocasiones los resultados de estas investigaciones parecen contradictorios con lo que observamos en nuestras aulas con este tipo de alumnos. Es entonces cuando empezamos a cuestionar si los profesores de estos futuros maestros cometemos algún tipo de error en nuestra labor docente con ellos. Sin embargo, en pocas ocasiones razonamos sobre las particularidades curriculares, cognitivas o motivacionales de muchos de los grupos analizados en tales investigaciones. Teniendo esto presente presentaremos algunos ejemplos de estas situaciones.

Descriptores: *Formación del profesorado; investigación; educación matemática; investigación.*

Introducción

La adquisición de conocimientos matemáticos en la Educación Primaria es fundamental para los niños porque estos les permitirán adquirir herramientas cognitivas y conceptuales para interpretar el mundo que les rodea. Sin duda, en la actualidad vivimos en una sociedad cambiante en la que surgen variadas necesidades, entre ellas las matemáticas, que son relevantes para desenvolvernos en este acelerado mundo. Por ejemplo se requieren unas matemáticas para la vida diaria, para el trabajo o para desarrollar una comunidad científica y técnica (NCTM, 2003). En el reporte *Adding it up* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) se enfatizó la necesidad de desarrollar en los escolares cinco aspectos matemáticos para que puedan alcanzar un alta habilidad matemática:

- *Comprensión conceptual* –comprensión de los conceptos matemáticos, sus operaciones y relaciones.
- *Fluidez de procedimientos* –habilidad para llevar a cabo los procedimientos de manera flexible, precisa, eficiente y apropiada.
- *Competencia estratégica* –capacidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
- *Razonamiento adaptativo* –capacidad de pensamiento lógico, reflexión, explicación y justificación.

- *Disposición productiva* –inclinación habitual a ver las matemáticas como algo sensato, útil y valioso.

El planteamiento que surge es si realmente los estudiantes alcanzan el dominio de estos distintos aspectos, si realmente desarrollan las competencias matemáticas que se consideran relevantes.

Sin embargo, en general no es fácil investigar directamente con los alumnos de las etapas de infantil, primaria o secundaria. Entre otras razones porque es necesario contar con el visto bueno del centro escolar, con el de los padres y con el del profesorado. Además, es imprescindible disponer de recursos humanos y económicos que permitan realizar investigaciones de gran calado y que sean extrapolables a una población educativa más amplia.

Muchos investigadores no tenemos fácil ese acceso a la información directa de los escolares, por eso buscamos en su “noosfera” en términos de Chevallard (1991). Así procuramos examinar la información de los libros de texto, los planes curriculares, los centros o de sus maestros (Bulut, 2007; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015; Martínez y Gorgorio, 2004; Remillard, 2005). Ejemplos de estas investigaciones... Y generalmente esta investigación se hace de manera disyunta entre esta variada población de estudio.

Otro inconveniente se debe a que en general el profesorado (en cualquiera de los niveles educativos: primaria, secundaria o universidad) es altamente reacio a ser objeto de investigación. Sienten que se puede estar evaluando su desempeño docente y esgrimen diversas causas para no participar en investigaciones en las que sean ellos los sujetos de estudio (Hirsh y Navia, 2015).

Ante este panorama, los investigadores que además somos docentes en las facultades donde se forman a los futuros maestros y profesores en las distintas etapas escolares recurrimos en ocasiones a realizar investigaciones que tienen como objeto de estudio a nuestros propios alumnos.

La formación matemática que se imparte a los futuros maestros de educación infantil o primaria es de crucial importancia porque son estos quienes en el futuro han de iniciar a los alumnos de Educación infantil y primaria en el aprendizaje de los conceptos matemáticos básicos. Llinares (2009) señala esta importancia destacando que el profesorado de primaria para poder enseñar matemáticas requiere unas competencias matemáticas que deben ser consideradas en el diseño de los programas de formación. Estas competencias deben ser insertadas en las competencias docentes y profesionales que se requieren para desarrollar una labor docente en la Educación Primaria.

Dentro de las muchas líneas teóricas de investigación centradas en la formación del profesorado se incluye la del conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008) liderada por el grupo de Debora Ball. El MKT distingue dos grandes dominios, el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico de contenido. Pero hay otras líneas que son o bien variantes de esta o que se fundamentan en principios diferentes.

Una manera de verificar la importancia, la actualidad y sobre todo el frecuente uso de los alumnos para maestro como objeto de investigación es la consulta de algunas bases de datos. Concretamente, al hacer una búsqueda de documentos que traten sobre la formación de maestros y las matemáticas en el periodo 2010 a 2018, en tres fuentes de información de reconocido prestigio (Google Scholar, WoS y SCOPUS), se obtiene una gran cantidad de documentos (Tabla 1). Esto es un indicio de la preocupación por la formación que reciben quienes se preparan para desempeñar la tarea de enseñar las matemáticas básicas a los escolares.

Otro factor a considerar es que tomando como ejemplo los artículos de SCOPUS, se hizo un muestreo del 10% de los documentos y se halló que en cerca del 90% la elección de la muestra fue intencional, es decir se recurrió a los sujetos más cercanos disponibles: los propios alumnos del investigador.

Estos artículos abarcan aspectos tan variados y amplios como el contenido pedagógico, la compresión de conceptos determinados, los errores y dificultades asociados a un concepto, razonamiento matemático, creencias, actitudes, género, concepciones, competencias, aprendizaje, entrenamiento para la practica docente, recursos, sentido numérico, resolución de problemas, competencias profesionales, TICs, etc. (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007; Estrada, Bernabeu y Fortuny, 2004; Madrid, León-Mantero y Maz-Machado, 2015).

Tabla 1 – Documentos sobre maestros en formación entre 2010-2018

Sitio de búsqueda	**Término de búsqueda**	**Nº documentos**
Google Académico	Matemáticas maestros en formación	15300
WoS	Mathematics teachers in training	1697
SCOPUS	Mathematics teachers in training	1020

El conflicto

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando los investigadores tomamos a su vez al papel de consumidores de los resultados de las investigaciones que se publican en los artículos? Es decir, ¿qué sucede cuando tratamos de hacer un proceso reflexivo de los hallazgos que allí se exponen con lo que nos encontramos en las aulas los estudiantes para maestro que son a su vez nuestros alumnos?

En ocasiones los resultados de estas investigaciones parecen contradictorios con lo que observamos en nuestras aulas con este tipo de alumnos. Es entonces cuando empezamos a cuestionar si los profesores de estos futuros maestros cometemos algún tipo de error en nuestra labor docente con ellos.

¿Qué hacer y cómo justificar que aunque incorporemos aquellas novedades didácticas o metodológicas que recomiendan y sugieren las investigaciones publicadas, no obtenemos los mismos resultados en términos de mejora del aprendizaje, el rendimiento académico, la motivación etc.?

Los ejemplos

A continuación presentaré dos ejemplos sobre lo que hemos hallado en algunos cursos de matemáticas básicas para maestros en formación relacionados con las fracciones y los porcentajes. Para contextualizar estos ejemplos, debemos decir que la asignatura se imparte en primer curso del Grado en Educación Primaria y que tiene una carga docente de 6 créditos ECTS para el alumnado, con tres horas de clases teóricas y una de prácticas a la semana.

En esta asignatura se enseñan (o recuerdan) los conceptos básicos de las matemáticas de educación primaria y dentro de los objetivos específicos de la asignatura se especifican dos:

- Conocer y dominar los contenidos matemáticos que se imparten en Educación Primaria.
- Enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos.

Estos objetivos están en coherencia con las competencias que se pretenden desarrollar, en particular con:

- Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.).
- Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.

Para lograrlo el profesorado que imparte la asignatura (del que hago parte), fomenta el desarrollo de problemas, ejercicios, actividades y el manejo de variados materiales didácticos manipulativos (regletas, baraja de fracciones, etc.).

La evaluación corresponde en parte al trabajo de prácticas realizadas en el aula, otra a otras actividades que se realizan o bien en clase o fuera de ella y finalmente otra parte corresponde al examen escrito. En el primer ejemplo se presentan los resultados de un problema del examen y en el segundo ejemplo el resultado de una actividad de prácticas realizada en el aula.

Caso 1.

En dos grupos de primer curso de maestro para maestro y en una asignatura de matemáticas (180 alumnos), se enseñaron las fracciones en su aspectos conceptuales y las operaciones con ellas, se realizaron prácticas con materiales manipulativos discretos y continuos y se realizaron ejercicios de distinto tipo. En general las horas sobre este tema se orientaron hacia el desarrollo de competencias y el desarrollo de habilidades en el uso de materiales didácticos para la enseñanza de las fracciones en primaria. Todo ello teniendo en cuenta que según Brommer y Brophy (1986), la opinión que el maestro tiene sobre un determinado concepto y su proceso de enseñanza-aprendizaje influyen de manera determinante en la planificación y evaluación de tal concepto.

Al terminar el curso, se les aplicó un examen escrito en el cuál se pidió que resolvieran un problema en el que debían operar con fracciones. El problema planteado fue el siguiente:

Receta para hacer un pastel de manzana

Si los ingredientes para cocinar cuatro porciones de manzanas rellenas horneadas son:

- 4 manzanas grandes.
- 1/3 de taza de azúcar moreno.
- 1/4 de taza de nueces picadas.
- 1/4 de taza de pasas.
- Ralladura de 1/2 limón.
- 1/2 cucharadita de nuez moscada.
- 1/4 de cucharadita de canela.
- 2 cucharaditas de margarina suave.
- 2/3 de taza de agua

¿Qué cantidades serán necesarias para cocinar una sola porción? Escribe la respuesta al lado de cada ingrediente.

Las respuestas dadas por el alumnado señalaron que solamente el 46,7% obtuvieron la nueva receta de forma correcta, por tanto el 53,3% respondió de forma incorrecta. Al analizar en detalle las respuestas dadas para cada ingrediente se observa que en promedio el 40,9 % de las respuestas fueron erróneas, unos porcentajes demasiado altos para la enseñanza recibida (Tabla 2). Asombra por ejemplo que un 20,7% respondieran incorrectamente la pregunta sobre el número de manzanas cuando es una división sencilla.

Tabla 2 – Respuesta al problema del pastel de manzana

ITEM	Acertadas	%	Erróneas	%
4 manzanas grandes	73	79,3	19	20,7
1/3 de cucharada de azúcar	52	56,5	40	43,5
1/4 de cucharada de nueces	53	57,6	39	42,4
1/4 de cucharada de pasas	52	56,5	40	43,5
1/2 limón	53	57,6	39	42,4
1/2 cucharada de nuez moscada	51	55,4	41	44,6
1/4 cucharada de canela	49	53,3	43	46,7
2 cucharadas de margarina suave	57	62,0	35	38,0
2/3 de vaso de agua	49	53,3	43	46,7

Más de la mitad de los alumnos no fueron capaces de resolver el problema propuesto. Aunque dominaban las operaciones con las fracciones, no comprendían cuál era el proceso que se debía aplicar para obtener una parte de un todo si este todo se expresaba como suma de partes no equivalentes. Pese a que en el aula se realizaron actividades donde se manipularon objetos y se practicaron las operaciones con fracciones, un elevado porcentaje de los alumnos fueron incapaces de trasladar estos conocimientos para resolver una situación cotidiana como es elaborar un pastel más pequeño (de una sola porción), la cual requería la utilización de conocimientos sobre fracciones en un contexto no matemático.

Caso 2.

En la asignatura de matemáticas del primer curso del grado de Educación Primaria, cuando se enseña el tema de fracciones también se trabajan los porcentajes. Como ya se ha indicado se trabaja con énfasis en los aspectos manipulativos, conceptuales y algorítmicos asociados al porcentaje. Como bien señala Moss (2002) los alumnos de primaria deben desarrollar habilidades de representación de los decimales, fracciones y porcentajes de manera intercambiable, por tanto planteamos a los futuros maestros una actividad para conectar porcentaje y fracción en la relación parte-todo.

En concreto se les pidió que representaran algunos porcentajes en modelos continuos (áreas) como se muestra en la figura 1.

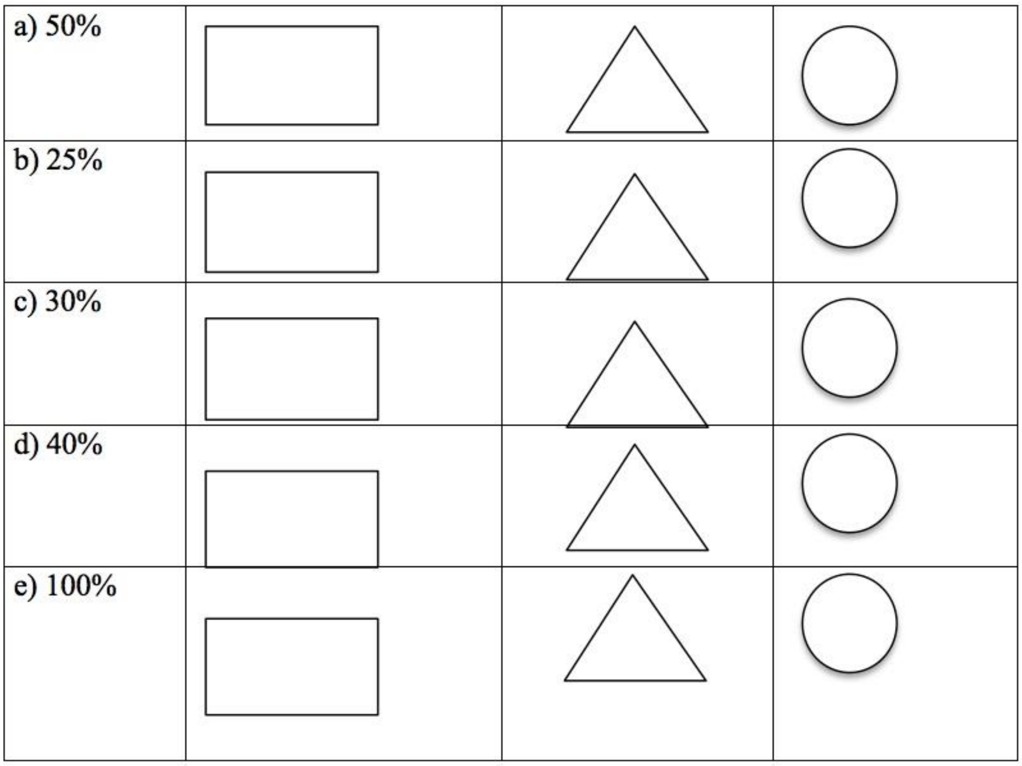


Figura 1 – Plantilla de actividades propuesta. Nota: los triángulos son equiláteros

Para el porcentajes de 50% hubo pocos errores, una media del 3,03%. Asombra que incluso para el 100% algún alumno cometiera errores, aunque se trata de casos aislados con una media del 2,2%. En el caso del 25%, los resultados para el rectángulo fueron similares pero para el circulo los errores fueron del 10,7% y para el triángulo el 52,8% un valor alto dada la sencillez de la pregunta.

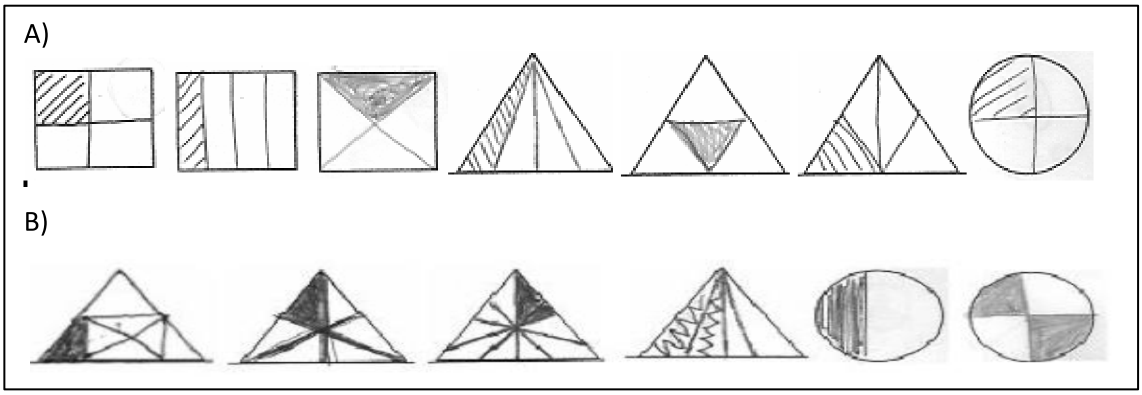
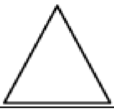
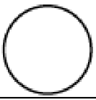


Figura 2 – A) Ejemplos correctos para 25%; B) Ejemplos incorrectos para 25%

El número de errores aumenta con el resto de porcentajes. Así, la representación de los porcentajes de 30% y 40% presentó gran dificultad para los alumnos (Tabla 3).

Tabla 3 – Resultados para las representaciones del 30% y 40%

Figura	**Porcentaje a representar**							
	30%				**40%**			
	CO	**%**	**IN**	**%**	**CO**	**%**	**IN**	**%**
	46	26,1	130	76,8	52	29,5	124	70,4
	11	6,2	165	93,7	13	7,4	163	92,6
	27	15,3	149	84,6	26	14,7	150	85,2
$\bar{X}$	28	**15,8**	**148**	**85,0**	**30.3**	**17,2**	**145,6**	**82,7**

La siguiente figura muestra ejemplos de alumnos que resolvieron correctamente esta pregunta.

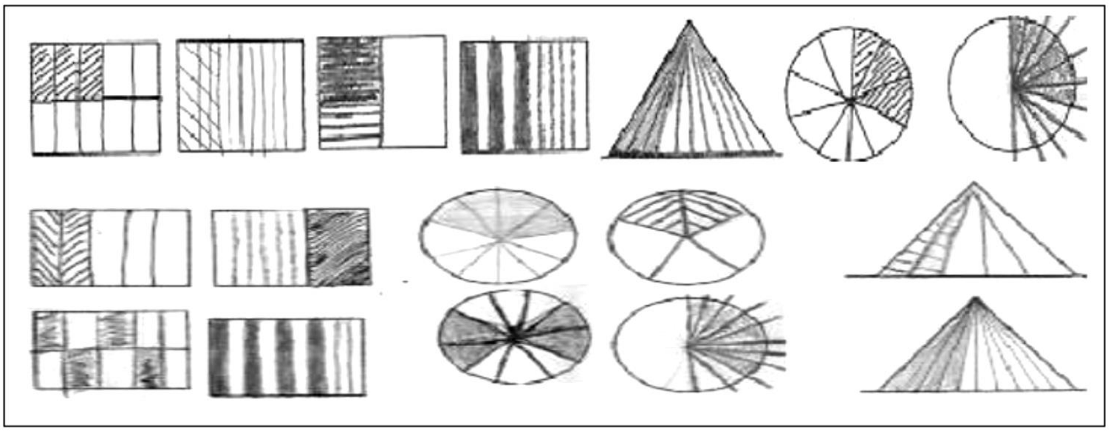


Figura 2 – Respuestas correctas para 30% y 40%

A su vez, se observa que un relevante porcentaje de los estudiantes confunden el 30% con 1/3 olvidando que esto representa aproximadamente el 33,33% (Figura 3).

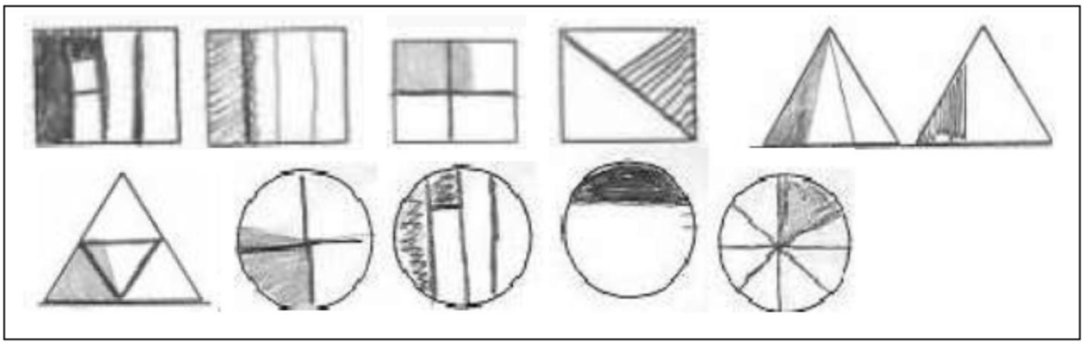


Figura 3 – Respuestas incorrectas para 30%

Para la tarea de representar el 40% también se evidencia la confusión o asociación del valor 40% con un cuarto (Figura), lo que se muestra en las representaciones hechas sobre algunos de los círculos y cuadrados. Tanto para este porcentaje como para el 30% los alumnos olvidan que toda fracción representa un determinado número de partes iguales de un todo y por lo tanto si por ejemplo dividen la figura en 10 partes bastara tomar tres o cuatro de ellas.

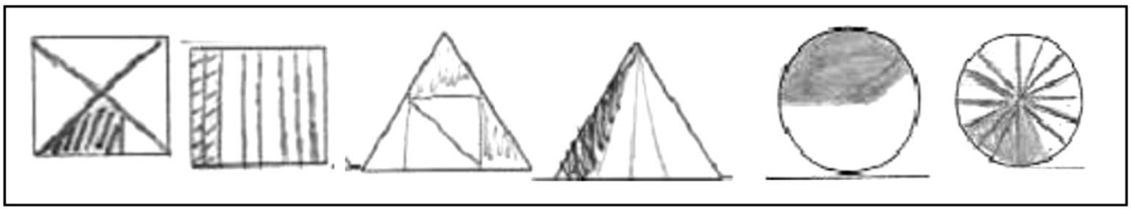


Figura 4 – Respuesta incorrectas para 40%

Las fracciones y los porcentajes son conceptos fundamentales en la enseñanza en los niveles de Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria, formando parte del currículo oficial en España en ambas etapas, y pese a que se utilizan a diario en multitud de situaciones cotidianas, los futuros maestros presentan deficiencias en situaciones sencillas de representación de porcentajes en términos de las partes del área de un todo cuando este es continuo.

Discusión

Si los profesores hemos seguido algunas de las recomendaciones que hacen tanto algunas de las teorías como numerosos artículos de investigación, por ejemplo la incorporación de materiales didácticos manipulativos, la presentación en clase de problemas contextualizados, el trabajo en pequeños grupos o el fomento del trabajo colaborativo en la clase de matemáticas, ¿por qué los resultados de ciertas actividades planteadas a los alumnos son tan diferentes a los de estos estudios y teorías?

Considero que entre las diferencias, ese encuentra, el resultado de tratar de poner en práctica recomendaciones hechas sobre modelos ideales o sobre grupos en condiciones no reales. Es decir, en gran medida la teoría propone realizar acciones con base a los resultados obtenidos sobre grupos reducidos lo que es algo irreal en la mayoría de las aulas, por ejemplo en nuestras aulas contamos con más de 90 alumnos por grupo. En ocasiones las experiencias realizadas invierten un mayor tiempo de clase del que normalmente se dedica a dichos temas (sobre todo si se tiene en cuenta el currículo establecido), plantean incorporar innovaciones (metodológicas o didácticas) que requieren de equipos humanos y tecnológicos para su diseño o aplicación y de los que generalmente no disponemos la mayoría de docentes. En otros situaciones se pretende ampliar la experiencia de un solo sujeto, sometido a un estudio de caso, a grupos enteros.

Un segundo aspecto a considerar es lo que el centro permite hacer dentro de la libertad de cátedra de cada profesor. Es necesario tener en cuenta que los profesores en general están regidos por un plan curricular dentro de una legislación específica. A modo de ejemplo en España cada universidad es autónoma para decidir que contenidos imparte y que competencias desarrolla en los futuros maestros, no hay unos contenidos, ni competencias mínimas comunes para todo el país, así el perfil de un maestro de una universidad no tiene nada que ver con el de otra de la misma ciudad (Madrid, Jiménez-Fanjul y Maz-Machado, 2016). Como caso contrario por ejemplo en Ecuador si hay unas directrices comunes mínimas a todas las universidades respecto al currículo de la formación del profesorado.

Finalmente, está el propio profesor quien decide qué y cómo explicar en cada clase, qué tareas realizar, etc. Esto depende de aspectos afectivos y psicológicos, como de las infraestructuras con que cuente y por supuesto de sus conocimientos tanto de las matemáticas como de la parte didáctica (Tabla 4).

Tabla 4 – Triada de propuestas de mejora de la enseñanza de las matemáticas en Primaria

Lo que la teoría propone que debe hacerse	**Lo que se puede hacer en los contextos reales**	**Lo que quiere hacer el profesor**
Pensado para grupos ideales; generalmente se ha puesto en práctica con grupos reducidos y con condiciones educativas artificiales que en muchos casos no se corresponden con la realidad educativa. En ocasiones se pretende generalizar un estudio de caso.	Esta condicionado por el contexto socio-cultural y económico. Asimismo, la legislación educativa limita y concreta los contenidos a través del currículo (en el caso de la Educación Primaria y Secundaria). Algo similar ocurre con las políticas del centro educativo (las competencias que fomentan y los objetivos que pretender alcanzar).	Está subordinado a aspectos afectivos y psicológicos del profesorado: sus actitudes, creencias, concepciones, su interés. También a aspectos de infraestructura (por ejemplo, recursos del centro) y de conocimientos propios de las matemáticas o de áreas afines (por ejemplo TICs).

Conclusión

He pretendido mostrar que la investigación matemática en los profesores en formación es importante y valiosa porque permite conocer lo que saben, como lo adquieren y cómo se supone que lo enseñarán.

A su vez, se ha indicado que en no pocas ocasiones nuestros resultados de aula no se parecen a los de las investigaciones que se publican pese a incorporar algunos de sus hallazgos y planteo tres hechos que dan respuesta a porque nos sucede esto. No estoy abogando por no tener en cuenta los resultados de las investigaciones, si no por tener cautela al leerlos y tratar de incorporar sus hallazgos y sugerencias. Ser conscientes de las diferencias a veces sutiles de las condiciones en que se realizan y valorar si tales entornos pueden ser construidos en su lugar de trabajo.

No debemos olvidarnos de la historia de la educación matemática y recordar que hace unas décadas se vivió bajo el absolutismo de las enseñanzas bajo la teoría de las matemáticas modernas y, cómo muchas veces el profesorado no veía los resultados que pregonaba tal teoría. Así que, los formadores del profesorado debemos ser críticos, reflexivos y sobre todo conscientes de nuestras fortalezas y debilidades en el quehacer docente diario, para así poder juzgar si podemos o no incorporar las novedades en nuestras aulas.

Referencias

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., & Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *12*(33).

Bromme R., Brophy J. (1986) Teachers' Cognitive Activities. In: Christiansen B., Howson A.G., Otte M. (eds) *Perspectives on Mathematics Education. Mathematics Education Library*, vol 2. Springer, Dordrecht.

Bulut, M. (2007). Curriculum Reform in Turkey: A Case of Primary School Mathematics Curriculum. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3*(3).

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & López-Martín, M. D. M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, *17*(4), 715-739.

Estrada, A., Bernabeu, C. B., & Fortuny J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *22*(2), 263-273.

Hirsh, A. y Navia, C. (2015). Professional values training in normal schools in Mexico in an uncertainty context. *Edetania. Estudios y propuestas socioeducativas*, (47), 129-143.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell B. (Eds.) (2001). *Adding it up: helping children learn matheamtics.* Washington, DC: National Research Council.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el díselo de programas de formación. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101.

Madrid, M. J., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2016). Bibliografía usada en la formación matemática del profesorado de infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 611). Málaga: SEIEM.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., & Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. *Open Access Library Journal*, *2*(11), 1.

Martínez, M., & Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *6*(1), 01-19.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: altering the teaching sequence for rational number. En Litwiller, B. y Bright, G. (eds.): *Making sense of fractions, ratios and proportions. Yearbook 2002* (págs. 109-120). Reston: NCTM.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad THALES y NCTM.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, *75*(2), 211-246

INVESTIGANDO NÚMEROS FRACIONÁRIOS PARA DESENVOLVER AS IDEIAS DE ESTUDANTES DE 7 ANOS: UM PROJETO COLABORATIVO DE PESQUISADORES E PROFESSORES*

Arthur Belford Powell

Rutgers University-Newark, EUA

powellab@newark.rutgers.edu

Resumo: Descreveremos uma colaboração entre investigadores universitários e professores do 1.º ciclo do ensino básico com o objetivo de estudar os problemas que os estudantes revelam na aprendizagem de números fracionários e atuar para melhorar o ensino desse conteúdo. Discutiremos os obstáculos cognitivos implicados na conceção comum de números fracionários para a sua aprendizagem. Identificaremos as origens dos problemas do ensino de frações nos livros didáticos. Como abordagem alternativa, apresentaremos uma proposta que é informada tanto pela análise histórica do surgimento das frações quanto pela evidência neurocientífica da propensão dos seres humanos a perceber a proporcionalidade não-simbólica entre pares de quantidades. Argumentamos que essa propensão neurocognitiva possa ser um elo educacional para desenvolver o conhecimento robusto dos estudantes sobre números fracionários e para construir um sentido de fração. Apresentaremos a nossa elaboração de tarefas e alguns resultados preliminares da nossa implementação com estudantes do segundo ano (7 anos de idade) de uma escola do 1.º ciclo.

Palavras-chave: Colaboração Investigador-Professor, História da Matemática, Neurociência, Números fracionários

Introdução

A investigação educacional, a política e a prática são mutuamente dependentes. Embora a investigação educacional seja entendida como investigação na e para a educação (Biesta, 2007), a pesquisa, a política e a prática nem sempre foram mutuamente relevantes. A relevância dos resultados da investigação para as políticas e práticas tem sido e continua sendo uma preocupação, já que os resultados das pesquisas são frequentemente considerados divorciados da política cotidiana e dos desafios educacionais. Essa separação gera tensões entre, por um lado, investigadores e, por outro lado, formuladores de políticas e profissionais da educação (National Research Council, 2002). Como educador de matemática, com quase quarenta anos de experiência como pesquisador, formador de professores, e professor de matemática que trabalha com professores do ensino básico e secundário, posso atestar pessoalmente queixas de investigadores de que os definidores de políticas e os professores não prestam atenção aos resultados da investigação nem implementam as suas descobertas, e

* Uma parte da pesquisa sobre o qual este artigo está baseado foi financiada pelo Mathematics Education Trust do National Council of Teachers of Education.

também queixas dos profissionais de que a pesquisa não fornece conhecimento útil para os problemas de ensino e aprendizagem em salas de aula reais.

Para tornar a investigação e a prática mutuamente relevantes e contribuir para a aprendizagem dos alunos, elaborámos um projeto que implementa uma metodologia de colaboração entre investigadores universitários e professores que ensinam Matemática nos anos inicias. O objetivo do projeto é entender os problemas cognitivos que estudantes enfrentam sobre números racionais na sua forma fracionária e, com base na História da Matemática, desenvolver novos práticas do ensino dos números racionais. Antes de descrever o projeto e a teoria que fundamenta o mesmo, exploraremos a importância escolar e social dos números fracionários e os desafios cognitivos da aprendizagem dos mesmos. Depois, considerando esses desafios cognitivos, apresentamos o que achamos ser a raiz educacional dos desafios. A seguir, descreveremos as caraterísticas da nossa metodologia de pesquisa adotada num projeto em curso que consiste numa colaboração entre pesquisadores universitários e professores de uma rede de escolas públicas. Finalmente, definiremos a nossa perspetiva sobre o sentido de fração e exploraremos as características dessa perspetiva. Concluiremos, sublinhando algumas considerações finais.

Importância de Números Fracionários

No Ensino Básico, um dos tópicos mais importantes é o conhecimento dos números fracionários. É um conhecimento chave para os estudantes terem sucesso na Álgebra e em disciplinas matemáticas posteriores (Bailey, Hoard, Nugent, & Geary, 2012; Booth & Newton, 2012; R. S. Siegler et al., 2012; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015). No caso da Álgebra, esta encontra-se repleta de exemplos direta e indiretamente relacionados com as frações, tanto nas equações lineares e naquelas em que é preciso completar quadrados, quanto na resolução de sistemas de equações lineares e na resolução de equações racionais, como ainda nas razões que aparecem associadas a probabilidades simples e continuam presentes até ao teorema binomial. Uma grande parte da base do pensamento algébrico repousa sobre um claro entendimento do conceito de números racionais (Driscoll, 1982; Thomas E. Kieren, 1980; Lamon, 2005; Wu, 2001) e sobre a capacidade de operar e manipular frações. Tal como nas demais facetas da Álgebra, o conhecimento dos números fracionários é fundamental para a compreensão de áreas avançadas como a Teoria dos Limites, o Cálculo, a Análise Numérica, a Análise Real, entre outras.

Complementando a sua importância para os estudantes na escola, os números fracionários influenciam o seu futuro no mercado de trabalho e, no geral, na justiça social. O conhecimento das frações pelos estudantes é preditivo da sua futura ocupação e rendimento, quando se controla o QI, a educação e o rendimento familiar do sujeito (Ritchie & Bates, 2013). Então, este conhecimento desempenha um papel significativo nas questões de equidade social. Em várias publicações, o lutador pelos direitos civis dos afrodescendentes nos EUA na década de 60 e fundador do projeto *Algebra Project*, Bob Moses, e também os seus colegas (R. Moses, Kamii, McAllister, Swap, & Howard, 1989; R. Moses, West, & Davis, 2009; R. P. Moses, 1994; R. P. Moses & Cobb, 2001; Silva, Moses, Rivers, & Johnson, 1990) argumentaram fortemente e convincentemente que, no ensino básico e secundário, o acesso à Álgebra por estudantes afrodescendentes e outros grupos marginalizados faz parte da luta pela justiça social. Por extensão, como o estudo de frações antecede o conhecimento da Álgebra e prevê o desempenho posterior neste domínio, o acesso ao conhecimento dos números fracionários é crucial para a justiça social e para o alcance da equidade social.

Embora o conhecimento de frações seja essencial academicamente e também socialmente, em muitos países os estudantes sentem dificuldades em compreender e operar com frações (OECD, 2014). Aprender frações exige não apenas proficiência processual, mas também um entendimento conceitual. Tanto os estudantes como os professores têm falta do conhecimento conceitual de frações e operações com frações (Lamon, 2007; Lin, Becker, Byun, Yang, & Huang, 2013). Paralelamente, essa deficiência coexiste com os padrões curriculares, livros didáticos, e práticas pedagógicas atualizadas que são fundamentadas numa perspetiva ontológica e epistemológica específica. Na Educação Matemática, mesmo que existam materiais manipulativos atrativos, que os livros didáticos apresentem ilustrações atraentes, representando objetos do dia-a-dia, e que os aplicativos digitais sejam dinâmicos e permitam manipulações, constata-se que: (1) os conhecimentos conceituais e procedimentais de estudantes e adultos com números fracionários são de baixo desempenho (Lamon, 2007; Lin et al., 2013); (2) os professores dos anos iniciais veem como um desafio complexo ensinar frações (Clarke, Roche, Mitchell, & Sukenik, 2006; Ma, 1999); e (3) até agora, as pesquisas em Educação Matemática não têm avançado na prática do ensino de frações e operações com frações para que os estudantes possam construir e apropriar o conhecimento com facilidade.

Para melhorar a epistemologia dos números fracionários é provável que os investigadores e educadores em Educação Matemática precisem de procurar uma nova ontologia dos mesmos. Esta ontologia pode ser encontrada fora da Educação Matemática, na História de Matemática e na Ciência Neurocognitiva. Numa nova ontologia, estas disciplinas podem indicar um caminho epistemológico e pedagógico mais promissor. Este caminho ajudará os estudantes a construir e a apropriar-se do conhecimento dos números fracionários e assim tornará o seu estudo da Álgebra mais bem sucedido, aumentando a equidade e a justiça social dos estudantes até agora sub-representados na Matemática. Ajudará também os professores que ensinam Matemática e os autores de livros didáticos a entenderem representações que se conformam à ontologia histórica das frações e a obterem pistas interessantes da Neurociência.

Desafios Cognitivos dos Números Fracionários

Os números fracionários são uma das três representações de números racionais que fazem parte do ensino da Matemática escolar. Conceitualmente, eles apresentam certos desafios cognitivos para estudantes do ensino básico. Esses desafios estão relacionados com a natureza matemática da sua forma fracionária. Como constructo matemático, uma fração é um número que deriva o seu significado de um par de números naturais[1] usados na sua notação e que, tal como os números que a definem, representa uma magnitude. Essas duas propriedades e o modo de lidar com elas, epistemologicamente e pedagogicamente, são importantes.

A forma fracionária de um número racional tem, segundo Thomas E. Kieren (1980), cinco sub-constructos ou interpretações: parte/todo, quociente, medida, razão, e operador. Nos anos inicias do ensino básico, a interpretação dominante é a de

[1] Os números naturais são tipicamente definidos como o conjunto de números inteiros não negativos, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, ou o conjunto de inteiros positivos, $\{1, 2, 3, \dots\}$. Para os propósitos deste artigo, consideramos o conjunto de inteiros positivos quando nos referimos aos números naturais.

parte/todo. Nessa interpretação, os números fracionários são abordados de tal modo que há três aspetos do conhecimento de frações que os estudantes irão construir:

1. a origem de frações está na divisão de coisas em partes iguais;
2. uma fração é uma descrição de duas coisas discretas relacionadas: uma inteira discretizada e um certo número de partes dela; e
3. a contagem é o procedimento usado para nomear uma parte da divisão de uma coisa em termos fracionários.

A abordagem parte/todo de números fracionários com base na partição gera problemas epistemológicos. Entre os problemas documentados na literatura, colocamos dois deles para indicar categorias problemáticas, epistemologicamente falando. Como a abordagem parte/todo está baseada na contagem e numa conceção aditiva, os estudantes usam as propriedades e procedimentos dos números naturais para fazer inferências sobre números fracionários. Isso é referido por vários pesquisadores como "o viés do número natural" (por exemplo, Ni & Zhou, 2005, tradução nossa). Uma manifestação desse viés é descrita pelas observações de Mack (1990) quando nota que alunos do 6.° ano (11 anos de idade) costumam afirmar que $\frac{1}{8}$ é maior que $\frac{1}{6}$. Outro aspecto que ela destaca na sua pesquisa é o facto de um estudante descrever a adição de frações da seguinte forma: "Bem, você atravessa. Você adiciona os números de cima juntos e os números inferiores juntos" (p. 23, tradução nossa). Assim, a soma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ se torna em $\frac{2}{5}$. Nesse momento das operações, os estudantes assumem que os números fracionários têm as mesmas propriedades assumidas pelos números naturais no momento das operações.

Outras manifestações do viés do número natural que influenciam o sentido de fração que os estudantes acomodam dizem respeito às demais operações. Com base no seu conhecimento das propriedades das operações com números naturais, eles dificilmente entendem que a multiplicação de uma fração por outra fração positiva às vezes produz um resultado menor que os operandos originais, enquanto a divisão às vezes produz um resultado maior que os operandos, dependendo da magnitude do multiplicador ou divisor (Siegler, Fazio, Bailey, & Zhou, 2013; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Da mesma forma, os alunos não concebem que, diferentemente dos números naturais, os números fracionários são um subconjunto denso dos números reais (Maher & Yankelewitz, 2017; Ni & Zhou, 2005; Siegler, 2016). Assim, eles não reconhecem que diferentemente de números naturais, as frações não têm sucessor direto e existe um número infinito de frações entre quaisquer duas frações.

O que acontece é que o sentido de fração é mal construído. Uma evidência disso foi o resultado nos EUA de uma amostra nacionalmente representativa de estudantes de 13 anos de idade (do 8.° ano). Eles tiveram de escolher a estimativa mais próxima para soma de $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ entre: 1, 2, 19 e 21, ou "não sei." A maioria destes estudantes escolheram 19 e 21, e não 2, e a resposta mais comum foi "19" (Carpenter, Corbitt, Kepper, Lindquist, & Reys, 1980). Este resultado indica que os estudantes de 13 anos não tiveram um sentido da razoabilidade de uma adição de frações com respeito às magnitudes das frações envolvidas.

Um outro exemplo da falta de sentido das frações trata da falta de compreensão da magnitude que envolve a noção de frações. Metade dos participantes de um grupo focal de consumidores acharam que o hambúrguer A & W de $1/3$ libra[2] era menor que o famoso "*quarter pounder*"[3] do McDonald's. Eles, portanto, escolheram o hambúrguer menor do McDonald's, embora preferissem o sabor do hambúrguer da A & W (Taubman, 2007).

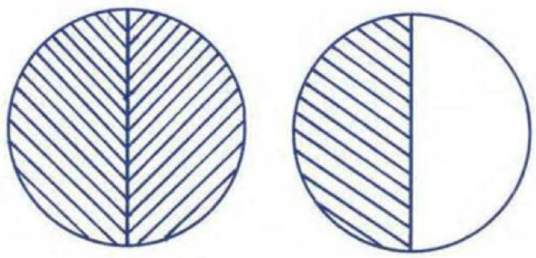


Figura 1 – Qual é a fração que as partes sombreadas representam? (Fonte: Gattegno e Hoffman, 1976, p. IA5)

Além da construção deficiente da noção de fração com base na abordagem de partição, parte/todo, a questão da unidade também não é bem trabalhada. Na Figura 1, Gattegno e Hoffman (1976), questionam: Os estudantes podem ser culpados por pensarem que as regiões sombreadas representam $\frac{3}{4}$ ou até $\frac{3}{2}$ sem conhecer o que é a unidade? Eles estão acostumados a que lhes seja apresentada uma pizza como a unidade e têm dificuldade em conceber que a unidade pode ser duas pizzas. Mesmo assim, como Campos e Rodrigues (2007) observam, "a condição intrínseca ao modelo parte-todo, que pressupõe a parte sempre menor que o todo" (p. 80). Apesar de uma fração poder ser maior que o todo, é preciso que estudantes compreendam a ideia de *unidade* como um dos elementos fundamentais na construção do conceito de fração (Behr, Khoury, Harel, Post, & Lesh, 1997; Campos & Rodrigues, 2007).

A ideia ontológica principal das frações é definida com base na abordagem—parte/todo—e está relacionada com os problemas epistemológicos. Na abordagem, a contagem é o procedimento essencial para decidir como simbolizar em termos fracionários uma parte da divisão de uma figura em partes iguais. Uma fração é então considerada como o resultado de uma contagem *dupla*, o que contraria a conceção de frações como números representando *uma* relação quantitativa entre duas grandezas ou números (Ni & Zhou, 2005).

A Raiz Instrucional dos Desafios Cognitivos

A conceção problemática de frações que os estudantes evidenciam são enraizadas numa ontologia das frações. Essa ontologia é baseada na conceção de que a origem das frações está na divisão de coisas em partes iguais, a que chamamos a ontologia de partição. A partição de coisas funciona nesse momento como um espelho, ou melhor, como uma simetria de um processo matemático de divisão de números naturais. Esse processo nem sempre resulta em um outro número natural. Historicamente, estes

---

[2] A libra é uma unidade de peso utilizado nos Estados Unidos da América (EUA), sendo em inglês chamada de *pound*, que equivale aproximadamente a 0,45 quilogramas.
[3] Esta expressão, *quarter pounder*, em inglês, significa um quarto de uma libra ou 0,11 kg.

resultados, que não são números naturais, durante milénios não foram considerados como números.

Depois de mais de três ou quatro milênios desde o seu surgimento, o uso e a notação para simbolizar frações evoluíram. No entanto, foi somente no século XVII que os matemáticos aceitaram as frações não apenas como razões sem estado numérico, mas como números, como objetos iguais aos números naturais. A aceitação das frações permitia resolver equações da forma $ax = b$ que têm por solução, $x = b/a$, sem restrições, desde que $a \neq 0$. Também, viabilizava a generalização de números com as quatro operações—adição, subtração, multiplicação e divisão—como um domínio fechado, um campo algébrico (Courant & Robbins, 1941/1996).

A expansão teórica do domínio dos números para incluir frações conferiu significado ao resultado da divisão de números naturais quando o divisor não é um fator do dividendo. Além disso, no final do século XVI E.C., Simon Stevin de Bruges já havia escrito um tratamento sistemático de ambas as frações comuns e frações decimais em seu livro, *De Thiende* (*O Décimo*) (Flagg, 1983). Portanto, no século XVII, quando as frações finalmente foram aceites, os números racionais já tinham duas representações simbólicas.

Quanto às frações, nem a sua representação simbólica nem a sua justificativa teórica como número provaram ser suficientes ou mesmo epistemologicamente desejáveis para apoiar a compreensão e apropriação psicológica dos estudantes. Como tal, as representações mentais de fração dos alunos precisavam de apoio. Neste ponto, Davydov e Tsvetkovich (1991b) observam o seguinte:

> Aos estudantes da quinta série, e aos de menor idade, mais ainda, não pode ser dado o princípio dessa divisão que leva a representação de frações numa forma simbólica e pura. Seu correlato visual deveria ser encontrado e utilizado. É nesse papel que a própria divisão das coisas aparece, sua subdivisão em partes que, no decorrer do ensino, pode ser com relativa facilidade ligada a termos característicos para definir frações ordinárias. (p. 24, tradução nossa)

Os autores argumentam que a postura ontológica de que as frações emergem da partição dos números naturais torna-se associada epistemologicamente à divisão física dos objetos visuais. Esses dois correlatos conectam às representações simbólicas de frações com imagens visuais, como a divisão física de áreas de círculos ou de retângulos em regiões iguais. A fração a/b é então definida visualmente como a regiões iguais da área de uma figura geométrica dividida em b dessas regiões.

Como vemos, segundo Davydov e Tsvetkovich (1991b), a necessidade de fornecer aos alunos correlatos físicos e visuais de frações é a origem da interpretação parte/todo das frações. Ao longo do tempo, essa interpretação tem-se tornado instrutivamente privilegiada entre outras interpretações ou subconstructos que Kieren (1976, 1988) identifica e descreve como operador, razão, quociente e medida. No entanto, como já vimos na seção anterior, para os alunos, essa interpretação pode ser epistemologicamente problemática. Os alunos que trabalham apenas com modelos visuais de coisas partidas ou seccionadas, podem desenvolver estratégias limitadas, como contar o número de peças, em vez de avaliar a relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis. Além disso, concebendo as frações como "partes de um todo", os discentes têm dificuldade em entender as frações cujo numerador é maior que o denominador, como $\frac{7}{4}$, e admitir que uma fração representa uma magnitude, não apenas partes de algo (Tucker, 2008).

Os desafios cognitivos que descrevi na seção anterior fizeram parte do foco de vários encontros profissionais entre investigadores da *Rutgers University-Newark* e professores que ensinam Matemática nos anos iniciais da *City of Newark*, o maior município do estado de *New Jersey* nos EUA. Com base nesses encontros, os pesquisadores e professores constituíram-se como um grupo colaborativo de investigação e implementação.

Pesquisa de Desenvolvimento em Newark

Nos Estados Unidos, durante a segunda metade do século passado, a pesquisa precedeu e informou o desenvolvimento do currículo, que mais tarde foi disseminado e implementado (Levin, 2004). No entanto, as realidades das escolas e a natureza pré-fabricada dos currículos significaram que os currículos não foram implementados de acordo com a pesquisa que os informou (Brugelmann, 1975; Fullan & Pomfret, 1977; Roehrig, Kern, & Kruse, 2007). Mediante um esforço explícito para lidar com essas tensões, investigadores educacionais nos EUA elaboraram novas teorias e metodologias. Esse novo género de investigação combina pesquisa aplicada e pura para desenvolver projetos orientados por teoria, para entender como a sua implementação molda processos educacionais e para extrair resultados geradores de teorias. Duas publicações influentes, Brown (1992) e Collins (1992), lançaram as bases para os desenvolvimentos posteriores do *design research* em vários campos educacionais como na Educação Matemática. Barbosa e Oliveira (2015), usam a expressão "pesquisa de desenvolvimento" como a tradução para a língua portuguesa de *design research*, a qual, na língua inglesa, também aparece como *design-based research*, *design experiments*, e *design studies* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Confrey, 2005; Easterday, Lewis, & Gerber, 2014). No presente artigo, usaremos a expressão de Barbosa e Oliveira (2015): pesquisa de desenvolvimento.

O principal objetivo da pesquisa de desenvolvimento é criar teorias de ensino sobre a aprendizagem de alunos e desenvolver materiais educacionais que sejam projetados para apoiar essa aprendizagem (Gravemeijer & Cobb, 2006). Essa metodologia de pesquisa tem também como finalidade projetar resultados de pesquisa tanto em produtos úteis, como materiais educacionais e *insights* científicos relacionados, ou em teorias acerca de como esses produtos podem ser usados na educação (Barbosa & Oliveira, 2015; McKenney & Reeves, 2012; van den Akker, Gravemeijer, McKenney, & Nieveen, 2006). Portanto, tem o potencial de concretizar o objetivo de preencher a lacuna entre a prática educacional e a teoria.

A coleção de metodologias de pesquisa de *design* tem várias características comuns. Investigadores que empregam e descrevem a pesquisa de *design* identificaram as seguintes cinco características comuns:

- intervencionista
- teoria generativa
- prospetivo e reflexivo
- iterativo e ecologicamente válido
- orientado para a prática

Uma descrição das cinco características pode-se encontrar em Powell e Ali (2018). Em termos do projeto colaborativo entre pesquisadores e professores de Newark, além de possuir as cinco características de pesquisa de desenvolvimento, ele está estruturado numa sequência de três fases.

Na Fase I, a equipa de pesquisa desenvolve tarefas matemáticas, usando as barras de Cuisenaire (veja a Figura 3), e uma sequência de ensino apropriada para envolver os alunos do segundo ano a desenvolver seu conhecimento conceitual de frações. A equipa também projeta o seu protocolo de coleta de dados, que inclui sessões de pós-aula de gravação de vídeo do trabalho dos alunos em tarefas do projeto e digitalização de seu trabalho escrito para reunir suas interações discursivas e inscritíveis.

Figura 2 – As barras de Cuisenaire, dez tamanhos e cores diferentes, organizadas em uma formação de "escadaria"

Na Fase II ocorre num programa após a escola. Os quatro professores da equipa de pesquisa implementam as tarefas do projeto com estudantes do segundo ano e, imediatamente após cada aula, a equipa faz uma reunião de reflexão. Cada par de professores orienta o trabalho de 15 alunos com 24 sessões de implementação, duas vezes por semana durante 12 semanas consecutivas; cada sessão dura 60 minutos. Durante essas sessões, os restantes oito membros da equipa observam os professores enquanto eles implementam as tarefas do projeto. Nas sessões de reflexão, cada uma com duração de uma hora, a equipa refletirá sobre o trabalho dos estudantes e determina se e como revisar as tarefas do projeto para apoiar o conhecimento conceitual emergente dos estudantes de magnitude de fração, ordem, equivalência e desigualdade. Antes e depois das 12 semanas de tarefas fracionárias, a equipa de avaliação trabalha com os alunos para coletar dados académicos, cognitivos e sociais dos jovens. Um grupo separado de alunos só completará essa avaliação e não participará das sessões de frações. Essas sessões de 30 minutos podem ocorrer durante o período de extensão, no final do dia letivo normal.

Na Fase III, a equipa de pesquisa analisará o trabalho discursivo e inscritível dos estudantes para entender e relatar a sua compreensão conceitual de magnitude de fração, ordem, equivalência e desigualdade, bem como as possibilidades e obstáculos de fração-*de*-quantidade.

O nosso projeto de pesquisa em desenvolvimento em sala de aula está ocorrendo numa escola K-8 das Escolas Públicas de Newark (NPS), localizada no norte de Nova Jersey. O NPS tem uma população estudantil que tem 46% de afrodescendentes e 45% de latinos (Newark Public Schools, 2016). Os estudantes vêm de famílias de baixo rendimento, onde 79% dos estudantes são elegíveis para almoços gratuitos ou a preço reduzido (Newark Public Schools, 2016). Com relação ao desempenho em matemática dos estudantes, na primavera de 2016, comparado à média do estado, de 42% (State of New Jersey Department of Education, 2016), apenas 22% dos estudantes da NPS do 3.º ao 8.º ano atingiram ou excederam as expectativas (Newark Public Schools, 2016) no âmbito estadual-administrado—Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers (em português: Parceria para Avaliação da Prontidão para o Colégio e Carreiras) (PARCC).

Os objetivos do projeto são entender e registrar as possibilidades e os obstáculos da implementação de uma perspetiva, fração-*de*-quantidade, para ampliar os entendimentos conceituais de frações de estudantes de segundo ano (7 anos de idade), especificamente sobre as propriedades matemáticas de magnitude, ordem, equivalência e desigualdade. A pesquisa está norteada por a seguinte questão: Por meio do engajamento com tarefas de fração-*de*-quantidade, de uma perspetiva de medição, que entendimentos conceituais de frações e sentido fracionário os estudantes do segundo ano desenvolvem?

Precisamos explicar por que razão tomamos a perspetiva de medição para desenvolver a noção de frações e o que significa fração-*de*-quantidade. As visões conceituais dos objetos matemáticos têm fontes históricas que, por sua vez, podem moldar perspetivas ontológicas e epistemológicas, bem como práticas pedagógicas sobre os objetos. Para compreender a sua natureza ou a ontologia de um objeto matemático, devemos começar com uma análise histórica da sua origem. A consciência da génese do objeto influenciará as nossas perspetivas acerca de como se adquire conhecimento dele, ou seja, sobre sua epistemologia. Um exemplo deste movimento ontológico e epistemológico é o conjunto de objetos matemáticos que formam uma das representações de números racionais—os números fracionários.

Nas culturas mesopotâmicas e egípcias, ao longo dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, com o nascimento da agricultura, as condições materiais introduziram a necessidade de inventar maneiras cognitivas para medir quantidades de terrenos, colheitas, sementes, e assim por diante, para registar as medidas, e para as classes dominantes coletarem impostos (Clawson, 1994/2003; Struik, 1948/1967). Para mensurar as distâncias dos terrenos, os agrimensores antigos esticavam cordas, nas quais o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida. Nessa prática social de medir, por exemplo, comprimentos sugerem a geometria e os números fracionários (Aleksandrov, 1963; Caraça, 1951; Roque, 2012),

Com a evidência escrita de tabletes de argila e papiros, sabemos que primeiro na Mesopotâmia e logo depois no Egito as notações numéricas surgiram como dispositivos semióticos abstratos. Embora os mesopotâmios tivessem maneiras para expressar frações, não eram distintas dos números de contagem. Em contraste, os egípcios desenvolveram um sistema de escrita para registrar frações que as diferenciava dos números para contar (Clawson, 1994/2003). Segundo Ifrah (1981/1998), os egípcios antigos expressaram frações como apenas frações unitárias (ou seja, frações cujos numeradores são um). Com exceção da fração uma metade, eles usaram o hieróglifo para “boca” sobre a expressão numérica hieroglífica para o denominador. Mesmo assim, além de uma metade, tiveram símbolos hieroglíficos especiais para mais três outras frações: dois terços, um quarto e três quartos (Ifrah, 1981/1998; Roque, 2012). Os egípcios antigos expressaram o valor de uma fração como $\frac{3}{5}$ não como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ mas como decomposto de uma soma de diferentes frações unitárias como $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$.

A noção de fração-*de*-quantidade é distinta da ideia comumente apresentada de frações como partes de um todo. Nessa visão, uma fração é uma relação estabelecida entre partes de um todo dividido em partes iguais. Esta noção de parte/todo tende a apoiar a ideia errónea de que uma fração é composta de duas quantidades diferentes e impede a compreensão de frações impróprias (Tzur, 1999). Além disso, como Lamon (2001) enfatiza, "matematicamente e psicologicamente, a interpretação parte/todo da fração não é suficiente como base para o sistema de números racionais" (p. 150). Alternativamente, na perspetiva da fração-*de*-quantidade, uma fração é uma relação—uma comparação multiplicativa—entre duas quantidades com a mesma unidade. Mais especificamente, no domínio do material, suponha que dois objetos, A e B, tenham um atributo mensurável comum, como comprimento com uma unidade comum, u, onde A é igual a unidades de u e B é igual a b unidades de u. O comprimento de um objeto A é a fração $a\ /\ b$ do comprimento do outro objeto, B. Assim, a fração a/b descreve uma relação entre os dois objetos, A e B, e a relação é uma comparação multiplicativa, A é igual a/b de B, uma vez que uma quantidade é um multiplicador da outra. A fração-*de*-quantidade é esta: a/b de ou, equivalentemente, $a/b\ \times$. É uma medida de A em relação a B. Esta visão de frações é informada e consistente com perspetivas histórico-culturais da História da Matemática e Educação Matemática (Caraça, 1951; Davydov & Tsvetkovich, 1991a, 1991b; Dougherty & Venenciano, 2007; C. Gattegno, 1960/2009; Morris, 2000; Schmittau & Morris, 2004).

Com base nessa perspetiva ontológica, postulamos a seguinte posição epistemológica sobre como o conhecimento de frações pode emergir:

1. O estudo das frações contém dois componentes: frações-*de*-quantidade e frações-*como*-números.
2. O sentido fracionário desenvolve-se por meio do estudo de frações-*de*-quantidade. Elas fornecem a base material e teórica para o estudo posterior de frações-*como*-números e operações com frações.

Sentido Fracionário

Tian e Siegler (2017) descrevem o entendimento de magnitude como uma característica definidora do sentido fracionário. Segundo os autores, compreender a magnitude implica determinar a razoabilidade das respostas envolvendo comparação e cálculo. Jordan, Resnick, Rodrigues, Hansen e Dyson (2017) também retratam a magnitude como um elemento vital do sentido fracionário, explicando que aqueles que têm sentido fracionário podem representar e comparar magnitudes e posicionar com exatidão as magnitudes das frações em uma reta numérica. Fennell e Karp (2017) discutem o uso de retas numéricas e outras representações variadas na comparação, ordenação e trabalho com a equivalência de frações. A ideia de representação é ampliada por alguns autores para incluir não apenas representações usadas no trabalho com magnitude, mas também a noção de que frações podem representar coisas diferentes (Fennell & Karp, 2017; Thomas E Kieren, 1980; R. Siegler et al., 2010). Quando se pensa em magnitude, as frações são reconhecidas como números, mas as frações também podem ser interpretadas como relações de parte/todo, razões, quocientes, medidas ou operadores (Thomas E Kieren, 1980). A consciência e a capacidade de trabalhar com essas diferentes interpretações de frações se somam à descrição estabelecida de sentido fracionário. R. Siegler et al. (2010) também afirmam que aqueles que possuem sentido fracionário entendem porque procedimentos com frações fazem sentido e relacionam um entendimento informal de compartilhamento e proporcionalidade com frações. Mais amplamente, Utley e Reeder (2012) descrevem o sentido fracionário como "uma sensação intuitiva para frações e relações fracionárias; [e] pensamento flexível sobre frações (por exemplo, pode usar frações de referência para determinar a razoabilidade das operações com frações)" (p. 1148, tradução nossa).

Reformulando o Sentido Fracionário

Ao sintetizar a literatura sobre o sentido fracionário, descrevemos o mesmo em termos das três categorias que se sobrepõem e interagem: flexibilidade, razoabilidade e magnitude, tanto não-simbólicas quanto simbólicas. É importante notar que essas categorias amplas também representam uma síntese das características gerais do sentido numérico, para as quais o sentido fracionário é um subconjunto. Com isso em mente, descreveremos agora como flexibilidade, razoabilidade e magnitude se manifestam para o sentido fracionário (ver Figura 3).

Flexibilidade refere-se a conceções, representações e estratégias de cálculo. Implica a capacidade de trabalhar com frações, quer sejam concebidas como uma relação parte/todo, quociente, medida, razão ou operador. Isso inclui tanto as frações não-simbólicas na forma de matrizes de pontos ou outras representações visuais, quanto as frações simbóli**c**as que usam algarismos arábicos (Lewis, Matthews, & Hubbard, 2015; Matthews, Lewis, & Hubbard, 2016). A flexibilidade é caracterizada pela agilidade mental de alternar entre formas de uma fração, dependendo do que é mais apropriado, dado um contexto específico. Por exemplo, $\frac{6}{4}$ poderia ser pensado como uma soma de porções, como um e dois quartos, ou um quarto de seis. Também poderia ser um múltiplo de porções, como seis vezes um-quarto. A representação escolhida para $\frac{6}{4}$ poderia ser um modelo de área, uma reta numérica, um conjunto de objetos, um modelo linear ou alguma outra imagem visual, concreta, simbólica ou mental que ajude a entender a fração no contexto do modelo em um determinado cenário. A forma e a representação podem facilitar o cálculo, tornando-o menos complexo e mais intuitivo. Isto é evidente no caso de se usar uma reta numérica para adicionar $\frac{6}{4}$ a $1\frac{1}{2}$. Pode-se colocar um X no local de um-e-meio numa reta numérica, depois decompor $\frac{6}{4}$ em um-e-dois-quartos, seguido pela movimentação do X um e dois quartos da reta numérica a partir de sua posição inicial. Essa estratégia mostra flexibilidade em pensar sobre frações, pois há um fazer-sentido da forma de $\frac{6}{4}$ que simplificará o cálculo. Uma vez o cálculo realizado, a razoabilidade do resultado seria considerada.

Como continuação da expressão do sentido fracionário, a razoabilidade questiona a plausibilidade. A razoabilidade foi ativada juntamente com a flexibilidade em considerar se diferentes formas da fração $\frac{6}{4}$ são de fato equivalentes. Um entendimento de que quatro-quartos é equivalente a um e que oito-quartos é equivalente a dois informa decisões sobre os valores aceitáveis para equacionar com $\frac{6}{4}$. Razoabilidade também foi envolvida na avaliação de que o X denotando $1\frac{1}{2}$ na reta numérica foi colocado no local correto, e se o número três é um resultado sensato de adicionar $\frac{6}{4}$ a $1\frac{1}{2}$. Entender os efeitos das operações é uma parte importante da avaliação da sensibilidade. Como é que adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir por uma fração altera o número original? E se a fração que age na quantidade original for maior que, menor que, ou igual a um? Essas questões são centrais para determinar a razoabilidade das operações envolvendo frações. A linha de pensamento necessária para se envolver nessas atividades mentais sobrepõe-se ao conhecimento de magnitude. A avaliação da sensibilidade é essencialmente uma atividade na comparação do que se sabe sobre o tamanho relativo da quantidade em questão em comparação com outros números ou com o operando que age sobre ela. Desta forma, a compreensão da magnitude é o princípio central do sentido fracionário.

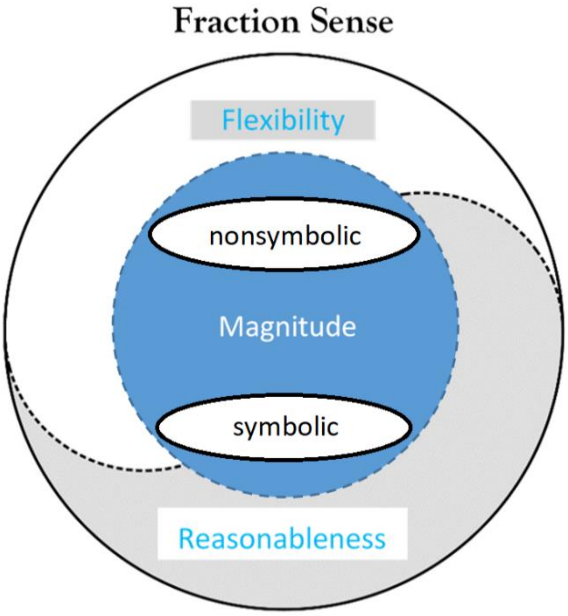


Figura 3 – A relação entre os três componentes do sentido fracionário—razoabilidade, flexibilidade, bem como magnitude não-simbólica e simbólica

Na Figura 3, o significado da magnitude é representado por sua posição central e interseção com os outros dois componentes. A magnitude inclui a compreensão da numerosidade para ambas as frações não-simbólicas representadas por matrizes de pontos ou outras representações visuais e frações simbólicas envolvendo algarismos arábicos. As linhas pontilhadas que separam os componentes significam limites porosos entre os três elementos.

R. S. Siegler, Thompson e Schneider (2011) suportam a centralidade da magnitude para o sentido fracionário. Por meio de um estudo empírico, os autores descobriram que o conhecimento da magnitude numérica influencia grandemente a compreensão geral das frações. Ser capaz de representar com exatidão as magnitudes das frações não está vinculado apenas à proficiência na aritmética fracionária, mas também explica as diferenças nos resultados dos testes de matemática em um grau maior do que a proficiência na aritmética fracionária. De fato, R. S. Siegler (2016) postula que uma compreensão de magnitudes numéricas unifica o conhecimento de ambas as frações e números inteiros. Ele observa: “[p]ara números inteiros e racionais, o conhecimento de magnitudes numéricas está correlacionado, preditivo e causalmente relacionado a outros aspetos cruciais da matemática, incluindo aritmética e conquista matemática global” (R. S. Siegler, 2016, pp. 341, tradução nossa). Como tal, ele conclui que as intervenções que visam o desenvolvimento do conhecimento de magnitude numérica tiveram um amplo escopo de benefícios positivos para a compreensão de números inteiros e frações.

A importância da magnitude para o sentido fracionário e sua relação com a flexibilidade e a razoabilidade estão retratadas na Figura 3. Como descrito anteriormente, tanto a racionalidade quanto a flexibilidade requerem a ativação do conhecimento referente à magnitude de números. Além disso, não há uma linha clara de demarcação entre flexibilidade e razoabilidade, dado que esses componentes do sentido fracionário também se informam uma à outra. As decisões de escolher as categorias amplas de flexibilidade, razoabilidade e magnitude para caracterizar o sentido fracionário, embora não se concentrem em outros recursos da literatura estabelecida, são intencionais. O princípio orientador subjacente à nossa noção de sentido fracionário é o de que o conhecimento e as ações que ele incorpora são fundamentados na criação de sentido e não na aplicação de um algoritmo aceite ou de um fato memorizado. Skemp (1971) fornece uma estrutura útil para diferenciar o conhecimento matemático ao longo das dimensões do tipo de entendimento que ele representa. A compreensão relacional descreve o conhecimento não apenas do que fazer, mas por que fazê-lo e por que ele funciona. Esse tipo de entendimento exige um foco nas relações e conexões conceituais. Contrariamente, a compreensão instrumental representa memorização e procedimentos sem conexões (Skemp, 1976). Apenas os aspetos da literatura estabelecida que refletem a compreensão relacional são incluídos na nossa caracterização do sentido fracionário. Em última análise, a flexibilidade na escolha da representação mais adequada para um determinado contexto e a avaliação crítica da razoabilidade das aproximações e dos resultados calculados são os dois modos pelos quais os alunos podem compreender os números envolvidos na atividade matemática. Considerando a sua relação com o conhecimento da magnitude do número, a flexibilidade, a razoabilidade e a magnitude representam todas as características que definem a nossa noção de sentido fracionário.

Considerações Finais

A projeto baseado na pesquisa de desenvolvimento é uma colaboração entre pesquisadores de *Rutgers University-Newark* e professores que ensinam Matemática nos anos inicias da *City of Newark*. Fora do horário normal da escola, estamos trabalhando com 30 alunos do segundo ano. Convidamo-los para trabalhar em pequenas grupos de 3 alunos nas tarefas que elaboramos que tratam de frações-*de*-quantidade, usando os materiais manipulativas de barras de Cuisenaire (Figura 2). Neste momento, o projeto está em andamento. Estamos no meio das 12 semanas. Então, ainda não temos resultados para apresentar. No entanto, podemos afirmar que os estudantes estão comparando comprimentos entre as barras e logo vão nomear comprimentos em termos de uma unidade de medida. Os valores das medidas de alguns comprimentos vão ser um múltiplo exato da unidade de medida e os valores de outras medidas vão ser representados como frações. E assim, os estudantes irão construindo a sua compreensão de frações-*de*-quantidades e desenvolver o seu sentido fracionário. O modelo instrucional do projeto, que chamamos o Modelo Instructional-*4A*, está descrito em Powell (2018).

Referências

Aleksandrov, A. D. (1963). A general view of mathematics (S. H. Gould & T. Bartha, Trans.). In A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, & M. A. Lavrent'ev (Eds.), *Mathematics: Its content, methods, and meaning* (Vol. 1, pp. 1-64). Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(3), 447-455. doi:https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Barbosa, J. C., & Oliveira, A. M. P. d. (2015). Por que a pesquisa de desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas da Educação Matemática, 8*, 526-546.

Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 48-69. doi:10.2307/749663

Biesta, G. (2007). Bridging the gap between educational research and educational practice: the need for critical distance. *Educational Research and Evaluation, 13*(3), 295–301.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*(4), 247-253. doi:https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Brugelmann, H. (1975). Lost in the desert of innovation theory-The mirage of dissemination and implementation. *Education for Teaching*(98), 49-60.

Campos, T. M. M., & Rodrigues, W. R. (2007). A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2*(4), 68-93.

Caraça, B. d. J. (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepper, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1980). Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher, 73*(5), 329-338.

Clarke, D. M., Roche, A., Mitchell, A., & Sukenik, M. (2006). Assessing student understanding of fractions using task-based interviews. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. a. Stehlíková (Eds.), *Proceddings of the 30th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 337-344). Prague: Charles University.

Clawson, C. C. (1994/2003). *The mathematical traveler: Exploring the grand history of numbers*. Cambrige, MA: Perseus.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Collins, A. (1992). Toward a Design Science of Education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New Directions in Educational Technology* (pp. 15-22). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Confrey, J. (2005). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). Cambridge: Cambridge University Press.

Courant, R., & Robbins, H. (1941/1996). *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods* (2nd revised by Ian Steward, ed.). Oxford: New York.

Davydov, V. V., & Tsvetkovich, Z. H. (1991a). The object sources of the concept of fractions. In V. V. Davydov & L. P. Steffe (Eds.), *Soviet studies in mathematics education. Volume 6. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (pp. 86-147). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V., & Tsvetkovich, Z. H. (1991b). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(1), 13-64.

Dougherty, B. J., & Venenciano, L. C. H. (2007). Measure Up for Understanding. *Teaching Children Mathematics, 13*(9), 452-456.

Driscoll, M. (1982). *Research within reach: Secondary school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematoics.

Easterday, M. W., Lewis, D. R., & Gerber, E. M. (2014). Design-based research process: Problems, phases, and applications *Learning and becoming in practice: The international conference of the learning sciences (ICLS) 2014* (Vol. 1, pp. 317-324).

Fennell, F., & Karp, K. (2017). Fraction Sense: Foundational Understandings. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 648-650. doi:10.1177/0022219416662030

Flagg, G. (1983). *Numbers: Their history and meaning*. Mineola, NY: Dover.

Fullan, M., & Pomfret, A. (1977). Research on Curriculum and Instruction Implementation. *Review of Educational Research, 47*(2), 335-397. doi:10.2307/1170134

Gattegno, C. (1960/2009). *Arithmetic: A teacher's introduction to the Cuisenaire-Gattegno method of teaching arithmetic* New York: Educational Solutions Worldwide.

Gattegno, G. C., & Hoffman, M. R. (1976). *Handbook of activities for the teaching of mathematics at the elementary school*. New York: Human Education.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17-51). New York: Routledge.

Ifrah, G. (1981/1998). *The universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer* (D. Bellos, E. F. Harding, S. Wood, & I. Monk, Trans.). London: Harvill.

Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N., & Dyson, N. (2017). Delaware longitudinal study of fraction learning: Implications for helping children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 621-630.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-150). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. *Recent research on number learning*, 125-149.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Heibert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 49-84). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representations in School Mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 146-168). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In J. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Levin, B. (2004). Making Research Matter More. *Education Policy Analysis Archives, 12*(56).

Lewis, M. R., Matthews, P. M., & Hubbard, E. M. (2015). Neurocognitive architectures and the nonsymbolic foundations of fractions understanding. In D. B. Berch, D. C. Geary, & K. M. Koepke (Eds.), *Development of mathematical cognition: Neural substrates and genetic influences* (pp. 141–160). San Diego, CA: Academic Press.

Lin, C.-Y., Becker, J., Byun, M.-R., Yang, D.-C., & Huang, T.-W. (2013). Preservice Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Fraction Operations: A Comparative Study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *113*(1), 41-51. doi:dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.

Maher, C. A., & Yankelewitz, D. (Eds.). (2017). *Children's reasoning while building fraction ideas*. Boston: Sense.

Matthews, P. G., Lewis, M. R., & Hubbard, E. M. (2016). Individual differences in nonsymbolic ratio processing predict symbolic math performance. *Psychological Science, 27*(2), 191-202. doi:10.1177/0956797615617799

McKenney, S., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. New York: Routledge.

Morris, A. K. (2000). A teaching experiment: Introducing fourth graders to fractions from the viewpoint of measuring quantities using Davydov's mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 22*(2), 32-83.

Moses, R., Kamii, M., McAllister Swap, S., & Howard, J. (1989). The Algebra Project: Organizing in the spirit of Ella. *Harvard Educational Review, 59*(4), 423-443.

Moses, R., West, M. M., & Davis, F. E. (2009). Culturally responsive mathematics education in the Algebra Project. In B. Greer, S. Mukhopadhyay, A. B. Powell, & S. Nelson-Barber (Eds.), *Culturally responsive mathematics education* (pp. 239-256). New York: Routledge.

Moses, R. P. (1994). Remarks on the struggle for citizenship and math/science literacy. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(107-111).

Moses, R. P., & Cobb, C. E., Jr. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Boston: Beacon.

National Research Council. (2002). *Scientific research in education*. Washington, DC: National Academy Press.

Newark Public Schools. (2016). District Summary. Retrieved from http://www.nps.k12.nj.us/departments/data-research/district-summary/

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

OECD. (2014). A profile of student performance in mathematics *PISA 2012 results: What students know and can do—Student performance in mathematics, reading, and science* (Vol. 1, Revised edition, February 2014, pp. 31-144). Paris: OECD Publishing.

Powell, A. B. (2018). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Revista Perspectiva, 36*(2), 399-420.

Powell, A. B., & Ali, K. V. (2018). Design research in mathematics education: Investigating a measuring approach to fraction sense. In J. F. Custódio, D. A. da Costa, C. R. Flores, & R. C. Grando (Eds.), *Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para pesquisa e ensino* (pp. 221-242). São Paulo: Livraria da Física.

Ritchie, S. J., & Bates, T. C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological Science, 24*(7), 1301-1308.

Roehrig, G. H., Kern, A., & Kruse, R. A. (2007). Teacher and school characteristics and their influence on curriculum implementation. *Journal of Research in Science Teaching, 44*(7), 883-907. doi:10.1002/tea.20180

Roque, T. (2012). *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator, 8*(1), 60-87.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., . . . Wray, J. (2010). Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten through 8th Grade. IES Practice Guide. NCEE 2010-4039. *What Works Clearinghouse*.

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: the common core of numerical development. *Developmental Science, 19*(3), 341-361. doi:10.1111/desc.12395

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., . . . Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697. doi:doi:10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences, 17*(1), 13-19. doi:https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. doi:doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Silva, C. M., Moses, R. P., Rivers, J., & Johnson, P. (1990). The Algebra Project: Making middle school mathematics count. *Journal of Negro Education, 59*(3), 375-391.

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*: Penguin Books.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding: Mathematics Teaching.

State of New Jersey Department of Education. (2016). PARCC Spring State Summary Report, Mathematics 03 SY 2015-2016. Retrieved from http://www.state.nj.us/education/schools/achievement/index.html

Struik, D. J. (1948/1967). *A concise history of mathematics* (3rd Revised ed.). New York: Dover.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 614-620.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Tucker, A. (2008). Fractions and units in everyday life. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Calculation vs. context: Quantitative literacy and its implications for teacher education* (pp. 75-86). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.

Utley, J., & Reeder, S. (2012). Prospective Elementary Teachers' Development of Fraction Number Sense. *Investigations in Mathematics Learning, 5*(2), 1-13.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467. doi:https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.). (2006). *Educational Design Research*. New York: Routledge.

Wu, H.-H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, *25*(2), 1-7.

GRUPO DE DISCUSSÃO 1

Investigando a aula

GRUPO DE DISCUSSÃO 1

INVESTIGANDO A AULA

Alexandra Rodrigues

Instituto de Gouveia – Escola Profissional & UIED

alexsofiarod@gmail.com

Susana Carreira

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

scarrei@ualg.pt

O estudo de registos e documentos do passado ajuda-nos a recontextualizar o significado das suas dinâmicas e dos seus traços estruturantes e a projetar o que se espera e defende para a educação do século XXI. Matos (2018) refere que a Educação Matemática, a partir dos anos 60, desloca o centro de atenção da resposta imediata a problemas de prática para a aula e passa a incorporar no seu trabalho uma vertente de investigação. Esta perspetiva investigativa procura perceber que métodos de ensino funcionam na aula, como se estimula e apoia a aprendizagem dos alunos e qual o papel do professor na promoção dessa aprendizagem, usando metodologias de pesquisa adequadas para responder a tais questões. As grandes questões que se foram colocando têm vindo a receber, ao longo dos anos, múltiplas contribuições da investigação, através de abordagens diversas, seja de cunho cognitivo ou sociocultural (e.g. Gellert, Knipping & Straehler-Pohl, 2018; Hérold, 2014; Lerman, 1994; Nickson, 1994; Presmeg, 2016). Parece ser hoje relativamente claro que a aula de matemática é intensamente investigada em todo o mundo. São atualmente importantes para a investigação os cenários da aula de matemática que correspondem a ambientes de aprendizagem efetiva e de desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à matemática. O estudo em torno de tais cenários remete, entre outros resultados, para: i) a criação de um espaço em que os alunos sejam envolvidos em pensamento matemático; ii) a introdução de tarefas e atividades ricas, que estimulem capacidades de nível superior; iii) a construção de um ambiente de questionamento e investigação, em que a comunicação tem um papel essencial; iv) a introdução de materiais e recursos que estimulem a compreensão e contribuam para desenvolver o raciocínio matemático; v) a criação de condições que favoreçam o bem-estar na aula de matemática, designadamente a sensação de segurança e de pertença a uma comunidade de aprendizagem.

A aula de matemática continua a ser, no presente, o contexto central do ensino e aprendizagem da matemática escolar, não obstante a crescente perceção de que a sala de aula não esgota os contextos de aprendizagem hoje ao nosso alcance (Barbeau, 2009). Um dos objetivos principais de uma aula de matemática é o de que os alunos possam dar sentido, relevância e valor à sua atividade e à aprendizagem nesse contexto escolar.

Mas outro, não menos importante, é o de que os alunos vivam experiências de aprendizagem que os levem a sentir-se capazes de aprender matemática (Toh, Toh & Kaur, 2014; Suurtamm, Quigley & Lazarus, 2015). Neste contexto, espera-se que os professores coloquem tarefas que envolvam e estimulem os alunos a estabelecer conexões matemáticas e que se assumam como agentes da mudança educativa, valorizando, desde cedo, o desenvolvimento, nos seus alunos, de capacidades e competências baseadas em conhecimentos matemáticos (Vale, 2016).

A aprendizagem significativa dos alunos está associada não apenas ao conhecimento matemático, em si mesmo, mas à articulação e interligação entre diversos saberes, numa perspetiva multidisciplinar que tenha por base a participação ativa do estudante em projetos e situações desafiadoras. Assim, a investigação em Educação Matemática revela-nos, em certa medida, uma mudança do paradigma da educação, com experiências de ensino que privilegiam métodos distintos do passado, tais como a utilização da metodologia de projeto (Rangel & Gonçalves, 2010), o ensino experimental das ciências (Costa & Domingos, 2018), o modelo da aprendizagem baseada em problemas (Problem Based Learning) (Rodrigues & Pimenta, 2018) ou a integração das STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) na educação (Baioa & Carreira, 2018).

Não apenas os papéis dos alunos e dos professores requerem uma permanente e renovada investigação, como os recursos, cada vez mais abundantes e acessíveis, trazem implicações e desafios acrescidos para a matemática que se aprende e compreende na aula. As próprias fronteiras da aula tenderão a tornar-se menos estanques, mercê da necessidade de articulações entre áreas do conhecimento, que se reconhecem imprescindíveis para a abordagem de problemas cada vez menos tipificados. Por isso, na aula de matemática, as tarefas e as propostas de trabalho, bem como o ambiente da sala de aula, as atitudes e as metodologias desempenham funções essenciais.

A própria aula de matemática assume atualmente dinâmicas diferentes de acordo com os indivíduos que as frequentam. A proliferação de Cursos de Educação e Formação (CEF) ou de Cursos Profissionais de nível secundário nas escolas públicas assumem-se como determinantes na mudança dos modelos de ensino e de educação. Algumas investigações destacam que se deve privilegiar a aplicação de metodologias de trabalho de projeto e de trabalho de grupo, apostando na resolução de problemas, indo de encontro ao desenvolvimento de competências que estão relacionadas com a capacidade de trabalhar em equipa e de aprender a aprender (Rodrigues, 2018). Esta realidade é reforçada com a publicação do Decreto-Lei 55/2018[1] que introduz nas escolas o projeto de flexibilização curricular, onde podemos ler:

> A realização de aprendizagens significativas e o desenvolvimento de competências mais complexas pressupõem tempo para a consolidação e uma gestão integrada do conhecimento, valorizando os saberes disciplinares, mas também o trabalho interdisciplinar, a diversificação de procedimentos e instrumentos de avaliação, a promoção de capacidades de pesquisa, relação, análise, o domínio de técnicas de exposição e argumentação, a capacidade de trabalhar cooperativamente e com autonomia. (DL nº 5/2018, p. 2928-2929)

[1] Decreto-Lei n.º 55/2018, Diário da República n.º 129/2018, Série I de 2018-07-06.

A avaliação das aprendizagens é outra das mudanças que lentamente se vem refletindo na aula de matemática (Black & William, 1998; Black, Harrison, Lee, Marshall & Wiliam, 2004). Atualmente há suficientes indicadores para defender práticas de avaliação que mobilizem técnicas, instrumentos e procedimentos diversificados e adequados, trazendo para primeiro plano a avaliação formativa como reguladora das aprendizagens dos alunos e como parte integrante da construção de aprendizagens significativas (Ferreira, 2015).

Neste grupo de discussão, dedicado ao tema "Investigar a Aula de Matemática", têm lugar oito comunicações orais e três comunicações em póster que apresentam múltiplas dimensões em foco na investigação e no estudo da aula. Estes trabalhos foram organizados em três eixos fundamentais: i) as emoções dos alunos e a avaliação como ferramenta reguladora das aprendizagens; ii) os recursos utilizados na aula como meios para a promoção da aprendizagem e iii) a cultura da aula e dos manuais escolares, considerando a perspetiva do estudo histórico. Nestas onze contribuições, a investigação sobre a aula é discutida em termos teóricos e de resultados empíricos e pretende contribuir para a discussão e reflexão sobre as metodologias e os recursos utilizados, o papel do professor, a aprendizagem dos alunos e a importância da avaliação, na aula de matemática.

Na comunicação apresentada por Alcântara, Amado e Carreira, as autoras refletem sobre as emoções dos alunos como fatores inibidores do sucesso na disciplina de Matemática, reconhecendo a interação entre os aspetos afetivos e a aprendizagem. Esta investigação envolve um conjunto de alunos com dificuldades na disciplina de Matemática, que se encontram em risco de insucesso e que frequentam o ensino técnico secundário no Brasil.

Por sua vez, Santos e Santos, num estudo realizado num contexto colaborativo, dão-nos a conhecer a prática de dois professores do 2.º ciclo para envolver os alunos em estratégias avaliativas reguladoras, na sala de aula, recorrendo ao uso da tecnologia. Os dados indicam que apesar de inicialmente os professores terem evidenciado algumas dificuldades na dinamização de aulas mais interativas, com a organização dos alunos em pequenos grupos, estas foram-se esbatendo no decorrer da prática, promovendo nos alunos o desenvolvimento da consciencialização das suas ações como agentes reguladores da aprendizagem.

Rangel e Santos analisam o acompanhamento e o apoio dos alunos que apesar de estarem em risco de reprovar prosseguem para o ano letivo seguinte, numa escola secundária situada nos arredores de Lisboa. As conclusões refletem que a professora aplica algumas estratégias de diferenciação pedagógica, em sintonia com as suas baixas expetativas no que concerne à aprendizagem destes alunos, nomeadamente: diferenciação de produtos, de conteúdos e de processos, que permitem à professora simplificar as tarefas propostas, justificada pela necessidade de motivar e incentivar os alunos.

No estudo de Baioa e Carreira é descrita uma experiência de ensino com duas turmas de 9.º ano do ensino básico, baseada na integração de tarefas de modelação envolvendo trabalho experimental, numa abordagem interdisciplinar de STEM. Os resultados sugerem que a contextualização das tarefas despertou o interesse dos alunos, contribuindo para o desenvolvimento de diversas capacidades, especialmente porque que permite a atribuição de significado aos conceitos matemáticos utilizados em problemas da realidade.

Por sua vez, Martins e Basso estudam o desenvolvimento do pensamento combinatório de estudantes do 4.º ano do ensino básico, numa escola pública brasileira, recorrendo a um objeto digital de aprendizagem. Este estudo valorizou a aprendizagem autónoma e diferenciada, respeitando os ritmos de trabalho dos alunos. Os autores consideram que os problemas que surgem na utilização do objeto digital de aprendizagem fazem emergir a necessidade de organização e sistematização das soluções construídas, embora nenhuma dupla de alunos tenha realizado a sistematização total na resolução de todos os problemas.

Mota e Ferreira propuseram a uma turma de 12.º ano uma tarefa de contagem com o objetivo de compreender de que modo os alunos utilizam os processos subjacentes ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de uma tarefa desafiante. Os alunos puderam recorrer à utilização do seu *smartphone* na pesquisa necessária à resolução da tarefa proposta. As autoras concluíram que a tarefa proposta permitiu que os alunos se apercebessem dos processos subjacentes ao PFC e consideraram que os *smartphones* tiveram um papel importante na resolução da tarefa, tendo-se constituído como verdadeiros recursos na resolução da atividade matemática.

Já Rodrigues e Matos apresentam uma iconografia da aula, recorrendo a gravuras e fotografias encontradas em livros de texto ou no espólio de colecionadores desde a época medieval até meados do século XX. Através de uma visão da história (em particular da Educação Matemática) como uma busca de permanências e mudanças, os autores concluem que as evidências do passado nos permitem refletir sobre o presente. Neste caso, o aluno, o professor e o conteúdo, enquanto categorias abstratas, são permanentes, mas tudo o resto muda: as relações que se estabelecem na aula, o valorizado e o reprimido, os artefactos e o seu significado, a identidade social e cultural concreta dos alunos, dos professores e da própria matemática.

O estudo apresentado por León-Mantero, Maz-Machado, Madrid, Jiménez-Fanjul e Santiago apresenta uma análise do tratamento matemático dado aos métodos de cálculo do perímetro da circunferência e da área do círculo nos livros de texto de geometria publicados em Espanha no século XVIII. Entre os resultados obtidos, os autores destacam que se encontra sempre o mesmo método para o cálculo do perímetro da circunferência, ao passo que para o cálculo da área de um círculo surgem vários métodos, dependendo de se tratar de livros didáticos sobre geometria ou topografia.

Correia apresenta um póster onde apresenta o Projeto LabMath, destinado a alunos do 1º ciclo, que baseia as suas práticas em atividades lúdicas com recurso a materiais manipuláveis (“Hands-on activities”). Preliminarmente, foi possível verificar que os alunos inscritos no LabMath têm vindo a demonstrar uma melhor compreensão do conceito de fração e a sua identificação, em comparação com os alunos não inscritos.

No póster apresentado por Carvalho, a autora pretende compreender como é que os alunos desenvolvem o seu raciocínio geométrico quando recorrem ao GeoGebra para resolver tarefas de construção, exploração e investigação. Os resultados indicam que o recurso a tarefas de caráter exploratório e investigativo promove a formulação de conjeturas e generalizações por parte dos alunos.

Por sua vez, Pimentel, apresenta um projeto de interdisciplinaridade no ensino secundário, com duas turmas do 10.º ano, envolvendo as disciplinas de Matemática, Física e Química e Biologia, na investigação da salinidade no estuário do rio Lima, em função da profundidade, temperatura e distância à foz. Após o término do projeto alguns alunos apresentaram os seus trabalhos e conclusões no Congresso Matemático da escola, que pretende dar espaço aos estudantes para comunicarem ideias e descobertas matemáticas, a resolução de problemas, bem como curiosidades, puzzles e quebra-cabeças.

A atividade deste grupo de discussão desenvolve-se em quatro momentos, ao longo do EIEM 2018, três dos quais dedicados à apresentação de comunicações orais e um quarto período de diálogo com os autores dos pósteres. Pretende-se, nas sessões de trabalho, analisar e discutir as principais ideias presentes nas comunicações propostas, visando a ampliação do conhecimento sobre as metodologias e os recursos utilizados na aula de matemática, o papel do professor e do aluno, a influência de aspetos afetivos na aprendizagem dos alunos e a importância da avaliação.

Referências

Baioa, A. M. & Carreira, S. (2018). Implicações da utilização de simulações e protótipos num problema de modelação: uma abordagem STEM. In A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 129-147). Lisboa: APM.

Barbeau, E. (2009). Introduction. In E. Barbeau & P. J. Taylor, (Eds.). *Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom - The 16th ICMI Study* (pp. 1-9). Dordrecht: Springer.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education*, *5*(1), 7-74.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2004). Working Inside the Black Box: Assessment for Learning in the Classroom. *Phi Delta Kappan*, *86*(1), 8-21.

Costa, M. C. & Domingos, A. (2018). Ensinar matemática recorrendo ao ensino experimental das ciências. In A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 97-110). Lisboa: APM.

Ferreira, E. R. V. M. (2015). *Práticas de avaliação formativa na aula de matemática: um estudo no 2º ciclo*. (Tese de Mestrado em Educação Matemática). Lisboa: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa.

Gellert, U., Knipping, C., & Straehler-Pohl, H. (Eds.). (2018). *Inside the mathematics class*. Cham: Springer International Publishing.

Hérold, J.-F. (2014). A Cognitive Analysis of Students' Activity: An Example in Mathematics. *Australian Journal of Teacher Education*, *39*(1), 137-158.

Lerman, S. (Ed.). (1994). *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*. Dordrecht: Springer

Matos, J. M. (2018). Desenvolvimento curricular na matemática escolar. In A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 34-51). Lisboa: APM.

Nickson, M. (1994). The Culture of the Mathematics Classroom: An Unknown Quantity? In S. Lerman (Ed.). *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom* (pp. 7-35). Dordrecht: Springer.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 423–430.

Rangel, M. & Gonçalves, C. (2010). A Metodologia de Trabalho de Projeto na nossa prática pedagógica. *Da Investigação às Práticas, I*(3), 21-43.

Rodrigues, A. S. C. (2018). Ensino profissional: educar para o futuro. In A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 8-18). Lisboa: APM.

Rodrigues, A. S. & Pimenta, C. (2018). Problem Based Learning num curso profissional: uma experiência de ensino no módulo otimização. In A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 215-228). Lisboa: APM.

Suurtamm, C., Quigley, B., & Lazarus, J. (2015). *Making Space for Students to Think Mathematically*. What works? Research into Practice – Research Monograph #59. www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/WhatWorks.html

Toh, P. C., Toh, T. L., & Kaur, B. (Eds.). (2014). *Learning Experiences to Promote Mathematics Learning - Yearbook 2014*. Singapore: Association of Mathematics Educators.

Vale, I. (2016). Aprender para ensinar matemática fora da sala de aula. In FESPM (Ed.), *VIII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 48-58). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

COMUNICAÇÕES - GD1

EMOÇÕES DE ALUNOS COM INSUCESSO RELATIVAS AO CONTEXTO DA AULA DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO PRELIMINAR NO ENSINO TÉCNICO

Lucy Alcântara

Instituto Federal do Mato Grosso – Campus de Primavera do Leste, Brasil

lucy.alcantara@pdl.ifmt.edu.br

Nélia Amado

Universidade do Algarve & UIDEF – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

namado@ualg.pt

Susana Carreira

Universidade do Algarve & UIDEF – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

scarrei@ualg.pt

Resumo: Esta comunicação baseia-se nos resultados preliminares de um estudo exploratório qualitativo sobre as emoções dos alunos em relação às suas experiências de insucesso escolar, particularmente no contexto da aula matemática. A pesquisa envolve alunos em risco de insucesso em matemática que frequentam o ensino secundário técnico no Brasil. Os dados foram obtidos através das vozes de quatro alunos, mediante a sua participação numa entrevista de *focus group* e em entrevistas individuais semiestruturadas. Como abordagem teórica, a teoria da atribuição é inter-relacionada com o desenvolvimento de abordagens teóricas ao estudo das emoções em educação matemática. Ao considerar a hipótese de distinguir os fatores de insucesso em facilitadores e inibidores, identificamos nas expressões verbais dos estudantes várias emoções negativas que estão vinculadas a objetos, agentes e eventos que abrangem: a aula de matemática, as tarefas e a avaliação em matemática.

Palavras-chave: emoções, atribuições causais, ensino técnico, insucesso escolar.

1. Introdução

No Brasil, os Institutos Federais (IFs) oferecem aos jovens uma formação com a duração de três anos, que tem a dupla função de lhes permitir obter uma qualificação profissional e, simultaneamente, concluir o ensino secundário e aceder ao ensino superior. A matriz curricular anual dos cursos técnicos é constituída, em média, por dezassete disciplinas, sendo doze da base nacional comum e cinco da base técnica, totalizando, em média, 36 aulas semanais.

A disciplina de Matemática assume, desde o primeiro ano, um papel central, tanto porque é uma componente da formação geral, como pela manifesta aplicação que tem nas várias disciplinas técnicas. O elevado índice de insucesso que se regista nesta disciplina tem como consequência uma alta incidência de evasão nesta rede de ensino. Para combater o problema da evasão, os IFs delinearam o Plano Estratégico de Permanência e Êxito com o objetivo de elevar os índices de permanência e sucesso dos estudantes, por meio de um programa de ações concretas. Neste sentido, foi realizado um diagnóstico inicial que evidenciou a coexistência de fatores intrínsecos ao estudante e de fatores internos e externos à instituição que contribuem para o abandono escolar. A partir dos resultados desse diagnóstico, é possível perceber a relevância dos fatores inerentes ao individuo, isto é, o quanto as "dificuldades" destacadas podem ser determinantes para o insucesso do aluno. As medidas adotadas para fazer face à situação de insucesso diagnosticada assumem essencialmente que esta tem uma génese cognitiva, ignorando os aspetos afetivos que são parte integrante da situação. Por essa razão, a deteção de um aluno em situação de risco deve contemplar a caracterização das suas necessidades, não apenas no campo cognitivo mas também no afetivo. É fundamental perceber como ele se sente, como pensa, o que valoriza, o que precisa, o que deseja, o que faz – enfim, conhecê-lo enquanto estudante da Educação Técnica, onde a matemática tem um papel fulcral. Daí a importância de dar uma atenção especial aos aspetos afetivos, já que alunos com dificuldades apresentam, regra geral, uma fraca motivação para a aprendizagem e/ou sentem-se incapazes para se envolver nas tarefas escolares e para aprender matemática.

Desde há vários anos, a investigação tem mostrado que o insucesso escolar não se deve apenas a aspetos cognitivos; pelo contrário, os aspetos afetivos desempenham igualmente um papel muito relevante na aprendizagem da matemática (Evans, Morgan & Tsatsaroni, 2006). Sendo reconhecida a importância da dimensão afetiva no estudo do insucesso em matemática, torna-se necessário um olhar mais dirigido para as experiências individuais e para os percursos de insucesso vivenciados pelos alunos, algo que requer abordagens particularistas em vez de estudos em larga escala. Assim, defendemos como fundamental ter acesso às experiências dos alunos através das suas próprias vozes, nomeadamente acerca daquilo que tem impacto emocional positivo ou negativo, do modo como eles descrevem a sua relação com a matemática e a sua história individual nesta disciplina. Em suma, pretendemos ouvir os alunos sobre o seu insucesso em matemática, dando uma atenção especial à sua expressão emocional.

Esta comunicação tem por base um estudo qualitativo e interpretativo, de caráter preliminar e exploratório, com o objetivo de compreender como é que os alunos do ensino secundário de cursos técnicos vivenciam situações de insucesso e de desempenho insatisfatório em matemática, que os colocam em situação de risco de retenção e/ou de abandono. O objetivo da pesquisa consiste em perceber a relação entre as emoções reveladas pelos alunos em situação de insucesso e as causas que eles atribuem a essa situação.

2. Fundamentação teórica

O insucesso escolar pode ser analisado segundo variáveis mais ou menos determinísticas ou segundo acontecimentos e circunstâncias individuais que são mais difíceis de captar: fala-se então do insucesso visível e do insucesso invisível, respetivamente (Mendonça, 2006). O primeiro refere-se ao insucesso escolar expresso em termos quantitativos, referente a reprovações, retenções, e abandonos, ao passo que o segundo é traduzido em termos qualitativos, tais como frustrações individuais, preparação inadequada, e alienação da participação democrática. Cortesão e Torres (1990) falam de um insucesso velado, ao abordar o processo de falhanço na escola, referindo-se a esse tipo de sintomas que são invisíveis e não quantificáveis, mas em todo o caso constitutivos do insucesso escolar. Tais sintomas ocorrem em múltiplos comportamentos e reações, incluindo, por exemplo: o aluno sente que não pertence à escola, não gosta da escola, recusa a relação pedagógica, é agressivo, desinteressado e distancia-se do ambiente escolar.

2.1. As dimensões atribucionais da explicação dos alunos para o insucesso

A teoria da atribuição de causalidade é uma das abordagens de destaque no estudo das causas do insucesso escolar. Baseia-se na obtenção das perceções individuais acerca dos fatores que melhor explicam as situações que os próprios sujeitos vivenciam e os estados que atravessam. Os estudos dedicados à determinação das atribuições causais do insucesso escolar são abundantes, tanto no campo da psicologia cognitiva como em vários domínios da investigação em educação (Almeida, Mirande & Guisande, 2008). A generalidade dos estudos conduzidos sob esta perspetiva assume que os alunos são capazes de produzir um quadro conceptual que lhes permite explicar as causas dos seus resultados e, em particular, dos seus fracassos na escola. Além disso, este sistema explicativo implícito apresenta-se como uma composição de causas unitárias que se organizam ao longo de um conjunto de dimensões, as quais podem ser consideradas como as causas críticas do desempenho académico. Segundo Neves e Faria (2004), uma primeira fase de investigação sobre as causas percebidas pelos sujeitos para explicar os resultados da sua realização apontaram para quatro grandes tipos: capacidade, esforço, sorte e dificuldade da tarefa. No entanto, no decorrer de trabalhos subsequentes verificou-se que a variedade de causas que os sujeitos invocavam para os seus resultados era muito maior do que a inicialmente proposta. Daí a necessidade que se impôs de criar alguma forma de categorização da grande variabilidade e diversidade causal.

A partir dos trabalhos sistematizadores de Weiner (1985), parece ter-se cimentado a ideia de que as atribuições causais podem ser encaixadas em três grandes categorias. Tais categorias, que dão origem à designação de teoria tridimensional, consistem nas seguintes: causas internas e externas (i.e. internas ou externas à pessoa), causas estáveis e instáveis (i.e., que permanecem relativamente constantes ou variam ao longo do tempo) e, por último, causas controláveis e incontroláveis (i.e., que estão sob o controlo ou fora do controlo da vontade da pessoa).

Num estudo recente, Forsyth, Story, Kelley e McMillan (2009) reexaminaram e reformularam muitos dos resultados de investigações anteriores, utilizando uma abordagem fenomenológica na sua pesquisa. Os seus dados empíricos foram coligidos ao inquirir alunos do ensino superior, logo após estes receberem a classificação obtida num exame de uma disciplina, sobre os fatores que levaram a que tivessem obtido aquela classificação. Os investigadores admitiram a hipótese de que as causas que viriam a ser indicadas poderiam estruturar-se em categorias com uma certa forma hierárquica, mas admitiram igualmente, tal como outros estudos já revelaram, que surgiriam eventualmente causas não mutuamente exclusivas. A metodologia que adotaram baseou-se inicialmente na análise de *clusters* e posteriormente na análise fatorial confirmatória. Os resultados que encontraram fizeram surgir uma nova proposta teórica que se mostra potencialmente interessante no âmbito do desenvolvimento do nosso estudo.

Uma das ideias centrais que emerge dessa proposta é a de que há uma estrutura nas causas atribuídas pelos sujeitos para a ocorrência de insucesso que parece decorrer de um pensamento de natureza prática dos indivíduos e que pode resumir-se a duas grandes categorias de fatores: facilitadores e inibidores de sucesso. Assim, aquilo que os resultados indicaram foi que existe a possibilidade de colocar as causas do insucesso predominantemente em termos unidimensionais, sendo que as polaridades bom-mau ou elevado-fraco parecem enquadrar-se no leque de variação formado por fatores facilitadores e fatores inibidores. O esquema seguinte (Figura 1) ilustra esta forma de condensação das atribuições causais, além de indicar que as diversas atribuições não podem ser vistas como estando exclusivamente num dos pratos da balança.

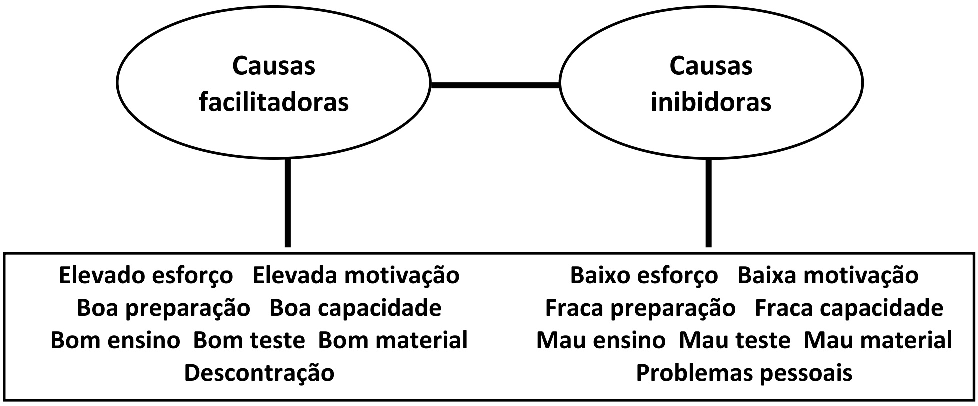


Figura 1 – Modelo de atribuições causais (adaptado de Forsyth, Story, Kelley & McMillan, 2009)

Segundo os autores, há uma diversidade de fatores que podem ser considerados como causas facilitadoras ou inibidoras de sucesso, como acontece no caso de um aluno que explica o seu fracasso no exame por não saber qual a matéria que deveria ter estudado e por outros motivos que estão ligados ao anterior, como seja, ter feito uma má revisão da matéria e ter-se desleixado na sua preparação para o exame. Todas essas causas unitárias estão ligadas por uma dimensão atribucional comum: fatores inibidores de sucesso.

No quadro da teoria atribucional, as atribuições causais têm um efeito muito direto sobre a realização futura dos indivíduos (Neves & Faria, 2004). De acordo com Weiner (1985), há uma espécie de determinação psicológica, quer ao nível cognitivo quer ao nível afetivo, das atribuições causais e da interpretação que o indivíduo lhes dá segundo as dimensões de *locus*, estabilidade e controlabilidade. Por exemplo, afetos ligados à autoestima, afetos dirigidos a si próprio, e afetos dirigidos aos outros são consequências das atribuições causais de insucesso que, por sua vez, influenciam a ação e o comportamento dos indivíduos em vários planos da sua realização. Num artigo mais recente, Weiner (2018) volta a considerar o domínio afetivo na investigação do fenómeno do insucesso, oferecendo aí fortes argumentos que justificam a associação entre resultados, causas e emoções, também alicerçada nos critérios de locus, estabilidade e controlabilidade das causas atribuídas.

O presente estudo, que se assume como exploratório e em fase preliminar, traz a visão teórica das atribuições causais como pano de fundo e procura complementá-la com uma perspetiva teórica da emoção, segundo a qual as emoções ou estados emocionais são expressos pelos indivíduos como formas de transmitir aos outros a sua compreensão das situações de insucesso que vivenciam.

2.2. As emoções nas interpretações dos alunos sobre o insucesso

Um dos reparos feitos por Weiner (2018) é o de que muitas e variadas emoções têm sido alvo de discussão e análise, incluindo orgulho, esperança, desespero, raiva e compaixão; porém, ainda está por criar uma teoria das emoções sob a perspetiva das atribuições.

Apesar disso, vários pesquisadores no campo da educação matemática já abraçaram a construção da emoção como um sistema dinâmico, onde se assume que a emoção não pode ser vista nem como a origem nem como o final de uma relação causal entre afeto e desempenho. Nos seus trabalhos, Gomez-Chacón (2003) discutiu a interação entre afeto e aprendizagem como um processo cíclico. De forma abreviada, poderá dizer-se que, por um lado, a experiência de aprender matemática provoca diferentes reações no aluno e atua sobre as suas crenças; por outro lado, as crenças sustentadas têm uma consequência direta na capacidade de aprender e no comportamento do aluno em situações de aprendizagem.

Da mesma forma, na sua revisão da investigação que relaciona emoções e aprendizagem da matemática, Xolocotzin (2017) reconheceu um desenvolvimento ainda modesto de estudos que admitem as emoções, ao mesmo tempo, como preditores e como consequências. Os resultados encontrados no estudo de Ahmed, van der Werf, Kuyper e Minnaert (2013) são de particular interesse para a nossa pesquisa, na medida em que revelam uma associação consistente entre mudanças nas emoções de alunos de 7.º ano e mudanças nas suas estratégias de autorregulação no decorrer de um ano letivo. Como os autores afirmam, as suas conclusões revelam que, além da “vontade” e da “capacidade”, uma parte fundamental do sucesso na escola é a “emoção”.

Di Martino e Zan (2011) consideraram uma forma de distinguir as emoções em termos de reações a: i) Objetos: uma classe de emoções que estão ligadas a objetos (emoções de atração) e que se referem a todas as variantes de reações afetivas de gostar e não gostar (como amor e ódio); ii) Eventos: uma classe de reações afetivas que se relacionam com o prazer e o desgosto, consistente com as consequências percebidas de um evento que o fazem ser desejável ou indesejável (como alegria, esperança, medo), e iii) Agentes: uma classe afetiva de reações de aprovação e desaprovação (como vergonha, admiração, recriminação). Esses três tipos de emoções também diferem em função dos fatores que as influenciam: as emoções de atração são influenciadas pelos gostos do sujeito; as reações afetivas de estar satisfeito e insatisfeito são influenciadas pelos objetivos do sujeito; e as reações afetivas de aprovação e desaprovação são influenciadas pelas crenças e valores do sujeito.

O modo como as emoções podem refletir o insucesso escolar e, ao mesmo tempo, explicar esse insucesso parece ser um assunto ainda pouco explorado na investigação voltada para o contexto da aula de matemática e das experiências que esse contexto traz para o aluno. Torna-se, assim, oportuno questionar como é que as emoções e a sua expressão, pelos alunos que vivem situações de insucesso em matemática, se articulam com atribuições causais inibidoras ou facilitadoras de sucesso.

3. Aspetos metodológicos

A investigação em educação matemática tem recorrido a diversas abordagens para o estudo dos aspetos afetivos, em particular, para o estudo das emoções. De acordo com Di Martino e Zan (2013) o estudo das emoções requer o recurso a instrumentos consistentes com uma abordagem interpretativa, capaz de captar as emoções dos alunos, dando-lhes a possibilidade de, através das suas próprias palavras, relatarem experiências relacionadas com situações de insucesso ou com as suas dificuldades, que os colocam em risco de retenção ou de evasão.

Atendendo à subjetividade própria das emoções e optando por dar a palavra aos alunos do ensino secundário técnico, o presente estudo, que decorre no Instituto Federal do Mato Grosso (IFMT), contemplou, numa primeira fase, a realização de um *focus group*, a que se seguiu, numa segunda fase, a condução de entrevistas individuais a alunos. Esse primeiro encontro foi conduzido pela primeira autora e teve a duração aproximada de uma hora. De acordo com Krueger e Casey (2000), um *focus group* é um ambiente mais natural e facilitador da partilha de experiências, sendo esperado que os participantes se sintam mais apoiados e incentivados a falar.

Para o *focus group* foram convidados 16 alunos, participantes de aulas de recuperação de matemática (aulas de nivelamento) e que se encontram em situação de risco no IFMT. Compareceram voluntariamente 13 alunos, 7 raparigas e 6 rapazes, que frequentam o 1.º ano do ensino secundário técnico. O encontro realizou-se após as atividades letivas de modo a não perturbar os compromissos escolares dos alunos. A conversa com os alunos foi orientada por um guião previamente estabelecido em torno de três tópicos principais: i) as razões que os levaram a optar pelos respetivos cursos técnicos; ii) a relação com a matemática ao longo do seu percurso escolar e, em particular, durante o seu 1.º ano no IFMT e, por fim, iii) as emoções vividas no contexto da aula de matemática. Deste primeiro momento, surgiram pistas fundamentais que orientaram a fase seguinte de recolha de dados com o uso de outros instrumentos, designadamente: entrevistas semiestruturadas, narrativas e observação dos alunos em sala de aula. A partir da leitura da transcrição desta conversa foram elaborados guiões individuais para a primeira entrevista semiestruturada com o objetivo de aprofundamento de aspetos afetivos e emocionais. As conversas foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas na íntegra. Foi solicitada a aceitação prévia dos alunos e respetivos encarregados de educação para a participação no estudo, incluindo o consentimento para a gravação de entrevistas e utilização de testemunhos individuais, mediante garantia de confidencialidade e anonimato dos participantes. Foi igualmente obtida a autorização formal da direção da instituição para a realização do estudo.

4. Apresentação e análise dos dados

Para esta comunicação, selecionamos as vozes de quatro alunos cujos relatos permitem uma redução suficiente dos dados com vista a ilustrar as emoções partilhadas pelo grupo durante as conversas realizadas no *focus group* (FG) e na primeira entrevista (E1). Tendo presentes as normas éticas de proteção do anonimato, foram atribuídos nomes fictícios aos quatro alunos.

A análise dos dados seguiu um processo indutivo, tendo por base duas temáticas amplas: i) as experiências vividas na aula de matemática (envolvendo o ambiente e o tipo de participação dos alunos) e ii) as tarefas e a avaliação em matemática (envolvendo o desempenho na disciplina). Foram identificados e confrontados, em cada um dos temas, as emoções emergentes e as atribuições causais de insucesso.

Ana tem 15 anos, é uma jovem bastante faladora, extrovertida e bastante popular entre os colegas. Tem consciência das suas dificuldades em matemática e procura aproveitar todas as ajudas que são oferecidas pelo IFMT aos alunos com dificuldades. Nos dois últimos bimestres, o seu esforço tem resultado e tem vindo a recuperar na aprendizagem da matemática. A opção por estudar no IFMT deve-se às recomendações de vários familiares. Pretendia ingressar no curso de eletrotécnica, mas por lapso matriculou-se no curso de mecânica. Apesar desta troca, mostra-se satisfeita com o curso que está a frequentar porque sente "aquela emoção que tem em mecânica, que é mexer com motor, mexer com lanternagem". Ana pretende tirar um curso superior; se continuar entusiasmada com mecânica irá seguir o curso de engenharia mecânica, caso contrário, irá optar pelo curso de psicologia.

Carlos tem 17 anos, é um aluno muito tímido e raramente interage com os restantes colegas. Está a repetir o 1.º ano, mas continua a ter insucesso na maioria das disciplinas. O aluno parece revelar alguma fragilidade nos seus conhecimentos matemáticos prévios. Tem acompanhamento da coordenação pedagógica do curso e frequenta as aulas de recuperação. Apesar de ter escolhido estudar no IFMT porque gosta da escola e, em particular, do curso de eletromecânica, não sabe se irá prosseguir estudos superiores devido às dificuldades com que se tem deparado na maioria das disciplinas.

Amanda tem 15 anos e é uma aluna pouco comunicativa. Revela algumas dificuldades e, como tal, está indicada para o nivelamento, mas não é assídua. A aluna consegue superar as dificuldades com algum esforço. Na primeira aula fez questão de dizer à professora que a matemática é um terror na sua vida. Esta aluna optou pelo curso de eletrotécnica, mas não sabe se irá concluir o curso nem sabe o que pretende fazer no futuro.

Bruna tem 15 anos, é uma aluna muito tímida, mas sempre com um sorriso. Devido às suas dificuldades foi indicada para o nivelamento, mas tal como acontece nas aulas regulares, também não interage com o professor ou com os seus colegas nas aulas de nivelamento. A sua opção pelo IFMT deve-se ao reconhecimento da qualidade do ensino nos institutos federais e pelo facto de outros familiares estudarem nesta instituição. O gosto pela eletromecânica é partilhado com o pai. Bruna acredita que o seu futuro será melhor se fizer o secundário no IFMT.

4.1. Emoções relacionadas com a experiência vivida na aula de matemática

A aula de matemática mostrou-se um espaço gerador de múltiplas emoções. Os alunos ouvidos mostram concordância em relação à experiência vivida nas aulas de matemática que, na opinião geral, são monótonas e aborrecidas. O ambiente de sala de aula é descrito como desinteressante e propício à distração. Os alunos reconhecem que facilmente se desconcentram, que as aulas não os atraem, que rapidamente a sua atenção se desvia do que o professor está dizendo e que dificilmente as explicações do professor fazem sentido e são entendidas. O tédio é uma das emoções mais retratadas nas palavras dos alunos. Aparece relacionado com causas que se enquadram em fatores inibidores como *ensino árido*, *ambiente pobre* e *confusão elevada*. O tédio está também ligado ao fracasso em acompanhar a aula e compreender a matéria e à sensação de dispersão. Assim, a desesperança é também uma emoção que surge das suas palavras. O elevado número de alunos por turma e os ritmos de aprendizagem parecem criar um ambiente que nem sempre é favorável aos alunos com mais dificuldades, provocando diversas reações emocionais.

> Ana: Aborrecidas! Sempre! Meio que monótonas. Ir para escola, sentar, escutar o professor falando, passar umas atividades, você tenta aprender e vê que não sabe nada da matéria.... É como se você tivesse uma amnésia repentinamente. Você olha para o quadro, entendeu... Você voltou o rosto... e sumiu. Às vezes, é muito chato, porque você cobra de si mesmo. Porque o pessoal consegue aprender e você não. Aí o pessoal fica conversando, fica rindo... Há aquelas piadinhas: 'Você é inteligente... Ah! Você é burro..., você não sabe entender?...' O professor já explicou algumas vezes mas ninguém cala a boca. E você não consegue prestar atenção! (FG)

> Carlos: Tudo me distrai na aula de matemática. Eu estou prestando atenção, mas de repente eu estou em outro lugar... A aula torna-se aborrecida quando nós não conseguimos entender nada. No ano passado, no ano inteiro, eu não entendia nada. Até a metade do ano, até este. (FG)

As palavras destes alunos revelam emoções que sentem e vivenciam nas aulas de matemática. O tédio parece ser uma emoção frequente nas aulas de matemática destes alunos. Este aborrecimento parece estar associado à dificuldade em compreender o que o professor está a explicar. Mas há ainda outras emoções relacionadas com esta dificuldade em compreender o professor. A vergonha e a frustração são também emoções vividas por estes alunos. O ambiente de sala de aula parece não ser favorável aos alunos com mais dificuldades; estes estudantes sentem receio e vergonha de expor as suas fragilidades pois nem sempre os restantes colegas parecem ter uma atitude de apoio e compreensão para com eles. Bruna relata que as aulas geram desprazer, que sente medo de ser censurada e vergonha por não compreender a matéria quando os seus colegas já entenderam. Por esta razão opta por não perguntar quando tem dúvidas e desiste de procurar apoio. Assim, mantém-se em silêncio e recorre às aulas de recuperação para expor as suas dificuldades porque há poucos alunos nessas aulas e, de um modo geral, são todos alunos com dificuldades. A vergonha, a frustração e o medo estão ligados a fatores inibidores como a *elevada censura* dos colegas, a sua *fraca cap*acidade e a *reduzida proteção* sentida na sala de aula.

> Bruna: Eu tenho vergonha de perguntar. Se eu não entendi, eu não pergunto. Porque tem pessoas do meu lado que sabem e eu não sei. Aí eu falo: 'Ah, professor, eu não entendi'. Aí eles ficam olhando para ti e falam: 'Pelo amor de Deus, eu entendi, como é que você não entendeu?' Eu não pergunto quando eu não aprendo. O professor está ali explicando, ele pergunta: 'Entendeu?' Na minha cabeça está: 'Não, não entendi'. Mas eu falo: 'Entendi, professor'. Eu tenho vergonha de perguntar. (FG)

É apenas no ambiente das aulas de recuperação que Bruna e os outros alunos com dificuldades esclarecem algumas das suas dúvidas sem o receio de serem censurados pelos colegas.

Bruna: No apoio, mais do que na sala de aula, eu me sinto com mais liberdade de perguntar para o professor o que eu não entendi. Eu tenho pavor de muita gente perto de mim, aí eu já tenho vergonha, aí todo mundo fica olhando para mim e vendo que eu não entendi uma coisa que pode ser fácil. Mas quando eu estou no apoio eu pergunto, ele me explica e quem está ali comigo são pessoas que têm dificuldade como eu. Então, quando eu pergunto, eu tiro a dúvida do meu colega e a minha dúvida também. Então, no apoio é muito mais fácil do que na própria aula. (FG)

Ana: Eu tenho vergonha. Eu falo que não entendi a matéria e as pessoas já tinham entendido e aí fazem aquelas piadinhas: 'Ai burrinha, como você não entendeu? O professor já explicou dez vezes! Ah, você não está prestando atenção; você não serve para cá, vai para a Logística que é o seu lugar'. Estas piadinhas assim, você fica constrangida. (FG)

Carlos: Em casa eu penso que quando eu chegar na sala eu vou aprender mas quando eu chego aqui, eu desanimo, só de entrar na sala eu desanimo. É porque eu não aprendo, tento prestar atenção e não consigo. Aí, no dia seguinte, eu venho e nem presto atenção porque eu já sei que não vou aprender na sala. (E1)

Os comentários dos colegas provocam reações de vergonha sobre alguns dos alunos. Estes revelam claramente a sua mágoa porque sentem que os seus colegas não entendem as suas dificuldades. Os comentários de alguns alunos geram humilhação e fazem com que os colegas se inibam de exprimir as suas dúvidas e dificuldades na aula. O desânimo é outra reação emocional nestes jovens. Por vezes, quando há mudança de um conteúdo na aula, surge a esperança de o entender, mas rapidamente vem a deceção por não conseguirem resolver adequadamente a tarefa que é proposta. Em resumo, vergonha, frustração, medo e desânimo são emoções vividas por estes alunos na aula de matemática, que andam de mãos dadas com *fraca segurança*, mas também com *fraca capacidade* em lidar com tarefas novas.

4.2. Emoções associadas com as tarefas e a avaliação em matemática

Em relação à resolução das tarefas matemáticas na sala de aula e das atividades para casa, os alunos expressam emoções negativas como desânimo, impotência, vergonha e raiva. Sentem-se desanimados porque por mais que se esforcem não conseguem avançar nas resoluções sem a ajuda do professor ou dos colegas. Sentem-se assim incapazes e, às vezes, envergonhados, porque precisam de ajuda mas preferiam não ter de pedi-la. Essa condição gera sensações negativas como a falta de capacidade, a raiva e o mau estar consigo mesmo.

Ana: Quando eu consigo fazer, eu me sinto legal; quando eu não consigo, eu fico um pouco reprimida, meio de lado, maio cabisbaixa... Porque 'cara, eu não sei fazer', vou para a monitoria e não consigo ficar muito tempo, porque eu meio que me auto-rebaixo e falo: 'Ah, eu não vou conseguir'. (E1)

Amanda: Dá um desânimo porque você está lá prestando atenção na aula e o professor está explicando 'de boa' e pergunta: 'entendeu?' Eu penso: 'entendi'. A maneira que ele explicou você acha que entendeu, né? Aí vai fazer a tarefa, tenta aplicar o que o professor explicou, mas aí você vê que não era o que o professor explicou, que eu entendi de outra maneira. Aí a tarefa está errada, aí dá uma tristeza porque você vê que não conseguiu entender, então eu fico com raiva de mim mesma. (E1)

Bruna: Eu fico um pouco mal e com vergonha, né? Porque eu tinha que ter entendido e eu não entendi. E eu ainda tenho que pedir ajuda de novo, e aí é ruim. [...] eu queria ter entendido na hora em que o professor explicou. Quando eu não entendo, eu fico mais mal ainda porque além de eu pedir ajuda eu não entendi a explicação da pessoa que me ajudou. (E1)

Os momentos que envolvem a avaliação, em particular, os testes de avaliação parecem desencadear várias emoções negativas, como nervosismo, tensão e desespero.

Amanda: Todas as vezes que eu vou fazer qualquer prova eu fico muito nervosa e isso acaba atrapalhando... Isso prejudica bastante porque inibe a gente de lembrar do que a gente estudou, a gente pode até aprender, mas no momento da prova parece que dá um branco, assim... e este ano parece que está piorando porque é muito nervosismo, é aquela pressão de que se não conseguir agora, tem recuperação, e se você não conseguir na recuperação, você 'se lasca'... (FG)

Ana: No primeiro bimestre eu fui muito mal e aí eu pensei: 'já estou em dependência'... já estava pensando: 'vou estudar para a Prova Final, vou pegar dependência'... Tipo, assim, eu não vou conseguir. Só que aí eu fui na monitoria, no apoio da professora. E no dia antes da prova de recuperação, eu fui no apoio e a professora me ajudou; ela viu que eu tinha aprendido o conteúdo. Ela disse: 'não, o seu problema é que você fica nervosa na hora de fazer a prova'. Aí eu esqueço tudo, aquelas coisas mais fáceis 'de mais e menos'. Na prova, eu realmente sou uma criança. (FG)

Como revelam as palavras destes alunos, tanto as tarefas propostas nas aulas como os testes de matemática surgem como agentes e eventos que desencadeiam fortes emoções negativas. O teste é visto como uma situação em que aquilo que os alunos pensam ter aprendido parece desaparecer. Esse é um momento que gera tanto nervosismo que os torna incapazes de revelarem os seus conhecimentos. Os estudantes descrevem que se sentem desnorteados e prestes a perder sua identidade e racionalidade. Além disso, os estudantes referem-se a um objeto específico, o teste, como a oportunidade última que lhes é concedida para mostrarem o que sabem e que não podem falhar. O medo de fracassar parece dominá-los, impedindo-os de ser racionais, e levando-os mesmo a "sentirem-se crianças". Enfim, o medo, o nervosismo e a falta de esperança estão envolvidos em experiências de *grande pressão*, *grande ameaça* e em perceções de *fraca capacidade*, que constituem obviamente uma ameaça ao seu sucesso escolar.

4.3. As emoções e as atribuições causais do insucesso na matemática

Para finalizar, trazemos alguns fatores ou motivos que os alunos apontam como causadores do seu insucesso em matemática. Eles atribuem o seu insucesso à falta de bases, à falta de concentração, à falta de empenho e à acumulação e complexidade dos conteúdos. Também demonstram alguns fatores emocionais (i.e., esforço, motivação, nervosismo e vergonha) que são influentes tanto na inibição como na facilitação do sucesso.

Amanda: Eu acho que o fator principal foi a questão de eu não ter tido uma base tão boa assim. Porque por mais que eu não goste de matemática, se tivesse tido aulas eu

> conseguiria aprender, mas como eu não tive, o fator principal foi eu não ter uma base tão boa assim. (E1)
>
> Ana: Você está estudando um conteúdo e aí já vem outro conteúdo. [...] Se eu tivesse um pouco mais de concentração, prestasse mais atenção, não me deixasse atrapalhar e me esforçasse mais, eu acho que conseguiria. [...] Estudar, estudar, prestar atenção na aula, tentar fazer atividades e prestar atenção, porque se não prestar atenção não tem como. (E1)
>
> Bruna: Às vezes eu sei fazer, mas como estou nervosa eu não consigo fazer. Eu coloco na minha cabeça que não sei fazer... porque estou nervosa. Mesmo sem eu ter tentado, eu olho e não consigo fazer, aí eu não faço. Também a vergonha, eu preciso aprender, mas eu não consigo perguntar ao professor a parte que eu não entendi, aí eu não entendo o resto todo. (E1)
>
> Carlos: Precisa ter vontade de estudar. Eu tenho vontade de terminar os estudos, mas não tenho vontade de estudar. (E1)

As emoções partilhadas por estes quatro alunos estão, naturalmente, associadas às dificuldades que vivenciam no contexto da disciplina. Amanda atribui o seu insucesso à falta de bases, mas alega que mesmo não gostando de matemática poderia ter resultados mais positivos. Nesse caso, a emoção negativa (não gostar) parece não ser, para ela, a causa central do seu insucesso. Para Ana, além da acumulação de conteúdos e da sua complexidade, ela considera a falta de concentração e de empenho, também, como causas do seu insucesso. Já para Bruna as sensações emocionais, como nervosismo e vergonha, são as principais causas do seu insucesso. Ela tem a convicção de que se conseguisse controlá-las, os seus resultados seriam diferentes. Carlos tem consciência da necessidade de estudar mas, diferentemente de outros colegas, demonstra-se totalmente desmotivado e parece revelar a sua perceção de uma fraca capacidade para aprender.

De forma genérica, há por parte destes jovens uma tentativa de ultrapassar as dificuldades que os leva a desenvolver alguns esforços que nem sempre resultam em sucesso e que, por isso, conduzem ao desânimo. Assim, o desagrado, o nervosismo e a desmotivação são emoções relacionadas com a *fraca preparação*, a *fraca capacidade*, a *fraca motivação* e com a *elevada dificuldade* na disciplina.

5. Comentários finais

O estudo do insucesso recai frequentemente sobre os aspetos cognitivos, esquecendo os aspetos afetivos e os socioculturais. Como é referido na literatura, o facto de os aspetos afetivos poderem estar ocultos e não serem quantificáveis desencorajam o seu estudo. Segundo os pressupostos teóricos adotados neste estudo, as emoções são vistas como reações a diferentes situações que os estudantes vivenciam na sua vida escolar.

Como fatores inibidores do sucesso destes alunos, destacamos: i) a aula de matemática, marcada por um ensino monótono e um ambiente pouco favorável; ii) as tarefas e a avaliação em matemática, marcadas por uma grande pressão sobre os alunos. Estes fatores inibidores ligam-se claramente a um conjunto de emoções negativas, a saber: tédio, desespero, vergonha, frustração, medo, desagrado, tensão, irritação, nervosismo.

Tal como outros estudos indicaram, reconhecemos a interação entre os aspetos afetivos e a aprendizagem como um processo cíclico. Além disso, os resultados preliminares deste estudo indicam que as emoções e o insucesso se alimentam e reforçam mutuamente. Nesse sentido, mudanças em diversos aspetos das práticas de sala de aula e das normas socioculturais podem representar fatores facilitadores do sucesso e gerar emoções positivas. Também é provável que um alívio do peso da retenção baseada estritamente nos resultados dos testes de avaliação contribua para emoções mais positivas relativas ao contexto da aula de matemática. Os próximos passos desta investigação terão como objetivo analisar a relação existente entre as emoções e determinados eventos críticos promotores de insucesso, através da realização de entrevista de aprofundamento e da recolha de narrativas pessoais centradas nas emoções sentidas pelos alunos no contexto da disciplina de matemática.

Referências

Ahmed, W., van der Werf, G., Kuyper, H., & Minnaert, A. (2013). Emotions, Self-Regulated Learning, and Achievement in Mathematics: A Growth Curve Analysis. *Journal of Educational Psychology*, *105*(1), 150–161.

Almeida, L. S., Miranda, L., & Guisande, M. A. (2008). Atribuições causais para o sucesso e fracasso escolares. *Estudos de Psicologia*, *25*(2), 169–176.

Cortesão, L., & Torres, M. A. (1990). *Avaliação Pedagógica I - Insucesso Escolar*. (4ª ed.). Porto: Porto Editora.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM – Mathematics Education*, *43*, 471–482.

Di Martino, P., & Zan, R. (2013). Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8*, (pp. 1309–1318). Antalya, Turkey: ERME.

Evans, J., Morgan, C., & Tsatsaroni, A. (2006). Discursive positioning and emotion in school mathematics practices. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 209–226.

Forsyth, D., Story, P., Kelley, K., & McMillan, J. (2009). What causes failures and success? Students' perceptions of their academic outcomes. *Social Psychology Education*, *12*, 157–174.

Gomez-Chacón, M. I. (2003). *Matemática emocional. Os afectos na aprendizagem matemática*. Porto Alegre, Brazil: ARTMED.

Krueger, R., & Casey, M. (2000). *Focus Group. A Practical Guide for Applied Research.* (3rd Edition). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Mendonça, A. (2006). *A Problemática do Insucesso Escolar: A Escolaridade Obrigatória no Arquipélago da Madeira em Finais do Século XX*. (Tese de Doutoramento). Funchal, Universidade da Madeira. http://www3.uma.pt/alicemendonca/conteudo/publica/Tese.pdf

Neves, S. P., & Faria, L. (2004). Concepções pessoais de competência: da integração conceptual à intervenção psicopedagógica. *Psicologia*, *18*(2), 101–128. https://dx.doi.org/10.17575/ rpsicol.v18i2.432

Weiner, B. (1985). An attributional theory of achievement, motivation and emotion. *Psychological Review*, *92*(4), 548–573.

Weiner, B. (2018). The legacy of an attribution approach to motivation and emotion: A no-crisis zone. *Motivation Science*, *4*(1), 4–14

Xolocotzin, U. (2017). An Overview of the Growth and Trends of Current Research on Emotions and Mathematics. In U. Xolocotzin (Ed.), *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning*, (pp. 3–41). London, UK: Academic Press.

A PRÁTICA DE PROFESSORES DO 2.º CICLO PARA ENVOLVER OS ALUNOS NA ESTRATÉGIA AVALIATIVA REGULADORA, NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA, COM TECNOLOGIA

Elvira Lázaro dos Santos

UIDEF, Instituto de Educação de Lisboa

elvira.santos@campus.ul.pt

Leonor Santos

Instituto de Educação de Lisboa

mlsantos@ie.ul.pt

Resumo: Com este texto pretende-se dar a conhecer a prática de professores do 2.º ciclo para envolver os alunos na estratégia avaliativa reguladora, na sala de aula de matemática, com tecnologia. O estudo é de natureza interpretativa e segue o design de estudo de caso. Num contexto de trabalho colaborativo, a investigadora e dois professores de Matemática, a lecionar o 5.º ano de escolaridade, conceberam estratégias avaliativas concretizadas em sala de aula, procurando integrar as informações recolhidas na planificação seguinte. Os dados apresentados foram recolhidos por observação, com registo áudio, da entrevista final e registo áudio e vídeo do trabalho realizado em duas aulas em cada uma das três estratégias avaliativas dos professores caso, João e Ana. Os resultados apontam para que a atuação dos professores alterna entre momentos de transmissão de informações essenciais à progressão das atividades com a tecnologia ou aos critérios de avaliação e momentos de questionamento oral aberto para apoiar o raciocínio matemático dos alunos, tornando a atuação dos professores exigente, complexa e difícil.

Palavras-chave: Avaliação reguladora, Critérios de avaliação, Tecnologia, Questionamento oral, O papel do professor.

Introdução

No sentido de contribuir para uma aprendizagem efetiva, de qualidade e para todos os alunos, a avaliação deve ser sistemática na sala de aula em vez de aparecer como uma interrupção da atividade letiva (Storeygard, Hamm, & Fosnot, 2010; Black & Wiliam, 2009). Os professores devem procurar evidências em diversas fontes de modo a garantir a convergência dessas evidências no sentido de que cada aluno possa mostrar o que sabe e o que consegue fazer de diferentes maneiras mostrando, assim, os seus pontos fortes (NCTM, 2007). Para que tal aconteça, existe a necessidade de proporcionar ao aluno um maior envolvimento e por isso torná-lo mais ativo na sua própria aprendizagem (Nunziatti, 1990).

Do mesmo modo, a utilização de ferramentas tecnológicas no ensino permitem ao aluno uma participação mais ativa na sua aprendizagem. Arrastar um elemento do diagrama, através da ação do rato, observar as relações geométricas usadas criam condições para a elaboração de conjeturas que só é possível pelo potencial de interação oferecida pelos ambientes de geometria dinâmica (AGD). Assim, estas ferramentas apresentam condições para o professor ouvir os alunos e, através da sua ação, conhecer os seus pontos fortes (Laborde, Kynigos, Hollebrands, Strässer, 2006). Baccaglini-Frank e Mariotti (2011) mencionam que quando os intervenientes são convidados a explorar um problema aberto, com AGD, e a formular conjeturas, sobre um determinado objeto matemático, observam propriedades que se mantêm constantes e tentam ligar um ou mais invariantes geométricos, durante o processo de arrastar de um ponto, para dar origem a uma hipótese explicativa. Contudo, não se pense que esta prática está liberta de desafios para o professor, pois existem dificuldades no que respeita à utilização da tecnologia no ensino da Matemática já que os aprendentes precisam de saber lidar com a sintaxe e a semântica do *software* o que, por vezes, é considerado como uma sobrecarga para a aprendizagem (Hoyles & Noss, 2003).

A investigação realizada em Portugal aponta para a existência de poucos estudos no domínio da avaliação e é, por isso, consensual quanto à necessidade da existência de uma agenda de avaliação tanto nos educadores como nos investigadores matemáticos (Santos, 2004; Fernandes, 2009). Deste modo, antevê-se a necessidade de contribuir para um melhor conhecimento de práticas profissionais com utilização de avaliação reguladora, tentando caracterizar o trabalho dos professores na forma como constroem tarefas, como recolhem informação sobre a aprendizagem dos alunos e como integram essa informação na sua planificação de modo a regular o seu ensino da Matemática. Assim, com este texto pretende-se dar a conhecer a prática de professores do 2.º ciclo para envolver os alunos na estratégia avaliativa reguladora, na sala de aula de matemática, com tecnologia.

Avaliação reguladora

A ação reguladora da avaliação só existe se se seguir o tratamento da informação recolhida, assim como a adaptação das atividades de ensino e de aprendizagem de acordo com a interpretação desenvolvida (Pinto & Santos, 2006). A intervenção de natureza reguladora pode incidir na clarificação da relação existente “entre os objetivos da aprendizagem e as tarefas a utilizar; sobre a explicitação e negociação de critérios de avaliação para uma eficaz apropriação por parte dos alunos; ou ainda sobre a sistematização, interpretação e tomada de consciência dos erros cometidos na realização de uma dada tarefa” (Santos, 2008, p. 4). A avaliação desenvolvida pelo professor passa a ter uma função de ajuda no processo não sendo, no entanto, o seu principal papel. Mais do que assegurar a articulação entre as características dos alunos e o processo de ensino pretende, essencialmente, focar-se na ação do aluno como principal agente regulador da sua aprendizagem (Pinto & Santos, 2006).

Os erros cometidos pelos alunos estão presentes, diariamente, na sala de aula e na perspectiva da avaliação reguladora o erro é, por isso, natural e inerente ao processo de aprendizagem. Ao usar o erro cometido pelo aluno como uma fonte de informação a que tem acesso, o professor acede à lógica que o aluno tem de um certo saber e a sua compreensão pode constituir um modo de o professor pensar em formas específicas e adequadas de ajudar o aluno a reorientar a sua representação, mas também a refletir sobre a sua prática, repensando a adequação dos contextos de aprendizagem propostos (Santos & Cai, 2016; Santos et al., 2010).

Explicitar os critérios de avaliação é clarificar o modelo didático de referência, a avaliação para aprender passa a fazer parte do conteúdo e das estratégias de ensino como modelo de referência para todos, sendo a aprendizagem colocada em termos da lógica do aprendente e do acesso à autonomia (Nunziati, 1990). Os critérios de avaliação enunciam o que é importante em cada momento e são, por isso, uma ferramenta de diálogo entre avaliadores e avaliados (Vial, 2001), constituindo-se como lentes para analisar o trabalho desenvolvido (Santos & Cai, 2016).

Ouvir os alunos é uma tarefa difícil. Para conseguir dar sentido às suas intervenções é importante ter presente as diversas vias de desenvolvimento de toda a aprendizagem e dos objetivos matemáticos da atividade em curso. O professor deve identificar os pontos fortes dos alunos, não só para contribuir para o desenvolvimento da autoconfiança, mas também para ajudá-los a construir o seu próprio conhecimento (Storeygard et al., 2010). A utilização do feedback, como um diálogo para ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades, poderá contribuir para a construção do conhecimento por parte dos alunos se estes adaptarem e integrarem as informações reconstruindo saberes (Santos & Cai, 2016; Santos & Semana, 2015).

Contudo, os professores têm tendência para lançar questões para a turma no sentido de manter os alunos focados na tarefa, mas é menos frequente trocarem algumas questões com o mesmo aluno provocando uma discussão de ideias mais prolongada sobre um determinado tema (Wiliam, 1999). Contudo, é de salientar que, quando incentivados e apoiados, os professores mudam as suas práticas (Black & Wiliam, 2003; 2006). Uma consequência destas mudanças é que os professores aprendem a conhecer melhor os alunos e os seus erros, de modo a orientar a sua ação para as suas verdadeiras necessidades. No entanto, o desenvolvimento de um estilo mais interativo relativamente ao diálogo com a turma pode requerer uma mudança radical no estilo de ensino do professor. Num projeto desenvolvido por Black e Wiliam (2006), os professores de início sentiam que estavam a perder o controlo, mas ao fim de um ano foi possível verificar mudanças neste sentido.

Deste modo, o questionamento oral, sendo uma prática muito frequente em sala de aula, só poderá constituir-se como um contexto potencialmente regulador se for realizado de forma intencional por parte do professor, sem constrangimentos de tempo e formado essencialmente por perguntas de tipo aberto (Santos, 2008). O questionamento oral poderá realizar-se entre professor-aluno, mas também entre professor-turma, ou ainda, entre aluno-aluno e revela-se como “excelentes oportunidades para o desenvolvimento de uma comunicação reflexiva e instrutiva e, mais geralmente, para a aprendizagem em Matemática” mas de grande exigência para o professor (Semana & Santos, 2012, p. 308).

Num estudo realizado, num contexto colaborativo, com o objetivo de “compreender e aprofundar o conhecimento sobre as formas de atuação do professor de Matemática em sala de aula os tipos de experiências matemáticas que favorecem o desenvolvimento da autorregulação da aprendizagem matemática, e os constrangimentos que os professores de Matemática enfrentam aquando da implementação dessas práticas” (Dias, P. & Santos, 2012, p. 229) é referido que o professor em estudo reorientou os alunos remetendo-os para os seus produtos de modo a que identificassem os próprios erros, bem como a razoabilidade das suas respostas apelando a diferentes tipos de representação de objetos matemáticos promovendo, assim, a autorregulação da aprendizagem matemática.

Prática de ensino

A construção de um modelo da ação do professor é de grande complexidade e, por isso, torna-se importante observar os gestos dos professores no seu contexto profissional. Sendo os gestos a manifestação de uma intenção, uma manifestação concreta do desejo, implica uma leitura a diversos níveis (Jorro, 1998). Os gestos profissionais dos docentes dependem da forma como se dá a adaptação e a interação com o contexto. Existem quatro dimensões que caracterizam os gestos profissionais, são eles: *A liberdade de agir versus sentido de postura profissional* em que o professor revela a sua capacidade de se dar a uma situação e integra nos seus gestos uma percepção mais ampla do que a que existe na programação escolar; *A intuição* que permite ao professor reconhecer o momento de intervir e em que a sua criatividade resulta da arte de *improvisação* num determinado instante; o *sentido de alteridade* que se caracteriza pelo reconhecimento e aceitação do outro, um gesto que é um convite à compreensão e à ação*;* e, a *forma como o gesto se apresenta aos outros* já que é através do gesto que se faz a transmissão de valores educativos através da sua dimensão emocional e simbólica dando a conhecer a sua medida ou a sua contenção (Jorro, 2006). Os *gestos linguísticos* permitem analisar a comunicação do professor perante a turma. Estes gestos, que permitem perceber se o professor apresenta uma linguagem especializada ou comum, são visíveis no inicio ou na transição de atividades, na introdução dos saberes, ao revisitar um conceito, na clarificação de uma noção ou na regulação de regras ou normas que estão prescritas. Os *gestos de colocar em prática o saber*, coloca o professor em contacto com a atividade intelectual dos alunos durante a realização das tarefas e constituem a atividade de fundo do professor desenvolvendo a construção do pensamento abstrato e a manipulação dos conceitos. Os *gestos de ajustar a ação à situação* revelam a capacidade do professor de intervir sobre o ritmo da ação, modificando ou criando uma nova estratégia, durante o desenvolvimento da atividade. Os *gestos de ética* do professor estão patentes no tipo de relações existentes entre alunos e o professor que podem contribuir tanto para incentivar o aluno a participar nas atividades como a criar relações de domínio. Estas relações estão de acordo com o formato da comunicação que se estabelece e da avaliação escolar que se coloca em prática (Jorro, 2006).

Opções metodológicas e contexto

O estudo é de natureza interpretativa, numa modalidade de estudo de caso. Este estudo é informado por uma abordagem colaborativa pois é feito com pessoas que, em colaboração com outras, partilham das mesmas preocupações e interesses, examinam cuidadosamente a sua própria experiência e ação, entrelaçando a ação com a reflexão (Heron & Reason, 2006).

Ao longo do ano letivo de 2014/15, num contexto de trabalho colaborativo entre investigadora, primeira autora, e dois professores de Matemática (João e Ana) conceberam estratégias avaliativas, concretizadas em sala de aula, em trabalho de grupo com utilização de tecnologia, e procuraram integrar as informações recolhidas na planificação seguinte. Na primeira estratégia avaliativa os alunos usaram um aplicativo disponível na Net (*Alien*) com o objetivo de estudar pares de ângulos suplementares e complementares e reformularam as suas produções tendo em consideração o feedback do professor e os critérios de avaliação, que passaram a fazer parte do processo de ensino e aprendizagem (EA1); Na segunda estratégia estudaram a classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, através de um aplicativo construído em GeoGebra e reformularam as suas produções tendo em consideração o feedback do professor (EA2); Na terceira estratégia (EA3) os alunos construíram polígonos no GeoGebra e estudaram a área do paralelogramo, reformularam as suas produções tendo em consideração o feedback produzido pelos colegas (coavaliação).

João e Ana são professores do 2.º ciclo do ensino básico, com licenciaturas em variante Matemática-Ciências, de Escolas Superiores de Educação Portuguesas e foram selecionados por reconhecerem importância à utilização da avaliação formativa no processo ensino e aprendizagem e possuírem familiaridade com a utilização das tecnologias.

A recolha de dados apresentados foi feita através da observação, com registo áudio e vídeo, de duas aulas (A1 e A2) em cada uma das três estratégias avaliativas, e entrevista final (E2) dos professores caso também registada em áudio. A análise de dados seguiu a análise de conteúdo (Bardin, 2011). As categorias de análise foram constituídas tomando por foco de atenção a dimensão "Envolver os alunos nas estratégias avaliativas de sala de aula" considerando as respetivas sub-dimensões: Transmitir o quê e como; Apoiar o raciocínio matemático dos alunos; Incentivar a autonomia (Jorro, 2006); e, "Refletir sobre as dificuldades sentidas" (Timperley, 2014).

Envolver os alunos nas estratégias avaliativas de sala de aula

Transmitir o quê e como. No início dos trabalhos de sala de aula os professores *informam os alunos acerca da tarefa* que vão desenvolver, de forma sucinta tal como refere João: "Abrem o computador e seguem as pistas" (João, EA3_A1) ou acrescentando a previsão do tempo para a sua realização:

> O que vamos fazer hoje é uma atividade que está dividida em duas partes. A primeira parte da atividade o que é pretendido é que vocês terminem assim que tocar para a segunda hora, ok? Se ainda estiverem a escrever alguma coisa, terminam. Mas para vocês terem tempo de terminar a atividade toda, esta vai ser a vossa meta. (João, EA2_A1)

Mas, também, usam a *colaboração dos alunos* para focar a atenção no que se pretende e nas instruções gerais relativas ao *software*, como faz Ana:

> **Profª:** Susana lê lá, qual é a nossa tarefa hoje?
>
> **Susana:** Tarefa: O GeoGebra e a classificação de triângulos. Para classificar os triângulos quanto ao comprimento dos lados e quanto à amplitude dos ângulos vamos utilizar o *software* GeoGebra.
>
> **Profª:** O Geogebra é um *software* indicado para estudar conteúdos que têm que ver com a Geometria e como nós estamos, neste momento, nessa parte da Matemática, vamos usar este *software*. Têm lá todos os passinhos que têm que fazer. (EA2_A1)

Quando iniciam o trabalho com os critérios de avaliação os professores esclarecem significados no sentido da apropriação dos mesmos. João *explora os diferentes indicadores e respetivos descritores*, que projetou, para que os alunos percebam o que significa e o que se espera deles, como por exemplo no parâmetro "Usar informação e conhecimentos estudados":

> **Prof.:** As informações têm a ver com o que vocês leem para organizar a tarefa que eu dou e que vocês devem seguir. E os conhecimentos têm a ver com aquilo que vocês já sabem,

que já conhecem, antes de começarem a fazer essa atividade. O que vocês aprenderam antes. Se vocês não recordam, não utilizam as vossas informações ou conhecimentos vão estar no nível?

Ricardo: Zero. (EA1_A2)

De forma distinta Ana introduz os critérios de avaliação percorrendo as várias questões da tarefa, em diálogo com os alunos, sobre como seria possível recolher informação das suas produções, sendo os descritores apresentados como um elevador que se vai deslocando à medida que a produção fica mais completa:

Se eu não tiver apresentado nenhuma estratégia é como se o meu elevador estivesse ficado no rés-do-chão, mas à medida que eu vou apresentando situações o meu desempenho vai melhorando. Não é nem nível nem pontos, mas é para dizer que atingimos um determinado patamar porque a resposta está muito bem. (Ana, EA1_A2)

No início do trabalho de coavaliação, Ana ajuda a *descodificar o significado de pista* dando um exemplo específico de como fazer com que os seus colegas se lembrem que devem usar instrumentos de desenho para traçar figuras geométricas:

Se quisessem dar uma pista não diziam: Façam os desenhos com a régua. Mas podiam dizer que o desenho está pouco rigoroso. E os outros tinham que pensar: Pouco rigoroso, porquê? Porque não usaram a régua. Vocês não podem dizer, não podem dar a resposta. (Ana, EA3_A2)

Também quando os alunos fazem construções geométricas com GeoGebra é necessário *acompanhar o trabalho* por forma a ultrapassar dificuldades específicas de utilização do *software*. Os professores acompanham o trabalho dos alunos de modo que selecionem as ferramentas adequadas e selecionem os pontos necessários à construção:

Vocês selecionaram o polígono? É que não está lá, então carrega lá em polígono. Ah, agora é que estão lá, estão a ver? (Ana, EA3_A1)

Vocês têm mesmo que começar nos pontinhos azuis porque senão não dá. Faz lá, vês? Já fechou, têm que ir aos quatro vértices, senão não fecha, está bom? (João, EA3_A1)

No final das estratégias avaliativas os professores organizam *momentos de síntese*, com a participação dos alunos e transmitem informações que ajudam a complementar a aprendizagem dos alunos, como na estratégia avaliativa sobre ângulos suplementares:

Prof.: Como é que fazias aqui Sara?

Sara: Nós tínhamos uma regra que era se fosse maior que 90 usávamos o de 180. Ali já era próximo de 180 íamos depois reduzindo até à medida pedida.

Prof.: O que vocês estão a pensar é que tenho um ângulo de 180 e vou tirar um pedacinho do ângulo para ficar 158. Quanto é que eu ia tirar aqui?

Sara: 22 graus.

Prof.: Porque 158 mais 22 é?

Sara: 180.

> **Prof.:** Ok! Estes dois ângulos juntos, em Matemática, chamam-se ângulos suplementares. (EA1_A2)

Na estratégia avaliativa sobre a área do paralelogramo Ana, para além do momento síntese, *transmite a nova nomenclatura* relativa aos elementos do paralelogramo:

> **Profª:** Vamos só mudar a linguagem relativamente à fórmula de calcular a área do paralelogramo. No paralelogramo em vez de a este segmento de reta chamar comprimento, como chamamos no retângulo, vamos chamar base, que funciona exatamente como o comprimento. E para dizer que peguei neste triângulo e passei para ali tenho que dar um nome a esta linha a tracejado.
>
> **Paulo:** Pode ser altura?
>
> **Profª:** Pode ser altura, muito bem. Em vez de ser a tal largura passa a ser uma altura. (EA3_A2)

Fazer cumprir normas e regras de conduta é outro dos aspetos que os professores também sentem necessidade de transmitir aos alunos, durante a aula: "Os meninos que já acabaram param com o barulho, para os outros terminarem" (Ana, AE3_A2).

Apoiar o raciocínio matemático dos alunos. Durante a atividade com o aplicativo *Alien*, Ana descobre que um dos grupos utiliza os dedos para ter uma ideia da abertura do ângulo pretendido. A professora desvia a atenção dos alunos dessa estratégia *colocando uma questão como uma alternativa para um novo raciocínio*:

> **Profª:** Como é a vossa estratégia?
>
> **Bruno:** Pomos aqui o dedo para dizer que é mais ou menos 10º, depois fazemos outra vez que dá 20 e assim.
>
> **Profª:** Mas o que vocês têm que fazer é pensar numa forma sem os dedos, para ajudar a colocar no local mais perto possível. O que existe nesse ecrã que vos pode ajudar? (EA1_A1)

A *mobilização de conhecimentos* é uma preocupação dos professores que fazem referência à necessidade dos alunos não esquecerem que têm conhecimentos anteriores que devem utilizar:

> Vocês lembram-se o que é um paralelogramo? (João, EA3_A1)
>
> Então o que é que está a acontecer aos ângulos? Vocês já conhecem a classificação dos ângulos quanto à sua amplitude. Então vamos usar os conhecimentos e as informações. (Ana, EA2_A1)

Depois dos alunos se familiarizarem com o *software*, desenvolvem as suas conjeturas sobre a relação entre a área do retângulo e a área do paralelogramo. Ana apoia o desenvolvimento do raciocínio matemático ajudando a *interligar as descobertas realizadas* pelos alunos:

Paulo: Aumentámos e diminuímos a largura e o comprimento do paralelogramo com o painel de controlo.

Profª: E verificaram?

Paulo: Que o comprimento e a largura do paralelogramo foi mudando.

Profª: Foi mudando? Mas ...

Paulo: Os comprimentos e as larguras variavam mas eram iguais nos dois.

Profª: Afinal havia um mas. Os comprimentos e as larguras iam variando mas o que é que afinal nunca variava, em cada um das situações?

Susana: A área. (EA3_A1)

Ana pretende que os alunos generalizem e façam surgir a fórmula da área do retângulo, já conhecida dos alunos, pelo que tenta que os alunos *não se limitem apenas a um único raciocínio*, isto é deixem de ver a estratégia geométrica de transformação de um polígono noutro como o único processo para calcular a área de qualquer paralelogramo:

Paulo: Para a estratégia podemos fazer um retângulo dentro do paralelogramo, fazer os quadradinhos geometricamente iguais e ver que podemos tirar este pedaço e pôr aqui, e depois é só contar os quadradinhos?

Profª: Pode ser uma estratégia. Mas no fundo o que é que vocês retiram de um lado e acrescentam do outro?

Paulo: Um triângulo.

Profª: Cortam um triângulo de um lado e colam do outro, é o que vocês têm aí, não é? Mas eu não posso estar sempre a cortar, pois não? Agora vamos lá pensar se transformo o paralelogramo no retângulo significa que para calcular a área do paralelogramo vou utilizar que estratégia?

Paulo: A do retângulo.

Susana: Porque eles são os dois equivalentes.

Profª: Então toca a escrever isso que é para não fugir a ideia. (EA3_A1)

Incentivar a autonomia. Ao longo do desenvolvimento da tarefa, é possível perceber que os professores *incentivam a participação de todos os alunos* e, também, respeitam os diferentes processos de participação dos alunos, como é possível ver pelo extrato seguinte:

Prof.: Vocês têm que falar entre vocês. O que tu estás a pensar tens que falar no grupo, está bem?

Andreia: Mas eu estou a escrever primeiro.

Prof.: Ah, gostas de escrever primeiro e depois é que gostas de falar com os teus colegas?

Andreia: É que sem escrever não consigo pensar. (EA1_A2)

Ana incentiva ainda os alunos a *darem valor à forma como podem contribuir*, para o trabalho do grupo, através da sua área mais forte:

> **António:** Eu posso fazer o desenho?
>
> **Profª:** Tu podes fazer o desenho e os outros elementos do grupo podem dizer o que fizeram. Há pessoas que têm mais facilidade em escrever e outras em desenhar. É por isso é que está aqui um grupo, para cada um dar as suas contribuições. (EA3_A1)

Durante a reformulação das produções um dos grupos não concorda com a pista que os colegas registaram no seu trabalho argumentando que foi usado um critério que não constava do documento dos critérios de avaliação. A professora, sem fazer juízos de valor, *respeita a autonomia e o trabalho dos dois grupos*:

> **Paulo:** Eu acho que está bom, a frase tem tudo. Por que é que eles puseram dois?
>
> **Profª:** Então vejam lá no 3, às vezes é uma coisinha pequenina.
>
> **Paulo:** E explica na totalidade. Está tudo aqui.
>
> **Susana:** Mais completo não podia estar. Deram-nos um 2 porque repetimos as palavras, mas aquilo não é um critério.
>
> **Profª:** Então escrevam isso, na pergunta que tem essa observação, que usaram um critério que não está lá. (EA3_A2)

Refletir sobre as dificuldades sentidas

João considera que a sua maior dificuldade foi trabalhar com os alunos em grupo. Afirma que no início sentiu que estava a perder o controlo da aula, mas depois percebeu que os alunos trabalhavam, só que de maneira diferente do habitual, por isso, passou a dar a si próprio mais tempo para estar com os grupos e ouvi-los:

> Não foi fácil ao início (…) Mas foi uma aprendizagem porque o que ao princípio parecia uma falta de controlo, depois quando percebi que eles estavam a trabalhar e que realmente funcionava fui descontraindo. Tentei estar mais tempo com cada grupo (…) tentar perceber o que estavam a fazer e depois então ir para outro. (João, E2)

Já Ana refere que a sua maior dificuldade foi colocar questões de modo a contribuir para que os alunos construíssem a sua aprendizagem:

> Fazer perguntas não é fácil e eu tinha sempre receio que a pergunta que eu fosse fazer direcionasse logo para a resposta e não para eles refletirem sobre aquilo que tinham já escrito ou pensado. Eu pelo menos tentei, conscientemente, ter esse cuidado de que a minha intervenção junto dos grupos fosse para eles poderem refletir sobre aquilo que já tinham feito, se estaria de acordo com o que era pedido, se estava o mais completo possível, se a resposta seria adequada à tarefa que estavam a fazer. (Ana, E2)

Discussão e conclusões

A forma como os professores envolvem os alunos nas estratégias avaliativas revela que a aula inicia e termina com momentos de intervenção dos professores para o grupo-turma, com a participação dos alunos. Ao analisar o que os professores transmitem e como o fazem, os resultados revelam que no início da aula os professores focam a sua intervenção na transmissão de aspetos relativos à gestão da aula interagindo com o grupo-turma. No final da estratégia avaliativa os professores interagem, novamente, com o grupo-turma elaborando sínteses que levem à generalização do tópico matemático em estudo e/ou informam aspetos da matemática que complementam a aprendizagem (Semana & Santos, 2012).

O modo de exploração do professor remete para a organização do trabalho em pequenos grupos, por oposição a uma aula centrada no professor. Assim, quando o centro da aula se desloca para os grupos, os professores continuam a transmitir procedimentos mas relativos à sintaxe e semântica do *software*, no sentido de apoiar o início do trabalho com a tecnologia (Hoyles & Noss, 2003). Nesta fase, o professor dirige-se só a cada grupo dando resposta às questões que o trabalho suscita fazendo, também, cumprir regras e normas patentes na tarefa em suporte papel, ao ritmo de cada grupo.

Também quando os alunos se apropriam dos critérios de avaliação a atuação dos professores volta a caracterizar-se por momentos em que transmitem informação relativa aos critérios de avaliação assim como a aspetos da gestão da aula relativos à atividade de coavaliação. A atuação do professor é, assim, caracterizada por esclarecer os alunos sobre significados e o que é importante no momento, contribuindo para a apropriação dos critérios (Nunziatti, 1990; Vial, 2001; Santos & Cai, 2016).

Fora destas janelas de oportunidade para ajudarem os alunos com informações cruciais para o avanço das estratégias avaliativas, os professores intervêm junto dos grupos apoiando o desenvolvimento do raciocínio matemático, quer através da elaboração de registos relativos às suas explorações, quer da elaboração de hipóteses explicativas e de conclusões (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2011), questionando, sempre, os alunos no sentido de contribuir para a regulação do seu trabalho, com intervenções na forma de questões ou apresentações sem incluir respostas. Durante a atividade de coavaliação em que elaboram pistas, para dar feedback, ou durante a reformulação das produções, os professores voltam a fazer os alunos refletir sobre o que fazem ou pensam remetendo-os para os seus produtos de modo a identificarem os próprios erros (Santos & Cai, 2016; Santos & Semana, 2015; Semana & Santos, 2012; Dias, P. & Santos, 2012).

Assim a atuação do professor, ao longo do desenvolvimento da aula, vai alternando entre a transmissão de informações, quer a nível do grupo-turma, quer a nível do grupo, ou apoiando o raciocínio matemático dos alunos com intervenções na forma de questões sem incluir as respostas às questões colocadas decidindo, intencionalmente, a que dar mais atenção, como é possível ver na figura 1 em que se apresenta a atuação do professor de forma esquemática.

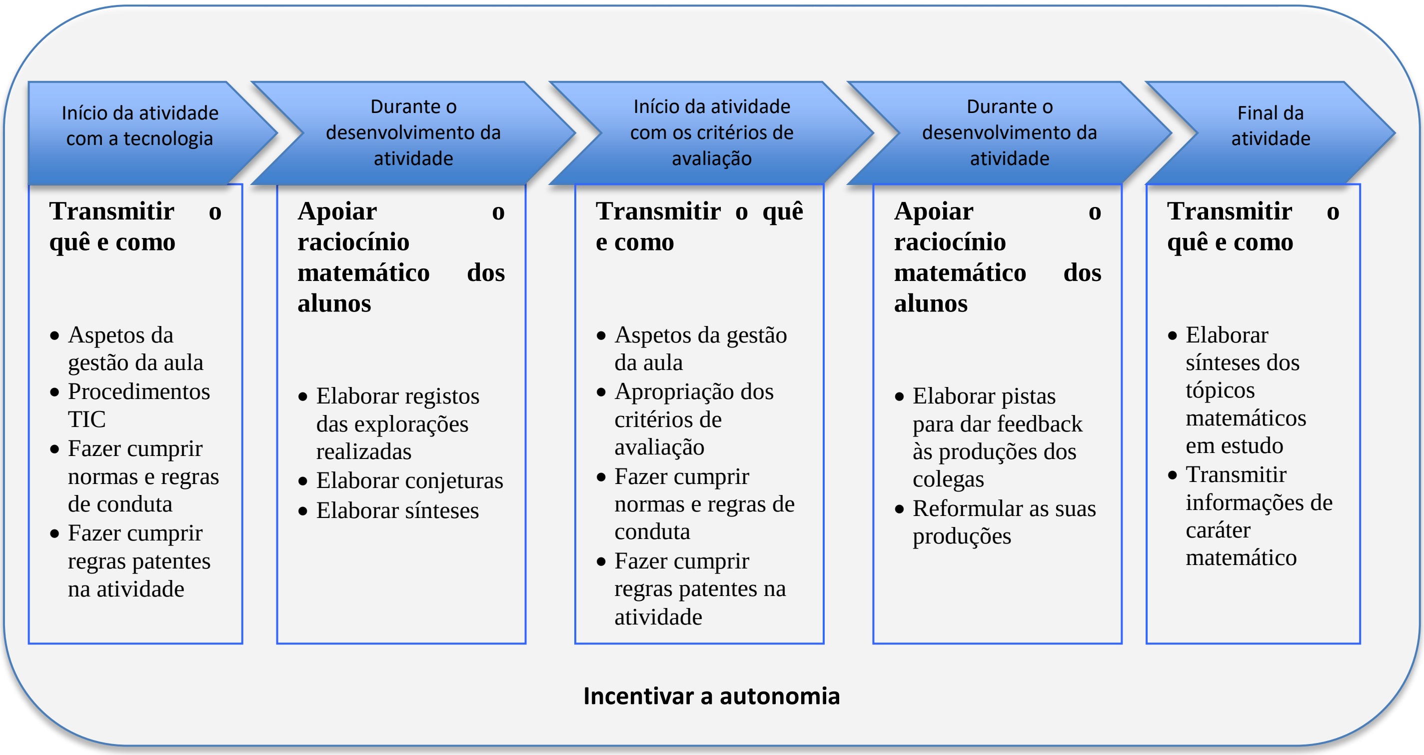


Figura 1 – Esquema da atuação dos professores

Ao longo da aula os professores revelam uma atuação de incentivo à autonomia na participação dos alunos na atividade com a tecnologia, na elaboração dos registos ou discussão de opiniões no sentido de elaborarem produções que sejam efetivamente de todos e com a participação de todos.

Os dados revelam, ainda, que os professores, de início, sentiram dificuldades em alterar a sua prática na sala de aula desenvolvendo um estilo mais interativo e que essas dificuldades se prenderam com a sensação de falta de controlo por requerer uma mudança no estilo de ensino do professor (Black & Wiliam, 2006). Esta mudança de estilo de ensino dos professores pretendia focar-se na ação do aluno, como principal agente regulador da sua aprendizagem, formulando questões para levar os alunos a pensar e desenvolver a sua aprendizagem (Pinto & Santos, 2006), revelando-se, portanto, de grande exigência para os professores (Semana & Santos, 2012).

Referências

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2011). Conjecture-generation through dragging and abduction in dynamic geometry. *Education in a technological world: Communicating current and emerging research and technological efforts*, 100-107.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Coimbra: Edições 70, Grupo Almedina. (obra original em francês, publicada em 1977)

Black, P. & Wiliam, D. (2003). ‘In praise of educational research’: formative assessment. *British Educational Research Journal*, 29(5), 623-637.

Black, P. & Wiliam, D. (2006). Assessment for learning in the Classroom. In Gardner, J. (Ed.) *Assessment and Learning* (9-25). SAGE.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education)*, *21*(1), 5-31.

Dias, P., & Santos, L. (2012). A prática de questionamento oral de um professor de Matemática. In A. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 229-240). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática: Portalegre, Portugal.

Fernandes, D. (2009). Avaliação das aprendizagens em Portugal: investigação e teoria da actividade. Investigação e teoria da atividade. Sísifo. Revista de Ciências da Educação (http://sisifo.fpce.ul.pt), 9, 87-100.

Heron, J., & Reason, P. (2006). The practice of co-operative inquiry: Research ‘with’rather than ‘on’people. *Handbook of action research*, *2*, 144-154.

Jorro, A. (1998). L'inscription des gestes professionnels dans l'action. *En Question*. Aix-en- Provence.

Jorro, A. (2006). L'agir professionnel de l'enseignant. In *Séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la formation*-CNAM, Paris, France.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?. In *Second international handbook of mathematics education* (pp. 323-349). Springer Netherlands.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Guitiérrez & P. Boero (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam. SensePublishers.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês publicado em 2000).

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d´évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques*, *280*, 47-64.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa. Universidade Aberta.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), Avaliação das Aprendizagens (pp. 75-84). Lisboa: DEB, ME.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática (S.E.I.E.M.) (pp. 127-151). Coruña: Universidade da Coruña.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L., & Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook in the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-185). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Santos, L., Pinto, J., Rio, F., Pinto, F., Varandas, J., Moreirinha, O., Dias, P., Dias, S. & Bondoso, T. (2010). *Avaliar para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora e Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Santos, L., & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 65-87.

Semana, S., & Santos, L. (2012). A comunicação oral numa discussão matemática em grupo-turma: o papel da professora. In A. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 307- 320). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática: Portalegre, Portugal.

Storeygard, J., Hamm, J., & Fosnot, C. T. (2010). Determining What Children Know: Dynamic versus Static Assessment. In *Models of Intervention in Mathematics: Reweaving the Tapestry*. National Council of Teachers of Mathematics. (pp. 45-69). 1906 Association Drive, Reston, VA: NCTM.

Timperley, H. (2014). Using Assessment Information for Professional Learning. In *Designing Assessment for Quality Learning*, 137-149. Springer Netherlands.

Vial, M. (2001). *Se former pour évaluer. Pédagogies en Développement*. Bruxelles. De boeck Université.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics Part 2: feedback. Equals: *Mathematics and Special Educational Needs*, *5*(3), 8-11.

A DIFERENCIAÇÃO PEDAGÓGICA COMO ESTRATÉGIA DE RECUPERAÇÃO DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Paula Rangel

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

paularangell@gmail.com

Leonor Santos

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

mlsantos@ie.ulisboa.pt

Resumo: Esta comunicação refere-se a parte de um estudo que tem por objetivo compreender como uma escola secundária localizada nos arredores de Lisboa realiza o acompanhamento de alunos que, apesar de estarem em condições para reprovar, prosseguem para o ano letivo seguinte, inseridos num "projeto de apoio". Para atingir esse objetivo, dois alunos foram selecionados e acompanhados durante um ano letivo, bem como a professora de Matemática da turma, a professora Liz. Seguiu-se uma abordagem interpretativa e qualitativa. Foram observadas aulas na turma da qual os alunos fazem parte e realizadas entrevistas à professora Liz. Percebemos que a professora pratica diferenciação pedagógica atendendo aos alunos que progrediram sem aproveitamento a Matemática. Partindo da mesma tarefa, simplifica-a, quer reduzindo o número de questões ou focando-as, quer o número de dados. Nos momentos formais de avaliação atribui pesos diferentes às questões dos testes.

Palavras-chave: Aprendizagem matemática, diferenciação pedagógica, prática de ensino, tarefas matemáticas.

Introdução

Estudar Matemática costuma ser uma tarefa cercada de questionamentos por parte dos alunos, dos seus responsáveis e de outros membros da comunidade escolar. Além disso, esta disciplina parece estar sempre acompanhada de crenças, como por exemplo, ser uma disciplina de difícil aprendizagem e acessível a poucos. Apesar disso, parece não haver dúvidas quanto à importância da sua aprendizagem. Afirmar que a Matemática é uma disciplina para poucos, pode remeter-nos para a ideia da inteligência como uma unidade estável, fixa, não evolutiva no tempo. Em moldes gerais, essa ideia estaria relacionada com a velha escola da psicologia que deu origem aos testes de coeficiente intelectual (Dweck, 1989). Esta seria a ideologia do dom. Em contrapartida, há outra concepção de inteligência que considera poder ser desenvolvida ao longo do percurso de vida. O indivíduo pode desenvolver qualquer conjunto de estratégias cognitivas em qualquer idade. Esta conceção está mais relacionada com a psicologia cognitiva contemporânea.

Sendo a Matemática uma disciplina importante no currículo escolar e sabendo-se que vários fatores podem interferir em sua aprendizagem, o que fazer quando se verifica que o aluno não atingiu os objetivos esperados? O simples facto de reprová-lo garante que este irá recuperar a aprendizagem matemática perdida? Ou teremos alunos com expetativas, autoestima e competências cada vez mais baixas? Mas, se um aluno não consegue atingir a aprendizagem necessária para a sua aprovação escolar em Matemática, como deixá-lo prosseguir? E ainda, como fica a "autoridade" do professor nessa situação? Refletindo sobre estas questões, parece fácil perceber que criar um acompanhamento efetivo das aprendizagens matemáticas dos alunos no decorrer do ano seria o caminho mais eficaz para a conjugação Aprendizagem-Matemática-Aprovação. Mas de que forma esta recuperação pode ser realizada para que realmente constitua um processo produtivo? Que estratégias utilizar?

Foi tendo em conta todas estas questões que nos propusemos compreender como se realiza o acompanhamento de alunos que, apesar de estarem em condições para reprovar, prosseguem para o ano letivo seguinte, inseridos num "Projeto de Apoio". Nesta comunicação focamo-nos em particular nas seguintes questões: Como se caracteriza a prática de ensino da professora na sala de aula?; Quais as estratégias de recuperação que usa ao longo do ano com estes alunos em Matemática? Em que se diferenciam das usadas com os outros alunos?

Recuperação e reprovação em Matemática

As justificativas normalmente apresentadas pelos professores sobre os motivos para a retenção de alunos são: maturidade, atitude face ao trabalho, caráter ou estado psicológico, comportamento na classe ou ainda capacidade para seguir os colegas de classe ou o ritmo dos docentes (Smith, 1990). Defensores de políticas que incentivam a repetição de ano escolar acreditam que esta é benéfica pois "oferece aos alunos oportunidade para amadurecerem e dominarem matérias e conteúdos que não foram devidamente aprendidos, antes de terem de confrontar temas mais complexos" (Nunes, Reis, & Seabra, 2016, p. 10). Porém, os alunos retidos podem ser prejudicados pela "estigmatização, redução das expetativas sobre o seu desempenho académico por parte dos professores e pais, auto perceção de reduzida competência e baixo potencial e ainda pelos desafios de adaptação a um novo grupo de colegas" (Nunes, Reis, & Seabra, 2016, p. 10). Estes fatores, além de eliminar quaisquer benefícios adquiridos com a reprovação, aumentam a ansiedade do aluno e o seu distanciamento da escola o que resulta em mau comportamento e abandono escolar.

Pelas implicações negativas que a reprovação pode trazer, somos levados a equacionar a recuperação escolar. A recuperação escolar de que tratamos aqui, não é a recuperação da "nota", mas sim a recuperação da aprendizagem matemática do aluno. Muito embora essa se vá repercutir na nota, esta não é a sua finalidade principal. A propósito desta ideia, podemos ainda acrescentar que a fundamentação epistemológica da recuperação está no reconhecimento de que o "conhecimento no sujeito não se dá de uma vez, e só ouvindo, mas por aproximações sucessivas e num processo ativo, de interação [...] há necessidade, simultaneamente, de novas iniciativas e de um tempo de espera" (Vasconcellos, 2002, p. 109). Afinal, "é enquanto o processo de ensino e aprendizagem se desenvolve que faz sentido procurar adequá-lo às características dos diferentes intervenientes da comunidade de aprendizagem" (Santos, 2009, p. 53).

Contribui-se dessa forma também para o desenvolvimento de um autoconceito positivo pelo aluno, para que este se sinta capaz, ainda que num maior período de tempo, de atingir as aprendizagens esperadas e perceber onde chegou. Perceber que ter dificuldades é parte do processo da aprendizagem da Matemática e passar essa mensagem para os alunos, dando tempo para que eles trabalhem as suas dúvidas, é um fator que precisa ser internalizado pelo professor (NCTM, 2014).

Mas não é só o fator tempo que deve ser levado em conta quando se considera a recuperação de alunos, mas também as formas de pensar e estabelecer relações entre o que sabemos e o que aprendemos. Neste sentido, a diferenciação pedagógica "constitui-se como uma resposta orientada pelo princípio do direito de todos à aprendizagem, essencial para dar resposta à heterogeneidade de alunos que frequentam a escola atual" (Santos, 2009, p. 1). Para criar uma aprendizagem real é importante que, além do professor conhecer os seus alunos e saber o que já sabem e conseguem fazer em determinado momento, os ajude também a apropriarem-se das suas aprendizagens. Para isso, é essencial que: seja criado um ambiente de confiança em que o aluno perceba que o professor acredita nele e o apoia; o professor tenha a certeza de que a aprendizagem proposta se adapta aos alunos; o professor apoie e encoraje os alunos no sentido de se expressar e os estimule a ter consciência das suas aprendizagens (Tomlinson, 2008).

A diferenciação pedagógica pode estar centrada nos conteúdos, nos processos e nos produtos. E, apesar de não ser replicável em diversas turmas e requerer conhecimento dos alunos por parte dos professores é um processo que vai melhorando através de tentativa e erro e que deve ser bem planeado em relação ao momento, ao tipo e à finalidade (Santos, 2009).

Tarefas matemáticas e a comunicação na sala de aula

O planeamento de uma aula, seja ela de apoio ou não, deve envolver componentes fundamentais para o alcance do objetivo proposto (Estes, McDuffie & Tate, 2014), como sejam: os objetivos de aprendizagem que se pretendem atingir nessa aula; a progressão do conteúdo, isto é, o que já foi visto e o que será visto a seguir; as necessidades individuais dos alunos e a seleção das tarefas. Os autores alertam para a importância de selecionar uma tarefa que incorpore as três ideias anteriores de forma a dar coerência à aula.

Ponte (2005) define quatro tipos de tarefa, os quais serão usados no desenvolvimento deste trabalho: exercício, problema, investigação e exploração. Cada tarefa possui um papel específico na aprendizagem matemática e por isso é importante propor uma variedade delas. A tabela 1 indica o papel das tarefas no que se refere à aprendizagem.

Tabela 1 – Papel das tarefas na aprendizagem (Adaptado de Ponte, 2005)

	Exercício	Problema	Investigação	Exploração
Desenvolvimento do raciocínio matemático		x	x	x
Desenvolvimento da autoconfiança	x			x
Efetiva experiência matemática		x	x	
Desenvolvimento da autonomia e da capacidade de lidar com situações mais complexas		x	x	

As tarefas podem ainda ser categorizadas de acordo com o nível de exigência cognitiva (Stein e Smith, 1998). Desta forma, as tarefas com baixo-nível de exigência cognitiva dividem-se em tarefas de memorização ou de procedimentos sem conexões e as tarefas de alto nível de exigência cognitiva são divididas em tarefas de procedimentos com conexões e fazer Matemática.

Vale a pena ressaltar que o modo como as tarefas são trabalhadas em sala de aula será determinante no processo de aprendizagem dos alunos (Ponte, 2015). Assim, é importante: (i) fazer acompanhar a apresentação da tarefa com um momento em que professor e alunos fazem em conjunto a sua interpretação, (ii) proporcionar momentos significativos de trabalho autónomo por parte dos alunos, e (iii) conduzir discussões coletivas participativas e aprofundadas (Ponte, Quaresma & Branco, 2011).

A comunicação matemática em sala de aula traz a possibilidade do aluno articular, clarificar, organizar e consolidar o pensamento. Uma boa comunicação sustenta a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático ao estabelecer ligações entre conhecimentos isolados do aluno (Jirotková & Littler, 2003). O significado de expressões é encontrado quando o aluno utiliza a nova linguagem e a integra no seu discurso (Wood & Lafayette, 2000). Quanto ao professor, este formula questões que podem ser agrupadas em três grupos: de focalização, que ajuda o aluno a seguir um raciocínio ultrapassando um obstáculo; de confirmação, que tem como finalidade obter confirmação do conhecimento do aluno e de inquirição, para obter esclarecimentos sobre esse conhecimento (Mason, 2000). Através destas perguntas e da seleção de boas tarefas, o professor poderá encorajar o aluno levando-o a desenvolver também a sua capacidade argumentativa.

Metodologia

Este estudo assenta no paradigma interpretativo através de uma abordagem qualitativa (Creswell, 2012). O estudo teve como base o acompanhamento das estratégias de recuperação aplicadas a dois alunos do 7.º ano (2016/2017) que não tiveram aproveitamento totalmente satisfatório em Matemática, mas que progrediram para o 8.º ano (2017/2018). A seleção destes dois alunos foi feita tendo como critérios principais a disponibilidade para o estudo e o facto de pertencerem a uma turma cujo professor também estava disponível a participar. Os alunos selecionados passarão a ser chamados Manuela e Nuno; nomes fictícios, por si escolhidos. Ambos têm 13 anos e nunca reprovaram. A professora titular da turma, Liz, tem 13 anos de magistério e trabalha na escola desde 2016 como professora contratada. A professora está com esta turma desde o ano letivo anterior.

A recolha de dados foi feita através da observação de 14 aulas, com registo áudio e notas de campo; de 3 entrevistas (E) a Liz, sempre após os conselhos de turma; e de recolha documental, com registo fotográfico das tarefas propostas aos alunos e de suas respetivas resoluções. A recolha de dados decorreu entre Maio de 2017 a Março de 2018.

Após a transcrição dos registos áudio, procedeu-se à análise de dados que seguiu a análise de conteúdo e usou categorias definidas a posteriori moldadas contudo pelo quadro teórico de referência. Foi enviada à professora Liz a análise dos dados realizada para a comentar, o que veio a ser por si reconhecida sem restrições.

Análise de dados

A perceção da professora Liz face à reprovação

Nos seus 13 anos de prática profissional, a professora Liz diz ter mudado de opinião diversas vezes quanto à questão da reprovação ou não de alunos com desempenho final aquém das expectativas. Assim, após perceber que a retenção acabava por ser vista como um castigo, em que os alunos seguiam no ano seguinte desmotivados, trabalhando menos, sentindo-se deslocados devido à diferença de idades com os colegas, passou a posicionar-se a favor da aprovação, apesar do desempenho insuficiente demonstrado:

> A conclusão a que cheguei é que não vejo benefícios. (...) nunca assisti a uma situação em que chegasse ao final do ano e dissesse assim: "Este aluno aprendeu, ganhou alguma coisa por ter repetido de ano" (...) Noto que alunos que foram [reprovados] acabam por prejudicar a [nova] turma exatamente por causa das idades. Porque acaba por ser um aluno mais velho, com outra experiência de vida já, com outros focos, com outras vontades, e acabam por influenciar as outras turmas dos mais novos. Portanto, atualmente, estou do lado em que, se acompanha ou não, progride na mesma. (1ª E)

Entretanto destaca que para que a situação se modifique é necessário que haja empenho dos alunos em fazer diferente:

> Claro que tem que fazer um trabalho com afinco [...] Se teve negativa num ano, no ano seguinte tem que trabalhar um bocadinho mais e isso às vezes não se verifica e a negativa mantém-se. Mas eles conseguem recuperar coisas que não apanharam no ano anterior. (1ª E)

Ao apreciar a escola como um todo, a professora reflete que os professores das disciplinas em que os alunos possuem negativas não se sentem desconfortáveis com a aprovação pois as classificações negativas que atribuíram são mantidas e permanecem nas fichas dos alunos:

> Os alunos nesta escola passam com 6, 7 ou 8 negativas. Mas as negativas aparecem lá. Qualquer pessoa sabe que aquele aluno passou com aquelas negativas. Portanto, o nosso trabalho, a nossa avaliação não é posta em causa porque aparece lá (…) Percebe-se que o aluno progrediu para acompanhar a turma. Não se viu benefícios de ele ser retido. (1ª E)

As classificações negativas nas fichas dos alunos, segundo Liz, tanto podem constituir um fator de motivação ou não, dependendo do aluno:

> Para os alunos, eu acho que há pelo menos dois grupos. Aquele aluno que olha e pensa assim: "Bolas, passei mas tenho oito negativas na pauta" e fica melindrado, fica triste com ele próprio. E há aquele aluno que sabe ao longo do ano. "Ok, eu tenho oito negativas mas vou passar na mesma" e para ele é indiferente. (1ª E)

Apesar da sua posição a favor da transição dos alunos com classificações negativas, Liz não deixa de indicar também dois fatores dificultadores que sente como professora titular a oferecer uma maior ajuda na aplicação do Projeto de Apoio proposto pela escola: a extensão do currículo e o número de alunos por turma:

> A ideia era haver uma maior atenção, uma coisa mais específica, para estes tipos de alunos que progridem com negativas a Matemática. No entanto, acaba por ser um bocado difícil fazer grandes distinções devido ao tamanho dos programas, às matérias que nós temos que lecionar, que são muito grandes, muito extensas. Às vezes não há muito tempo para a gente parar e considerar da forma que a gente quisesse e por outro lado com turmas muito grandes, 30 alunos, é muito complicado a gente ir especificamente a cada aluno ajudar. No entanto, eu acho que a gente acaba por conseguir ajudá-los. (1ª E)

Um facto importante observado nas palavras de Liz é o uso constante da expressão: os alunos "progridem com" e não "apesar das" negativas a Matemática. Essa postura ratifica a visão da professora de uma aprovação transparente em que as classificações negativas dos alunos não são alteradas.

A prática de ensino na sala de aula de Liz

A comunicação. As aulas de Liz estruturam-se em geral nos seguintes momentos: a professora explica a matéria e, de seguida, os alunos resolvem exercícios. Nas interações de Liz com os alunos, as perguntas de focalização e de confirmação estão muito mais presentes.

Durante a *correção das tarefas*, por exemplo, observou-se que Liz, normalmente, faz uso de *questões de focalização* e *de confirmação* com o objetivo de captar a atenção dos alunos, seguir um determinado percurso e ao mesmo tempo ir testando os seus conhecimentos. Assim, a resolução vai sendo guiada e os próprios alunos, juntamente com a professora, podem chegar à resposta correta. Vejamos, por exemplo, o caso em que a aluna Manuela estava a resolver uma questão relacionada com o Teorema de Pitágoras no quadro:

> Profª.: Vamos Manuela, estamos a fazer o teorema de Pitágoras. O que diz o teorema de Pitágoras?
>
> [Silêncio]
>
> Profª.: Se eu te perguntar qual é a hipotenusa do triângulo, sabes dizer-me?
>
> [Manuela responde corretamente.]
>
> Profª.: Então põe lá... A hipotenusa igual....
>
> [Manuela completa no quadro]
>
> Profª.: Quais são os catetos?
>
> [Aluna escreve a soma dos catetos, porém não os eleva ao quadrado]
>
> Profª.: O que falta lá? Está certo o teorema de Pitágoras assim?
>
> [Aluna fica em silêncio]

Grupo de alunos da turma: Os quadrados.

Profª.: Isso, os quadrados onde?

Grupo de alunos da turma: Em todos.

Profª.: Hipotenusa ao quadrado é igual ao cateto ao quadrado mais o cateto ao quadrado.

[Manuela segue resolvendo]

Para *esclarecer dúvidas*, Liz usa mais frequentemente *perguntas de focalização*. Dessa forma, vai direcionando o raciocínio dos alunos até que estes cheguem à forma correta de resolução. Esse fato pode ser percebido no exemplo abaixo em que Manuela está com dúvidas sobre como desenhar o gráfico da função y=2x:

Profª.: Se a função é linear, ela tem que passar onde?

Manuela: Na origem.

Profª.: Então em que ponto é que ela passa?

Manuela: (0,0)

Profª.: De quantos pontos precisas para marcares a reta?

Manuela: Dois.

[Pausa]

Profª.: Já encontrastes os pontos? Já fizestes isso? [pausa]. Posso escolher o zero?

[Silêncio]

Profª.: Não, já cá está. Então se o x for 1, quanto é que dá o y?

Manuela: 2

Profª.: Então encontramos aqui que ponto?

Manuela: (1,2)

Profª.: Então agora marca lá.

Ainda no sentido de *esclarecer dúvidas* dos alunos, verificou-se que, muito frequentemente, Liz utiliza como estratégia a *referência a exercícios anteriormente feitos* cuja forma de resolução seja similar. Por exemplo, em uma aula sobre vetores, a aluna Manuela chama a professora e diz que não entendeu uma dada questão. A professora após olhar a questão responde à aluna: "É parecida com a G-c. Olhe lá". Ou ainda quando o aluno Nuno coloca uma questão e diz: "Professora não estou a perceber essa." A professora abre o manual de Nuno e apenas aponta uma questão parecida e o aluno começa a fazer.

Apesar das perguntas de inquirição não serem usadas com tanta frequência por Liz, observou-se que a professora usa a estratégia de questionar diferentes formas de resolução para uma mesma questão, tal como ilustrado no exemplo abaixo, em que os alunos precisavam de calcular o comprimento de uma escada apoiada a um beliche:

Profª.: Como acham que podemos calcular o comprimento da escada?

João: Teorema de Pitágoras.

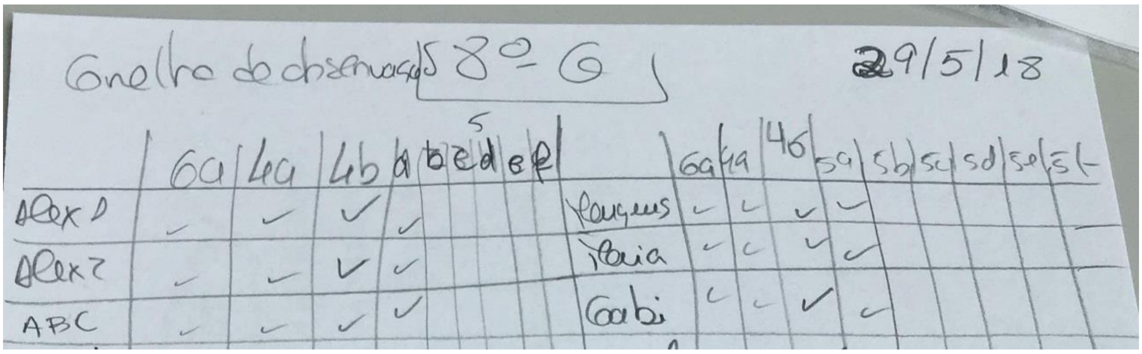
Profª.: Alguém sugere algum outro método?

[Silêncio]

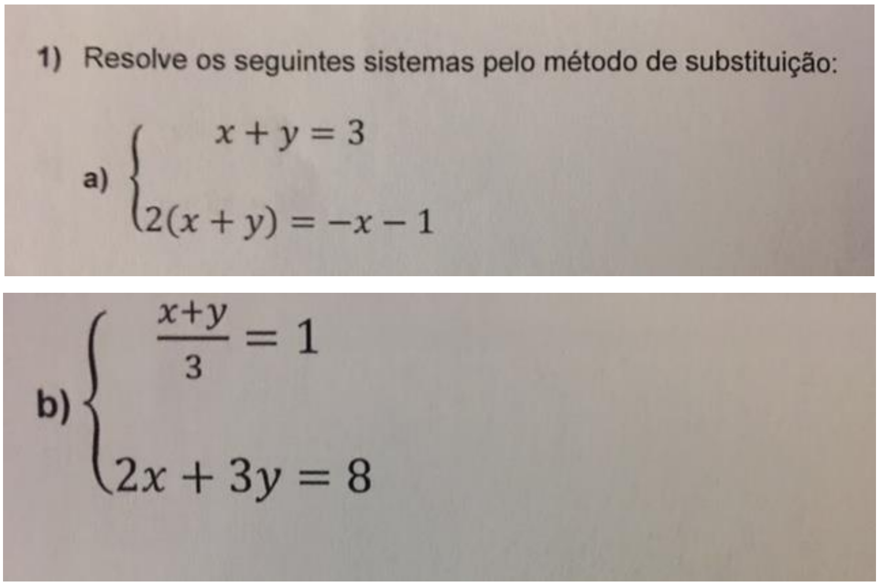
Pedro: Professora, eu usei aquela diagonal assim [diagonal espacial].

Profª.: Muito bem, João. Entenderam o que o João fez?

Cabe ressaltar aqui que a resolução de questões no quadro pelos alunos é um prática frequentemente observada nas aulas de Liz que afirma, inclusive, que esta é uma estratégia que usa para avaliar as aprendizagens dos alunos, como se verifica na grelha abaixo, produzida pela professora:



Tarefas matemáticas. Verificou-se no decorrer das aulas observadas de Liz que a maior parte das tarefas propostas para toda a turma, seja em aula, seja para trabalho de casa ou em teste, é de natureza fechada, como ilustramos, de seguida (figuras 1, 2 e 3).

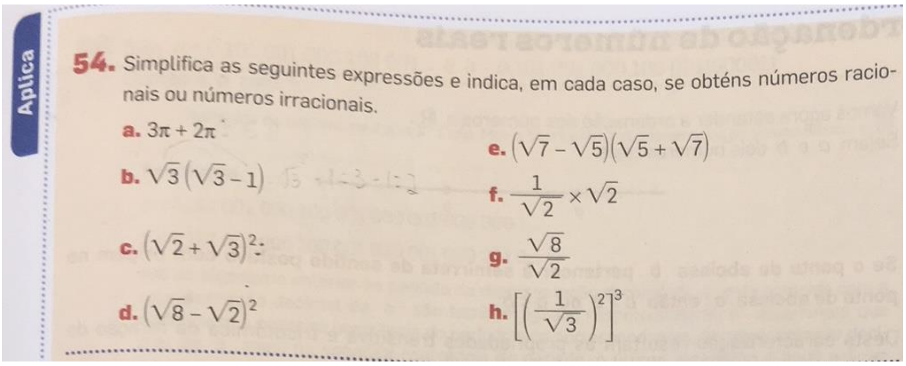


1) Resolve os seguintes sistemas pelo método de substituição:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2(x+y) = -x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

Figura 1 – Exercício proposto para resolver na aula



Aplica

54. Simplifica as seguintes expressões e indica, em cada caso, se obténs números racionais ou números irracionais.

a. $3\pi + 2\pi$

b. $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$

c. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

d. $\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^2$

e. $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$

f. $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$

g. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

h. $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^3$

Figura 2 – Exercício proposto para resolver em casa

1. Qual das expressões seguintes é equivalente a $(x-1)^2 - x^2$?

(A) -1 **(B)** $-2x-1$ **(C)** 1 **(D)** $-2x+1$

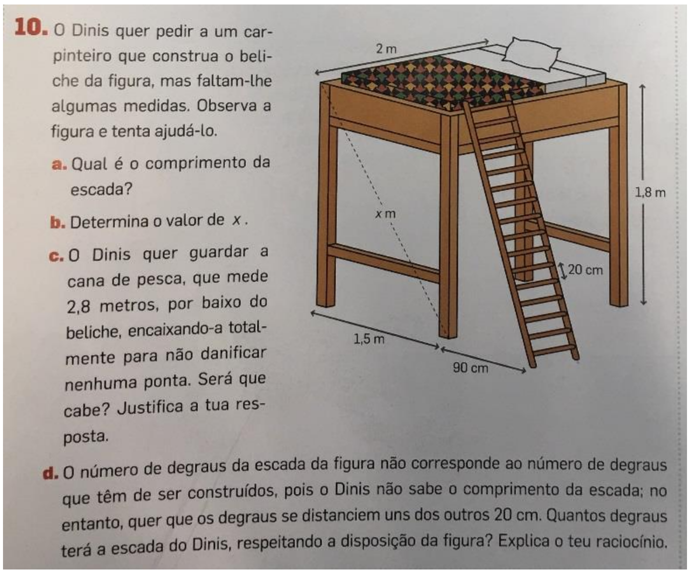
2. Calcula, **utilizando os casos notáveis** da multiplicação:

a) $(2x-1)^2 =$

b) $(3x-1)(3x+1) =$

Figura 3 – Questão de aula / Casos Notáveis da Multiplicação

Por vezes, Liz propõe uma tarefa contextualizada na vida real, com características de problema (figura 4).



10. O Dinis quer pedir a um carpinteiro que construa o beliche da figura, mas faltam-lhe algumas medidas. Observa a figura e tenta ajudá-lo.

a. Qual é o comprimento da escada?

b. Determina o valor de x.

c. O Dinis quer guardar a cana de pesca, que mede 2,8 metros, por baixo do beliche, encaixando-a totalmente para não danificar nenhuma ponta. Será que cabe? Justifica a tua resposta.

d. O número de degraus da escada da figura não corresponde ao número de degraus que têm de ser construídos, pois o Dinis não sabe o comprimento da escada; no entanto, quer que os degraus se distanciem uns dos outros 20 cm. Quantos degraus terá a escada do Dinis, respeitando a disposição da figura? Explica o teu raciocínio.

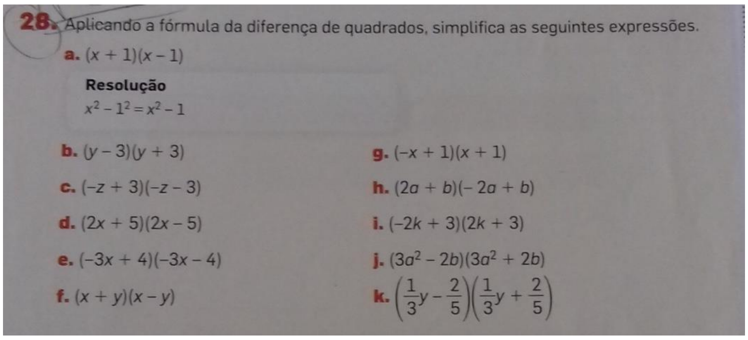
Figura 4 – Problema proposto para resolver na aula

Práticas de diferenciação. A ideia de observar as tarefas propostas e realizadas pelos alunos da turma, teve como objetivo principal verificar a existência de algum tipo de diferenciação em relação às tarefas propostas aos alunos do apoio. Nesse sentido, observou-se que a diferenciação pedagógica se traduziu na redução do número de questões para resolver, na colocação de questões mais simples, no aumento de tarefas fechadas em detrimento de outro tipo de tarefas e nas cotações diferenciadas das perguntas para classificação.

A atribuição de um *menor número de questões, retirando as mais complexas*, nas tarefas direcionadas aos alunos do apoio é vista por Liz como uma etapa no desenvolvimento das suas aprendizagens. Assim, embora as tarefas propostas sejam as mesmas para toda a turma, os alunos do projeto de apoio recebem instruções diferentes sobre as questões a resolver:

> Enquanto às vezes eu digo aos outros "façam os exercícios de 1 a 10", para eles digo, "Olha, esqueçam o 8 e o 9. Foca-te mais nos outros." Porque acho que os outros já são demasiados complicados, enquanto eles não tiverem aquelas bases não vale a pena. (1ª E)

Por exemplo, na tarefa abaixo, a professora solicitou os exercícios 28, 29 e 30 do manual para todos os alunos (figura 5). Entretanto, para os alunos do apoio tirou o exercício 30, uma vez que este, para além do produto, solicita a adição, o que torna a questão mais trabalhosa além de exigir mais conhecimento. Do exercício 28, Liz retirou a alínea j) devido ao expoente dois da potência que cria uma maior dificuldade ao escrever o quadrado, e a alínea k) por envolver frações.



28. Aplicando a fórmula da diferença de quadrados, simplifica as seguintes expressões.

a. $(x + 1)(x - 1)$

Resolução

$x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

b. $(y - 3)(y + 3)$

c. $(-z + 3)(-z - 3)$

d. $(2x + 5)(2x - 5)$

e. $(-3x + 4)(-3x - 4)$

f. $(x + y)(x - y)$

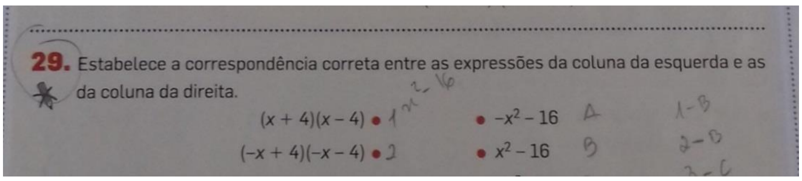
g. $(-x + 1)(x + 1)$

h. $(2a + b)(-2a + b)$

i. $(-2k + 3)(2k + 3)$

j. $(3a^2 - 2b)(3a^2 + 2b)$

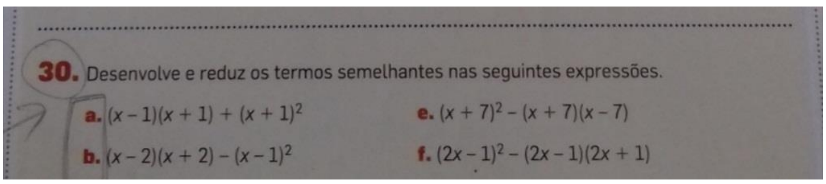
k. $\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}\right)$



29. Estabelece a correspondência correta entre as expressões da coluna da esquerda e as da coluna da direita.

$(x + 4)(x - 4)$ • 1   • $-x^2 - 16$ A   1-B

$(-x + 4)(-x - 4)$ • 2   • $x^2 - 16$ B   2-B



30. Desenvolve e reduz os termos semelhantes nas seguintes expressões.

a. $(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$

b. $(x - 2)(x + 2) - (x - 1)^2$

e. $(x + 7)^2 - (x + 7)(x - 7)$

f. $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(2x + 1)$

Figura 5 – Exemplos de tarefas que foram simplificadas para os alunos de apoio

A fim de *tornar uma questão mais simples*, Liz, muitas vezes, diminui a quantidade de dados no enunciado das questões ou direciona as alíneas:

> Os conteúdos são os mesmos, mas se estivermos, por exemplo a falar do número irracional, enquanto que para os outros eu passo, por exemplo 8 números em um conjunto, para eles ponho só 4. Para eles poderem distinguir. Outras vezes, em questões que são de problemas, o que eu faço é direcionar as alíneas. Enquanto numa pergunta para os outros alunos eu faço a pergunta aberta, neles eu faço mais direcionada. (1ª E)

A figura 6 mostra um exemplo de tarefa com duas versões (A e B) em que a segunda tem menor número de dados:

1) Considera o seguinte conjunto de números reais:

$$A = \left\{1{,}2;\ \sqrt{5};\ -\frac{3}{2};\ \sqrt{25};\ -1;\ -\sqrt{7};\ \frac{4}{2};\ 0;\ 6\right\}$$

Ordena, por ordem **crescente**, os elementos deste conjunto de números reais.

1) Considera o seguinte conjunto de números reais:

$$A = \{1{,}2\ \ -0{,}5;\ \sqrt{100};\ -10;\ 0;\ 6\}$$

Ordena, por ordem **crescente**, os elementos deste conjunto de números reais.

Figura 6 – Tarefa A e B

A figura 7 mostra um exemplo de *tarefa mais aberta não proposta*, inicialmente, aos alunos do apoio:

16. Considera as seguintes frações que representam os números racionais A e B:

$$A = \frac{k}{2^2 \times 5^3} \qquad B = \frac{5^3 \times 7}{10^p} \qquad C = \frac{2}{5 \times n}$$

Nas expressões apresentadas, k, p e n representam números naturais.

a. O número A pode ser representado por uma dízima finita? E o número B? Justifica a tua resposta.

b. Podemos afirmar que o número C pode ser representado por uma dízima finita? Justifica a tua resposta.

Figura 7 – Tarefa não proposta aos alunos do apoio

Nos *critérios de classificação de trabalhos considerados para avaliação sumativa*, há diferenças. Todos valem o mesmo, isto é, não possuem peso diferenciado, como ratifica Liz. “Não há nem sequer a percentagem [...] para ninguém, nesta escola”. Assim, a fim de promover a diferenciação para os alunos do Projeto de Apoio, Liz atribui uma cotação diferenciada nas questões de uma mesma avaliação:

> Geralmente quando o professor faz uma versão normal [de uma avaliação] tem os exercícios de cálculo e depois tem um problema. Geralmente o problema vale um bocadinho mais, porque exige mais. Nas deles, geralmente faço o contrário. Como são mais difíceis, os alunos serão mais penalizados por não conseguirem resolver. (2ª E)

Para Liz, trabalhar com essas diferenciações é uma forma de motivar mais os alunos, que aos poucos vão-se empenhando e evoluindo até que sejam avaliados de forma igual à turma:

> Pronto, eles acabam por ser mais motivados porque conseguem tirar alguns resultados positivos e acabam por se motivar para a disciplina, acabam por estudar um bocadinho mais e vão evoluindo. Quando eu sinto que eles estão a progredir começo a avaliá-los no mesmo nível dos outros e depois vou ajustando. (1ª E)

Perspetiva de Liz face à evolução dos alunos Manuela e Nuno

A avaliação feita por Liz quanto à aprendizagem matemática de Manuela foi positiva no primeiro e segundo períodos do ano letivo. Liz acredita que isto se deve ao facto da aluna estar "mais aplicada este ano do que estava no ano passado" (3ª E). No segundo período, principalmente, a professora diz notar claramente a evolução de Manuela em relação ao ano letivo anterior:

> Eu noto algum progresso [no 2.º período]. Depende muito das matérias. Relativamente ao ano passado eu noto principalmente na Manuela. Noto mais evolução. Não consigo apontar o dedo para um motivo. São tantos os fatores, a maneira de eu trabalhar é a mesma do ano passado. Não sei. Às vezes o sítio da matéria. Ali eles conseguem perceber melhor aquela matéria do que outra e naquela fase conseguem evoluir um bocadinho mais. Depois às vezes faz com que eles se sintam mais motivados e acabem por trabalhar um bocadinho mais. (3ª E)

Entretanto, ao fazer um balanço no final do ano letivo, Liz avalia que, de forma geral, Manuela não teve uma "grande evolução" em relação à sua aprendizagem matemática.

Diferentemente do que aconteceu com Manuela, Liz afirmou notar evolução na aprendizagem matemática de Nuno apenas no 2.º período do ano letivo. No 1.º período, afirma inclusive ter havido regressão na sua aprendizagem:

> Tem que ter alguém ali ao lado, porque perdem-se na brincadeira. No Nuno nota-se perfeitamente. Sempre foi um aluno muito agitado, pouco concentrado e este ano consegue estar pior do que estava no ano passado. (1ª E)

A indisciplina, a imaturidade e a falta de hábitos de estudo foram os fatores apontados pela professora como os principais motivos para explicar a falta de evolução dos dois alunos:

> Como não têm hábitos de trabalho fora da sala de aula acabam por não conseguir consolidar a matéria. Ouvem, mas depois não conseguem reproduzir. Mesmo em sala de aula o trabalho é muito fraco (...) [Sobre o desempenho do] Nuno eu acho exatamente o contrário [do desempenho de Manuela]. Percebo o Nuno muito mais disperso na aula. Acho que ele está menos aplicado este ano. A dificuldade aumenta e eles estão no geral todos muito mais indisciplinados. O 8.º ano é terrível em termos de maturidade. (3ª E)

Entretanto, Liz é de opinião que no 9.º ano a situação tende a mudar: "No 9.º ano geralmente verifica-se que os alunos ficam mais calmos. Não ficam mais trabalhadores, não se vê, mas ficam menos mal comportados" (4ª E).

Conclusões

Observou-se ao longo deste trabalho que durante a prática de ensino com todos os alunos, a professora Liz proporciona momentos de trabalho autónomo após a explicação da matéria feita por si; usa sobretudo perguntas de focalização e de confirmação (Mason, 2000) durante a correção das resoluções dos alunos e no esclarecimento de dúvidas; e mais ocasionalmente perguntas de inquirição quando procura chamar a atenção para diferentes estratégias ou caminhos de resolução de uma tarefa. É ainda de salientar que seja qual for o seu tipo de questionamento existe uma constante preocupação em não fornecer a resposta final e em envolver os alunos em discussões coletivas (Ponte, Quaresma & Branco, 2011). Em relação às tarefas, verificou-se que são na sua grande maioria fechadas com baixo nível de exigência cognitiva (Smith & Stein, 1998), tendo o seu grau de dificuldade ligeiramente aumentado à medida que envolvem simultaneamente diferentes conceitos.

Apesar das tarefas propostas aos alunos do Projeto de Apoio serem basicamente as mesmas dos restantes alunos da turma, são desenvolvidas algumas estratégias de diferenciação pedagógica. Estas estratégias seguem quatro formas distintas, correspondendo a diversos tipos de diferenciação (Santos, 2009): diferença no número de questões propostas (diferenciação de produtos), questões mais simples (diferenciação de conteúdos), maior número de questões fechadas que abertas (diferenciação de processos) e cotação diferenciada das questões (diferenciação de produtos) que se justifica pela necessidade de motivar e incentivar os alunos (Tomlinson, 2008). Contudo, as três primeiras estratégias seguem uma orientação comum, o da simplificação, associada às baixas expetativas de Liz quanto à capacidade dos alunos conseguirem realizar com sucesso as tarefas que propõe aos restantes alunos da turma. Fica a questão de saber até onde vão as implicações para a aprendizagem dos alunos desta prática assente em expetativas reduzidas (NCTM, 2000). A última estratégia parece garantir a coerência da prática avaliativa da professora (NCTM, 2014). Se o foco dos contextos de aprendizagem proporcionados a estes alunos é o do reduzido nível de complexidade, as tarefas a realizar em momentos formais de avaliação terão de ser do mesmo nível.

Embora o balanço que Liz faz face à evolução da aprendizagem matemática dos alunos integrados no Projeto de Apoio não seja muito positivo, o desenvolvimento dessa atitude positiva associada a uma maturidade etária traz uma perspetiva muito mais positiva em relação às suas aprendizagens futuras. Esse facto incentiva a continuação de estudos no sentido do aqui apresentado.

Referências

Creswell, J. W. (2012). *Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Boston: Pearson.

Dweck, C. (1989). Motivation. In A. Lescold, & R. Glaser (Dir.), *Foundations for a Psychology of Education* (pp. 87-137). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Estes, L., McDuffie, A., & Tate, C. (2014). Lesson planning with the common core. *Mathematics Teacher,* 108(3), 207-211.

Jirotková, D., & Litter, G. (2003). Insights into pupil's structures of mathematical thinking through oral communication. *Proceedings of Conference Research in Mathematics Education, Italy*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/251885642_INSIGHTS_INTO_PUPIL'S_STRUCTURES_OF_MATHEMATICAL_THINKING_THROUGH_ORAL_COMMUNICATION

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Nunes, L., Reis, A., & Seabra, C. (2016). *Será a repetição de ano benéfica para os alunos?* Portugal: Fundação Francisco Manuel dos Santos.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to Action: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular (*pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2015). Tarefas. Texto de apoio elaborado no âmbito da disciplina de Fundamentos de Didática da Matemática. IE/Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco,* 1 (1), 9-29.

Santos, L., (2009). Diferenciação Pedagógica: um desafio a enfrentar. *Noésis, 79,* 52-57.

Smith, M. (1990). Teacher´s beliefs about retention. In L. Shepard, & M. Smith (Eds.), *Flunking grades. Research and policies on retention* (pp. 132-151*).* Bristol: Falmer Press.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3 (4), 268–75.

Tomlinson, C. (2008). The goals of differentiation. *Educational Leadership,* 26-30.

Vasconcellos, C. (2002). *Construção do conhecimento em sala de aula*. São Paulo: Libertad.

Wood, T. & Lafayette, W. (2000). Difference in teaching and opportunities for learning in primary mathematics classes. *International Journal of Mathematics Education, 32* (5), 149-153.

TAREFAS DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA EM CONTEXTO STEM: UM POSSÍVEL RECURSO PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Ana Margarida Baioa

Agrupamento de Escolas D. Manuel I – Tavira

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

ambaioa@gmail.com

Susana Carreira

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

scarrei@ualg.pt

Resumo: Neste artigo iremos abordar um possível recurso para a aula de matemática, que poderá promover a capacidade da aplicação da matemática em contextos matemáticos e não matemáticos, mais concretamente num contexto de tecnologia, engenharia e matemática. Trata-se de uma experiência de ensino, em duas turmas de 9.º ano do ensino básico. A metodologia, de natureza qualitativa, é suportada pela investigação baseada em *design*. Os resultados mostram que os alunos conseguem fazer a ligação entre conceitos matemáticos e não matemáticos, deparando-se com obstáculos genuínos que nem sempre surgem noutro tipo de problemas e recorrem aos seus próprios conhecimentos e conceitos intuitivos para alcançar formas de estabelecer a relação entre a matemática e a realidade. A integração de tarefas de modelação, num contexto STEM, apresenta-se como um fator importante para a atribuição de sentido à matemática e ao mundo real, promovendo a aquisição de um conjunto de capacidades como parte integrante do processo de modelação matemática.

Palavras-chave: Modelação matemática; STEM; Interdisciplinaridade; Conhecimentos; Capacidades

Introdução

É cada vez mais consensual a importância de preparar os alunos para que sejam capazes de identificar e entender o papel da matemática no mundo em que vivemos e de fazer julgamentos matemáticos fundamentados, no sentido de se tornarem, na sua vida futura, cidadãos reflexivos, interessados e construtivos (Alsina, 2002), qualquer que seja a área de conhecimento e de experiência em que a matemática intervenha.

Esta preocupação é veiculada por vários autores que, no âmbito dos seus estudos, têm mostrado a relevância das capacidades que os alunos desenvolvem através da resolução de problemas ou projetos centrados em situações reais, em que a matemática intervém, ajudando-nos a compreender o mundo em que vivemos (Keitel, 1993; Skovsmose, 1995; Bassanezi, 2002; Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Mousoulides, Chrysostomou, Pittalis & Christou, 2010).

Desde sempre, a matemática tem sido chamada a resolver problemas que surgem noutras áreas do conhecimento, designadamente nas ciências experimentais, e a explicar situações ou fenómenos do mundo real. Em muitos dos casos, são elaborados modelos matemáticos para resolver o problema colocado ou para perceber e atuar sobre determinada situação. A natureza dos problemas do mundo atual, nomeadamente pela sua complexidade e pela importância da conjugação de diversos saberes científicos para a sua resolução, torna essencial que os alunos tenham contacto com diversas questões relacionadas com a modelação matemática, tornando-se importante, desde cedo, capacitá-los da utilização da matemática em contextos matemáticos e não matemáticos (DGE, 2018).

Argumentos e recomendações como a anterior contribuem para justificar a inclusão da modelação matemática no ensino e nos currículos de matemática (Blum & Niss, 1991; Meyer, Caldeira & Malheiros, 2011). Mas para se conseguir estabelecer o diálogo entre diversas ciências e obter contributos decisivos da matemática na resolução de problemas é necessário não apenas saber conceitos e métodos matemáticos, mas também ser capaz de efetuar a sua aplicação em situações que envolvem outras ciências ou outros domínios de conhecimento. Essa intenção começou, primordialmente, no ensino universitário, passou depois para o ensino secundário e progressivamente tem-se estendido ao ensino básico (Araújo, 2010).

São vários os investigadores que propõem o uso de uma abordagem de ensino da matemática baseada em resolução de problemas interdisciplinares que espelham os princípios da modelação matemática (Haines, Galbraith, Blum & Khan, 2007; Lesh & Doerr, 2003; Michelsen, 2006, 2015; Meyer, Caldeira & Malheiros, 2011; Leung, 2018). Mais recentemente tem sido internacionalmente proposta e explorada uma abordagem de ensino baseada em resolução de problemas que integrem as áreas da Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (designada abreviadamente por STEM) (Leung, 2018; Kelley & Knowles, 2016; Baker & Gallanti, 2017)

O Processo de Modelação matemática

É razoável começar por admitir que a especificidade da modelação matemática a nível profissional seja diferente da especificidade da modelação matemática a nível escolar, pois os objetivos a atingir são diferentes, os conhecimentos dos alunos estão longe dos conhecimentos dos matemáticos que se dedicam à modelação em situações mais complexas, os contornos dos problemas a tratar são distintos, a dinâmica do trabalho e a natureza das discussões matemáticas são muito díspares (Matos & Carreira, 1996; Lesh & Zawojewski, 2007; Olley, 2015). Além disso, há que ter em linha de conta o tipo de interação que é própria do ambiente de sala de aula, os conceitos e a sequência com que são abordados no currículo escolar (Biembengut & Hein, 2003).

Por ser uma atividade que valoriza a atitude investigativa e a natureza exploratória dos problemas e da sua interpretação, em termos de conceitos matemáticos, a modelação matemática permite a organização e (re)organização de conceitos de forma mais contundente (Bueno & Reis, 2007); os alunos têm aí um campo de trabalho muito mais amplo, seja porque precisam de recolher dados reais, desenvolver um modelo real, ou tratar dados e interpretar resultados obtidos por meio de matematização. Dessa forma, espera-se que os conceitos da matemática se tornem mais significativos, pois “o conhecimento explorado é de natureza interdisciplinar, permitindo a compreensão e interpretação da realidade vivida” (Barbosa, 1999, p. 70).

Uma das formas de conceber a intervenção da matemática na resolução de problemas do mundo real é considerar a execução do chamado processo de modelação matemática. Esse processo define-se sumariamente pelas seguintes etapas e representa-se habitualmente por meio de um esquema cíclico (Figura 1):

i) identificação de um problema ou de uma situação real e das suas variáveis,
ii) passagem dos dados e condições do mundo real para a matemática, através da matematização,
iii) construção de um modelo matemático e a sua aplicação na procura de soluções matemáticas que posteriormente são traduzidas e verificadas no mundo real,
iv) revisão do modelo e possível refinamento, regressando à análise do problema real.

Usualmente este processo é concebido através de iterações cíclicas que visam a procura de um modelo que melhor responda ao problema ou melhor elucide a situação inicial, onde "o resto do mundo" corresponde a situações fora da matemática, como por exemplo, situações do dia-a-dia, incluindo problemas colocados em contextos profissionais, sociais ou da vida real e a "Matemática" será entendida como a área disciplinar da matemática (Blum & Niss, 1991; Ferri, 2006; Blum & Leiß, 2007).

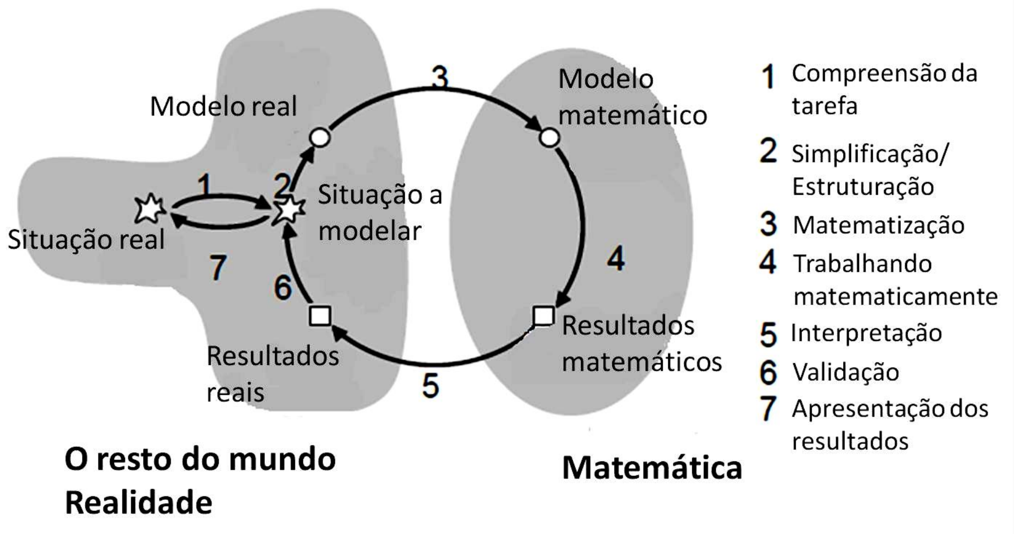


Figura 1 – Ciclo de modelação matemática (Blum & Leiß, 2007)

A modelação matemática permite, em particular, estabelecer conexões com outros campos da ciência, além de construir novos conhecimentos e capacitar os alunos para a aplicação da matemática em contextos matemáticos e não matemáticos. Em ambas as situações, o professor tem um papel fundamental de orientador do processo, pois acompanha, esclarece e coloca questões que provocam a reflexão dos alunos sobre estratégias e decisões tomadas.

Há ainda que considerar tendências atuais quando se associa a modelação matemática ao trabalho com outros domínios e áreas das ciências, designadamente no contexto escolar. Por exemplo, Hurd (2002, citado por Kfouri, 2006, p. 2) chama a atenção para a necessidade de uma nova postura em relação ao ensino de ciências: “O ensino de ciências do século XXI deve ser organizado em termos de problemas, projetos, investigações e ensaios relativos aos assuntos da sua própria cultura, de forma que os estudantes participem na tomada de decisão, formando julgamentos, e escolhendo ações que envolvem elementos de risco, incerteza, valores e ética; fazendo uso de conhecimentos científicos e tecnológicos”.

“O uso da modelação matemática no ensino de ciências, em qualquer nível, pode ser uma forma de trazer questões a alunos e professores, despertando a reflexão e o espírito crítico tão necessários para ter educação científica ao invés de treinamento para resolução de problemas padronizados” (Cury, 2003, p. 15). Assim, a modelação matemática, na perspetiva da interdisciplinaridade, deve ser vista como uma das finalidades do ensino da Matemática que, em Portugal, esteve presente em programas curriculares do ensino básico anteriores e que que agora é reforçada no documento referente às Aprendizagens Essenciais de Matemática em articulação com o Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, designadamente quando se propõe explicitamente:

> Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos. (Aprendizagens Essenciais 7.º ano de Matemática, DGE, 2018**,** p. 2)

Assim, o objetivo deste estudo é promover o desenvolvimento de capacidades inerentes à atividade de modelação matemática, tais como, compreender, analisar, interpretar, comunicar ideias, procedimentos, raciocínios e resultados através da realização de tarefas de modelação matemática em contexto STEM.

Modelação matemática e interdisciplinaridade

Vários investigadores propõem uma abordagem didática para o ensino da matemática que se baseia em experiências de resolução de problemas interdisciplinares que espelham os princípios da modelação matemática (Haines, Galbraith, Blum, & Khan, 2007; Lesh & Doerr, 2003). Especificamente, propõem a introdução de tarefas de modelação em contexto interdisciplinar contemplando a matemática e as ciências (Mousoulides & English, 2011).

O ensino interdisciplinar é frequentemente visto como uma forma de resolver alguns dos problemas recorrentes em educação, tais como a fragmentação de matérias e o ensino isolado de disciplinas e conteúdos. É visto como uma forma de apoiar a transferência de conhecimentos, de ensinar os alunos a pensar e raciocinar, oferecendo um currículo mais relevante para os alunos (Marzano, 1991), ao enfatizar o estabelecimento de ligações entre diferentes áreas de conhecimento.

As abordagens de ensino-aprendizagem que integram áreas curriculares diversas têm ganho o apoio da ciência cognitiva, onde investigadores sugerem que a aprendizagem de grandes ideias e quadros conceptuais é mais poderosa do que a aprendizagem de unidades ou de ideias fragmentadas (Caine & Caine, 1993; Donovan & Bransford, 2005). O ensino interdisciplinar incentiva conexões entre as disciplinas para ajudar os alunos a construírem conhecimento de forma mais consistente, menos fragmentada e isolada e mais interligada. Uma dessas abordagens é a educação STEM integrada.

As tarefas em contexto STEM, pela sua natureza, levam os alunos a focarem-se em conexões e inter-relações entre conteúdos, de tal modo que o conhecimento novo é construído a partir de conhecimentos anteriores, organizado à volta de grandes ideias, conceitos ou temas, desenvolvido de forma a envolver interações entre conceitos e processos, situado num contexto específico ou numa situação concreta; o conhecimento é fundamentalmente construído através de um discurso que se vai produzindo socialmente ao longo do tempo (Berlin & White, 1995).

A educação STEM representa um esforço para combinar ciência, tecnologia, engenharia e matemática num mesmo contexto e ambiente de trabalho, assentando nas relações que se podem gerar entre conteúdos científicos e problemas da vida real, em que as quatro áreas do conhecimento poderão ser relevantes, ainda que não tenham que estar obrigatoriamente presentes ao mesmo tempo (Moore, 2008; Zawojewski, 2010; Michelsen, 2006; Kelley & Knowles, 2016). Uma possível forma de entender a estrutura combinada e interdependente das várias competências e habilidades envolvidas na integração de STEM é proposta por Kelley & Knowles (2016) num esquema elucidativo (Figura 2). O esquema sugere um aparelho de roldanas que conecta a aprendizagem situada de STEM, os produtos de engenharia, a investigação científica, a literacia tecnológica e o pensamento matemático como um sistema integrado. Cada roldana no sistema conecta práticas comuns dentro das quatro disciplinas de STEM e está vinculada à corda da comunidade de prática. Um relacionamento complexo do sistema de roldanas deve funcionar em harmonia para garantir a integridade de todo o sistema. É claro que não se determina que todos os quatro domínios de STEM integrados tenham de funcionar durante toda a experiência, mas antes salienta-se que é necessária uma clara compreensão do relacionamento que pode ser estabelecido entre os diversos domínios e que isso envolverá a constituição de uma comunidade de prática.

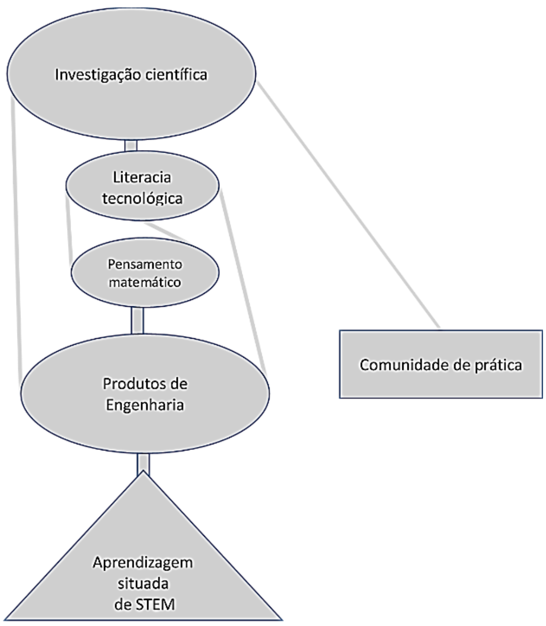


Figura 2 – Esquema conceptual de aprendizagem interdisciplinar em contexto STEM (Kelley & Knowles, 2016)

Existem estudos em que as atividades desenvolvidas combinam apenas a engenharia e a matemática e onde o ciclo de modelação matemática é utilizado como o referencial de organização e orientação do trabalho a desenvolver pelos alunos (Mousoulides & English, 2008, 2011; Gallegos, 2018), visando, em especial, a aprendizagem e exploração de novos aspetos envolvidos num sistema real. Nesse tipo de tarefas e problemas são claramente colocadas em primeiro plano: a capacidade de utilizar conceitos, técnicas, procedimentos, propriedades matemáticas para analisar, resolver e interpretar a situação problemática, a capacidade de abstração e generalização, a capacidade de compreender, elaborar raciocínios lógicos e comunicar matematicamente, a capacidade de resolver problemas de modelação matemática, de descrever, explicar e justificar, oralmente e por escrito as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e as conclusões obtidos (DGE, 2018).

Neste texto, damos especial atenção à combinação entre tecnologia, engenharia e matemática, em tarefas que promovem a geração de modelos conceptuais, tendo por base a utilização de modelos físicos de uma situação real; este contexto propõe, especificamente, a resolução de problemas da realidade que envolvem a simulação de uma situação e a modelação matemática de uma parte da realidade em estudo, com a intenção de construção de um protótipo conceptual ou físico. A utilização de modelos físicos, simulações e protótipos promove a atividade de modelação matemática sob condições que revelam um paralelismo evidente com problemas reais, para os quais se buscam soluções reais (Carreira & Baioa, 2009, 2015).

Questões de investigação

Ainda há muito para explorar e aprender sobre o trabalho interdisciplinar, mais concretamente em STEM, onde a modelação matemática tenha um papel central, não existindo ainda teorias que suportem esta metodologia de ensino, mas sim pequenos estudos e abordagens propostas, tal como o ensino integrado em STEM.

Assim, neste artigo pretende-se contribuir para uma maior compreensão de como os alunos desenvolvem a sua atividade na aula de matemática a partir de situações que envolvem várias áreas do conhecimento, em torno da realização de tarefas de modelação matemática de caráter interdisciplinar em contexto STEM. Procura-se, em especial, perceber aspetos dessa atividade que contribuem para desenvolver nos alunos capacidades que lhes permitam interligar diferentes áreas do conhecimento na resolução de problemas. Todo o *design* da experiência de ensino desenvolvida assentou na formulação da seguinte conjetura:

> A realização de tarefas de modelação matemática em contexto STEM contribui para a promoção de trabalho interdisciplinar e para o desenvolvimento de capacidades tais como, compreender, analisar, interpretar, comunicar ideias, procedimentos, raciocínios e resultados.

O estudo desenvolveu-se em torno da implementação de um conjunto de tarefas em sala de aula e a obtenção de dados foi conduzida por forma a promover respostas à seguinte questão orientadora do estudo: como se desenvolve e o que advém da atividade dos alunos, em termos de capacidades, no decurso da realização de tarefas de modelação matemática em contexto STEM?

Metodologia

Neste estudo foram utilizados modelos físicos na forma de estruturas (ou aparatos) em tarefas que envolveram a resolução de problemas reais, inspirados no cenário hipotético de uma solicitação de um cliente, um utilizador ou um consumidor. Todas as tarefas envolveram algum tipo de simulação, realizada na sala de aula, com recurso a um aparato físico e a diversos materiais, numa lógica de experiência prática. As situações reais consideradas foram escolhidas de modo a envolverem ideias e conceitos de matemática que os alunos já possuíam, integrados com métodos e práticas da engenharia e de outras ciências De acordo com estudos que partilham elementos similares foi adotada uma investigação de carácter qualitativo, baseada em *design* (Cobb, 2000; Kelly, Baek, Lesh & Bannan-Ritland, 2008). O estudo contemplou até ao momento dois ciclos de implementação: o primeiro em três turmas do 7.º ano de escolaridade, e um segundo ciclo em duas turmas de 9.º ano, consideradas turmas com aproveitamento global médio, nas quais foram realizadas cinco intervenções em sala de aula.

Neste artigo iremos apresentar a segunda tarefa, de uma série de cinco, aplicadas nas duas turmas envolvidas no segundo ciclo de investigação, de uma escola básica do Algarve. As turmas compreendem no seu conjunto 46 alunos, com idades compreendidas entre 13 e 15 anos. As tarefas foram implementadas durante o 2.º e o 3.º período escolares no ano letivo 2016-2017.

Os alunos organizaram-se em grupos de trabalho de 4 ou 5 elementos e, em todas as aulas conduzidas no âmbito do estudo, receberam conjuntos idênticos de materiais e modelos físicos para o desenvolvimento de simulações. Os dados empíricos selecionados para este artigo foram recolhidos através de captação de vídeo e áudio dos grupos de trabalho, bem como de fotografias de detalhes. Foram captados registos vídeo e áudio em 3 grupos, por turma, e foi feita a gravação apenas em áudio de 2 grupos, por turma.

Cada tarefa de modelação foi desenhada segundo uma estrutura que envolve quatro partes:

(1) Introdução da tarefa (momento em que a situação e os vários elementos são apresentados e clarificados);
(2) Trabalho prático com os modelos físicos, envolvendo recolha de dados;
(3) Representação, análise dos dados recolhidos e construção de um protótipo (produto final);
(4) Elaboração de um relatório escrito e partilha e discussão dos produtos obtidos.

A tarefa remete para a criação de um sistema de calibração de tomates onde conceitos como a relação entre diâmetro e área do círculo, semelhança de triângulos, proporcionalidade, proporção, intervalos numéricos, entre outros, estão implícitos. Os alunos tinham à sua disposição um trilho em madeira em forma de V, uma amostra de tomates, divisórias em cartão, fita métrica e fita-cola (Figura 3). O objetivo era a criação de um sistema de calibração dos frutos, tendo por referência o diâmetro dos tomates de forma a responder à necessidade de criar um equipamento com o qual um pequeno agricultor pudesse fazer a calibração e seriação dos tomates colhidos, de modo rápido e eficiente. Depois de ter sido criado um protótipo de um tal sistema de calibração, com recurso à experimentação e à simulação realizadas com o trilho em V, cada grupo voltou a passar a sua amostra de tomates pelo trilho, para o teste e validação do respetivo protótipo.

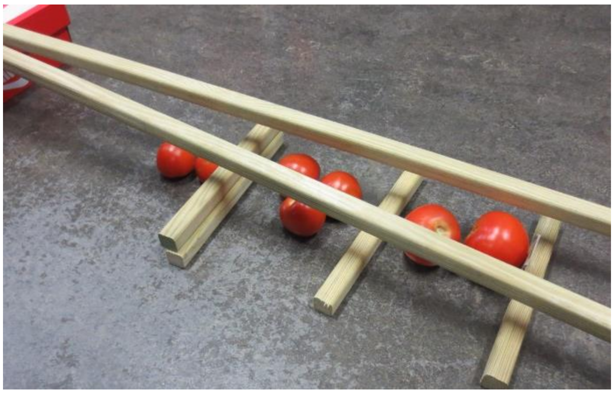


Figura 3 – Aparato físico usado para simular um trilho em V para calibração de frutos

As categorias de análise dos dados obtidos com a implementação da tarefa de calibração de tomates referem-se ao propósito geral de perceber como os alunos desenvolvem a sua atividade, considerando especialmente as capacidades que são promovidas e postas em ação durante essa atividade. Assim, as categorias são definidas em termos de: compreensão do problema, relação entre conceitos matemáticos e não matemáticos, raciocínio matemático e comunicação.

Apresentação e discussão de resultados

A apresentação de resultados será referente apenas a um grupo de alunos, pois a sua análise revelou-se suficiente para extrair resultados e sustentar conclusões relativas à questão colocada, isto é, compreender de que forma a atividade dos alunos na tarefa promove e põe em ação um conjunto de capacidades fundamentais diretamente envolvidas na resolução de uma tarefa que diz respeito a uma situação do mundo real. Os alunos estão identificados pelas letras R e M e a professora pela letra P.

1.ª parte da tarefa

O enunciado da tarefa (Figura 4) foi lido pelos alunos e foram esclarecidas as dúvidas necessárias para poderem avançar para a fase seguinte. A compreensão do problema não revelou grandes dificuldades por parte dos alunos.

Um pequeno produtor de tomates está a terminar a sua primeira colheita do ano. A colheita dos frutos está a ser feita de forma contínua e os tomates estão a ser armazenadas em caixas.
O seu objetivo é a venda dos tomates a uma empresa distribuidora que pretende a entrega dos frutos em caixas segundo diferentes calibres. A calibração de frutos pode ser feita segundo vários critérios (cor, peso, tamanho), sendo o tamanho o mais frequente e mais simples.
O agricultor contactou uma firma de equipamentos agrícolas, solicitando aconselhamento para uma forma eficiente e rápida de calibração de tomates por tamanho.
Os técnicos estão agora analisar o pedido do agricultor e a ensaiar um protótipo para a calibração dos tomates, como se segue.

Resposta a consulta Nº FR26 de "Tudo fresquinho", 02/03/2017
- Amostra de tomates retirados de 5 caixas sem critério
- Análise de tamanhos e definição de calibres
- Separação pelo sistema em forma de V
- Definição de modelo de separação para operação do mecanismo

Da experiência…

Tens à tua disposição uma amostra de tomates, tesoura, fita métrica e fita-cola.
Utiliza o trilho formado por duas barras ligadas numa extremidade, que devem ser colocadas em plano inclinado e com um ângulo de abertura conveniente. Tens cartão rígido para colocar verticalmente por baixo do trilho de modo a formar divisórias. Os tomates, ao rolarem no trilho deverão cair na divisão certa de acordo com o seu calibre.

…ao modelo

Define as classes de calibre dos tomates, usando os diâmetros. Regula as separações a colocar no mecanismo em forma de V para que os tomates, ao deslizarem sobre os trilhos, caiam nas aberturas corretas e fiquem separados por calibres.

Figura 4 – Enunciado da tarefa "Calibração de tomates"

2.ª parte da tarefa

Os alunos começaram por analisar a amostra de tomates e colocaram-nos em fila por tamanho (Figura 5).

Figura 5 – Tomates dispostos organizadamente por ordem de tamanho

Construíram as divisórias, colocaram-nas debaixo da calha de forma a obterem zonas de abertura onde cairiam tomates do mesmo calibre. Começaram a fazer deslizar os tomates, um a um, e a perceber se as divisórias estavam colocadas no sítio pretendido, medindo as distâncias desde o início da calha até ao sítio onde o tomate tinha caído (Figuras 6 e 7).Os alunos realizaram várias experiências de acordo com a simulação organizada (Compreensão do problema).

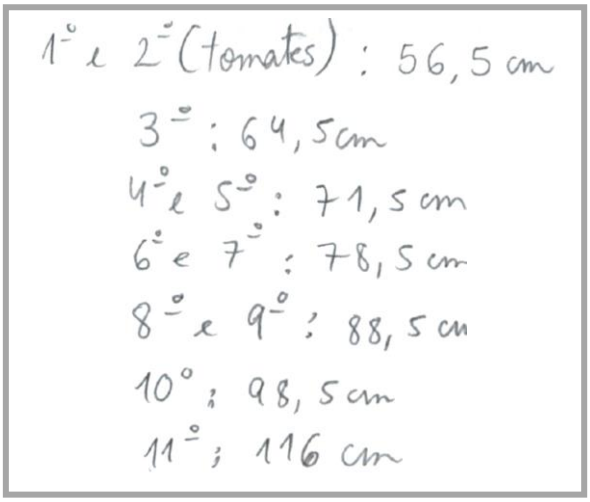
Figura 6 – Tomate a deslizar pela calha antes de cair entre o trilho

Figura 7 – Medição do comprimento da calha até ao ponto onde o tomate cai

O diálogo seguinte mostra a capacidade dos alunos em construir intervalos adequados aos vários tamanhos dos tomates (Raciocínio matemático).

> R: *Este agora aqui tem que ser separado.*
>
> M: *Deixa ver se ele entra…*(na divisória)
>
> R: *Entrou!*
>
> M: *Espera… Deixa medir.*

E registaram os dados na sua folha (Figura 8).

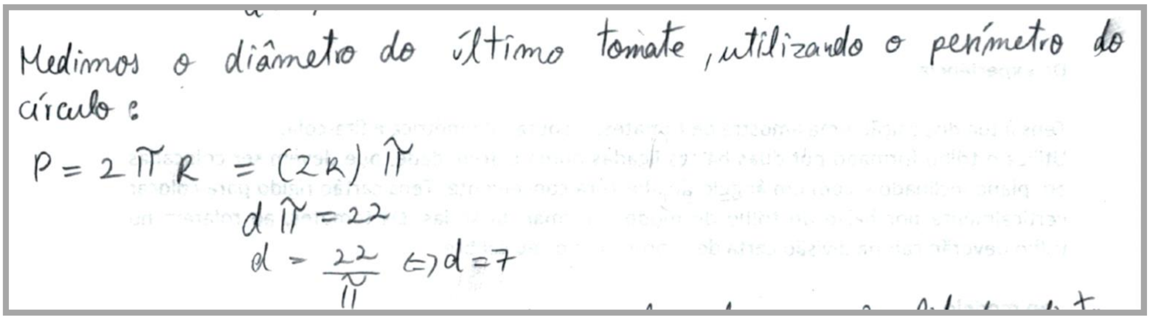


1.º e 2.º (tomates) : 56,5 cm
3.º : 64,5 cm
4.º e 5.º : 71,5 cm
6.º e 7.º : 78,5 cm
8.º e 9.º : 88,5 cm
10.º : 98,5 cm
11.º : 116 cm

Figura 8 – Extrato do relatório com os dados das medições efetuadas

<u>3.ª parte da tarefa</u>

Para continuarem o trabalho, os alunos tiveram que descobrir o diâmetro dos tomates para a construção dos intervalos para a calibração. Esse diâmetro foi calculado através da medição do perímetro do tomate e da fórmula do perímetro de uma circunferência (Raciocínio matemático) (Figura 9).



Medimos o diâmetro do último tomate, utilizando o perímetro do círculo:

$P = 2\pi R = (2R)\pi$

$d\pi = 22$

$d = \frac{22}{\pi} \Leftrightarrow d = 7$

Figura 9 – Extrato do relatório: cálculo do diâmetro do maior tomate

Uma das ideias do grupo foi repetir o cálculo para todos os tomates, mas a professora desafiou-os a tentar arranjar uma outra alternativa (Comunicação).

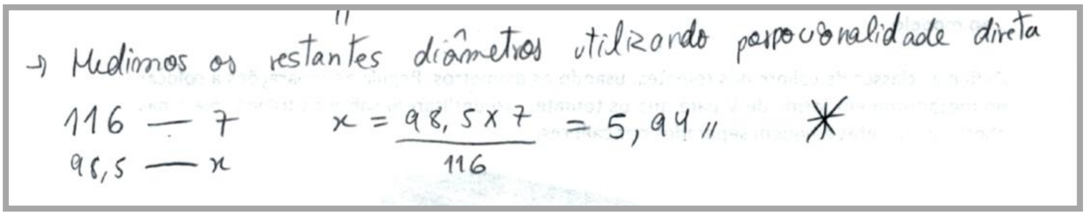
P: *Será que não conseguem calcular os diâmetros sem estarem a medir o perímetro de todos os tomates? Com os conhecimentos matemáticos que têm, como poderiam arranjar uma alternativa?*

M: *Proporcionalidade direta?*

…

R: *Temos vários triângulos. É aquilo de que um tem um tamanho e o outro tem outro proporcionalmente.*

Depois de algum tempo de discussão entre o grupo e a professora chegaram à conclusão de que podiam utilizar a semelhança de triângulos e a proporcionalidade direta ou a noção de proporção entre as dimensões dos triângulos e o diâmetro das circunferências. Dito de outra forma, construíram uma relação entre as dimensões da calha e o diâmetro dos tomates (Relação entre conceitos matemáticos e não matemáticos/Raciocínio matemático) (Figuras 10 e 11).



→ Medimos os restantes diâmetros utilizando proporcionalidade direta

116 — 7

98,5 — x

$x = \frac{98,5 \times 7}{116} = 5,94$

Figura 10 – Extrato do relatório: cálculo dos diâmetros

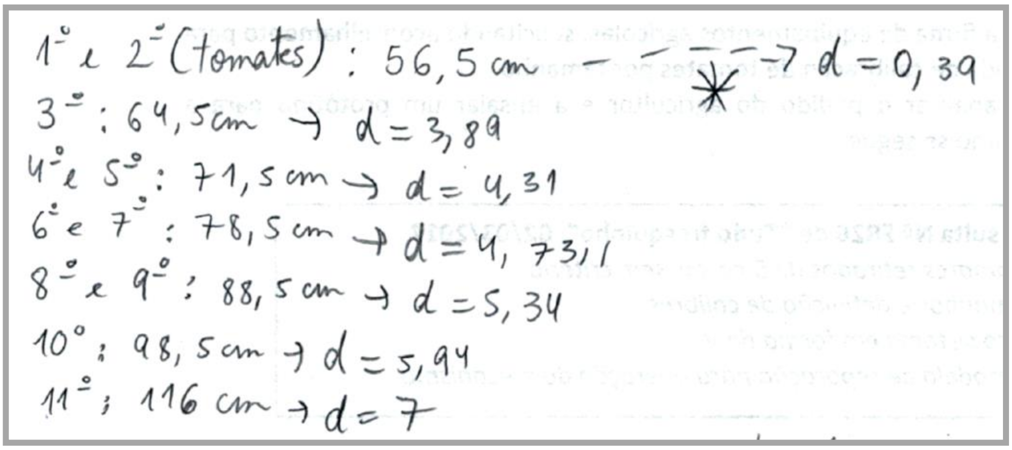

1.º e 2.º (tomates) : 56,5 cm → d = 0,39 *
3.º : 64,5cm → d = 3,89
4.º e 5.º : 71,5 cm → d = 4,31
6.º e 7.º : 78,5 cm → d = 4, 7311
8.º e 9.º : 88,5 cm → d = 5,34
10.º : 98,5 cm → d = 5,94
11.º ; 116 cm → d = 7

Figura 11 – Extrato do relatório: indicação do diâmetro correspondente a cada tomate

Para terminar, escreveram uma tabela onde colocaram a categoria para cada separação de tomates com a calibragem correspondente (Comunicação) (Figura 12).

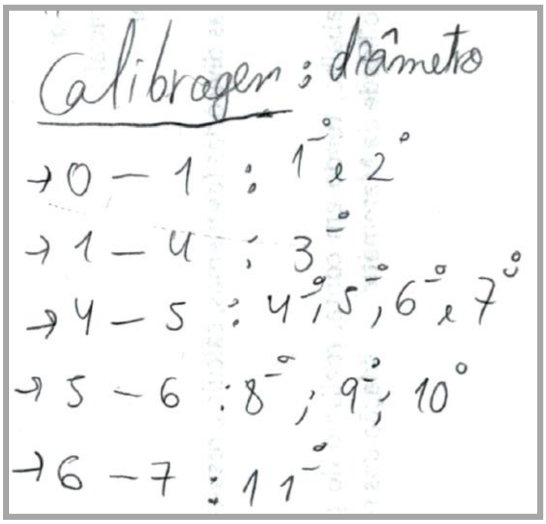

Calibragem : diâmetro
→ 0 – 1 : 1.º e 2.º
→ 1 – 4 : 3.º
→ 4 – 5 : 4.º, 5.º, 6.º e 7.º
→ 5 – 6 : 8.º ; 9.º ; 10.º
→ 6 – 7 : 11.º

Figura 12 – Extrato do relatório

<u>3.ª parte da tarefa</u>

Os alunos descreveram muito sucintamente o processo realizado, sem explicitarem todas as hipóteses colocadas e os vários passos percorridos. Colocaram, no entanto, no seu relatório todos os cálculos efetuados, relacionando os cálculos matemáticos e os resultados obtidos com a situação em estudo (Comunicação).

Tendo em conta estes resultados, podemos estabelecer o seguinte mapeamento, tendo por base as categorias elencadas acima (Tabela 1).

Tabela 1 – Quadro resumo das categorias e sua correspondência com a atividade dos alunos

Categoria	Atividade dos alunos
Compreensão do problema	Leitura e esclarecimento de dúvidas. Primeiras análises dos materiais e da situação proposta. Organização do trabalho de simulação. Realização de experiências.
Relação entre conceitos matemáticos e não matemáticos	Estabelecimento de ligações entre o formato do tomate, da calha e das divisórias e diversas figuras e elementos geométricos: esfera, círculo máximo e triângulos isósceles, respetivamente. Ligações entre os calibres dos tomates e intervalos de medida (diâmetro dos tomates).
Raciocínio matemático	A utilização da proporcionalidade direta no cálculo dos diâmetros, tendo por base a semelhança de triângulos. Utilização da fórmula do perímetro de uma circunferência para o cálculo do diâmetro. Relação entre diâmetro e raio. Construção de intervalos.
Comunicação	Discussão entre os elementos do grupo e/ou a professora. Elaboração do relatório escrito da atividade.

Síntese e conclusão

Os resultados deste estudo mostram que a integração de tarefas de modelação com trabalho experimental, numa abordagem interdisciplinar de STEM, permitiu aos alunos desenvolverem e ativarem capacidades necessárias para a resolução de problemas que envolvem mais do que uma área do saber, tais como compreender e interpretar um problema, analisar dados recolhidos, generalizar ideias, comunicar oralmente e por escrito e encontrar uma solução para um problema real.

Assim, salienta-se que estas tarefas podem promover a experimentação, o ensaio, o aperfeiçoamento de ideias e estratégias onde os alunos vão melhorando e refinando os seus processos e vão conseguindo encontrar métodos mais gerais e poderosos para os quais a matemática surge como uma importante ferramenta. Na seleção das produções apresentadas e nos episódios transcritos, percebe-se a importância do estabelecimento de ligações entre conceitos matemáticos e não matemáticos, uma vez que, na maioria dos casos, a solução geral em linguagem matemática foi obtida por meio da análise da estrutura das expressões numéricas usadas no estudo de casos particulares.

A contextualização das tarefas – neste caso concreto, a construção de um sistema de calibração de tomates – despertou o interesse dos alunos, induzindo-os à partilha de experiências e saberes, uma vez que tiveram oportunidade de vivenciar uma possível realidade, ou seja, a simulação de uma experiência de engenharia e de desenvolvimento de um protótipo. A familiaridade do contexto contribuiu para o desenvolvimento de diversas capacidades, na medida em que os alunos atribuíram significado aos conceitos matemáticos que utilizaram, aplicaram e reconheceram como úteis para a matematização e obtenção de resultados para o problema.

Importa ainda acrescentar que a qualidade das capacidades desenvolvidas pelos alunos, no âmbito da intervenção didática proposta, pode constituir motivo de reflexão acerca de aspetos inerentes à gestão curricular, nomeadamente no que respeita ao tipo de tarefas apresentadas aos alunos e à consequente necessidade e vantagem em criar e usar materiais, designadamente artefactos experimentais, que potenciem a procura de soluções reais para problemas reais.

Referências

Alsina, C. (2002). Too much is not enough. Teaching maths through useful applications with local and global perspectives. *Educational Studies in Mathematics. 50*, 239-250.

Araújo, J. (2010). Brazilian research on modelling in mathematics education. *ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *42*(3), 337-348.

Baker, C. K., & Galanti, T. (2017). Integrating STEM in elementary classrooms using model-eliciting activities: responsive professional development for mathematics coaches and teachers. *International Journal of STEM Education*, *4*(10), 1-15.

Barbosa, J. C. (1999). O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? *Zetetiké. 7*(11), 67-85.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Berlin, D., & White, A. (1995). Connecting school science and mathematics. In P. House, & A. Coxford (Eds.), *Connecting Mathematics across the Curriculum: 1995 Yearbook* (pp. 22-33). Reston, VA: NCTM.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no ensino*. São Paulo: Contexto.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM – International Journal of Mathematics Education*, *38*(2), 163-177.

Blum, W., & Leiß, D. (2007): How do teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modeling - Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Bueno, V., & Reis, F. (2007). *Modelagem matemática e ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos nos ensinos fundamental e médio*. Texto apresentado no IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. Acedido em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html

Caine, R., & Caine, G. (1993). Understanding a Brain-Based Approach to Learning and Teaching. In F. Robin, (Ed.), *Integrating the Curricula: A Collection*. Andover, MA: IRI/Skylight Publishing.

Carreira, S., & Baioa, A. M. (2009). Student's modelling routes in the context of object manipulation and experimentation in mathematics. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and learning of mathematical* *modelling, International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling - ICTMA 14* (pp. 211-220). New York: Springer.

Carreira, S., & Baioa, A. M. (2015). Assessing the best staircase: Student's modelling based on experimentation with real objects. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 834-840). Prague, Czech Republic: ERME.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–330). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cury, H. N. (2003). Modelagem matemática e problemas em ciências: uma experiência em um curso de mestrado. *Revista Perspectiva*, *27*(98), 75-86.

DGE (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática. Articulação com o perfil do aluno*. Acedido em https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf

Donovan, S., Bransford, J., & National Research Council (U.S.). (2005). *How students learn*. Washington, D.C: National Academies Press.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM – International Journal of Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

Gallegos, R. (2018). Building bridges between the math education and the engineering education communities: a dialogue through modelling and simulation. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME 13 Monographs* (pp. 501-519). Cham: Springer.

Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., & Khan, S. (2007). *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education Engineering and Economics.* Chichester, England: Horwood Publishing.

Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. In J. de Lange, I. Huntley, C. Keitel & M. Niss (Eds), *Innovation in maths education by modelling and applications*, (pp. 19-30). Chichester: Elis Horwood.

Kelly, A., Baek, J., Lesh, R., & Bannan-Ritland, B. (2008). Enabling innovations in education and systematizing their impact. In A. Kelly, R. Lesh & J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 3–18). New York: Routledge.

Kelley, T. R., & Knowles, G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, *3*(11), 1-11.

Kfouri, W. (2006). Explorar e Investigar para Aprender Matemática através da Modelagem Matemática. In Universidade Federal de Minas Gerais (Ed.), *Anais, Encontro Brasileiro dos Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* (pp. 1-14), Minas Gerais: Universidade Federal de Minas Gerais. http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/09-02.pdf

Lesh, R., & Doerr, H. (Eds). (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Leung, A. (2018). Exploring STEM pedagogy in the mathematics classroom: a tool-based experiment lesson on estimation. *International Journal of Science and Mathematics Education*.(Online first) https://doi.org/10.1007/s10763-018-9924-9

Marzano, R. J. (1991). Fostering thinking across the curriculum through knowledge restructuring. *Journal of Reading, 34*(7), 518-525.

Matos, J. F., & Carreira, S. (1996). The quest for meaning in student's mathematical modelling activity. In L. Puig & A. Guttiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: Vol 3, (pp. 345-352). Valencia, University of Valencia: PME.

Meyer, J. F., Caldeira, A. & Malheiros, A. P. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Michelsen, C. (2006). Functions: A modelling tool in mathematics and science. *ZDM – International Journal of Mathematics Education, 38*, 269-280.

Michelsen, C. (2015). Mathematical modeling is also physics – interdisciplinary teaching between mathematics and physics in Danish upper secondary education. *Physics Education, 50*(4), 489-494.

Moore, T. (2008). Model-eliciting activities: a case-based approach for getting students interested in material science and engineering. *Journal of Materials Education, 30*(5-6), 295-310.

Mousoulides, N., Chrysostomou, M., Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Modelling with technology in elementary classrooms. In. V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2226–2235). Lyon: INRP & ERME.

Mousoulides, N., & English, L. (2008). Modelling with data in cypriot and Australian classrooms. In O. Figueras, J. L. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd international conference of the international group for the psychology of mathematics education,* (Vol. 3, pp. 423–430). Morelia, University of Morelia: PME.

Mousoulides, N., & English, L. (2011). Engineering model eliciting activities for elementary school students. In G. Kaiser, W. Blum, R. Ferri & G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and learning of mathematical modelling, International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling - ICTMA 14* (pp. 221-230). New York: Springer

Olley, C. (2015). School mathematical modelling: developing maths or developing modelling? In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 9* (pp. 910-916). Prague: ERME.

Skovsmose, O. (1995). Competência democrática e conhecimento reflexivo em matemática. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota, & M. Santos (Eds), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 137-169). Lisboa: SEM-SPCE.

Zawojewski, J. (2010). Problem solving vs modelling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modelling competencies* (pp. 237-243). New York, NY: Springer.

UMA AULA DE COMBINATÓRIA NA ESCOLA PRIMÁRIA: USANDO OBJETO DIGITAL DE APRENDIZAGEM

Elisa Friedrich Martins

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

titamat@yahoo.com.br

Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

mbasso@ufrgs.br

Resumo: Este trabalho traz parte da pesquisa de doutoramento na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. A investigação em execução estuda o desenvolvimento do pensamento combinatório de estudantes do quarto ano da Educação Básica de uma escola pública brasileira fazendo uso de um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA). O ODA foi desenvolvido especificamente para a pesquisa e apresenta nove problemas envolvendo situações de combinação, arranjo e permutação. Os problemas foram resolvidos parcial ou completamente pelos alunos e as soluções apresentadas por eles são analisadas. São citadas outras pesquisas sobre a temática, que trazem a importância deste tópico ser trabalhado desde os primeiros anos de escolarização, corroborando com a ideia proposta pela investigação. Este trabalho apresenta a dinâmica da aula com a utilização do ODA, tornando o tempo da escola mais personalizado e respeitando o ritmo de trabalho dos alunos. Os dados analisados aqui sintetizam as mudanças na maneira de resolver os problemas, que são percebidas através das soluções apresentadas pelos participantes. O uso de processos sistematizados na construção das soluções não foi imediato, mas apareceu ao longo dos problemas e, de maneira mais evidente, nos problemas que envolviam respostas maiores que 20.

Palavras-chave: Objeto Digital de Aprendizagem, Pensamento Combinatório, Escola Primária

Introdução

O presente trabalho expõe a dinâmica da aula implementada em processo de investigação relacionado com pesquisa de doutoramento em Informática na Educação, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul — Brasil. A pesquisa, da qual esse trabalho faz parte, busca compreender o desenvolvimento do pensamento combinatório dos estudantes do quarto ano da escola primária e realizou a produção de dados em uma escola pública brasileira durante as aulas de Matemática. Além da dinâmica da aula, o Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) utilizado, desenvolvido especificamente para a pesquisa, é apresentado. As soluções para os problemas propostos, apresentadas em capturas de ecrã, são analisadas na busca por compreender como os alunos solucionam esse tipo de problema. A investigação é pautada nos princípios do Método Clínico Piagetiano e as análises, bem como a proposição e formato do ODA, são fundamentados na teoria da construção do conhecimento, de Jean Piaget. Trabalhos sobre a temática do Pensamento Combinatório infantil vêm sendo produzidos pelo grupo GERACAO (Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório) da Universidade Federal de Pernambuco — Brasil. As pesquisas apontam para a importância desse tema iniciar sua abordagem desde os primeiros anos de escolarização. Os documentos norteadores do currículo no Brasil, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) trazem elementos específicos de Análise Combinatória para o currículo dos primeiros anos de escolarização. O documento orientador do currículo de Portugal não apresenta tal tema de forma específica. Porém, o trabalho com dados discretos e as estratégias de resolução de problemas podem contemplar esse tema. Ao longo da educação Básica, principalmente nos primeiros anos, os professores necessitam envolver os alunos em problemas que façam sentido e que por eles possam ser resolvidos. A busca por diferentes estratégias que utilizem argumentos, representações ou mesmo caminhos diferentes é imprescindível para que se desenvolva o conhecimento matemático e também o gosto por essa área do conhecimento. Os problemas de análise combinatória podem contribuir nesses aspectos e despertar interesse, busca e exploração de diferentes soluções ou estratégias e tratar de situações não necessariamente matemáticas, mas que exijam raciocínio matemático.

Fundamentação teórica

A teoria piagetiana propõe que para haver aprendizagem é preciso ter ação. É necessário, então, que as crianças ajam sobre os problemas de Análise Combinatória, que se envolvam com situações deste tipo e que possam modificar e transformar tais problemas. Durante essas ações, que podem ser modificações ou transformações, o conhecimento acerca do problema vai se construindo e levando o sujeito envolvido à compreensão dos conceitos. Experimentos e possibilidades de agir sobre objetos específicos é o que faz pensar sobre certas relações, conceitos, padrões, etc.

Nessa linha de argumentação, o raciocínio combinatório se desenvolve da mesma maneira: com ação. No livro “Da lógica da criança à lógica do adolescente” Inhelder e Piaget (1976) propõem problemas de raciocínio combinatório a crianças e jovens entre 7 e 15 anos. São três situações envolvendo combinação, permutação e arranjo. Ao analisarem as respostas, observa-se que os

> sujeitos não descobriram e não conhecem as fórmulas matemáticas do cálculo das combinações. Encontraram um processo operatório que, praticamente, equivale à aplicação da fórmula, mas que constitui um simples método de ação, e não um conhecimento refletido e que possa ser explicitado. (Inhelder & Piaget, 1976, p. 233)

Eles constataram que apenas a partir dos 14-15 anos os sujeitos foram capazes de explicitar verbalmente uma explicação equivalente às fórmulas utilizadas. Mas, antes disso, a partir dos 8-9 anos, as crianças conseguiam resolver os problemas e dar respostas utilizando o material do experimento. Os argumentos usados por aqueles que responderam correctamente envolvem justificativas operatórias baseadas na ação sobre os objetos disponíveis. Ou seja, mesmo não formulando uma generalização, essa ação sobre esse tipo de questão pode auxiliar na formação de esquemas para serem usados posteriormente. Considerando que a construção de conhecimento é integrativa e que o que é estruturado em um patamar serve de esquema e de instrumento para ser usado nas situações seguintes, quanto mais envolvimento com problemas combinatórios as crianças tiverem, maior será seu repertório de esquemas disponíveis quando estiverem aptos a construir relações lógicas e generalizações de forma unicamente proposicional.

A partir disso, pesquisas vêm investigando esse tema. O grupo de Pesquisa GERACAO, da UFPE-Brasil, vem investigando o raciocínio combinatório infantil e apresentando resultados que corroboram a abordagem desse tema desde os primeiros anos da Educação Básica.

A tese de doutoramento de Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (Pessoa & Borba, 2009), investigou o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano até o 12º ano da Educação Básica. Para a pesquisa, foram aplicados testes com oito questões (duas de arranjo, duas de combinação, duas de permutação e duas de plano cartesiano) sendo que quatro tratavam de pequeno número de possibilidades e quatro envolviam valores maiores. Os mesmos problemas foram propostos a alunos do 2º ano ao 12º ano da Educação Básica de duas escolas públicas e duas escolas da rede privada de Recife, nordeste do Brasil. As conclusões foram de que não houve diferença significativa entre percentual de acertos por gênero. Porém, houve diferença significativa entre o percentual de acerto por tipo de escola, sendo que os alunos de escola privada obtiveram resultados significativamente melhores. Diferenças significativas também apareceram a cada transição de ciclo. Os acertos foram crescentes (de acordo com a escolaridade), mas com saltos maiores do 5° para o 6º ano e do 8º para o 9º. Mesmo o fato de ser trabalhado de forma específica os problemas de combinatória no 11º ano não trouxe diferenças significativas no desempenho dos alunos deste ano.

Já o trabalho de Barreto e Borba (2010) apresenta como os problemas que envolvem raciocínio combinatório aparecem nos manuais escolares do ensino primário. Tal trabalho conclui que, de modo geral, há uma variação dos tipos de representações simbólicas tanto no que diz respeito às representações apresentadas pelos problemas quanto às propostas pelos autores como exemplos de resolução, incentivando dessa forma o aluno a representar os problemas de formas diversificadas. Foram reconhecidas as seguintes representações: desenho, apenas enunciado, algoritmo, manipulativo, tabela, árvore de possibilidades, cálculo mental, outras (fotografia, jogo, etc.). A presença desse tipo de problema é obrigatória nos manuais escolares, uma vez que conteúdos específicos sobre a temática constam no currículo proposto pelo Ministério da Educação. A análise realizada conclui que os mesmos aparecem sob diferentes representações e incentivam a resolução por diferentes caminhos e usando de diferentes estratégias.

Uma pesquisa realizada em Portugal apresenta as diferentes resoluções de alunos do 9º ano (Correia & Fernandes, 2009) para problemas de combinatória. O trabalho analisa as diferentes representações e o desempenho dos alunos ao resolver problemas de combinação, arranjo simples, arranjo com repetição e permutação. O conjunto de problemas propostos continha questões específicas sobre generalizações. As representações e estratégias usadas pelos alunos demonstram que

> a utilização de modelos sistemáticos de enumeração, de forma completa, revelou-se central na resolução correcta dos problemas de combinatória propostos, já que a falta de sistematização e a dificuldade em repetir procedimentos sistemáticos de enumeração conduziram ao esquecimento ou à repetição de configurações. (Correia & Fernandes, 2009, p. 16)

Em Portugal, cabe ressaltar, o currículo proposto para os quatro primeiros anos da Educação Básica não contempla conteúdos específicos de combinatória. Os objetivos de Matemática que apresentam relativa relação com o tema são os que dizem respeito à resolução de problemas e a expressão de diferentes raciocínios. Um dos objetivos, que aparece elencado para os quatro primeiros anos da Educação Básica, na parte de Matemática é “Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas com números naturais, em contextos matemáticos e não matemáticos, e avaliar a plausibilidade dos resultados.” (DGE, 2018a, p. 8; DGE, 2018b, p. 8) Esse objetivo não descreve explicitamente raciocínio combinatório, mas problemas desse tipo podem se encaixar perfeitamente nessa proposta. Também é proposto para os quatro anos um objetivo que trata de “Exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões.” (DGE, 2018a, p. 8; DGE, 2018b, p. 8). Da mesma forma que o anterior, esse objetivo pode contemplar ideias, raciocínios e procedimentos que versem sobre o tema de combinatória. Para o 3º e o 4º ano surge um objetivo específico de probabilidade: “Reconhecer e dar exemplos de acontecimentos certos e impossíveis, e acontecimentos possíveis (prováveis e pouco prováveis).” (DGE, 2018c, p. 10; DGE, 2018d, p. 10) O trabalho com casos possíveis tem estreita relação com o raciocínio combinatório. Muitas vezes é entendido como uma ferramenta para o trabalho com probabilidade e seu estudo se justifica por tal razão. Portanto, no 3º e no 4º ano as discussões que cercam esse tema devem fazer parte das aulas de Matemática.

Essas pesquisas relatadas apresentam maneiras de trabalhar e perceber a abordagem dos problemas combinatórios desde a Educação Básica. As duas primeiras pesquisas usam a teoria de Gerard Vergnaud para analisar seus dados. Vergnaud foi aluno de Piaget e sua teoria tem estreita relação com a teoria utilizada na pesquisa realizada. Já a terceira pesquisa utiliza também os estudos de Inhelder e Piaget para analisar os dados produzidos. Nenhuma das propostas contempla o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) como recurso que pode potencializar tal trabalho. O desenvolvimento de material digital específico é um dos diferenciais da pesquisa relatada. O uso desse tipo de recurso prevê um envolvimento diferente com os problemas e uma organização do tempo na escola mais individualizado. O uso das TDIC pretende promover mudanças no papel do professor e do tipo de tarefa a ser resolvida. Mais do que resolver os problemas de forma autônoma e usar o tempo da aula conforme sua necessidade, os alunos são chamados a agir e a pedir ajuda. Não é imposta pela dinâmica da aula a hora do professor falar e a hora das perguntas dos alunos. A autonomia para concluir, salvar e iniciar a próxima tarefa, traz uma responsabilidade para com seu rendimento.

Metodologia

A pesquisa de doutoramento pretende-se qualitativa e exploratória, mas faz uso de estatística descritiva para caracterizar os sujeitos e analisar dados como as soluções dos problemas. Conta com a participação de alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública brasileira situada na cidade de Porto Alegre. A escola fica na região suburbana da capital do estado do Rio Grande do Sul e atende alunos desde o primeiro até o nono ano do Ensino Fundamental (equivalente ao ensino Básico e Secundário em Portugal). As turmas envolvidas na pesquisa possuíam uma professora referência, que abordava questões relativas à Língua Portuguesa, Matemática, Estudos Sociais e Ciências; mas também contavam com o atendimento de professores especialistas em Educação Física, Espanhol e Artes. A professora-pesquisadora, com formação em Matemática, complementava as atividades de Matemática realizadas pela professora referência e propunha o trabalho com temas pouco explorados na escola como Análise Combinatória, Geometria e Gráficos e tabelas. Durante o período da investigação as aulas com a professora-pesquisadora ocorreram no Laboratório de Informática da escola. Este laboratório está equipado com 17 computadores de mesa, todos conectados à internet, e conta com o apoio de uma professora que auxilia nos trabalhos durantes as aulas. A produção de dados durou quatro encontros de 45 minutos e registra-se que nem todos os participantes frequentaram os quatro encontros. Os participantes eram de três turmas diferentes e foram realizados quatro encontros com cada turma, tendo cerca de 70 participantes envolvidos. Os encontros foram gravados em vídeo por três pesquisadores diferentes que se fizeram presentes nos encontros. Além dos vídeos, as soluções finais foram registradas com capturas de ecrã e um questionário sobre acesso à internet e uso de computador foi realizado com os envolvidos para que os sujeitos pudessem ser caracterizados também a partir dessas informações. No presente texto, as análises das soluções são apresentadas; este trabalho traz as primeiras conclusões parciais do estudo e as análises dos vídeos darão seguimento ao estudo e serão publicadas posteriormente.

A dinâmica da aula

Três turmas participaram do estudo, sendo que cada uma delas foi atendida em horário diferente. A turma atendida dirigia-se para o Laboratório de Informática e, organizados em duplas, resolviam os problemas propostos no Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) desenvolvido para a pesquisa. A sequência dos problemas era proposta pela professora-pesquisadora e o tempo dedicado a cada problema variou bastante para cada dupla. Para a realização do primeiro problema foi feita a leitura, pela professora-pesquisadora, do problema e explicado o funcionamento do ODA. Foi acordado que quando obtivessem a solução final deveriam fazer uma captura do ecrã (Print Screen) e salvar a imagem para que ela fosse analisada posteriormente. Na continuidade do presente trabalho essas imagens são usadas para ilustrar o tipo de solução apresentada.

O uso do ODA permitiu que, em um mesmo ambiente e ao mesmo tempo, alunos de uma mesma turma trabalhassem em problemas diferentes. O ritmo de trabalho de cada um era respeitado, oferecendo desafios aos mais rápidos e com maior compreensão dos conceitos e também deixando explorar e se questionando por um tempo maior aqueles que demonstravam incompreensões. Num primeiro encontro algumas duplas realizaram apenas um problema, enquanto outras realizaram três. A familiaridade com o computador torna o tempo de compreensão do funcionamento do ODA maior ou menor já no primeiro encontro. O uso do rato e os ícones de apagar, arrastar, clicar não eram do conhecimento de alguns dos participantes.

O papel da professora-pesquisadora e dos outros dois pesquisadores presentes era de auxiliar com questões técnicas e dúvidas na interpretação dos problemas. Porém, o trabalho de forma autônoma envolvendo realizar, salvar, abrir o próximo, ler e resolver para finalizar a solução, os tornou protagonistas do seu próprio percurso. Não houve comparações quanto ao desempenho, pois a correção era feita através do feedback do próprio objeto, não expondo os erros e tampouco exaltando os êxitos. A ação de cada um era primordial. Construir os casos possíveis era agir sobre o problema.

O Objeto Digital de Aprendizagem

O ODA[1] proposto contempla nove problemas envolvendo combinação, arranjo e permutação. Cada problema é apresentado em uma tela diferente, a partir de um menu inicial, e permite a construção da solução fazendo uso de imagens. O formato do objeto se assemelha a um jogo. O objetivo é resolver cada problema apresentado e, para encontrar a solução, o usuário pode manipular objetos (que são os elementos apresentados no problema) e construir as possibilidades. Para informar a resposta encontrada o usuário preenche uma caixa de texto, onde deve inserir a resposta numérica. Dependendo da resposta dada o objeto apresenta uma resposta (feedback) que pode ser a mensagem de êxito ou uma indicação de que algo está incorreto.

O uso do ODA é simples, não exigindo conhecimento teórico ou técnico de computação para utilizá-lo. É certo que o domínio do uso do rato e de algumas funções como o zoom out ou zoom in tornam seu uso ainda mais fácil. O rato deve ser usado para clicar e arrastar os ícones até a área de casos possíveis. Inicialmente, aparecem cerca de 10 espaços (variando de acordo com o problema), mas podem ser acrescidos outros para a construção da solução. É possível apagar casos construídos de forma repetida ou que não estejam de acordo com os requisitos do problema. Cabe ressaltar que esses casos repetidos ou que não se encaixam nos requisitos do problema devem ser percebidos pelo usuário, pois o ODA não emite tal tipo de informação. Quando o usuário dá uma resposta menor que a correta, a mensagem que aparece é “Tem certeza que verificou todas as possibilidades?”; quando a resposta informada é maior que a resposta correta, o feedbak apresentado questiona se “Não cometeu nenhum erro durante a contagem?”. Depois de informar a resposta errada duas vezes, o ODA apresenta uma dica ou dá um exemplo sobre como se constroem os casos possíveis no problema. Por exemplo,

[1] O ODA ainda se encontra em fase de desenvolvimento e está disponível no endereço http:odin.mat.ufrgs.br/combinatória. Deve sofrer alterações a partir das análises dos dados e sua versão final deve ser publicada no primeiro semestre de 2019.

quando se pergunta sobre a quantidade de emoticons que podem ser construídas no problema 1, o feedbak retorna com a seguinte mensagem: “Cada emoticon deve ter um par de olhos e uma boca. Monte o maior número de emoticons diferentes.” A intenção de não apresentar apenas “certo” ou “errado” é a de fazer com que o usuário repense a pergunta e os requisitos do problema.

Problemas e exemplos de soluções apresentadas

As capturas de ecrã com a solução final de cada problema foram analisadas e permitem perceber que já nessa etapa escolar o uso de processos sistemáticos de construção de casos possíveis está presente. As soluções foram classificadas segundo dois critérios: completas ou não e com evidência ou não de sistematização, mesmo que parcial. Combinando essas duas classificações realizamos uma categorização em cinco[2] casos diferentes: incompleta sem evidência de sistematização; incompleta com evidência de sistematização; completa sem evidência de sistematização; completa com evidência de sistematização parcial e completa com evidência de sistematização total. É importante dizer que a evidência de sistematização se deve a organização espacial das possibilidades construídas, ou seja, são identificados ou não elementos fixos em determinadas posições. Nem todos os problemas contém exemplos das cinco categorias de soluções e os exemplos apresentados a seguir são de todas as categorias presentes nas soluções do problema em questão. Destaca-se que essa é uma primeira análise dos dados e representa uma parte da pesquisa. Posteriormente, com a análise dos vídeos, será possível observar a maneira como os casos possíveis foram construídos e poderá ser confirmada a sistematização evidenciada ou não.

Problema 1: Um designer resolveu criar emoticons novos para um aplicativo de comunicação. Ele inventou 3 tipos diferentes de olhos e desenhou 3 bocas. Quantos emoticons podem ser formados combinando essas bocas com esses olhos?
Quantos emoticons estão de língua de fora?
Quantos emoticons estão de olhos abertos?

Para o problema 1 foram entregues 37 soluções. Destas, 5,4% estavam incompletas e 94,6% estavam completas. Dentre as completas, 89,2% do total de soluções não evidenciam, pela organização espacial da solução, nenhuma sistematização. Porém, 2,7% do total já evidencia, pela organização da solução apresentada, uma sistematização.

[2] Desconsidera-se a situação “ter soluções incompletas com sistematização total” por ser incoerente.

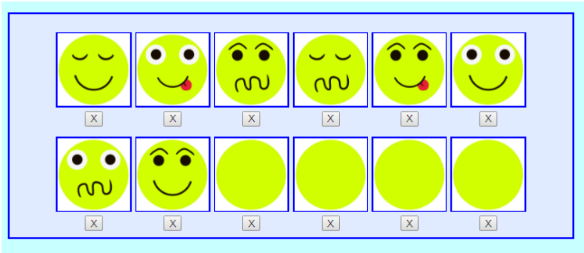


Figura 1 – Incompleta sem evidência de sistematização (ausência de um caso possível de emoticon)

Figura 2 – Solução completa, mas sem evidência de sistematização

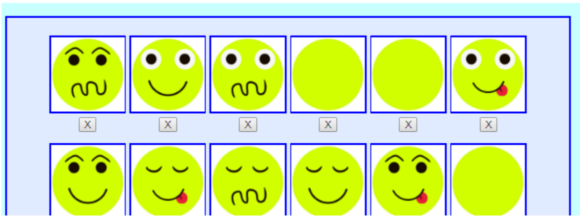


Figura 3 – Solução completa com evidência de sistematização parcial, pois apresenta duas sequências de três emoticons com olhos iguais

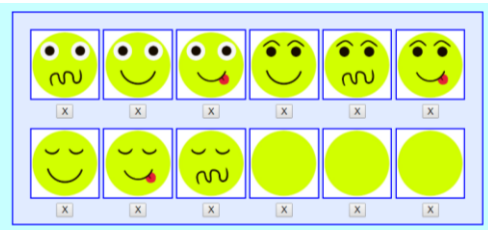


Figura 4 – Solução completa e com evidência de sistematização total, pois constrói todas as possibilidades com cada tipo de olhos disponíveis

> Problema 2: Em uma loja de brinquedos existem quatro opções de animais de pelúcia: elefante, girafa, leão e zebra.
> De quantas maneiras posso escolher dois animais diferentes?
> Em quantas opções o elefante é escolhido como um dos animais?
> Quantas opções não escolhem a zebra?

Para esse problema foram entregues 40 soluções. Porém, cinco delas estavam cortadas e não puderam ser aproveitadas. Esse fato retrata a dificuldade dos alunos desta etapa escolar em realizar um “Print Screen”, tarefa de aspecto “técnico”. Das 35 soluções que foram consideradas válidas, 8,6% estavam incompletas, podendo faltar casos possíveis ou conter repetições, e 91,4% estavam completas e apresentavam as seis possibilidades de escolha. Pôde-se observar que, dentre as completas, 17,14% do total evidenciaram o emprego de alguma sistematização na construção das possibilidades.

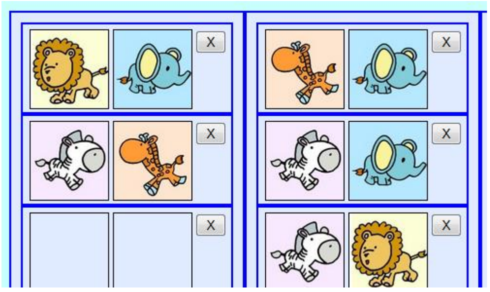


Figura 5 – Solução incompleta sem evidência de sistematização, neste exemplo falta a opção GIRAFA+LEÃO

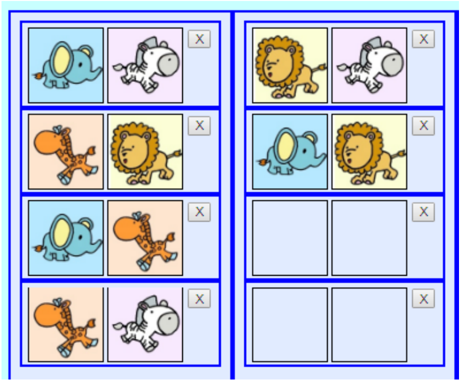


Figura 6 – Exemplo de solução completa, mas a organização espacial da solução não indica o emprego de alguma sistematização

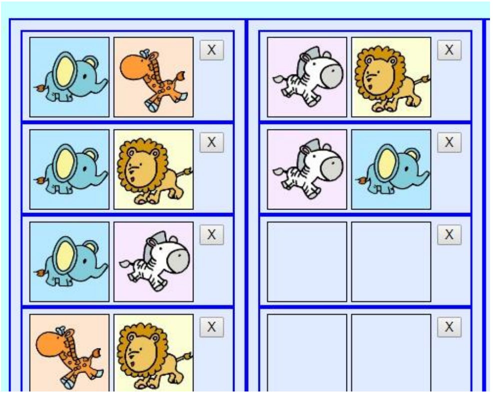


Figura 7 – Solução completa e com evidência de sistematização total

Problema 3: Palhaços usam roupas coloridas e, por isso, não precisam usar duas meias iguais. Um palhaço tem a sua disposição meias amarelas, vermelhas e azuis.

1) Quantos diferentes pares de meias ele pode formar?
2) Em quantos desses pares as maias são iguais?
3) Em quantos desses pares as meias são diferentes?

4) E se aparecerem meias verdes para o próximo espetáculo, quantos novos pares ele pode formar?

Para esse problema foram apresentadas 39 soluções diferentes, mas uma estava cortada; foram consideradas 38 soluções válidas. Dentre as soluções apresentadas, 31,6% das válidas não conseguiram representar os seis pares diferentes relativos à primeira pergunta. Ainda houve 7,9% das soluções válidas que acertaram essa primeira parte, mas não tentaram responder às demais perguntas. Das soluções que apresentam respostas para as demais perguntas, 7,9% das soluções válidas não conseguiram completar corretamente o restante dos pares de meias, enquanto 68,4% das respostas construíram as 10 possibilidades corretamente. Observou-se que entre as soluções completas, 44,7% das soluções válidas não evidenciam o emprego de alguma sistematização e 7,9% das soluções válidas evidencia, pela organização espacial, o emprego de alguma sistematização.

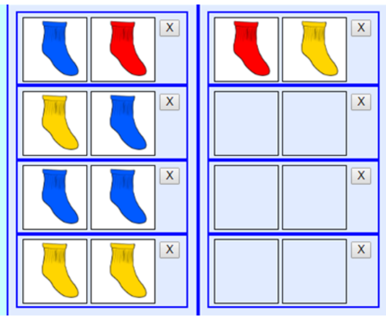


Figura 8 – Solução incompleta, com evidência de sistematização

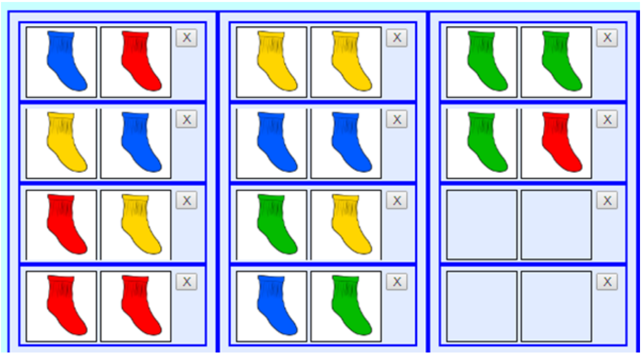


Figura 9 – Solução completa, mas sem evidência de sistematização

Figura 10 – Solução completa com evidência de sistematização

Problema 4: A bandeira da Colômbia é azul, vermelha e amarela com um brasão. Para os uniformes do time de vôlei a equipe do vestuário tem à disposição camisetas vermelhas, amarelas e azuis. Da mesma forma, os calções disponíveis são lisos, nas cores azul, vermelha ou amarela. Sabendo disso, tente responder: 1) Quantos uniformes diferentes (camiseta+calção) podem ser formados com essas opções de camiseta e calção? 2) Em quantas dessas opções o uniforme fica de uma cor só? 3) Em quantas dessas opções o uniforme tem alguma peça azul? 4) Em quantas dessas opções o uniforme não possui nenhuma peça amarela?

Esse problema teve retorno de 36 soluções. Destas, 30,6% estavam incompletas e 69,4% estavam completas. Pôde-se observar que 19,4% das soluções evidenciam o uso de alguma sistematização para a construção da solução.

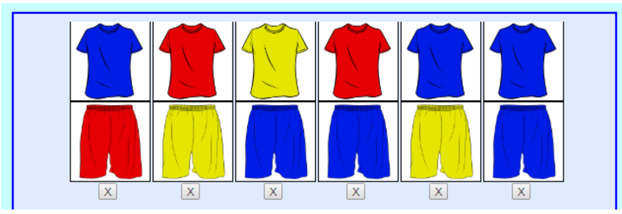


Figura 11 – Solução incompleta sem evidência de sistematização

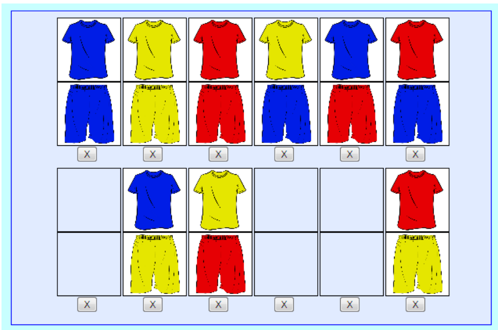


Figura 12 – Solução completa, mas sem evidência de sistematização. Apesar de ter construído primeiro as opções com uma cor só e depois os uniformes com duas cores

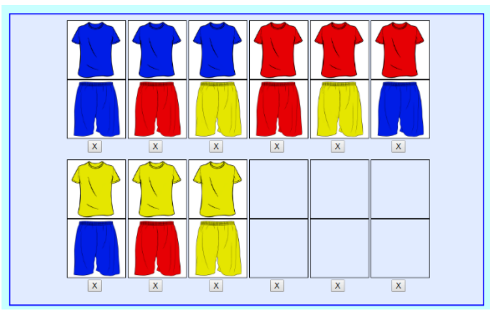


Figura 13 – Solução completa e com evidência de sistematização total, pois construiu todas as opções com cada camiseta

Problema 5: Um clube de tênis tem 9 alunas: Alice, Bruna, Camila, Eloíza, Flávia, Gabriela, Helena e Ísis. Para o campeonato municipal, apenas duas poderão se inscrever. Quantas duplas diferentes podem ser formadas com essas nove meninas?

Para esse problema foram apresentadas 31 soluções, sendo 93,5% incompletas e apenas 6,5% completas. O problema exigia um certo grau maior de sistematização, pois a resposta completa era formada por 24 opções de duplas diferentes. Mesmo apresentando respostas incompletas, muitas soluções, 48,4% delas, evidenciam o uso de sistematização, mas empregada de maneira parcial.

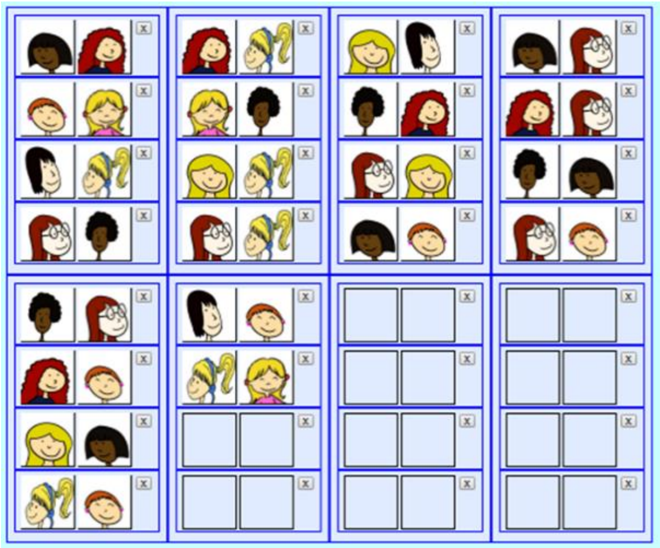


Figura 14 – Solução incompleta e sem evidência de sistematização

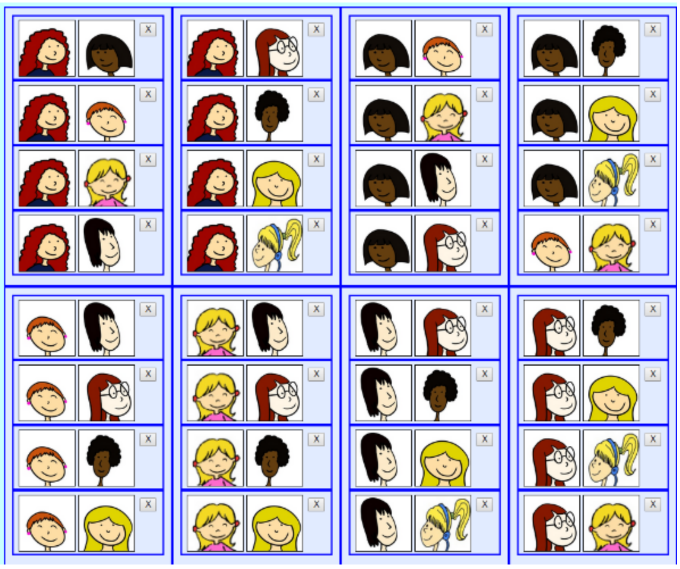


Figura 15 – Solução incompleta, mas com evidência de sistematização que foi empregada de maneira parcial

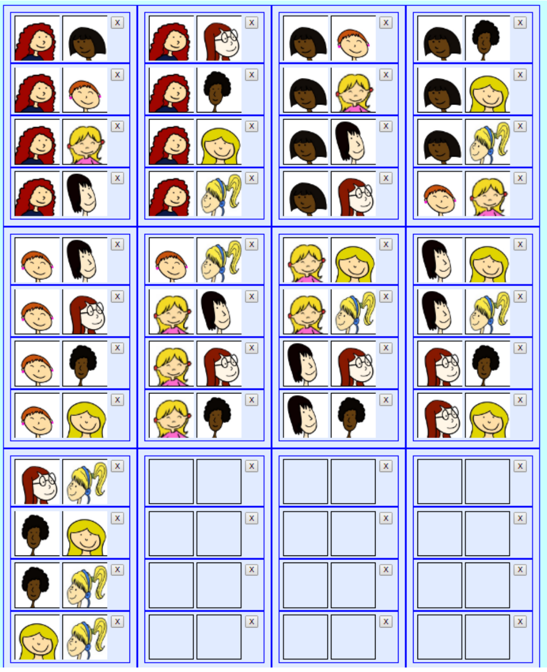


Figura 16 – Solução completa, com evidência de uso de sistematização total

> Problema 6: Em um restaurante, o cliente monta p seu prato a partir das opções do cardápio. O restaurante oferece dois tipos de carne: coxa de frango ou bife e três opções de acompanhamento: arroz, batata cozida e massa. Para montar o pedido é preciso escolher um tipo de carne e dois acompanhamentos diferentes.
>
> Quantos pedidos diferentes são possíveis de serem montados com esse cardápio?

Esse problema teve 30 soluções diferentes, sendo que 30% estavam incompletas e 70% estavam completas. O uso da sistematização para a construção das possibilidades ficou evidente em 26,7% das soluções apresentadas. Chamou a atenção que 16,7% das soluções apresentam a resposta numérica correta (seis), mas apresentam pratos montados de forma equivocada, pois não contêm dois acompanhamentos diferentes. Considera-se que um ajuste no ODA possa apresentar um feedback de que há pratos montados de maneira incorreta para que os usuários possam superar esse obstáculo e vir a construir a solução de forma correta.

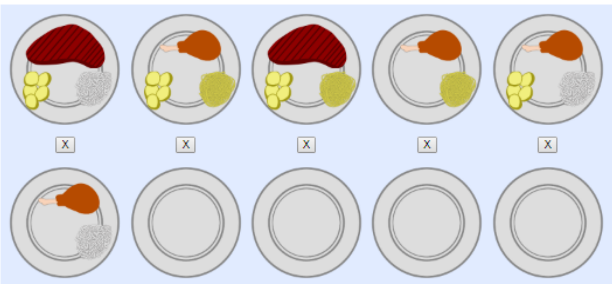


Figura 17 – Solução incompleta e sem evidência de sistematização. Essa solução apresenta pratos que não foram montados corretamente

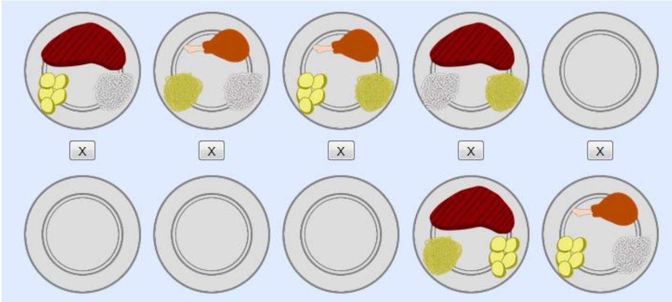


Figura 18 – Solução completa, mas não evidencia o uso de sistematização

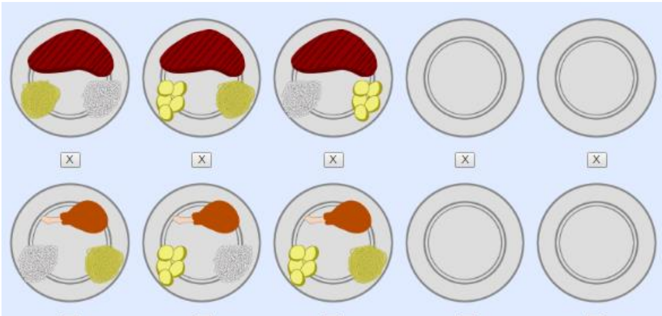


Figura 19 – Solução completa com evidência de sistematização na construção das possibilidades

> Problema 7: Marcelo, Vitor, Rafael e Pedro resolveram apostar uma corrida. Os quatro se esforçaram muito para ser rápidos, mas apenas três deles subiram ao pódio.
>
> De quantas maneiras podem se colocar nesse pódio, sendo que o lugar indica se chegou em primeiro, em segundo ou em terceiro lugar?
>
> Em quantas opções Marcelo é o primeiro colocado?
>
> Em quantas organizações de pódio Vitor aparece?

Foram apresentadas 34 soluções para este problema. Destas, 94,6% estavam incompletas e apenas 5,4% estavam completas. Porém, 40,5% das soluções evidencia o emprego de alguma sistematização, mesmo que usada de forma parcial. O número de possibilidades de pódio que poderia ser formado com esses quatro meninos era 24, número razoavelmente alto para construir sem qualquer sistematização. Salienta-se que 75,7% das soluções apresentam 16 possibilidades ou menos. Esse fato pode indicar que os alunos esperam que respostas com esses valores sejam apropriadas.

Figura 20 – Solução incompleta sem evidência de sistematização

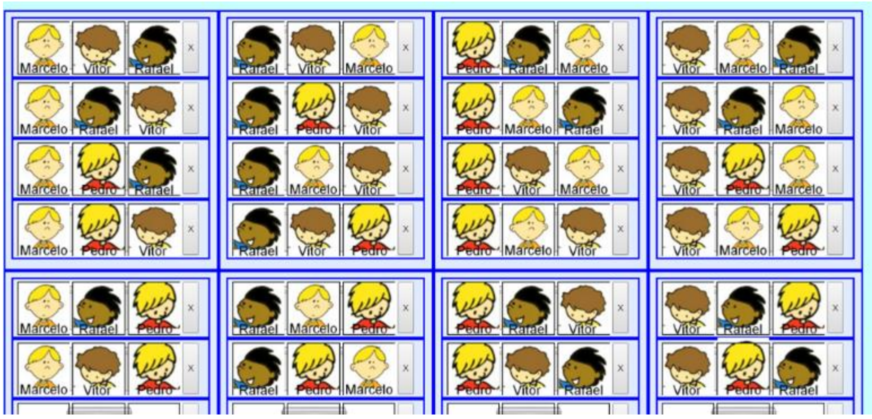


Figura 21 – Solução completa, com evidência de sistematização total

Problema 8: Considerando que nosso sistema monetário possui 6 cédulas diferentes (de 2, 5, 10, 20, 50 e 100 reais): Quantos valores diferentes posso ter se eu tenho duas cédulas em minha carteira? De quantas formas posso ter mais do que 21 reais? Em quantos desses valores eu tenho duas notas iguais? Em quantos desses valores eu tenho duas notas diferentes?

Foram apresentadas 16 soluções, mas duas estavam cortadas e foram desconsideradas. Então, das 14 soluções analisadas, 35,7% estavam incompletas e 64,3% estavam completas. Mesmo não construindo as 21 possibilidades, 85,7% das soluções analisadas evidenciam o emprego de alguma sistematização.

Figura 22 – Solução incompleta, mas evidencia o uso de uma sistematização parcial

Figura 23 – Solução completa com evidência de sistematização parcial

Figura 24 – Solução completa com evidência de sistematização total

Problema 9: Tiago, Lucas, Mariana e Daniela se juntam para tirar uma foto. Eles se colocam um ao lado do outro e fazem a fotografia. Para se posicionar um ao lado do outro, de quantas maneiras diferentes eles podem se organizar?

Esse problema teve apenas 9 soluções apresentadas. Nenhuma apresenta as 24 possibilidades corretamente construídas. Porém, o uso da sistematização ficou evidente em 33,3% das soluções.

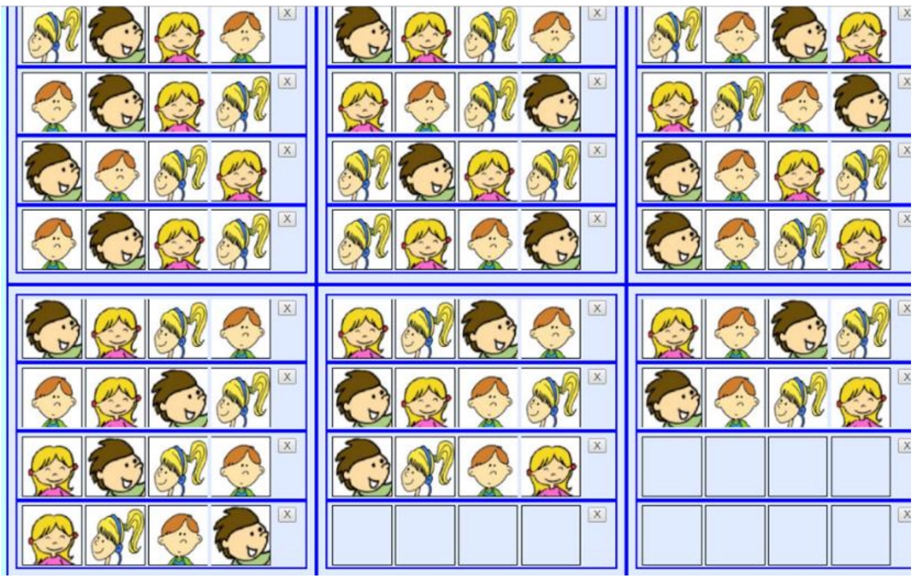


Figura 25 – Solução incompleta e sem evidência de sistematização

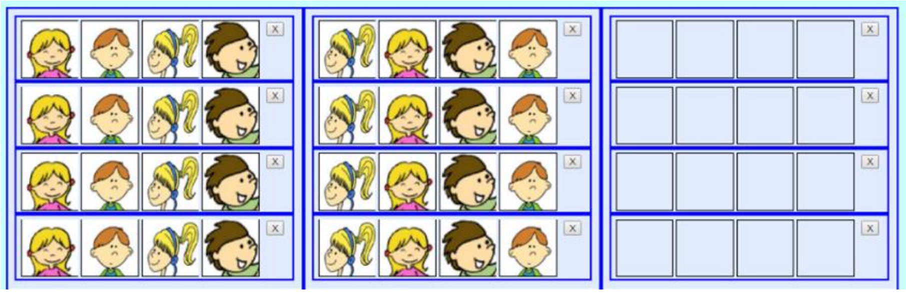


Figura 26 – Solução incompleta, mas com evidência de sistematização

Figura 27 – Solução com o número correto de casos possíveis, mas com erros. O uso de sistematização fica evidente pela organização espacial

O uso de sistematização, mesmo que empregado de forma parcial, evidencia uma maneira diferente de resolver os problemas. A sistematização é o caminho para as generalizações relativas à temática e ao tipo de problema. Os problemas envolvendo um universo maior de possibilidades podem induzir a busca de alternativas que facilitem a contagem e o controle das possibilidades elencadas. A sistematização é esse caminho. O trabalho de Correia e Fernandes (2009) apresenta diferentes representações usadas pelos alunos: uso de fórmulas, enumeração (sistematizada ou não), diagrama de árvore, operação e combinações destes. Os autores também apresentam a sistematização como aspecto importante a ser considerado na solução dos problemas. O ODA desenvolvido trabalha com apenas um tipo de representação: a enumeração. Tal representação foi escolhida para o desenvolvimento da pesquisa por se assemelhar a que é intuitivamente utilizada por crianças da faixa etária envolvida. A compreensão e a construção de diagramas de árvore, por exemplo, não é intuitiva e precisa ser abordada de forma específica. Os desenhos são formas pessoais de representar os problemas, mas difíceis de serem implementados como forma de solução no computador. A escolha por essa representação não a torna melhor ou mais eficiente que outras, mas foi pensada de acordo com as limitações do ODA e os objetivos da pesquisa. O ODA foi desenvolvido de forma a dar feedback ao usuário, apresentando questões e dicas que pretendem auxiliar na enumeração das possibilidades. Essa enumeração, construção de listas, realizada de forma sistematizada, faz emergir as regularidades da resolução de problemas envolvendo combinatória. A interpretação do problema e a maneira de sistematizar as soluções têm relação com o tipo de problema: arranjo, permutação ou combinação.

O raciocínio combinatório, mais especificamente a sistematização da construção das possibilidades é um esquema que não se aplica apenas a contextos matemáticos. Inhelder e Piaget (1976, p. 33) identificam uma estratégia combinatória ao resolver problemas envolvendo conceitos de Física: "fixar um enquanto se faz variar todos os outros fatores". Esse esquema é utilizado de maneira sistemática por jovens que procuram as possíveis implicações de fatores como tamanho, peso, impulso, formato, velocidade em resultados nos experimentos com balança, flexão de barras de ferro, vasos comunicantes, etc. Esse comportamento sistemático intencional é carregado de hipóteses levantadas de maneira proposicional. Antes de aplicar corretamente o esquema, as crianças mudam mais de um fator, não tendo argumentos lógicos suficientes para sustentar suas conclusões. De forma não sistemática esse esquema é experimentado, mas ainda com pouco rigor lógico. Conseguir isolar cada fator de um experimento e fazer variar os demais é uma atividade um tanto laboriosa. Os problemas combinatórios são, então, mais uma maneira de fazer aparecer esse esquema; de colocar em prática um esquema combinatório para resolver problemas que são, ao fim e ao cabo, problemas combinatórios e os esquemas empregados são semelhantes aos usados para resolver questões de física.

Conclusões

O uso do Objeto Digital descrito neste trabalho permite que, em um mesmo grupo de alunos, cada um esteja explorando um problema diferente. De acordo com o seu ritmo, cada aluno resolve os problemas a sua maneira e tem a possibilidade de obter um feedback de seu desempenho. A aula no Laboratório de Informática e com um "roteiro" conhecido, que no caso era a sequência dos problemas, acontece sem que seja necessário que todos os alunos façam a mesma coisa ao mesmo tempo. O caminho para chegar à solução e mesmo o tempo que se leva no desenvolvimento de uma tarefa é diferente para cada dupla. Se alguém não frequentou algum encontro, não perdeu nada, pois pode continuar sua caminhada — dentro do roteiro — de onde parou. O objeto digital também propõe questões com respostas entre 20 e 30. Tais problemas fazem emergir a necessidade de organização, ou seja, de sistematização das soluções construídas, uma vez que o controle dessas soluções fica dificultado sem esse tipo de preocupação. Sem controle, poucas das soluções apresentadas são completas e corretas. Porém, a pesquisa busca compreender como se chega a essas soluções. As soluções apresentadas (prints do ecrã) evidenciam que os alunos começam a perceber a necessidade de sistematização da construção das respostas e passam a usar um processo sistemático. Mas agir de maneira sistemática ainda não é natural e, portanto, utilizam esse procedimento apenas de maneira parcial.

O uso de alguma sistematização (parcial ou total) pode ser observado de forma sintética no gráfico abaixo (figura 28):

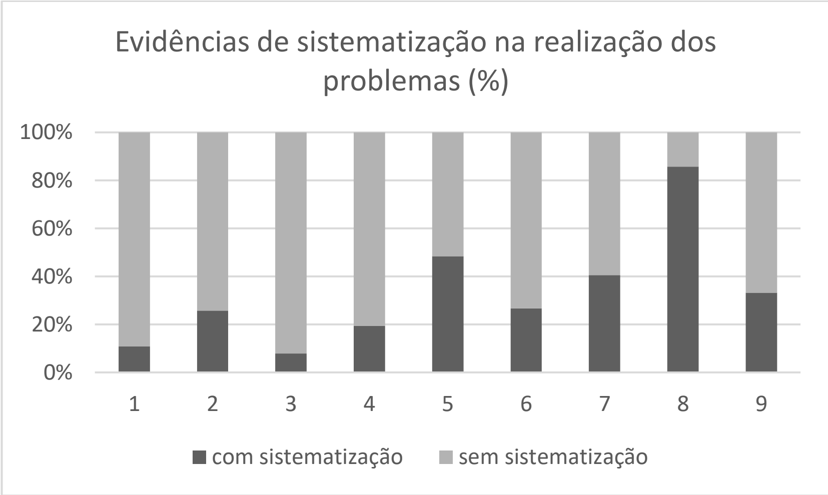


Figura 28 – Gráfico que representa o uso de sistematização por problema. Fonte: Elisa F. Martins

O uso de sistematização não significa a resolução correta do problema, uma vez que respostas incompletas também apresentam emprego de sistematizações parciais. Mas o emprego da sistematização evidencia uma mudança na forma de resolver os problemas. O emprego de um processo sistemático externa uma modificação na forma de compreender os problemas. Essa modificação tem relação com o raciocínio combinatório dos envolvidos. Cabe ressaltar que nenhuma dupla empregou sistematização em todos os problemas, mas algumas duplas não evidenciaram sistematização em nenhum deles. Essa consideração reflete o caráter provisório deste tipo de processo para os estudantes envolvidos.

Na utilização do objeto os ícones eram arrastados, combinados, apagados, reorganizados, contados. Alguns estudantes tentaram, por tentativa e erro, encontrar a resposta numérica. Mas o insucesso os levou à construção. A sistematização não foi, em momento algum, imposta. Contudo, os problemas envolvendo respostas maiores que dez (problemas 5, 7, 8 e 9) levavam a perceber que a contagem e o controle das possibilidades construídas eram dificultados sem a presença de alguma organização. Foi possível perceber que passaram a separar em casos e usar procedimentos sistemáticos de forma mais regular nesses problemas.

O pensamento combinatório se desenvolve muito mais do que pela Matemática e pelas relações lógico-matemáticas. Ele se desenvolve porque permite que situações variadas sejam exploradas de maneira sistemática. O pensamento combinatório é a raiz do método científico. É a partir desse tipo de esquema que se chegam a generalizações referentes aos conceitos de física e de química. Tal fato e os dados apresentados no trabalho levam a perceber a importância deste tipo de problema se fazer presente desde o início da Educação Básica.

Referências

Barreto, F. L. S. & Borba, R. (2010) Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In A. M. O. Pereira, I. M.

Cazorla, & V. Gitirana (Eds.) *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, cultura e diversidade*. Salvador, Bahia – Brasil. Acedido em http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T3_CC822.pdf.

Brasil, Ministério da Educação. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos.* Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental.

Brasil, Ministério da Educação. (2017) *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Secretaria de Educação Básica.

Direção-Geral de Educação. (2018a) *Aprendizagens Essenciais – Ensino Básico: Matemática. 1º ano do 1º ciclo.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

Direção-Geral de Educação. (2018b) *Aprendizagens Essenciais – Ensino Básico: Matemática. 2º ano do 1º ciclo.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

Direção-Geral de Educação. (2018c) *Aprendizagens Essenciais – Ensino Básico: Matemática. 3º ano do 1º ciclo.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

Direção-Geral de Educação. (2018d) *Aprendizagens Essenciais – Ensino Básico: Matemática. 4º ano do 1º ciclo.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

Fernandes, J. & Correia, P. (2009) Estratégias espontâneas de alunos do 9º ano em Combinatória. *Revista Educação e Matemática*. nº 102, 12-17.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1976) *Da lógica da criança à lógica do adolescente: Ensaio e construção das estruturas operatórias formais*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora.

Pessoa, C. & Borba, R. (2009) Quem dança com quem: Desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké, 17*(1), 105-150. doi: 10.20396/zet.v17i31.8646726

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951) *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record.

RECURSOS PROMOTORES DA COMPREENSÃO RELACIONAL DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Belmira Mota

Colégio Efanor – Matosinhos, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

belmiramota@gmail.com

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – CMUP

rferreir@fc.up.pt

Resumo: Com o objetivo de compreender de que modo os alunos utilizam os processos subjacentes ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de uma tarefa desafiante e como diversos recursos podem contribuir para o desenvolvimento da compreensão relacional do PFC, foi proposta a uma turma do 12.º ano a realização, em pequenos grupos, de uma tarefa de contagem. Os alunos foram incentivados a usar os seus *smartphones* na pesquisa necessária à resolução da tarefa e, num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, a comunicar em pequeno e grande grupo os seus progressos e resultados. Os dados foram recolhidos em duas aulas de 90 minutos, com vista à sistematização do PFC, que os alunos desconheciam ainda. A análise de dados, que incidiu nos registos da observação participante da professora-investigadora, nas transcrições de gravações em vídeo das aulas e nas produções escritas dos alunos, sugere que os diagramas a que os alunos recorreram facilitaram a distinção de situações de natureza multiplicativa das de natureza aditiva. As listagens elaboradas foram progressivamente substituídas por diagramas. Estes e os *smartphones* mostraram ser recursos transparentes promotores do desenvolvimento da compreensão relacional do PFC.

Palavras-chave: Princípio Fundamental da Contagem; Recursos; Compreensão relacional; Resolução de problemas de contagem.

Contexto e objetivos

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) representa um aspeto fundamental na resolução de problemas combinatórios e a sua compreensão é determinante para essa resolução (Lockwood & Caughman, 2016). Em Portugal, os alunos resolvem problemas de contagem desde muito cedo. Ao longo de todo o ensino básico, são abordadas diferentes estratégias de contagem e os alunos são incentivados a construir diagramas que os auxiliem na resolução de tarefas diversificadas. Por exemplo, no nono ano de escolaridade, os alunos recorrem a diagramas de árvore e tabelas de dupla entrada na resolução de problemas que envolvem o cálculo de probabilidades. Porém, o PFC apenas é formalizado no 12.º ano.

Ao longo de um processo de contagem, existe um certo número de etapas independentes, cada uma com um determinado cardinal. Por exemplo, consideremos a carta de um restaurante, que apresenta implicitamente o número de opções disponíveis para as entradas, prato principal e sobremesas. Suponhamos que, num certo restaurante, existem três entradas, quatro pratos principais e cinco sobremesas. Se pretendermos conhecer o número de pedidos diferentes que é possível fazer neste restaurante devemos considerar o cardinal de cada uma das etapas independentes: entradas (de cardinal três), pratos principais (de cardinal quatro) e sobremesas (de cardinal cinco). Dado que, por cada entrada, existem quatro pratos principais, resulta que existem $3 \times 4 = 12$ maneiras diferentes de escolher a entrada e o prato principal e, por cada uma destas 12 maneiras, existem cinco modos distintos de selecionar a sobremesa, pelo que se conclui que existem $12 \times 5 = 60$ maneiras diferentes de fazer o pedido. Nesta experiência, as denominadas etapas independentes são as entradas, o prato principal e as sobremesas, o que dá, ao todo, $3 \times 4 \times 5 = 60$ modos diferentes de fazer o pedido.

Lockwood e Shaub (2016) observaram que os alunos podem facilmente assumir que compreendem bem o PFC devido ao facto da operação que lhe está subjacente (multiplicação) lhes ser familiar. Porém, esta familiaridade faz com que utilizem a multiplicação sem uma análise cuidada, pelo que, frequentemente, cometem erros na sua utilização. Assim sendo, impõe-se conhecer as condições necessárias à sua aplicação num determinado processo de contagem.

Existem diversos estudos que descrevem alguns aspetos relacionados com o ensino-aprendizagem da análise combinatória (e.g., Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino, 2997; Dubois, 1984; Lockwood, 2013). Porém, o número de trabalhos que estudam explicitamente o PFC é muito reduzido. Por exemplo, Lockwood, Reed e Caughman (2016) analisaram diferentes formulações do PFC apresentadas em livros de texto universitários e criaram três categorias: *formulações estruturais*, *formulações operacionais* e *formulações em ponte*. A caracterização de cada uma destas formulações encontra-se descrita no Quadro 1.

Quadro 1 – Classificação das formulações do PFC de acordo com Lockwood, Reed e Caughman (2016)

Classificação	***Critério***	***Exemplo***
Estrutural	Caracteriza o PFC envolvendo a contagem estrutural de objetos (tais como *n*-úplos)	Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ conjuntos finitos. Então, o número de *n*-úplos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfazem $x_i \in X_i$, é $\lvert X_1\rvert \times \lvert X_2\rvert \times \dots \times \lvert X_n\rvert$.
Operacional	Caracteriza o PFC como o processo que permite determinar o número de modos de completar um processo de contagem	Suponhamos que uma tarefa consiste em t operações efetuadas consecutivamente. Suponhamos que a operação 1 pode ser efetuada de m_1 maneiras diferentes; para cada uma destas, a operação 2 pode ser efetuada de m_2 maneiras; e assim sucessivamente. Então, a tarefa pode ser efetuada de $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$ maneiras diferentes.
Em ponte	Caracteriza o PFC como um processo	Suponhamos que um procedimento pode ser dividido em m etapas (ordenadas),

	estrutural de contagem de objetos e especifica o processo através do qual estes objetos são contados.	com r_1 possibilidades diferentes para a primeira etapa, r_2 possibilidades diferentes para a segunda etapa, ... , r_m possibilidades diferentes para a m-ésima etapa. Se o número de possibilidades em cada etapa é independente das escolhas das etapas anteriores, e os resultados são todos distintos, então o número total de resultados distintos é dado por $r_1 \times r_2 \times \ldots \times r_m$.

Lockwood e Schaub (2016) realizaram uma experiência de ensino com dois alunos universitários que foram desafiados a formular o PFC. Ao se comprometerem na exploração das tarefas apresentadas, os alunos refletiram acerca de aspetos fundamentais do PFC (e.g., independência entre as diferentes etapas, conjunto de resultados) que pretendiam incluir na sua formulação do PFC. Porém, verificaram que, apesar dos alunos terem sido capazes de chegar a uma formulação rigorosa do PFC, não é trivial caracterizar todos os detalhes inerentes ao PFC e quando se deve utilizar a multiplicação. Assim, os autores aconselham os professores a analisar cuidadosamente todos os detalhes do PFC e a ajudar os alunos a pensar acerca de quando é que a multiplicação é uma operação adequada a cada tarefa que lhes é proposta.

Dado que o PFC está subjacente a todas as operações combinatórias (arranjos e combinações), é vital que os alunos compreendam como, porquê e quando pode ser utilizado e sejam capazes de o relacionar com as restantes operações utilizadas na resolução de problemas combinatórios. Ou seja, é importante que os alunos adquiram uma *compreensão relacional* do PFC, para além de uma *compreensão instrumental*, na aceção de Skemp (1976). Uma *compreensão instrumental* implica a aquisição de regras ou métodos que permitam ao aluno a resolução de problemas. O foco está em saber *como* aplicar a regra, relegando para segundo plano o *porquê* de ela funcionar, o que condiciona a capacidade do aluno em adaptá-la na resolução de novos problemas. O aluno perceciona a Matemática como um conjunto de peças isoladas de conhecimento, sem estabelecer relações entre elas. Por outro lado, uma *compreensão relacional* implica conhecer *como* e *porquê* as regras e os procedimentos funcionam, ou seja, os alunos sabem o que fazer e são capazes de justificar as suas resoluções e estabelecer relações entre conceitos, o que lhes possibilita a sua adaptação para a resolução de novos problemas.

Os alunos devem desenvolver uma compreensão relacional do PFC de modo a que possam recorrer a ele, sempre que necessário, na progressão da sua aprendizagem da análise combinatória, nomeadamente na compreensão dos arranjos e das combinações, ou seja, das operações utilizadas na resolução de problemas combinatórios. Para tal, envolvemos os alunos duma turma do 12.º ano que, no contexto de uma experiência de ensino (integrada numa investigação mais ampla), exploraram uma tarefa construída pela professora/investigadora com o objetivo de conduzir os alunos a sentirem a necessidade de efetuar operações numéricas que conduzissem à resposta, sem que estes conhecessem o PFC. Ao longo destas sessões, os alunos dispuseram de uma variedade de recursos, entre os quais destacamos a tarefa, os esquemas e diagramas criados por eles e as tecnologias (e.g., *smartphones*, quadro interativo, calculadoras). No âmbito de um estudo mais abrangente (acerca da forma como os alunos desenvolvem a sua compreensão relacional das operações combinatórias), neste trabalho procurámos responder às seguintes questões de investigação: (1) De que modo os alunos utilizam os processos subjacentes ao PFC na resolução de uma tarefa desafiante? (2) Quais os recursos utilizados e de que modo potenciam a compreensão relacional do PFC?

Recursos na compreensão relacional do Princípio Fundamental da Contagem

Tal como Adler (1998, 2000), conceptualizamos o termo *recurso* como um nome (objeto) e um verbo (ação). Assim, um professor com recursos, é um professor que interage com os recursos e não, simplesmente, um professor rodeado (ou não) de recursos. A autora defende que, ao invés de se preocuparem em possuir "mais" recursos, os professores devem desviar a sua atenção para "como" utilizar os recursos que já têm disponíveis, "como" integrar novos recursos nas suas práticas e quais as consequências. Ou seja, os recursos devem deixar de ser vistos simplesmente como objetos que, de algum modo, facilitam e melhoram a aprendizagem da Matemática no contexto da sala de aula, mas sim como *recursos utilizados* no contexto da educação matemática. Deste modo, a autora utiliza o termo *re-source* – procurar de novo ou de modo diferente. Ou seja, um recurso pode ser utilizado de modos e com objetivos inteiramente diferentes. Um quadro interativo pode ser utilizado para projetar apresentações ou para recorrer a um *software* de geometria dinâmica; uma moeda pode ser utilizada para realizar uma experiência aleatória, para exemplificar uma circunferência, ou para efetuar cálculos com números relativos, por exemplo. Assim, o termo *re-source* engloba o próprio recurso (que não é necessariamente um objeto material) e o modo como é utilizado, pelo que os recursos passam a incluir os objetos e ações utilizados na prática letiva (Adler, 2001).

Adler (1998) defende ainda que a atividade matemática na escola não é exclusivamente uma atividade do quotidiano, nem uma atividade do matemático, mas sim uma mistura entre as duas, pelo que caracteriza o ensino da Matemática como uma prática *híbrida*. Também os recursos utilizados na aula de Matemática podem ser, e são, extraídos de situações do dia-a-dia e da própria Matemática. Para ensinar os números relativos, o professor pode recorrer a situações familiares aos alunos, tais como as temperaturas ou os números dos pisos de um prédio. Por outro lado, pode recorrer ao Teorema de Pitágoras para resolver um problema de Trigonometria. Porém, os significados matemáticos que o professor pretende ver alcançados através da utilização de determinado recurso não emanam através deles, precisam ser mediados. Em ambientes de ensino centrados nos alunos, como foi o caso da experiência realizada, os recursos devem ser-lhes entregues e os seus significados devem ser extraídos através da atividade dos alunos, mediada pelo professor (Adler, 2001).

Para que um recurso seja um agente promotor da aprendizagem, o aluno deve ser capaz de o utilizar na aquisição de novos conhecimentos. Neste sentido, Adler (2000) introduziu o conceito de *transparência* de um recurso. A autora defende que os recursos devem ser transparentes pois devem desempenhar simultaneamente as funções de visibilidade (têm de ser visíveis para serem utilizados) e invisibilidade (é através deles que se atinge o conhecimento pretendido). Porém, Adler sublinha que a transparência não é uma característica inerente ao recurso, mas uma função subjacente ao seu uso, pelo que pode facilitar ou bloquear o acesso ao conhecimento. Assim, para que um recurso promova a aprendizagem, em alguma altura necessita deixar de ser o objeto (visível) de atenção e passar a ser o meio para atingir o conhecimento, ou seja, deve ficar invisível.

Adler (2000, 2001) sublinhou que considerar apenas os recursos humanos e materiais (que denominou *recursos básicos*) é restritivo, dado que existem muitos outros, tais como recursos matemáticos, culturais e sociais que não devem ser esquecidos. Os recursos básicos são aqueles estritamente necessários à prática do ensino, tal como está generalizadamente estabelecido: materiais (edifícios, água, eletricidade, mesas, cadeiras, papel, material de escrita) e humanos (rácio alunos/professor, qualificações dos professores). Deste modo, a noção de recurso deve ser ampliada para a de *recursos em uso* que inclui recursos humanos adicionais tais como o conhecimento de profissional e experiencial dos professores (como opostos às suas qualificações formais), recursos materiais adicionais (tecnologias, materiais matemáticos escolares e objetos do quotidiano), assim como os recursos culturais (artefactos matemáticos, linguagem, tempo).

Metodologia de investigação

Este trabalho insere-se numa investigação mais ampla em curso, qualitativa e interpretativa, com *design* de experiência de ensino (Steffe & Thompson, 2000). Os 31 alunos da turma participante no estudo foram divididos em sete grupos de quatro alunos e um de três. A experiência de ensino realizada foi conduzida num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, que se distingue de uma abordagem ao ensino mais direta pelos papéis desempenhados pelos alunos e professores, pelas tarefas propostas e modo como são geridas, e pelo tipo de comunicação que é estabelecida dentro da sala de aula (e.g., Menezes, Tomás Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014; Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013) . A tarefa *Viagem Lisboa – Vila Meã* (Figura 1) objetivava conduzir os alunos à compreensão dos processos inerentes ao PFC, sem ainda o conhecerem formalmente. Esta tarefa foi desenhada pela professora/investigadora e dava aos próprios alunos a liberdade de decidirem o número de hipóteses que considerariam em cada etapa da viagem. A tarefa foi trabalhada em duas aulas de cunho exploratório com a duração de 90 minutos, que se desenrolaram de acordo com a estrutura apresentada por Oliveira e colaboradores (2013). A primeira aula incluiu as duas primeiras fases: *introdução* e *realização* da tarefa; na segunda aula, foi efetuada uma *discussão coletiva* seguida de uma *sistematização das aprendizagens* conseguidas.

O João é natural de Vila Meã mas trabalha em Lisboa. Ao fim-de-semana vem a Vila Meã visitar a família e os amigos. Umas vezes usa o avião, outras o comboio e outras o seu próprio carro.

Esta semana, o carro do João precisava fazer a revisão e, por isso, no domingo, o João foi para Lisboa de boleia com um amigo. Mas, na sexta-feira, terá de escolher entre o avião ou o comboio, dado que não tem boleia. Se vier de avião, apenas pode escolher voos que saem de Lisboa a partir das 17:00 e, se vier de comboio, pode selecionar um a partir das 15:30. De quantas maneiras diferentes o João pode fazer a viagem Lisboa – Porto – Vila Meã?

Figura 1 – Tarefa *Viagem Lisboa – Vila Meã*

A tarefa foi apresentada pela professora recorrendo ao quadro interativo. Dado que os alunos não estavam familiarizados com as diferentes opções existentes para fazer a viagem Lisboa – Vila Meã recorrendo a transportes públicos, na fase da *introdução*, a professora decidiu fazer um *brainstorming* acerca das diferentes soluções disponíveis. Começou por sublinhar que, utilizando transportes públicos, o João tem, necessariamente de fazer a viagem Lisboa – Porto e, seguidamente, Porto – Vila Meã. Informou ainda que a viagem seria efetuada na sexta-feira da semana em curso, aquando da aplicação da tarefa. Dado que todos os alunos da turma possuíam um *smartphone*, a professora sugeriu que os utilizassem para investigar o número de opções que o João dispunha em cada etapa da viagem. Recomendou que consultassem os *sites* das companhias de transportes públicos que pretendiam usar e/ou *sites* que permitissem visualizar voos de diversas companhias aéreas.

Na fase de *realização*, à medida que os alunos exploravam a tarefa de modo autónomo, a professora monitorizou o trabalho desenvolvido, procurando compreender as estratégias seguidas através das interações verbais (entre os alunos e entre os alunos e a professora) durante o trabalho de grupo e dos registos escritos, fornecendo *feedback* sempre que considerava necessário, sem nunca dar respostas ou diminuir o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 2009) . Com base nesta monitorização, a professora selecionou três resoluções para serem apresentadas e discutidas com toda a turma na fase seguinte do trabalho em torno da tarefa.

A fase de *discussão coletiva* iniciou-se com base numa resolução em que os alunos se limitaram a fazer uma listagem de todas as hipóteses possíveis. Sendo uma abordagem muito simples e esquemática, era acessível a todos. A segunda resolução apresentada recorreu a listagens, mas também efetuou multiplicações e adições para determinar o número de opções disponíveis. Por fim, foi discutida uma resolução em que os alunos não recorreram a qualquer listagem, tendo optado pela construção de um esquema que os conduziu às operações de multiplicação e de adição. Apesar de desconhecerem o PFC, os dois últimos grupos aplicaram-no e demonstraram distinguir claramente situações de caráter multiplicativo de situações de foro aditivo. A professora apoiou os alunos nas suas apresentações, colocando questões que procuravam ajudar e esclarecer ideias e a envolver toda a turma na validação das respostas, ajudando os alunos a ver as relações entre as diferentes resoluções.

A fase de *sistematização das aprendizagens* decorreu após a discussão coletiva. A professora formalizou o PFC, apoiada nas conclusões a que chegaram os alunos na exploração e discussão da tarefa proposta e apresentou diversos exemplos para que os alunos tivessem a oportunidade de identificar as etapas independentes subjacentes à sua aplicação, assim como a condição necessária à aplicação do PFC: o cardinal da etapa seguinte ser exatamente o mesmo para todas as opções consideradas na etapa anterior.

Ao longo destas duas aulas, recorremos a diversos recursos. De acordo com as categorias definidas por Adler (2001), descrevemos, no Quadro 2, os recursos que utilizámos.

A escolha do *smartphone* como recurso prendeu-se com o facto de ser um objeto que todos os alunos possuem e sem o qual (aparentemente) não conseguem viver. Muitos podem considerar o *smartphone* como um bloqueio à aprendizagem, na medida em que se constitui como um fator externo de distração. E, de facto, isso pode acontecer, mas nós procurámos torná-lo num recurso *invisível* promotor de aprendizagem. Pretendemos que, durante a exploração da tarefa, os alunos usassem os seus *smartphones* como um meio para a obtenção de dados que lhes permitissem apresentar uma resposta coerente à tarefa proposta e ignorassem as funcionalidades que usam habitualmente, como por exemplo, as redes sociais, ou seja, pretendemos que os *smarthpones* se tornassem recursos *transparentes*.

Os dados recolhidos e analisados para este trabalho baseiam-se nas observações da professora ao longo da fase de realização da tarefa, e nas produções escritas e apresentações de três grupos: um que não recorreu ao PFC (Grupo I) e dois que utilizaram o PFC e distinguiram situações de caráter aditivo das de caráter multiplicativo (Grupos II e III).

Quadro 2 – Recursos utilizados

Classificação de Adler (2001)		*Recursos usados na experiência de ensino desenvolvida*
RECURSOS BÁSICOS – MANUTENÇÃO DA ESCOLA		
Materiais		Edifícios escolares, água, eletricidade, mesas, cadeiras, papel, materiais de escrita.
Humanos		Rácio aluno/professor, tamanho da turma, qualificações do professor
OUTROS RECURSOS		
Recursos humanos		Conhecimento da professora – Conhecimento de Matemática – Conhecimento pedagógico do conteúdo – Conhecimento do mundo – Conhecimento dos alunos
		Colegialidade
Recursos materiais adicionais	Tecnologias	Quadro interativo, calculadoras, *smartphones*, fotocopiadora
	Materiais matemáticos escolares	Tarefa, *software*
	Objetos do quotidiano	Dinheiro, histórias, calculadoras, horários dos transportes públicos
Recursos culturais	Artefactos matemáticos	Esquemas, diagramas e PFC
	Linguagem	Língua mãe, línguas estrangeiras, *code-switching*[*], verbalização, comunicação
	Tempo	Horário Duração das aulas

Análise dos dados

Durante a fase de realização os alunos recorreram aos *smartphones* para averiguarem todas as hipóteses viáveis de acordo com as restrições definidas pelos próprios alunos. À medida que os alunos pesquisavam as opções disponíveis discutiam-nas entre os

[*] O *Code-switching* ocorre quando o indivíduo alterna entre duas ou mais línguas ao longo do seu discurso.

elementos do grupo, recorrendo, muitas vezes, ao *code-switching*, dado que visitaram *sites* nacionais e estrangeiros.

O Grupo I (Júlio, Jacinto, Jorge e Afonso – pseudónimos) expôs uma listagem de todas as possibilidades que os alunos consideraram exequíveis (oito) considerando as restrições que impuseram. Os alunos começaram por apresentar os voos que consideraram viáveis para fazerem a ligação entre Lisboa e Porto. Seguidamente, verificaram, para cada um deles, se existia um horário do Metro que lhes permitisse fazer o percurso entre o aeroporto e a estação de Campanhã, tendo concluído que tal não era possível para dois dos voos inicialmente selecionados. Porém, concluíram que, se optassem pelo serviço de Uber para o transporte entre o aeroporto e a estação de S. Bento, era possível manter um destes dois voos, pelo que consideraram que existiam cinco opções distintas, caso decidissem fazer a viagem entre Lisboa e Porto de avião.

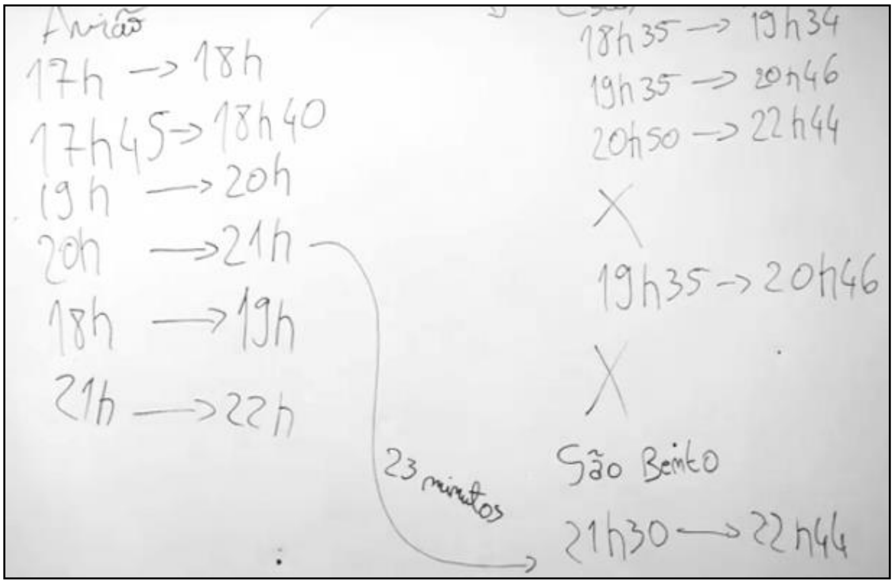


Figura 2 – Listagem elaborada pelo Grupo I das opções possíveis, caso a viagem entre Lisboa e Porto fosse efetuada de avião

O Grupo I apresentou três hipóteses possíveis, caso o trajeto entre Lisboa e Porto fosse efetuado de comboio. O que, adicionado às cinco anteriores, perfazia um total de oito opções distintas. O Júlio afirmou que o número reduzido de opções se devia às restrições que impuseram e que se encontram descritas na Figura 3.

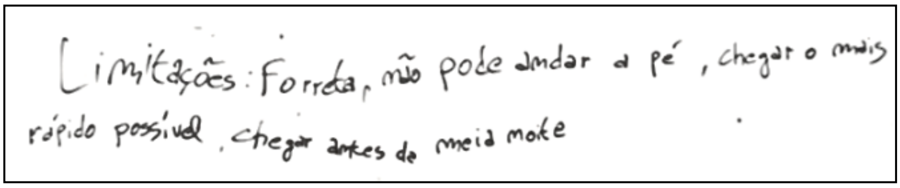


Figura 3 – Restrições impostas pelo Grupo I

O Grupo II (Maria, Carla, Manuel e José – pseudónimos) começou por apresentar um diagrama que traduziu o seu processo de raciocínio (Figura 4).

A professora pediu ao grupo para explicar o motivo pelo qual decidiram construí-lo:

> **José:** Porque é os sítios para onde ele quer ir. Ele sai de Lisboa e pode ir de comboio ou de avião. Se vier de comboio, vai para Campanhã; se vier de avião tem de ir para o aeroporto para depois vir para o comboio ou direto para casa. Acho que é lógico.
>
> **Professora:** Eu acho que vocês não perceberam o que eu quero dizer...
>
> **Manuel:** Ah! Era para ser mais fácil organizar os dados. Porque conseguimos perceber melhor.

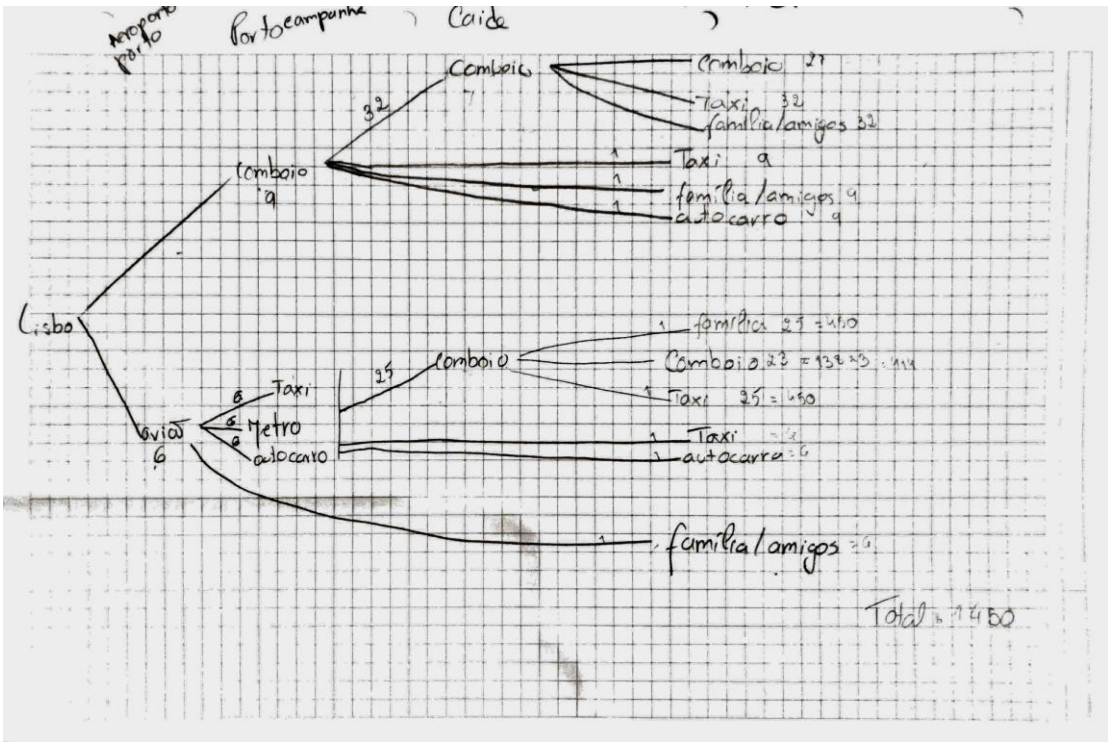


Figura 4 – Diagrama elaborado pelo Grupo II

A construção do diagrama auxiliou os alunos na organização dos dados e surgiu de forma natural ao longo da sua exploração da tarefa. O grupo continuou a sua explicação:

> **Manuel:** De Lisboa para Campanhã considerámos nove comboios e depois tínhamos sete comboios que vinham de Campanhã a Caíde, e tínhamos dois comboios que iam de Caíde a Vila Meã. Nós depois, se fossem todos que dessem ligação aos outros, era nove vezes sete que era sessenta e três. Mas, no entanto, nem todos dão ligação ao outro. Por exemplo, nós não podemos... Saímos em Campanhã às 20:35 e vamos apanhar o das 19:30. É impossível! Por isso temos que cortar [eliminar algumas das hipóteses consideradas inicialmente].
>
> **Professora:** Então como é que fizeram? Contaram?
>
> **Manuel:** Contámos à mão cada um desses.
>
> **Professora:** Então fizeram uma listagem, como o grupo anterior [Grupo I] e colocaram aí os 32.

> **Manuel:** Sim. Porque, por exemplo, se contar os que vêm de Campanhã para Caíde, são 32, mas se contar os que vêm para Vila Meã, já são 27. E depois somámos. Depois, por exemplo, há nove comboios para Campanhã. Se quiséssemos ir de táxi, com os amigos ou de autocarro. Basicamente, para cada um desses nove comboios, vai haver uma hipótese, que é 9x1, que dá nove para cada opção.
>
> **Professora:** Gostei dessa frase. Para cada um dos nove, há uma hipótese. E, se para cada um desses nove, existissem duas hipóteses?
>
> **Manuel:** Era 9x2 que era 18 para cada uma.

É interessante verificar que, de modo autónomo, os alunos foram capazes de distinguir situações de caráter aditivo de situações de caráter multiplicativo, quando o número de opções nas etapas independentes variava, dependendo da decisão na etapa anterior.

O Grupo III (Daniel, Adriana e Luísa – pseudónimos) não recorreu a qualquer listagem, mas sim à elaboração de um diagrama de árvore (Figura 5). À medida que traçaram o diagrama no quadro, os alunos explicaram o significado de cada um dos seus elementos. Começaram por referir que, à partida, existiam duas hipóteses, avião ou comboio, e que utilizaram o *site eDreams* para efetuarem a pesquisa dos voos disponíveis para o dia em causa. Caso o João optasse pelo comboio, teria ainda de decidir qual das seis estações existentes na cidade de Lisboa (representadas pelas letras A, B, C, D, E e F) selecionaria. No caso de efetuar a viagem de avião existiam cinco voos em horários que os alunos consideraram adequar-se à situação em causa.

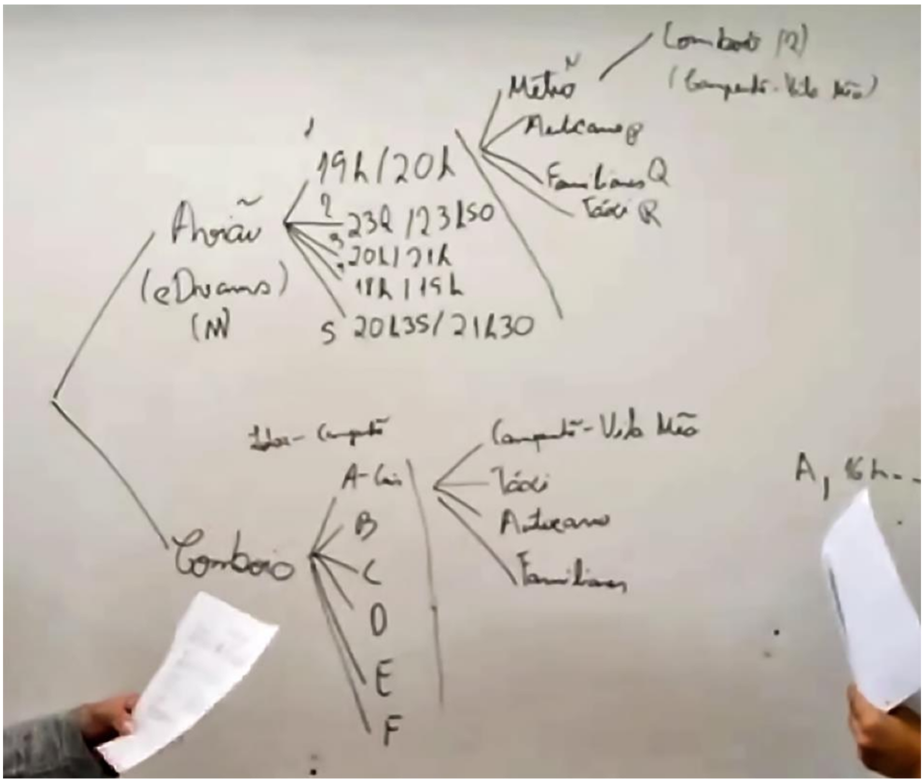


Figura 5 – Diagrama elaborado pelo Grupo III

Contrariamente ao Grupo II, que escreveu o cardinal associado a cada opção no próprio diagrama (e.g., avião – 6), o Grupo III descreveu todas as opções que considerou, por exemplo, para os aviões, apresentando todos os horários disponíveis.

Em articulação com os restantes alunos da turma, durante a fase de discussão coletiva da tarefa, todos os elementos deste grupo concordaram que limitaram as suas escolhas a horários que consideravam exequíveis, dado que o João, "no domingo, tinha de voltar a fazer as malas para regressar a Lisboa". Para apanhar cada um dos cinco voos, o João tinha quatro hipóteses: ir de metro, de autocarro ou de táxi para a estação de caminho de ferro de Campanhã ou, em alternativa, um familiar deslocar-se ao aeroporto e, deste modo, seguiria diretamente para casa. Justificaram ainda que consideraram que apenas existia uma hipótese para o metro e uma para o autocarro porque partiram do princípio que o João optaria pelo primeiro que tivesse oportunidade de entrar. De notar que, nesta fase, os alunos referiram claramente "pusemos ***para cada um*** destes aviões o metro, o autocarro, familiares ou táxi", justificando, deste modo, que os quatro ramos do diagrama de árvore que saíam do primeiro voo se replicavam pelos restantes. De igual modo, explicaram as hipóteses existentes, caso o João tivesse optado por efetuar a viagem Lisboa – Porto de comboio.

Seguidamente, o Daniel referiu que, após a construção do diagrama, "fizemos *conjuntos* e no fim contámos as hipóteses todas: 157". Procurando clarificar estes procedimentos para os restantes colegas, a professora perguntou se tinham feito algum cálculo para chegar ao valor de 157, ao que os alunos responderam afirmativamente. Pediu-lhes então que mostrassem aos colegas como tinham procedido:

> **Adriana:** É para fazer duma estação para dar o exemplo?
>
> **Professora:** Sim. Quero ver como é que vocês chegaram ao 157. Porque, basicamente, o que vocês têm aí é uma lista de opções. Mas esse esquema que está aí foi utilizado para vocês fazerem algum cálculo?
>
> **Luísa:** Não. É só para simplificar. Foi para nos organizarmos.
>
> **Professora:** Vocês chegaram ao 157 contando uma por uma?
>
> **Todos:** Não. Foi por conjuntos.
>
> **Professora:** Então, dêem-me um exemplo de um conjunto.
>
> **Adriana:** Por exemplo, se ele escolhesse o Cais do Sodré (letra A), tinha três comboios que podia ir até Campanhã. Para o primeiro comboio tinha quatro hipóteses (comboio, familiares, táxi ou autocarro).
>
> **Professora:** E então depois era um copiar colar para os outros dois comboios?
>
> **Grupo:** Sim.
>
> **Professora:** Esse grupo quantas hipóteses dá?
>
> **Luísa:** 3 vezes 4, 12.
>
> **Professora:** E este 12 aparece uma única vez?
>
> **Adriana:** Não. Cada um dos grupos tinha um número de hipóteses diferentes.
>
> **Professora:** Então por isso é que vocês tiveram de somar?
>
> **Luísa:** Sim. Senão fazíamos 6 vezes 12.

A professora reforçou que, caso o número de hipóteses em cada estação fosse sempre o mesmo, não existiria a necessidade de somar porque, nesse caso, o 12 surgiria por seis vezes e bastaria multiplicar o 12 por seis. Mas, como nos dados que os alunos recolheram, para cada uma das estações existia um número diferente de hipóteses, o grupo teve a necessidade de determinar o número de hipóteses para cada estação e, em seguida *adicionar* os seis resultados *diferentes*.

Comparando a abordagem deste grupo com os restantes colegas, a professora referiu que alguns efetuaram uma listagem de todos os resultados possíveis, mas, como limitaram as suas opções, chegaram a um número relativamente pequeno como resposta que representaria a resposta à tarefa proposta. Contrariamente, houve grupos que obtiveram como resposta números relativamente elevados, números esses que só foram atingidos através de cálculos pois seria impensável fazerem uma lista exaustiva das hipóteses possíveis. Ficou claro que os grupos que efetuaram cálculos recorreram às operações de adição ou multiplicação. Já na fase de sistematização das aprendizagens, a professora informou os alunos que, quando efetuam a multiplicação, como os Grupo II e III fizeram estão, no fundo, a aplicar aquilo que é conhecido como o *Princípio Fundamental da Contagem*. Reforçou que o resultado da multiplicação apenas traduz o cardinal do espaço de resultados pretendido, se o número de opções em cada uma das etapas da contagem for igual. Quando o número de opções da etapa seguinte não é igual para todos os resultados da etapa anterior, te-se-rá de se contabilizar cada etapa separadamente e, no final, adicionar todos os resultados possíveis. Apresentou vários exemplos em que os alunos facilmente distinguiram as situações em que deveriam efetuar adições, das que reuniam as condições para a utilização do PFC. Para finalizar a professora apresentou, com a colaboração dos alunos, uma *formulação em ponte* do PFC, de acordo com a classificação descrita por Lockwood, Reed e Caughman (2016).

Conclusões e implicações

Neste estudo, procurámos perceber de que modo os alunos utilizam os processos subjacentes ao PFC e como é que a utilização de um número diversificado de recursos potenciou uma compreensão relacional do PFC. Envolvendo os alunos de uma turma do 12.º ano na exploração, em pequenos grupos, de uma tarefa desafiante conducente à formalização do PFC, num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório (e.g., Oliveira et al., 2013) , analisámos as suas produções escritas e as suas interações verbais, tanto aquando da realização da tarefa como aquando da sua discussão coletiva, e ainda os dados recolhidos pela professora-investigadora através da observação participante de duas aulas de 90 minutos.

A análise das resoluções dos diferentes grupos sugere que, quando o cardinal do espaço de resultados é um número elevado, os próprios alunos recorrem aos processos subjacentes ao PFC, reconhecendo as etapas independentes e identificando as situações em que as contagens se podem fazer recorrendo apenas à operação da multiplicação. Contrariamente, os grupos cuja resposta foi um valor numericamente baixo limitaram-se a fazer listagens e não efetuaram qualquer cálculo. Estes resultados, que apoiam estudos anteriores (e.g., Tillema, 2013), sugerem que as situações cuja cardinalidade do espaço de resultados seja numericamente baixa não potenciam a compreensão ou a aplicação do PFC pois os alunos não são desafiados a considerar um maior número de hipóteses em cada uma das etapas independentes subjacentes ao PFC. Ou seja, optam por estratégias mais simples porque não reconhecem a necessidade de recorrer ao PFC.

Os diagramas e esquemas utilizados surgem de modo espontâneo nas resoluções dos alunos, de tal modo que eles próprios têm dificuldade em explicar a razão pela qual recorrem a eles, referindo que a sua utilização "é lógica". Os manuais incluem diagramas em árvore e, muitas vezes, os próprios professores constroem-nos, pelo que os alunos tendem a reproduzi-los nas suas resoluções e a não construir novos diagramas que possam ser mais intuitivos e úteis na exploração de novas tarefas (tais como os diagramas elaborados pelos Grupos II e III, que não explicitam todas as opções disponíveis em cada etapa). Os dados recolhidos indicam que os próprios alunos os constroem à medida das suas necessidades e traduzindo os seus modos de pensar, pelo que a espontaneidade com que traçam os diagramas e as particularidades associadas a cada um também sugerem que não deve ser imposto pelo professor um determinado esquema pré-definido. Aquando das suas explicações, os alunos recorrem a diagramas e esquemas para explicarem a razão pela qual efetuaram as diferentes operações. Assim, tal como Lockwood (2013), consideramos que os esquemas e diagramas desempenham um papel vital na determinação do cardinal do conjunto de resultados pretendido e que a sua utilização deve ser incentivada pelos professores na aprendizagem da análise combinatória. Neste sentido, os diagramas e esquemas elaborados pelos alunos constituíram-se como um recurso central, na medida em que foram a alavanca que os conduziu à apropriação do PFC e os ajudou a distinguir situações apenas multiplicativas das que também exigiam a utilização de elementos aditivos.

Pelo exposto, consideramos que a tarefa e o modo como foi conduzida permitiram que os alunos se apercebessem dos processos subjacentes ao PFC e o utilizassem sem ainda o conhecerem formalmente. Os dados sugerem que a exploração de tarefas que deixem ao aluno a decisão acerca das restrições a serem impostas em cada etapa subjacente ao PFC poderá favorecer a sua compreensão relacional.

Acreditamos que os *smartphones* se constituíram como uma verdadeira *re-source*, dado que foram usados para fazer pesquisas essenciais à resolução da tarefa e, portanto, foram recursos invisíveis e não distrativos da atividade matemática. Ao permitir que todos os alunos pudessem efetuar as pesquisas necessárias à resolução da tarefa proposta (contrariamente do que aconteceria se utilizassem um computador, dado que os constrangimentos logísticos impediriam a utilização de um por cada um dos elementos do grupo), potenciou a comunicação entre os elementos do mesmo grupo que envolveu o recurso a línguas estrangeiras e o *code-switching*. Assim, a exploração da tarefa saiu enriquecida e, portanto, consideramos que os *smartphones* se tornaram num recurso transparente (Adler, 2000).

Este trabalho abre caminho para outras investigações. Em particular, consideramos importante investigar o modo como os alunos conceptualizam o PFC na resolução de problemas de contagem que envolvam a aplicação de operações combinatórias (arranjos e combinações), ou seja, se a compreensão relacional, sugerida por estes dados, que os alunos evidenciaram na exploração da tarefa sobre a qual incidiu o presente estudo, se estende à utilização das diferentes operações combinatórias para interpretar e resolver problemas combinatórios.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo CMUP (UID/MAT/00144/2013), financiado pela FCT (Portugal) através de fundos estruturais nacionais (MEC) e europeus (FEDER), ao abrigo do acordo de cooperação PT2020.

Referências

Adler, J. (1998). Resources as a verb: Recontextualising resources in and for school mathematics practive. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the*

22nd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 1-18). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224.

Adler, J. (2001). *Teaching mathematics in multilingual classrooms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199.

Dubois, J.-G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 37-57.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Lockwood, E., & Caughman, J. S. (2016). Set Partitions and the Multiplication Principle. *PRIMUS, 26*(2), 143-157.

Lockwood, E., & Schaub, B. (2016). *Reinventing the multiplication principle*. Paper presented at the RUME, Seattle.

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *12*(2), 29-53.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-307). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

UMA ICONOGRAFIA DA MATEMÁTICA NA AULA[1]

Alexandra Sofia Rodrigues

Instituto de Gouveia – Escola Profissional, UIED

alexsofiarod@gmail.com

José Manuel Matos

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, UIED

jmm@fct.unl.pt

Resumo: Uma iconografia da aula mostra-nos como ela tem tomado diferentes disposições ao longo dos séculos refletindo metodologias de ensino, teorias de aprendizagem e inovações tecnológicas. Neste texto retratamos diferentes representações da aula centrada na matemática, recorrendo a gravuras e fotografias encontradas em livros de texto ou no espólio de colecionadores desde a época medieval até meados do século XX. Utilizando um paradigma qualitativo, com pesquisa histórica e documental, apresentamos para diferentes épocas teorias de ensino e aprendizagem subjacentes à aula, através da consulta da legislação, manuais escolares e fotografias.

Palavras chave: Aula de Matemática, iconografia, cultura da aula, história da Educação Matemática.

Neste texto procuraremos conhecer as práticas de aula de Matemática recorrendo a suas representações encontradas em livros de texto, fotografias ou gravuras e interligando-as com escritos de professores e alunos. Pretendemos identificar através da iconografia as mudanças e permanências da aula de Matemática do passado, por forma a refletirmos sobre o presente. Trata-se de um percurso através de modos de organização do processo de ensino, a *aula*[2], e não sobre o conteúdo desse ensino (o currículo). O foco será pois nas *práticas* e não nas *normas* seguindo a distinção de Julia (1995). E será necessariamente uma viagem preliminar, pois não foi ainda realizado um estudo aprofundado sobre o tema em Portugal, ao contrário de trabalhos de maior fôlego realizados noutros países[3]. Será uma abordagem histórica abrangendo o período desde a época medieval até meados do século XX que, tal como fazemos quando procuramos recriar os tempos do nosso passado, procura ilustrar os modos arcaicos buscando as permanências e as mudanças como forma de compreender o presente. O que somos hoje tem sempre algo do passado, mas também algo que se afastou irremediavelmente do passado.

[1] Este texto foi apoiado por fundos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/CED/02861/2016 e constitui um aprofundamento de um texto de Matos (2011).

[2] Não nos referimos apenas à *sala de aula*, que tem conotações mais espaciais e físicas. A língua portuguesa possui uma excelente alternativa, a *aula*, que designa de um modo abrangente todo o processo social e cultural envolvido no ato educativo.

[3] Ver, por exemplo Moreno e Viñao (2017).

Metodologia

O processo investigativo, em qualquer área do conhecimento, possui particularidades que, no caso da investigação histórica em Educação Matemática reside na sua capacidade de proporcionar a prática reflexiva sobre o passado que nos permita interligá-lo com o presente (Matos, 2018; Silva e Miranda, 2013). De facto, de acordo com estes últimos autores:

> O resgate dos problemas da antiguidade permite ao investigador conhecer as indagações e possíveis soluções propostas pela humanidade que se constituíram diante da necessidade gerada por uma sociedade com uma determinada cultura. (Silva e Miranda, p. 3)

De acordo com Rodriguez (2010) "a pesquisa histórica exige que o pesquisador tenha domínio do conteúdo histórico e pressupõe o prévio conhecimento da metodologia de trabalho científico" (p. 35).

Neste trabalho pretendemos efetuar uma iconografia, isto é, examinar, categorizar e interpretar imagens. O método, utilizado em história de arte, é profundamente influenciado pelas reflexões de Erwin Panofsky (1989) que o dividiu em três etapas: a descrição pré-iconográfica (a identificação dos componentes), a análise iconográfica (estudo destes componentes eventualmente interligando-os com outros estudos) e a interpretação iconológica (estabelecimento de relações com o nosso conhecimento sobre o período histórico)[4]. O nosso trabalho é baseado em fotografias e gravuras sistematicamente recolhidas em acervos bibliográficos, arquivos e portais eletrónicos. Assim, numa primeira fase recolhemos imagens em manuais escolares de matemática entre os séculos XVI e meados do século XX e fotografias provenientes de diversos arquivos e procedemos à identificação dos seus componentes. Estes componentes foram confrontados uns com os outros, com outro material, nomeadamente textual, da época e com outros estudos. Finalmente estabelecemos relações com o nosso conhecimento sobre as épocas históricas onde se enquadra este material. Esta abordagem permitiu-nos retratar a aula e em particular a aula de Matemática em diferentes níveis de ensino desde a época medieval até meados do século XX.

A aula medieval

A gravura com que termina a primeira edição do *Tratado da pratica Darismetyca* da autoria de Gaspar Nicolas (1519/1963)[5] que constitui o primeiro livro de texto de matemática impresso em Portugal (Figura 1) parece representar uma aula medieval típica na qual o mestre está sentado numa cadeira mais elevada e aponta para o livro enquanto os aprendizes folheiam, presumivelmente, outros exemplares do mesmo livro ou escrevem em cadernos.

Em conjunto com as primeiras gramáticas nacionais, o *Tratado* prefigura uma nova "mentalidade" na sociedade portuguesa, passando os conhecimentos de escrita, caligráficos e aritméticos a desempenhar um papel central quer nas atividades económicas, quer no quotidiano de uma burguesia mercantil pujante e de toda uma série de profissões que orbitavam em torno dela (Almeida, 1994).

---

[4] Um aprofundamento do método e sua aplicação à matemática pode ser encontrado em Vaz (2013).

[5] A gravura foi usada noutros livros do mesmo editor.

Figura 1 – Gravura do *Tratado da pratica Darismetyca* de 1519

Na análise da gravura destacámos os seguintes elementos: os personagens, os livros ou cadernos, os assentos, a posição de cada um e a composição global da imagem. O mestre está no centro e aponta para o livro simbolizando a centralidade do conhecimento escrito e o seu papel de mediador entre dois saberes: o saber contido no livro e o que deve ser aprendido, isto é, escrito, pelos alunos. Repare-se na postura do aluno mais à esquerda que transcreve as palavras do mestre. A gravura parecer ser "encenada", e poderá não pretender uma representação factual de uma aula, mas antes, através de uma composição global dos personagens e artefactos, passar uma mensagem, no caso, que o conhecimento escolar é essencialmente textual e a sua autoridade reside no mestre — o *lente*, isto é, o que lê —, intermediário do livro.

A aula jesuíta

A Ordem de Jesus ganhou uma maior expressão após o Concílio de Trento (meados do século XVI) por destacar a importância do ensino como fator de combate ao desvio protestante. O reino de Portugal esteve próximo quer da génese da ordem jesuíta no século XVI[6], quer do seu banimento em diversos países europeus no século XVIII[7] (Carvalho, 2008).

Desenvolvendo gradualmente um conjunto de regras, o *Ratio Studiorum*, que, especialmente a partir do século XVII regia e uniformizava o ensino em todos os colégios, a Ordem vai aperfeiçoar toda uma nova técnica pedagógica que se procurava mais eficaz do que a de tradição medieval. Pelo menos nos colégios de maiores tradições, tal como na escola medieval, o professor jesuíta assume um lugar mais destacado, falando ("lendo") a partir do púlpito, mas também "explicando", "repetindo" ou "disputando", técnicas desenvolvidas nos colégios. A imagem (Figura 2) retém apenas o púlpito no seu lugar mais elevado inserido numa sala decorada com azulejos barrocos representativos dos saberes escolares.

[6] Os seus fundadores estudaram no Colégio de Santa Bárbara em Paris financiado por D. João III.
[7] A posição da Santa Sé sobre toda a ordem jesuíta foi pressionada pelo Marquês de Pombal.

Figura 2 – Púlpito em aula do Colégio do Espírito Santo, Évora (foto dos autores)

As inovações pedagógicas jesuítas incluem a explicitação de procedimentos didáticos adequados às matérias a ensinar. O professor de matemática, por exemplo, estava sujeito a um conjunto específico de “Regras”:

> 1. Autores, tempo, alunos de matemática. — Aos alunos de física explique na aula durante 3/4 de hora os elementos de Euclides; depois de dois meses, quando os alunos já estiverem um pouco familiares com estas explicações, acrescente alguma cousa de Geografia, da Esfera[8] ou de outros assuntos que eles gostam de ouvir, e isto simultaneamente com Euclides, no mesmo dia ou em dias alternados.
> 2. Problema. - Todos os meses, ou pelo menos de dois em dois meses, na presença de um auditório de filósofos e teólogos, procure que um dos alunos resolva algum problema célebre de matemática; e, em seguida, se parecer bem, defenda a solução.
> 3. Repetição. - Uma vez por mês, em geral num sábado, em vez da preleção repita-se publicamente os pontos principais explicados no mês. (Silva, sem data)

Os colégios jesuítas vão ainda desenvolver outras técnicas pedagógicas inovadoras, por exemplo, as sabatinas, sessões realizadas aos sábados em que as matérias dadas durante a semana eram recapituladas em forma de discussão ou de repetição.

A aula de primeiras letras no século XIX

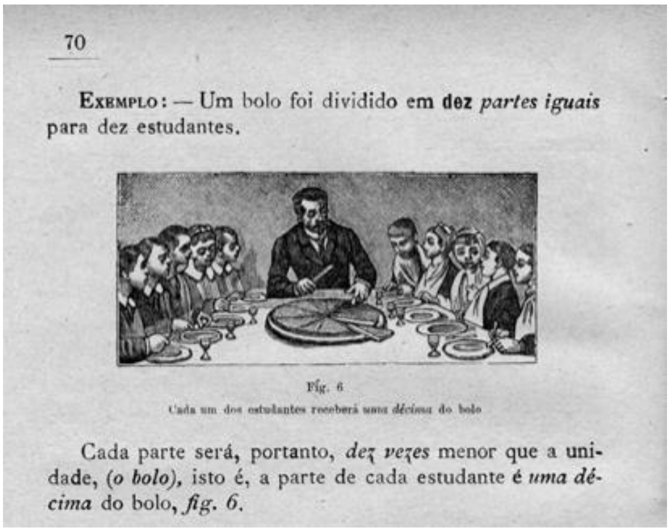
Os colégios jesuítas, bem como os de outras ordens religiosas, não se destinavam a dar a formação elementar do ler, escrever, contar e rezar. Para isso existiam os mestres de primeiras letras que vão perdurar até bem dentro do século XX. A iconografia do final do século XIX mostra-nos algumas representações deste tipo de ensino.

Por exemplo, o livro de Ulysses Machado para o ensino primário (1914)[9] a pretexto de problemas de aritmética representa um professor partilhando uma refeição com os seus alunos numa cena que mima um jantar tomado em família (Figura 3).

---

[8] Isto é, cosmografia.

[9] Suspeitamos que a gravura se foi mantendo ao longo das inúmeras edições do livro desde o século XIX. Foi consultada a 5ª edição.


70

Exemplo: — Um bolo foi dividido em **dez** *partes iguais* para dez estudantes.

Fig. 6
Cada um dos estudantes receberá uma *décima* do bolo

Cada parte será, portanto, *dez vezes* menor que a unidade, *(o bolo)*, isto é, a parte de cada estudante é *uma décima* do bolo, *fig. 6*.

Figura 3 – Ambiente familiar entre o professor e os alunos (Machado, 1914, p. 70)

Os componentes da gravura são claros: os personagens, a mesa e os seus artefactos e a composição global da situação retratada. Não se trata agora de uma encenação, mas antes da representação de uma situação real que ilustre o contexto do problema. A interpretação iconológica diz-nos que a situação ecoa o híbrido escola-casa comum durante o século XIX (Silva, 2005) e dificilmente conseguimos imaginar como esta situação possa ter pontos de contacto com a realidade atual. Mas deveria ter algum sentido na época em que o livro começou a ser publicado (final do século XIX ou princípio do século XX) e para os alunos a quem se destinava. De facto, muitas destas "escolas" serviam simultaneamente de habitação para o professor[10] e seria natural que a prática escolar fosse igualmente uma prática quase familiar com o professor e com a família que com ele coabitava, situação perfeitamente enquadrada pela legislação. Segundo um aviso de 1809,

> os mestres, tanto regulares como seculares, poderiam continuar a dar lições em suas casas ou conventos, havendo nelas as 'comodidades necessárias'. (Albuquerque, 1960, p. 27)

A realidade seria, no entanto, bem mais complicada, como relata Francisco Santos Marrocos, que em 1799 é encarregado de elaborar um relatório sobre o estado das escolas primárias e secundárias. Referindo-se a alguns professores de escolas primárias, escreve, em tom indignado

> Estes mestres, como bufarinheiros em loja de quinquilharia, vendem aos discípulos papel, tintas, regras e pastas; fazem imposições mensais, contribuindo cada um para a água de beber, tendo mais preço sendo por um copo, varrer a escola, e o mais que omito. (citado em Albuquerque, 1960, p. 41)

[10] Poder-se-ia igualmente afirmar a era a habitação do professor que constituía a escola.

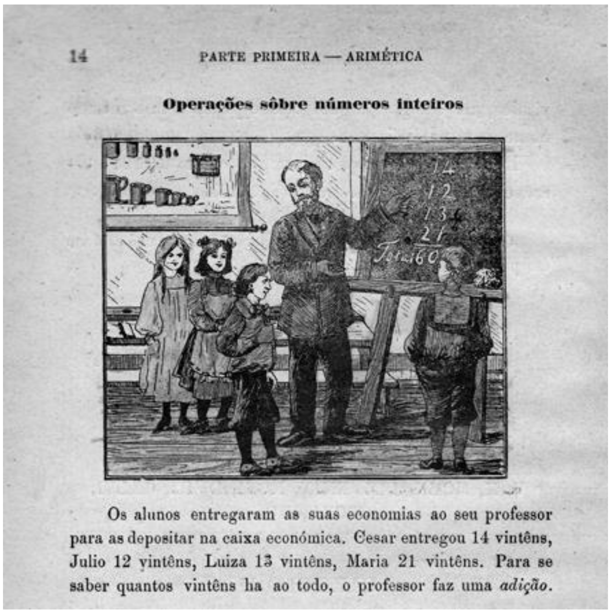
As inovações da segunda metade do século XIX

Se Ulysses Machado inclui aquela imagem de aula “familiar” que talvez já estivesse desatualizada no princípio do século XX, Ricardo Carvalho, no que foi um dos livros de referência para a introdução do sistema métrico, incluiu imagens incorporando novas metodologias e tecnologias de ensino (Figura 4).

Numa gravura rica de componentes, o primeiro sinal de modernidade é-nos dado pelo quadro negro que permitia disponibilizar os conteúdos a todos os alunos em simultâneo e em grande formato. O segundo, em fundo, é o quadro sinóptico sobre o sistema métrico elaborado pelo governo e de presença obrigatória nas salas de aula desde 1860 e que Ricardo Carvalho pretendia realçar.

Note-se que o quadro ainda está a tentar encontrar o seu lugar no espaço escolar. A estrutura da aula não é frontal em relação ao quadro, a zona de trabalho dos alunos é uma mesa corrida com tinteiros embutidos e um banco para se sentarem. Para discutir o problema de aritmética no quadro, o professor e os alunos necessitam de deixar os seus lugares habituais e colocarem-se à volta do quadro.

Mais tarde, passaria a ser natural que a imagem de uma aula mostrasse os discípulos sentados nas suas carteiras alinhadas em grelha retangular e olhando para o quadro colocado numa das paredes da sala e que o professor estivesse sentado num lugar especial, mais elevado e por detrás de uma secretária.



14 PARTE PRIMEIRA — ARIMÉTICA

Operações sôbre números inteiros

Os alunos entregaram as suas economias ao seu professor para as depositar na caixa económica. Cesar entregou 14 vintêns, Julio 12 vintêns, Luiza 13 vintêns, Maria 21 vintêns. Para se saber quantos vintêns ha ao todo, o professor faz uma *adição*.

Figura 4 – A modernidade está expressa pelo quadro negro e pelo quadro sinóptico do sistema métrico à esquerda (Carvalho, 1912, p. 14)

O livro de Ulysses Machado que referimos inclui na capa uma gravura com um quadro negro (Figura 5) e por isso o seu autor é também sensível a esta nova tecnologia.

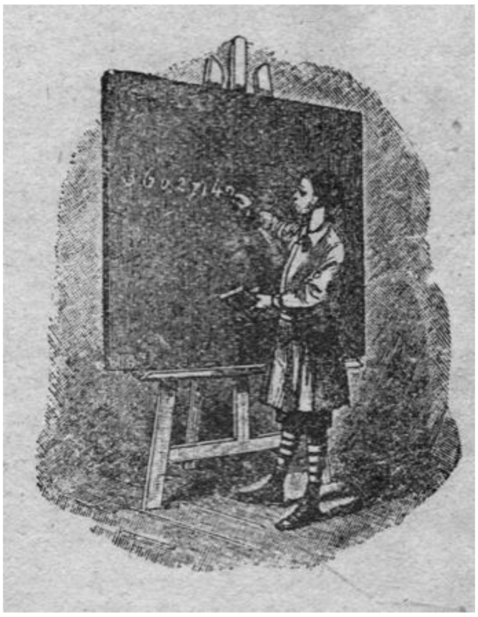


Figura 5 – Um aluno na capa do livro de Ulysses Machado (1914)

Um outro dispositivo pedagógico muito utilizado nas aulas de primeiras letras é a lousa que se trata de um material barato, reutilizável, enquanto que o papel era mais caro e ficava inutilizado após o uso. Podemos encontrar as lousas em conjunto com cadernos escolares numa fotografia já do século XX em exibição numa parede do Museu Escolar do Concelho do Cartaxo (Figura 6).

Figura 6 – As lousas e os cadernos pousados nas carteiras[11]

Ainda em 1938 o professor primário Dionísio das Dores Gonçalves descreve nos seus diários o uso constante da lousa em paralelo com o dos cadernos, embora defenda o uso da folha de papel para os exames.

[11] Fonte: http://www.cm-cartaxo.pt/cartaxo/pracapublica/Equip/Museuescolar/ acedido em 2/4/2010.

> Mandei-os depois para o lugar, e disse-lhes que desenhassem nas lousas o mapa de Portugal com as serras dos respetivos sistemas. À primeira vista, poderá esta lição parecer demasiado grande para crianças, mas não é. Obtém-se muito bons resultados desprezando tanto quanto possível o emprego de mapas e substituindo-os pelo desenho no quadro, nas lousas e depois no papel. (Gonçalves, 2005, p. 197).

A longa transferência do uso da lousa para o do papel vai a pouco e pouco aprofundar a tecnologia do caderno escolar, incorporando cadernos mais especializados: os com folhas quadriculadas, os especiais para a caligrafia, música, etc. e a lousa vai deixar de poder competir com esta inovação.

As aulas nos liceus do século XIX

Haveria alguma flutuação no que se entendia ser os espaços de ensino dos primeiros liceus. Por exemplo, no liceu de Aveiro, o primeiro instalado em edifício construído expressamente para o efeito e inaugurado em 1860, observemos uma descrição da disposição do mobiliário:

> Nas aulas, os lugares para os alunos, formam em frente da cadeira do professor, um anfiteatro de cadeiras de braços em semicírculo. (Marques, 2003, p. 43)

A aula teria assim um formato de anfiteatro de cadeiras de braços, com o professor no centro, resolvendo-se assim o problema da vigilância dos alunos e da comunicação entre estes e o professor. Não encontrámos nos livros de texto desta época gravuras representando este tipo de aula.

Sobre a organização da aula, podemos ter uma ideia através do Regulamento para os Liceus Nacionais publicado em 1860 sob a direção de Fontes Pereira de Melo[12]. No seu capítulo IV, Das aulas, estabelece-se:

> Art. 26.º As aulas dos liceus são públicas. Haverá nelas lugares para os visitantes, inteiramente separados dos lugares dos alunos.

A possibilidade de "visitantes" só deixa de ser mencionada no final do século XIX. A norma seria tacitamente válida para classes masculinas (as únicas que existiam), mas, quando se iniciaram escolas secundárias femininas de 1890 o seu Regulamento estipula no art. 14.º que as aulas já não são públicas e apenas podem assistir "pais, tutores ou pessoas a quem esteja confiada a instrução".

Diz ainda o Regulamento dos Liceus de 1860:

> Art. 27.º Os lugares dos alunos nas aulas serão dispostos de modo a que todos possam igualmente receber as lições dos professores e serem por estes vigiados.
> Art. 28.º Haverá em cada aula três lugares de distinção, que deverão ser ocupados pelos alunos que na semana anterior mais se tiverem distinguido no cumprimento dos seus deveres escolares.
> (...)

[12] *Diário de Lisboa, 133*, 12/6/1860.

> Artº 30.º Das duas horas que dura a aula os professores empregarão pelo menos uma em ouvir o maior número possível de alunos sobre a lição passada anteriormente, e o resto do tempo em dar as explicações que julgarem convenientes para a completa inteligência das doutrinas que forem objeto da lição dada naquele dia ou da que os alunos têm que estudar para o seguinte dia de aula.
> Art. 31.º Haverá em todas as aulas exercícios ou temas escritos, os quais serão analisados e emendados pelo professor, em voz alta e para toda a classe.

Esta formulação será repetida em documentos legais posteriores e desaparece no final do século.

No entanto, dificilmente podemos falar de um sistema de ensino secundário até 1895 (Carvalho, 2008). As reformas avulsas e constantes, as parcas remunerações dos professores, a precariedade das instalações, são fatores que vão afastar os alunos dos liceus. Uma descrição de como se obteria então a formação necessária para aceder à Universidade pode ser encontrada num texto de Agostinho Campos (1870-1944), escritor, jornalista, pedagogo e político natural do Porto, que relata o seu percurso escolar

> Nessa altura [por volta de 1880], interrogavam-se e informavam-se uns aos outros os rapazes. Quem é bom para Álgebra e Desenho? O Teófilo de Faria, na rua do Sol. Para Inglês e Introdução às Ciências? O Carlos Chambers e o Bento Carqueja, no colégio da Glória, de Cedofeita. Para História e Geografia? O Muffler, no curso de Júlio Moreira, rua de Passos Manuel. Para Legislação? O Alves da Veiga, em Santa Catarina. E , assim sucessivamente. (Adamopoulos e Vasconcelos, 2009, p. 24)

A maioria dos alunos não frequentava os liceus, onde a formação era de qualidade inferior. Após obterem a formação necessária em aulas avulsas de professores, limitavam-se a ir fazer os exames nos liceus que no resto do ano escolar se encontravam quase desertos. Dificilmente se poderia constituir uma tradição escolar liceal com estes fundamentos.

A organização da sala em grelha, centrada no professor

No final do século XIX as salas de aula eram projetadas com organização em fileiras, como podemos ver na Figura 7, que representa o projeto de uma escola de instrução primária em Lisboa.

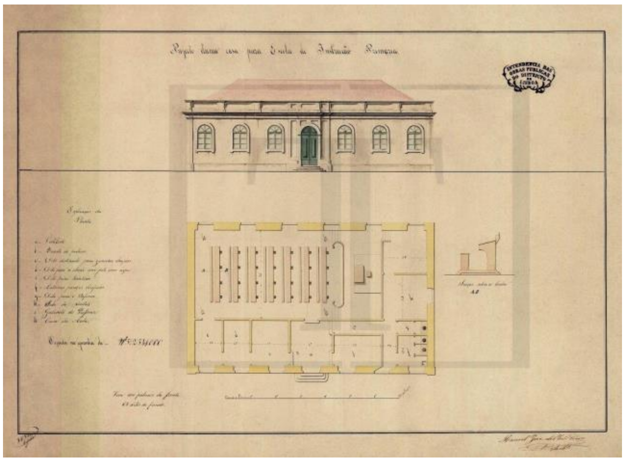


Figura 7 – Projeto de uma escola para a instrução primária[13]

Uma concretização do projeto anterior pode ser observada na foto de uma aula do Colégio Nacional de Lisboa, anterior a 1911 (Figura 8) onde podemos identificar os componentes: o mobiliário especializado (carteiras, estrado, secretária do professor, quadro negro, mapas, caixa métrica). A organização da sala está centrada na professora (os professores no ensino primário já são uma minoria) e no quadro. A fotografia incluída num postal de publicidade do Colégio, e portanto produzida com intenções propagandistas (de novo uma encenação) mostra a professora a ditar um texto que um aluno escreve no quadro e os outros copiam nos cadernos.

Figura 8 – Aula de instrução primária (1º grau)[14]

Este tipo de organização é já dominante e vamos também encontrá-lo na formação de professores como podemos observar numa fotografia da escola de formação de

[13] Fonte: https://restosdecoleccao.blogspot.com/search?q=a+tabuada, acedido em 1/10/2018).
[14] https://restosdecoleccao.blogspot.com/search?q=a+tabuada, acedido em 1/10/2018.

professores primários de Lisboa[15]. Na sala de aula, organizada em filas de carteiras, vemos uma turma, constituída principalmente por mulheres — os homens estão no fundo da sala— com um uniforme constituído por uma bata branca (Figura 9).

Figura 9 – Uma aula de formação de professores no magistério primário (sem data)[16]

A refundação dos liceus em 1895

Será a partir de 1895, com a reforma de Jaime Moniz que a estrutura secundária pública e laica idealizada desde Passos Manuel se vai tornar realidade estabelecendo um subsistema de ensino secundário entre o ensino primário e o universitário (Magalhães, 2010). Terminando com a possibilidade de se realizarem exames a disciplinas avulsas, e adoptando o sistema de classes vão-se poder constituir turmas de alunos com a mesma idade que, com maior ou menor variação, vão percorrer os diversos anos de escolaridade. O ensino nos liceus ganha assim uma maior estabilidade e previsibilidade.

Pouco depois, a inauguração de novos edifícios destinados a liceus iniciada com o Liceu Camões em Lisboa em 1909 e continuada durante a segunda década do século XX consolida uma arquitetura de referência (Marques, 2003) e portanto sustenta a construção de um imaginário cultural do que é "o liceu" que até então era muito difuso. No que nos interessa, a estrutura da sala integra o quadro negro, as carteiras, o estrado e a secretária e o professor assume um papel central (Figura 10)[17].

Figura 10 – Salas de aula dos novos liceus. À esquerda Liceu Camões, 1910/11 (Adamopoulos e Vasconcelos, 2009, p. 75). À direita Liceu Pedro Nunes (Monteiro, 2018)

[15] A denominação correta da escola pode ser Escola Normal Primária (1919-1930) ou Escola do Magistério Primário de Lisboa (1930-1988), dependendo da data em que foi tirada a fotografia.
[16] Fonte: https://restosdecoleccao.blogspot.com/search?q=a+tabuada, acedido em 1/10/2018.
[17] Integra também muito outros equipamentos escolares para uso em aulas que não de matemática, bem como muitos outros detalhes arquitetónicos (Marques, 2003).

Longe vai a aula-anfiteatro dos primeiros liceus de meados do século XIX e deixou de ser preciso legislar sobre a importância de todos os alunos "poderem igualmente receber as lições" como aparecem nos documentos oficiais de quase todo o século XIX, pois a concepção de aula passou a assumir naturalmente o lugar central, e normalmente mais elevado, do professor com a sua secretária assente num estrado e as carteiras destinadas aos alunos.

Esta estruturação da aula vai predominar até aos anos 60 e arriscávamos dizer, que em algumas escolas permanece até aos dias de hoje. Talvez a representação mais esquemática deste tipo de aula que encontrámos seja a da Figura 11 do final dos anos 1930.

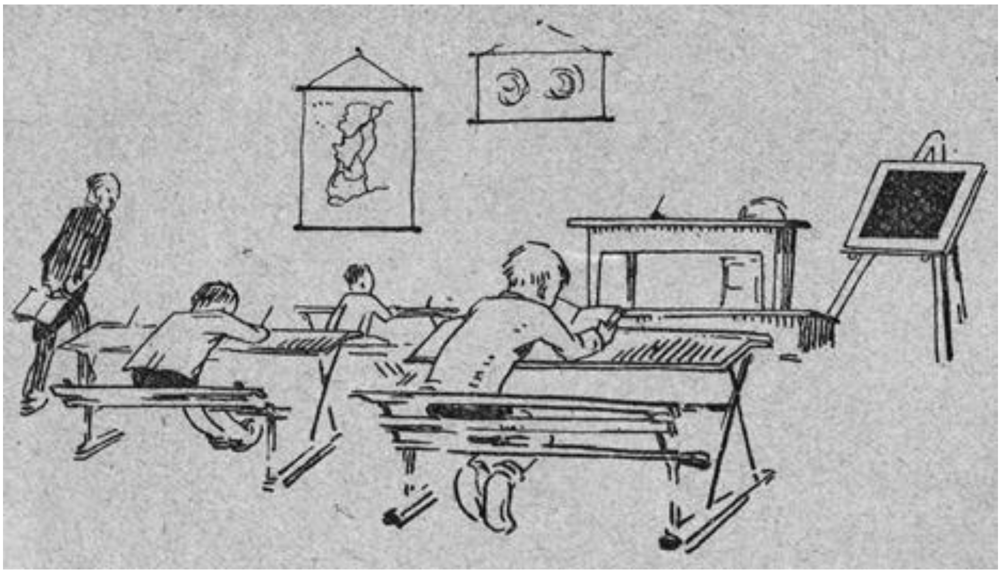


Figura 11 – Capa do Caderno de problemas de aritmética, 4ª classe, finais dos anos 1930

Aqui os elementos são reduzidos ao essencial: carteiras, estrado, secretária, livros e cadernos, mapas e um quadro negro. O professor não está na sua posição central e passeia pela sala. Trata-se de um livro de problemas e os editores optaram por representar uma tecnologia didática específica, os alunos a realizar um exercício escrito com o professor a vigiar.

As aulas do ensino profissional

Será no ensino comercial e industrial que as necessidades de formação vão ditar a introdução de estruturas de aula muito diferentes no final do século XIX. No ensino comercial, que tem como finalidade formar negociantes de pequeno ou grosso trato, bem como guarda-livros e empregados superiores de contabilidade, a formação destes profissionais incluía a aprendizagem de *escrituração, contabilidade comercial geral e contabilidade financeira*. No final do século XIX começam a existir escolas particulares que apresentam métodos inovadores de formação, que designaríamos hoje de formação em contexto (Rodrigues, 2014; Rodrigues e Matos, 2017). Nestas escolas coexistem espaços de ensino mais teórico, mas também espaços para a aprendizagem prática dos conteúdos técnicos necessários para o exercício da profissão, como podemos verificar na Figura 12, onde observamos uma simulação de um espaço comercial em pleno funcionamento.

Figura 12 – Escola Prática de Comércio de Lisboa. À esquerda uma sala de aula com estrutura usual (séc. XX), à direita uma sala de aula para uma aprendizagem em contexto de prática (1914)[18]

São fotografias encenadas, destinadas a material de propaganda da Escola. À esquerda uma aula "tradicional" com os componentes usuais e os personagens na sua posição habitual, contrastando com a aula da direita, simulação cuidada de um local de trabalho colocando os alunos a experimentar vários tipos de práticas.

Outras aulas de Matemática

Nem todas as salas de aula tinham a estrutura em grelha de carteiras. Desde o início do século XX, que o que se costuma designar de movimento da Escola Nova veio a ganhar força em Portugal, em especial após a implantação da República. Colocando o aluno no centro da educação, propunha a adoção de metodologias intuitivas e de descoberta, próximas da realidade das crianças, a manipulação de materiais e o respeito pelo seu desenvolvimento psicológico. Este movimento vai ter especial incidência nas escolas de formação de professores (Pintassilgo, Mogarro e Henriques, 2010) e em algumas escolas primárias particulares, por exemplo nos Jardins-Escola João de Deus.

Estes, fundados em Coimbra em 1911 por João de Deus Ramos, pretenderam utilizar o método criado pelo poeta e pedagogo português João de Deus (1830-1896), seu pai. No que diz respeito à matemática, desde cedo se optou pela utilização de materiais manipuláveis de Maria Montessori e de Friedrich W. Fröebel que requeriam uma organização da aula em grupos de trabalho dispostos em torno de mesas (Figura 13).

[18] Fonte: https://restosdecoleccao.blogspot.com/search?q=escola+prática+de+comércio+de+lisboa, acedido em 1/10/2018.

Figura 13 – À esquerda, crianças no salão a jogar com os Dons de Fröebel, 1938. À direita, trabalhando com material manipulável, anos 1930 (Acervo Iconográfico do Museu João de Deus, recolhido por Joseane Arruda)

Estas fotografias não foram encontradas em materiais publicitários e por isso, desta vez, é provável não sejam encenadas e representem aulas reais. Os componentes incluem as mesas de trabalho, os bancos e os materiais em que os alunos trabalham. O trabalho escolar é realizado em volta de uma mesa com as crianças a explorarem o material. O papel das professoras é o de apoiarem o jogo dos alunos.

Estas abordagens didáticas inovadoras não se limitaram ao ensino primário e tiveram grande expressão, pelo menos ao nível do discurso, nas instituições de formação de professores do ensino liceal desde as Escolas Normais Superiores em 1915 (Matos, 2014).

Num levantamento dos relatórios obrigatórios que professores agregados (isto é, não efetivos) enviavam anualmente para o Ministério da Educação (Matos e Fischer, 2010), encontramos referências constantes ao "método heurístico". Por exemplo, Joaquim Preguiça que elabora o relatório sobre o seu trabalho no Liceu de Passos Manuel em 1960, descreve assim as suas aulas do 1º ano do 1º ciclo:

> O método de ensino utilizado foi, sempre que possível, um método ativo experimental, em que se procurou que as crianças aprendessem por meio de experiências realizadas na aula.
> A aula tomou, muitas vezes, o aspeto dum laboratório em que as crianças realizaram desenhos, recortes, construções, medições e pesagens e iam aprendendo assim as primeiras noções matemáticas por recurso à intuição e aos objetos materiais (modelos matemáticos).
> No estudo da geometria (experimental) utilizavam-se modelos matemáticos,— dispositivos ou objetos materiais capazes de traduzir ou de sugerir ideias matemáticas construídos pelos próprios alunos. (Preguiça, p. 89)

E Maria Eduarda Sousa descreve assim o seu trabalho no Liceu de Faro no ano letivo de 1959/60:

> Como norma, fiz sempre seguir cada definição, cada regra, cada teoria, de numerosos exemplos exercícios, para que melhor pudessem ser precisados e focados os conhecimentos que os alunos iam adquirindo.

> Nas turmas do 2º ciclo [dos liceus], esforcei-me por usar, de preferência, quando possível, o método heurístico, na medida em que ele pode ser aplicado a turmas de quarenta e tal alunos. (Sousa, p. 89)

Já quanto ao 3º ciclo, atuais 10º e 11º anos, a sua perspetiva é outra:

> Nas turmas do 3º ciclo, onde ensinei Matemática no 6º ano e Desenho no 7º, adotei métodos diferentes consoante a disciplina em questão. Assim, em Matemática, as aulas tiveram por base o método expositivo, único compatível não só com o número de alunos da turma [sabemos que eram mais de 40] mas muito especialmente com a extensão do programa. Além disso, creio que o rigor lógico a que o raciocínio dedutivo obriga, é altamente profícuo quando se pretende levar o aluno a ter uma visão mais elevada de problemas já conhecidos, o que acontecia em grande parte do programa desta disciplina. (Sousa, p. 90)

Esta visão contrasta com as dos programas oficiais para o ensino secundário de 1931 e que se vai manter até 1947 e que valoriza a memorização e repetição:

> A resolução de numerosos exercícios do cálculo mental e escrito constitui por isso a base deste ensino, — exercícios resolvidos na aula debaixo da direção do professor, servindo de preparação e apresentação do assunto a estudar e exercícios feitos em casa rememorando o trabalho da aula e que o aluno apresentará no seu caderno, submetendo-os às correções e anotações do professor. (Decreto n°20.369, 1931, p. 2187)

Deveremos esperar pela experiência da Matemática Moderna no princípio dos anos 1960 para ver surgir no ensino secundário experiências com tipos diferentes de aula influenciadas pelo movimento da Escola Nova do princípio do século. Esta reforma é abordada com pompa e circunstância numa série de quatro artigos do *Diário Popular* e no de 8 de Março de 1963 anuncia-se, como fator de modernidade, que as carteiras foram substituídas por mesas de trabalho permitindo agora um trabalho em equipa e de laboratório. A notícia é acompanhada de uma fotografia de uma aula que presumivelmente terá sido obtida numa das turmas da experiência do Liceu de Pedro Nunes (Figura 14).

Figura 14 – Fotogravura do *Diário Popular* de 8/3/1963 (p. 13)

Sabemos também, através de relatos de estagiários que acompanharam estas experiências, que o estrado onde estava a secretária do professor teria sido igualmente removido (Serrote, 1966).

Outras formas de organização foram adotadas nesta época. Por exemplo, na Sala de Matemática do Liceu de D. Manuel II, no Porto, a organização em pequenos grupos facilitava a utilização dos vários materiais didáticos (Figura 15).

Figura 15 – Alunos a trabalhar na Sala de Matemática do Liceu D. Manuel II (Arquivo pessoal de António Augusto Lopes)

Nos anos seguintes, especialmente a partir das inovações pedagógicas introduzidas a partir de 1968 com o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, esta “desconstrução” da aula vai-se aprofundar. A Figura 16 mostra uma aula na Escola Preparatória Eugénio dos Santos em que alunos do 1º ano trabalham em grupo sobre o tema sistemas de numeração.

Figura 16 – A estagiária Natália Vaz apoia um grupo de alunos resolvendo uma tarefa relacionada com sistemas de numeração em 1972 (Vaz, 1972, p. 100)

Mais tarde encontramos uma outra imagem de uma aula de tipo diferente (Figura 17) que aparece, entre muitas outras, no livro *A matemática e eu, 2ª fase, 1º ano* de Belarmina Lopes e Maria Jorge Costa aparentemente apostado em estimular o uso de metodologias ativas e que foi publicado no ano de 1976 quando tudo parecia possível.

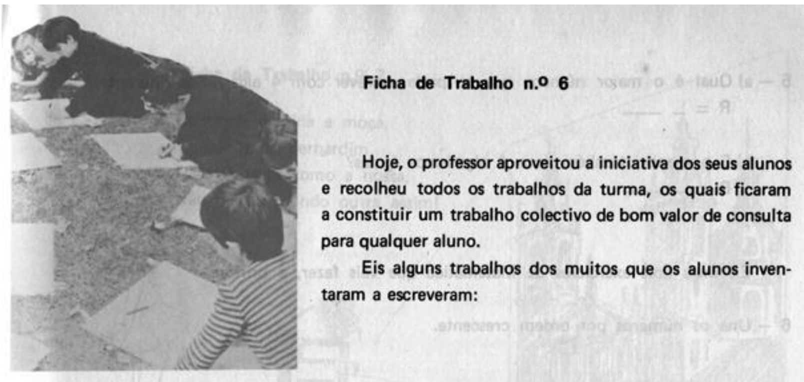


Figura 17 – Outras formas de trabalho em aula (Lopes e Costa, 1976, p. 11)

Considerações finais

A análise iconográfica das representações encontradas em livros de texto, fotografias ou gravuras, interligadas com o contexto social, económico e cultural da época, encontrado em registos de professores, alunos e na legislação permitiram-nos identificar práticas da matemática na aula (no sentido de Julia, 1995) enquadradas entre o período medieval e meados do século XX. Através deste retrato iconográfico foi possível reconhecer uma evolução das relações estabelecidas entre professores e alunos, dos materiais utilizados e da organização do espaço da aula, que, ao longo dos séculos, foi perdendo a rigidez formal da organização espacial (Figura 1). As novas dinâmicas de aprendizagem surgem com novas formas de explorar materiais e organizar o espaço, tais como aulas de caráter prático para a formação profissional (Figura 12), a utilização de materiais manipuláveis (Figura 13) ou organização dos alunos em pequenos grupos (Figura 15 e Figura 16). Muitas das práticas de ensino que encontramos representadas ao longo dos tempos coexistiram entre si e perduram até ao presente.

A análise iconográfica interligando os componentes de cada imagem com outros estudos e a sua interpretação iconológica que permitiu o estabelecimento de relações com o nosso conhecimento sobre o período histórico, permitiram dar um sentido mais global a cada artefato que aqui comentámos.

Esperamos ter trazido o leitor para uma visão da história (em particular da da Educação Matemática) como uma busca de permanências e mudanças que nos permita refletir sobre o presente. O aluno, o professor e o conteúdo enquanto categorias abstratas são permanentes, mas tudo o resto muda: as relações que se estabelecem na aula, o valorizado e o reprimido, os artefactos e o seu significado. Mas muda, para além de tudo a identidade social e cultural concreta dos alunos, dos professores (repare-se de novo nas imagens de alunos e de professores) e da própria matemática (que incorporou diferentes visões do que é conhecimento matemático legítimo e desejável eliminando simultaneamente outras dimensões).

Fontes primárias

Carvalho, R. D. (1912). *Aritmética, sistema métrico e geometria para as escolas primárias* (17ª ed.). Coimbra: F. França Amado.

Fonseca, C. (1963). Revolução no ensino (3). *Diário Popular*, 8/3/1963, p. 13.

Gonçalves, D. (2005). *O meu diário escolar de 1938-1939*. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.

Lopes, B. A. e Costa, M. J. L. (1976). *A matemática e eu, 2ª fase, 1º ano*. Lisboa: Básica Editora.

Machado, U. (1914). *Aritmética prática e geometria elementar* (5ª ed.). Lisboa: Liv. Rodrigues.

Nicolas, G. (1519/1963). *Tratado da pratica darismetyca*. Porto: Livraria Civilização.

Serrote, P. C. (1966). Algumas considerações sobre o 6º ano de Matemática das turmas experimentais: Conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno. *Palestra*, *26* (Abril), 108-121.

Vaz, M. N. (1972). Ensino pedagógico ao nível do C.P.E.S — numeração e operações em bases diferentes. *Boletim da Direcção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, *8-9-10*, 78-108.

Fontes secundárias

Almeida, A. A. M. (1994). *Aritmética como descrição do real (1519-1679). Contributos para a formação da mentalidade moderna em Portugal*. Lisboa: Imprensa Nacional.

Adamopoulos, S. e Vasconcelos, J. L. F. (2009). *Liceu Camões, 100 anos de testemunhos*. Lisboa: Quimera.

Albuquerque, L. (1960). *Notas para a história do ensino em Portugal I*. Coimbra: Textos Vértice.

Carvalho, R. (2008). *História do Ensino em Portugal – Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do Regime de Salazar-Caetano* (4ª ed.). Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian.

Julia, D. (1995). La culture scolaire comme objet historique. *Paedagogica Historica. International Journal of the History of Education, Vol. 31, Issue sup. 1*, 353-382.

Magalhães, J. (2010). *Da cadeira ao banco, escola e modernização (séculos XVIII-XX)*. Lisboa: Educa.

Marques, F. M. (2003). *Os Liceus do Estado Novo, arquitetura, currículo e poder*. Lisboa: Educa.

Matos, J. M. (2011). Imagens da aula de Matemática. *Educação e Matemática, 115*(Nov/Dez 2011), 3-10.

Matos, J. M. (2014). Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. Em A. Karp e G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 291-302). Londres: Springer.

Matos, J. M. (2018). O lugar da pesquisa histórica na Educação Matemática. *REP's - Revista Eventos Pedagógicos, 9*(2), 625-644. doi:DOI: 10.30681/2236-3165.

Matos, J. M. e Fischer, M. C. (2010). Identidade profissional de professores de Matemática no Portugal do final dos anos 50. Em J. Pintassilgo, A. Teixeira, C. Beato e I. Dias (Eds.), *A História das Disciplinas Escolares de Matemática e de Ciências: contributos para um campo de pesquisa* (pp. 83-95). Lisboa: Escolar Ed.

Monteiro, T. (2018). *Formação de Professores de Matemática no Liceu Normal de Pedro Nunes (1956-1969).* (Tese de Doutoramento), Universidade Nova de Lisboa.

Moreno, P. e Viñao, A. (Eds.) (2017). *Imagen y educación: marketing, comercialización y didática (España, siglo XX)*. Madrid: Morata.

Panofsky, E. (1989). *Significado nas Artes Visuais.* Lisboa: Editorial Presença.

Pardal, L. Ventura, A. e Dias, C. (2003). *O Ensino Técnico em Portugal*. Aveiro: Universidade de Aveiro

Pintassilgo, J., Mogarro, M. J. e Henriques, R. P. (2010). *A formação de professores em Portugal*. Lisboa: Edições Colibri.

Rodrigues, A. S. (2014). Os programas de matemática no ensino profissional. Em A. J. Almeida e J. M. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)* (pp. 95-113). Caparica: UIED e APM.

Rodrigues, A. S. e Matos. J. M. (2017). O ensino comercial em Portugal. *Histemat, 3(*3) 2-16.

Rodriguez, M. V. (2010). Pesquisa histórica. O trabalho com fontes documentais. Em Costa, C. J.; Melo, J. J. P. e Fabiano, L. H. (Orgs.), *Fontes e Métodos em História da Educação* (pp. 35-48). Dourados, MS: Ed. UFGD.

Silva, C. M. (2005). A ideia de 'casa da escola' no século XIX português. *Revista da Faculdade de Letras - HISTÓRIA, III*(6), 291-312.

Silva, E. R. e Miranda, T. L. (2013). *A investigação em história da matemática*. X seminário Nacional de História da Matemática. Campinas: S. Paulo.

Silva, L. A. *O Método Pedagógico dos Jesuítas*, O "Ratio Studiorum". http://www.histedbr.fae.unicamp.br/navegando/fontes_escritas/1_Jesuitico/ratio%20studiorum.htm, acedido em 1/10/2018.

Vaz, R. (2013). *COMEÇAR de Almada Negreiros arte e o poder formatador da matemática.* (Mestrado), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Caparica.

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES DEL SIGLO XVIII: MÉTODOS DE RESOLUCIÓN Y ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

Carmen León-Mantero

Universidad de Córdoba, España

cmleon@uco.es

Alexander Maz-Machado

Universidad de Córdoba, España

ma1mamaa@uco.es

María José Madrid

Universidad Pontificia de Salamanca, España

mjmadridma@upsa.es

David Gutiérrez-Rubio

Universidad de Córdoba, España

dgrubio@uco.es

Noelia Jiménez-Fanjul

Universidad de Córdoba, España,

noelia.jimenez@uco.es

Ana Santiago

Escola Superior de Educação de Coimbra, Portugal

asantiago@esec.pt

Resumen: Se presenta un análisis del tratamiento matemático dado a los métodos de cálculo del perímetro de la circunferencia y el área del círculo en los libros de texto sobre geometría elemental y práctica publicados en España durante el siglo XVIII. Asimismo, se identifican las estrategias didácticas utilizadas por los autores de los libros de texto para enseñarlos. Los textos seleccionados para su análisis fueron los escritos por Manuel Hijosa, Juan Justo García, Xavier Ignacio de Echeverría, Francisco Verdejo, Gonzalo Antonio Serrano y Benito Bails. Se identificaron los diferentes métodos de cálculo y se categorizaron las estrategias didácticas incluidas en los textos. Entre los resultados obtenidos, destaca que los autores coinciden en incluir el mismo método para calcular la longitud de la circunferencia, mientras que podemos encontrar diversos métodos para calcular el área de un círculo, según sean libros de texto sobre geometría elemental o bien sobre geometría práctica o agrimensura.

Palabras clave: Historia de la Educación matemática; Siglo XVIII; Libros de texto; Estrategias didácticas; Geometría.

Introducción

Desde finales del siglo XVIII, el libro de texto se ha establecido como principal fuente de información y apoyo en las instituciones escolares, tanto para profesores como para alumnos (Gómez, 2011). En ese sentido, los libros de texto constituyen espacios de memoria en los que se refleja la cultura escolar, los valores e ideologías, así como las estrategias didácticas empleadas por los docentes de una determinada época (Escolano, 2009). Por ello, las investigaciones centradas en libros de texto nos muestran diferentes aspectos como la evolución de los conceptos y contenidos matemáticos a lo largo del tiempo, la implementación de su enseñanza en el sistema educativo vigente o la influencia del contexto social, cultural y político en esta (Maz-Machado & Rico, 2015).

Los estudios dentro del área de la didáctica de la matemática que tienen como objeto de investigación el libro de texto son numerosos y se han enfocado desde muy diversas perspectivas, por ejemplo se han realizado trabajos que presentan instrumentos de análisis y valoración de manuales escolares de matemáticas (Monterrubio & Ortega, 2011) o que identifican distintas tendencias didácticas en los libros de texto (Azcárate & Serradó, 2006).

También las investigaciones en historia de las matemáticas y la educación matemática encuentran en diversas ocasiones en los libros de texto su fuente de análisis. Así el interés de los investigadores en este campo por analizar los libros de texto ha generado numerosos trabajos a nivel internacional como el de Schubring (1988) en el que se analizan manuales de matemáticas alemanes y franceses para determinar el tratamiento que se le daba a los números negativos en la primera mitad el siglo XIX, el de Frejd (2013) en el que se estudia y compara libros antiguos de álgebra publicados en Suecia entre 1794 y 1836 o el de d'Enfert (2014) en el que se realiza un análisis de los libros de texto de matemáticas publicados en Francia durante los siglos XIX y XX.

En España se han realizado investigaciones centradas tanto en la evolución de distintos contenidos matemáticos por ejemplo el límite de una función (Sierra, González y López, 1999) o las soluciones negativas de un problema geométrico presentes en los libros de texto de geometría analítica (Sánchez & González, 2017), como en distintas perspectivas del tratamiento didáctico dado a un concepto o contenido matemático (Madrid, Maz-Machado, León-Mantero & López, 2017; Maz, López & Sierra, 2013; Maz & Rico, 2009) o en la identificación de estrategias de actividad didáctica en los libros de texto (Maz-Machado & Rico, 2015).

El siglo XVIII español se puede dividir en dos periodos claramente diferenciados: el periodo anterior a la expulsión de los jesuitas de España en 1767 y el periodo ilustrado posterior. El primer periodo se caracteriza por el predominio de instituciones académicas religiosas encargadas de la enseñanza de las clases nobles y el esfuerzo de la dinastía de los Borbones, nuevos monarcas del reino español, por fomentar la creación de academias e instituciones científicas que superaran el atraso académico e intelectual que se vivía hasta el momento (Maz, 2005).

La expulsión de los jesuitas en 1767 permitió que surgieran instituciones científicas civiles o militares como el Real Seminario de Nobles, las Academias de Bellas Artes o la Academia de Guardias Marinas. Se crearon cátedras de matemáticas y de física experimental, observatorios astronómicos y bibliotecas universitarias, gracias a los libros procedentes de las bibliotecas de los jesuitas. Se establecieron, asimismo, colaboraciones y expediciones científicas internacionales, que dieron importantes frutos en años posteriores, como fue la instauración del sistema métrico decimal (Gómez, 2011).

Todos estos acontecimientos dieron como resultado la necesidad de encontrar profesores laicos que sustituyeran a los religiosos, que dominaran los avances realizados en el campo de las matemáticas para así poder garantizar la continuidad del desarrollo científico. Para ello, se escribieron y publicaron grandes tratados sobre matemáticas, en particular sobre geometría elemental y práctica, trigonometría rectilínea y esférica o cartografía, destinados, la mayoría de ellos, a usarse en las instituciones científicas recién creadas y con el objetivo de instruir a los futuros peritos, marinos e ingenieros.

Estos hechos convierten al siglo XVIII español en un periodo de cambios en el panorama científico, lo que ha favorecido que diversos autores hayan enfocado sus investigaciones al estudio de distintos manuales de matemáticas publicados en este siglo, por ejemplo el trabajo de Blanco (2013) sobre la enseñanza del cálculo en el siglo XVIII comparando la obra Pedro Padilla y Arcos con la de Étiene Bézout.

Teniendo esto en cuenta la finalidad de este trabajo es analizar el tratamiento matemático dado al cálculo de la longitud de la circunferencia y el área del círculo en seis libros de texto de geometría elemental o agrimensura (geometría práctica) publicados en España durante el siglo XVIII e identificar las estrategias didácticas utilizadas por los autores de estos libros de texto de geometría elemental o agrimensura para hacer llegar estos contenidos matemáticos a sus lectores.

En definitiva, en este trabajo se ha puesto el foco de interés en aspectos relacionados con el estudio de la circunferencia y del círculo, considerando entre otras razones que las distintas perspectivas que se muestran desde la historia de las matemáticas y la educación matemática pueden favorecer la enseñanza de estos contenidos, como plantea (González, 2004) poniendo como ejemplos de interés problemas geométricos clásicos como la cuadratura del círculo. Y a su vez se muestra en experiencias como la de Papadopoulos (2014) que presenta el uso del método exhaustivo de Arquímedes para calcular el número π con alumnos de primaria o en ideas como la de Maza (1998) que presenta los procedimientos de aproximaciones a partir de la aproximación histórica al cálculo del área del círculo.

Metodología

Se trata de un trabajo de tipo descriptivo y ex post facto, enmarcado en el enfoque de investigación de tipo histórico (Fox, 1981), que utiliza el método del análisis de contenido para revelar la estructura conceptual y las estrategias didácticas que los autores de libros de texto de geometría del siglo XVIII incorporaron a sus obras. Esta técnica ha sido ampliamente utilizada en investigaciones anteriores como las de Maz-Machado y Rico (2015), Madrid et al. (2017) o León-Mantero, Maz-Machado, Madrid y Jiménez-Fanjul (2018).

En la selección de fuentes documentales, fueron tomados los siguientes criterios: que los libros de texto incluyeran contenidos de geometría elemental o agrimensura; que la primera edición de los libros de texto hubiera sido publicada durante el siglo XVIII; y que estuvieran escritos en castellano.

La búsqueda y localización de los libros de texto se realizó a través del Fondo Histórico de la Universidad de Córdoba, la Biblioteca OCD de Andalucía, la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid, la Biblioteca de la Universidad Politécnica de Madrid, la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España y el repositorio digital de Google Books.

Finalmente considerando a su vez la disponibilidad se localizaron 6 libros de texto, estos libros se clasificaron en dos categorías según incluyeran contenidos de geometría elemental o contenidos de geometría práctica o agrimensura. La tabla 1 recoge la clasificación de los libros de texto seleccionados y analizados, a saber:

- Gonzalo Antonio Serrano (1736). *Geometría Selecta Theorica, y Practica*. Córdoba: Imprenta del autor.
- Xavier Ignacio de Echeverría (1758). *Geometría práctica, necessaria a los peritos agrimensores y su examen*. San Sebastián: Oficina de Lorenzo Joseph Riesgo.
- Juan Justo García (1782). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Madrid: D. Joachin Ibarra.
- Benito Bails (1788). *Principios de Matematica de la Real Academia de San Fernando*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.
- Manuel Hijosa (1791). *Compendio de la Geometría práctica con un breve tratado para medir terrenos, dividirlos y levantar planos arreglados a ellos*. Segunda edición. Madrid: Imprenta Real.
- Francisco Verdejo (1794). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud.* Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.

Tabla 1 – Clasificación libros de texto

Libro de texto	Geometría elemental	Agrimensura
Geometría Selecta Theorica, y Practica	X	
Geometría práctica, necessaria a los peritos agrimensores y su examen		X
Elementos de aritmética, álgebra y geometría	X	X
Principios de Matematica de la Real Academia de San Fernando	X	X
Compendio de la Geometría práctica con un breve tratado para medir terrenos, dividirlos y levantar planos arreglados a ellos		X
Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud	X	X

Para su análisis seguimos las recomendaciones incluidas en Maz (2009) y para ello, fueron seleccionadas las siguientes unidades de análisis:

- La introducción y el prólogo, en los que los autores señalan a quienes estaban dirigidas, el propósito de las obras y, la justificación y secuenciación de los contenidos incluidos.
- Las definiciones, los ejercicios, los ejemplos, los problemas y las actividades que se incluyen en cada obra. Asimismo, el propio planteamiento de cada obra.
- Las notas incluidas tras cada uno de los bloques de contenido, que incluyen sugerencias y propuestas metodológicas, así como materiales manipulativos recomendados, para que el alumno optimice su trabajo y alcance los conocimientos requeridos en el correspondiente nivel educativo.
- Los anexos, en los que se incluyen láminas con representaciones gráficas, que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de proposiciones y problemas resueltos.

Tras la selección de los libros de texto y las unidades de análisis, se leyeron y analizaron todas las definiciones, proposiciones y problemas que aparecen en los libros y se categorizaron mediante una triangulación de expertos en historia de la educación matemática.

Así mismo, para analizar las estrategias didácticas halladas en los libros de texto, se ha considerado si los siguientes campos basados y adaptados de Maz-Machado y Rico (2015) y León-Mantero et al. (2018) están presentes en los libros de texto:

- **Objetivo y utilidad**: los autores indican el público al que dirigida la obra y los objetivos generales de esta.
- **Justificación y secuenciación de los contenidos incluidos**: los autores justifican la inclusión y la secuenciación de los contenidos que incluyen, sean estos originales o no.
- **Sugerencias y propuestas metodológicas:** los autores incluyen sugerencias y propuestas de tipo metodológico.
- **Recomendaciones sobre materiales o herramientas:** los autores realizan recomendaciones sobre materiales o herramientas.
- **Representaciones gráficas**: los autores incluyen representaciones gráficas de apoyo a las explicaciones de problemas y casos prácticos y demostraciones de proposiciones.
- **Estructura y precisión en la presentación de los contenidos**: los autores presentan los contenidos desde el punto de vista matemático, es decir, si su lenguaje es formal, ceñido a definiciones, axiomas, postulados, teoremas, problemas, demostraciones, corolarios y notas.
- **Aplicaciones a la práctica:** los autores incluyen aplicaciones a la práctica.

Resultados

◦ Métodos de cálculo del área del círculo y longitud de la circunferencia

Antes de señalar los resultados obtenidos en este trabajo, es adecuado advertir que se ha respetado tanto la ortografía como la gramática original usada en los libros de texto analizados.

En los tratados de geometría elemental, no así en los de agrimensura, destaca la asunción del círculo como el “poligono infinitángulo […], que podemos imaginar dividido en infinitos triángulos con radios tirados á todos sus puntos, que serán las bases y lados infinitamente pequeños del poligono" (García, 1782, p. 285). Así, "los lados de los polígonos, que pueden considerarse como cuerdas de los círculos circunscritos, se confundirán por su infinita pequeñez con los mismos arcos que subtenden, y el perímetro del polígono no se distinguirá de la circunferencia del círculo, ni los radios rectos y oblicuos se distinguirán de los radios del círculo." (Bails, 1788, p. 268).

Figura 1 – El círculo como polígono de infinitos lados (García, 1782, lámina II)

De lo anterior se deduce que "así quanto queda dicho de los polígonos […] á cerca de la medida de sus superficies, comparacion de estas y de los perímetros, se podrá aplicar a los círculos" (Verdejo, 1794, p. 206). Y, como "los perímetros de los polígonos regulares tienen unos con otros la misma razón que sus lados homólogos, sus diagonales, sus radios […]" (Bails, 1788, p. 268), entonces, "Las circunferencias de los círculos son proporcionales á los radios, á los diámetros, á las cuerdas semejantes, y á los arcos semejantes." (Bails, 1788, p. 268). Por tanto, para conocer la longitud de una circunferencia a partir del diámetro "seria necesario saber á punto fixo la razon del diámetro á la circunferencia; cuya razon hasta ahora no se ha podido sacar cabal, bien que se han sacado de ella valores tan aproximados, que en la práctica pueden servir sin rezelo de error substancial; pues aun quando en lugar de esta razon aproximada se usara la razon cabal, no por eso saldrían mas seguras las operaciones prácticas" (Bails, 1788, p. 269).

Todos los autores consultados coinciden en que "la proporcion del diametro á la circunferencia tripla, fexquiseptima, que es decir, están como 7. con 22. […] Sabido, pues, el diametro de un circulo, se sabrá su circunferencia por la Regla de tres […] Tambien saliera lo mismo, multiplicando el diametro por $3\,\frac{1}{7}$ que es la denominacion de la proporcion" (Echeverría, 1758, p. 53).

En la notación seguida en los libros del siglo XVIII, lo anterior se traduce en la siguiente proporción:

$$\text{diámetro} : \text{longitud de la circunferencia} :: 7 : 22$$

En nuestra notación actual escribimos:

$$\frac{\text{diámetro}}{\text{longitud de la circunferencia}} = \frac{7}{22}$$

Serrano (1736) indica que con este método obtenemos un valor de la longitud aproximado “algo mayor que la verdadera” (p. 52). Verdejo (1794) matiza aún más, y señala que “La razon en que se hallan el diámetro y la circunferencia de un círculo se ignora á pesar de los grandes esfuerzos que Geómetras de primera clase han hecho para hallarla, bien que las tenemos tan aproximadas que la diferencia entre ellas y la verdadera, se mira como nula, respecto de su inmensa pequeñez.” (p. 207).

García (1782) va un paso más allá e indica que en la razón dada por Arquímedes, “sale un solo pie de menos en un círculo de 800 pies” (p. 285), en la de Mezio, “da un pie de falta en una circunferencia de 1000000” (p. 286) y que en ese momento se conocía ya la razón “1:3,1415926535897932 &c. hasta ciento veinte y siete notas decimales.” (p. 286).

Con respecto al cálculo del área del círculo, encontramos tres métodos diferentes:

- Método 1. García (1782) y Bails (1788) coinciden en señalar que la superficie del círculo corresponde al “producto del radio por la mitad de la circunferencia, ó de esta por la mitad del radio (García, 1782, p. 280). Se puede comprobar fácilmente que se trata de una fórmula equivalente a la usada actualmente:

$$\text{radio} \cdot \frac{\text{longitud circunferencia}}{2} = \frac{\text{radio} \cdot 2 \cdot \pi \cdot radio}{2} = \pi \cdot \text{radio}^2$$

  Echeverría (1758) elige una variante de este método en el que usa el diámetro, “Se multiplicará el diametro por la circunferencia y del producto tomese la quarta parte y será la Area del Circulo propuesto” (p. 55).

- Método 2. Hijosa (1791), Echeverría (1758) y Serrano (1736) señalan que el área del círculo “Se mide multiplicando el diámetro por sí mismo: el producto se multiplica por 11, y lo que sale de esta multiplicación se parte entre 14, y el cociente da la area” (Hijosa, 1791, p. 140). Al igual que el primer método, se trata de una fórmula equivalente a la que usamos actualmente:

$$\text{diámetro}^2 \cdot \frac{11}{14} = 4 \cdot \text{radio}^2 \cdot \frac{11}{14} = \frac{22}{7} \cdot \text{radio}^2 \approx \pi \cdot \text{radio}^2$$

- Método 3. Por último, Serrano (1736) indica que “Según Archimedes, como 88. à 7. Asi el quadrado de la circunferencia de qualquier circulo, al Area; Luego, multiplicando el quadrado de la circunferencia, por 7. y el producto partido por los 88. al quociente saldrà el Area que se pide” (p. 53). Es decir,

$$\frac{88}{7} = \frac{\text{longitud circunferencia}^2}{\text{área del círculo}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \text{área del círculo} = \text{longitud circunferencia}^2 \cdot \frac{7}{88} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \text{área del círculo} = 4 \cdot \text{radio}^2\pi^2 \cdot \frac{7}{88} = \frac{28}{88} \cdot \text{radio}^2\pi^2 =$$

$$= \frac{7}{22} \cdot \text{radio}^2\pi^2 \approx \pi \cdot \text{radio}^2$$

3.2. Estrategias didácticas

Teniendo en cuenta las categorías consideradas, en las obras analizadas es posible observar las distintas estrategias didácticas que se presentan a continuación.

3.2.1. Objetivo y utilidad

Podemos encontrar tres tipos de beneficiarios de estos libros de texto: profesionales y aspirantes, escolares y estudiantes universitarios.

Por ejemplo, el libro de texto de Echeverría (1758) se publica con el objetivo de ayudar a los aspirantes a perito agrimensor a preparar el examen de acceso al título. El autor señala en el prólogo que se decidió a escribir este libro de texto para ahorrar tiempo y dinero a los aspirantes, ya que ha buscado, seleccionado y adaptado las proposiciones y reglas para que los lectores encuentren todo cuanto se necesita de "Ciencia para medir, dividir y permutar" (p xviii).

A su vez, Juan Justo García quien fue Catedrático de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, escribió *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría* (1782) como obra de referencia para los alumnos de su asignatura con el objetivo de instruirles minuciosamente en Aritmética, Álgebra y Geometría, en el corto periodo de tiempo que transcurre en un curso escolar.

Sin embargo, el *Compendio de la Geometría práctica* de Hijosa, fue publicado con el objetivo de "instruir en la Geometría práctica á los niños que concurren á estudiarla en las escuelas de Medina de Rioseco y Palencia" (Hijosa, 1791, p. i), admite a su vez que se trata de una obra útil también "á aquellas personas que necesitan de ella en sus oficios, como Carpinteros, Canteros, Albañiles, &c." (Hijosa, 1791, p. ii).

3.2.2. Justificación y secuenciación de los contenidos incluidos

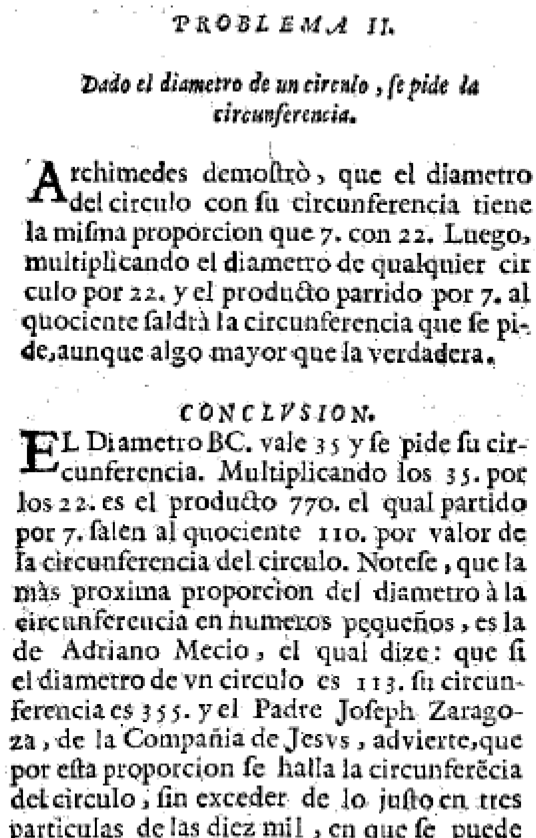
A excepción de Hijosa (1791), ninguno de los autores justifica cuáles fueron los contenidos que se incluyeron y cuál fue la secuenciación seguida, sin embargo, las obras de Verdejo (1794) o Bails (1788) incluyen amplios y descriptivos índices que organizan toda la información sobre el contenido de la obra en unas páginas.

Solo Hijosa (1791) justifica la inclusión de la segunda, y más práctica, parte de su obra, "Teniendo presente la poca exáctitud que ha notado en algunos Agrimensores en la medida que hacen de las posesiones, por ignorar del todo aquella facultad que les da nombre de tales" (Hijosa, 1791, pp. ii-iii).

3.2.3. Estructura y precisión en la presentación de los contenidos

Un aspecto destacable de la obra de Serrano es el uso del método "en forma silogística" que caracteriza la estructura de toda la obra. En contraposición al resto de obras, en lugar de enumerar las propiedades geométricas junto a su demostración, seguido de algún problema resuelto, en este caso, dado un tipo de problema, se enumeran las propiedades necesarias para su resolución y, a continuación, se resuelve de manera general. Por último, en un apartado denominado “Conclusión” se propone un problema concreto y se incluye su resolución (Gutiérrez-Rubio & Madrid, 2018). La figura 2 muestra un ejemplo de la estructura de la obra en un ejercicio sobre la longitud de la circunferencia dado el valor del diámetro.

Echeverría (1758), de forma similar, solo resuelve de forma práctica cada problema, sin enunciar propiedades ni teoremas, aunque sí lo hace mediante dos procedimientos, primero resuelve cada caso práctico sobre el papel y, a continuación, explica cómo se resuelve en el propio terreno, procedimiento que él denomina, “En el campo”.



PROBLEMA II.

Dado el diametro de un circulo, ſe pide la circunferencia.

Archimedes demoſtrò, que el diametro del circulo con ſu circunferencia tiene la miſma proporcion que 7. con 22. Luego, multiplicando el diametro de qualquier circulo por 22. y el produćto partido por 7. al quociente ſaldrà la circunferencia que ſe pide, aunque algo mayor que la verdadera.

CONCLVSION.

EL Diametro BC. vale 35 y ſe pide ſu circunferencia. Multiplicando los 35. por los 22. es el produćto 770. el qual partido por 7. ſalen al quociente 110. por valor de la circunferencia del circulo. Noteſe, que la màs proxima proporcion del diametro à la circunferencia en numeros pequeños, es la de Adriano Mecio, el qual dize: que ſi el diametro de vn circulo es 113. ſu circunferencia es 355. y el Padre Joſeph Zaragoza, de la Compañia de Jesvs, advierte, que por eſta proporcion ſe halla la circunferẽcia del circulo, ſin exceder de lo juſto en tres particulas de las diez mil, en que ſe puede conſiderar dividido el diametro.

Figura 2 – Ejemplo de método silogístico en la obra de Serrano (1736)

Todas las demás obras se encuentran divididas en capítulos o secciones, organizados a su vez en proposiciones y problemas. Hijosa (1791) divide el tratado en dos libros: en el primero, incluyen todas las demostraciones y procedimientos sobre Geometría, que se realizan sobre el papel; en el segundo, se describen todas las herramientas del agrimensor, se explica su uso y se proponen y resuelven casos particulares de problemas sobre terrenos, en los que se aplican los procedimientos incluidos en el primer libro, apoyados en el uso de las herramientas.

3.2.4. Sugerencias y propuestas metodológicas

Podemos encontrar en los libros de texto, diferentes tipos de consejos, advertencias o sugerencias que alertan al lector sobre algunas de las dificultades a las que puede enfrentarse, los errores que puede cometer y cómo evitarlos o la manera de aplicar los métodos en un menor número de pasos.

Por ejemplo, Serrano (1736) aconseja en la introducción de su obra a sus lectores que para abreviar y aligerar cálculos cuando se hacen raíces cuadradas y cúbicas, pueden hacer uso de las tablas de los cuadrados y los cubos de los primeros números naturales, aunque, a pesar de nombrarlas como Tablas 30 y 31, no aparecen dentro de la obra.

También informa a sus lectores de que

> Para medir el arco de un sector no es exacta medida la que se haze corriendo por la linea circular, por causa de lo curvo de la linea, y asi el Geometra practicara la mas perfecta medida, que se hace observando el valor del ángulo del centro BAC. (p. 52)

Verdejo (1794) realiza asimismo un pequeño ejercicio para mostrar al lector la diferencia que se obtiene en el cálculo de la longitud de una circunferencia de 20 pies de diámetro, según las aproximaciones obtenidas por diferentes autores (Tabla 2).

Tabla 2 – Diferencias en el cálculo de la longitud de una circunferencia según distintas razones (Verdejo, 1794, p. 207)

Autor	Razón	Longitud de una circunferencia de 20 pies de diámetro
Arquimedes	7 a 22	$62\,\frac{6}{7}$
Adriano Mecio	113 a 355	$62\,\frac{94}{113}$
Ceulen	1 a 3,14	62,8

Por otro lado, Echeverría (1758) considera oportuno también anunciar que

> Sucede muchas veces hallar porciones de Circulos, y especies infinitas de curvas, para cuya medicion no se halla methodo, y quando queremos medirlas con mayor exactitud, hacemos de una Curva muchos Segmentos, y crece mas la dificultad. Por lo qual en semejantes ocasiones, persuado al Agrimensor, que divida la Curva en algunas partes iguales [que quanto mas fueren, será mas justa la medicion] y asi quedarà reducida en rectilínea, y buscada su Area, avrà hallado la de la Curva, física, sensiblemente. Si de las divisiones tiràre rectas, parte fuera, parte dentro, sin notable diferencia, hallarà la Area, pues con artificio semejante, han procurado los Geometras investigar la razón del Diametro de el Circulo à su Periferia" (pp. 58-59)

3.2.5. Recomendaciones sobre materiales o herramientas

En cuanto a los materiales y herramientas que aparecen en los libros, todos los autores los tienen presentes, los definen, detallan cómo y para qué se usan e incluso añaden algunas imágenes. Para los trazados en lápiz y papel, se recomienda el uso de escuadrada, cartabón, compás y regla. Serrano (1736) y Bails (1788) incluso recomiendan el uso del compás de proporción, Astrolabio o semicírculo graduado para medir la amplitud del ángulo central de un sector circular (Figura 3). Autores como Echeverría (1758) optan por el uso de materiales sencillos, como el cordel y los palos, para los trazados en el campo. Hijosa (1791) por su parte, incluye instrumentos como la cuerda, la escuadra o cartabón de agrimensor, el estadal, el semicírculo o la plancheta.

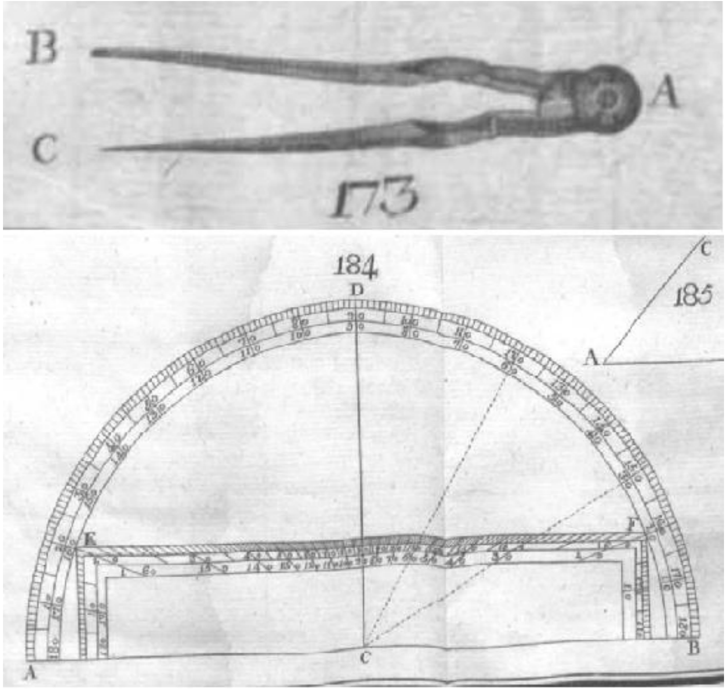


Figura 3 – Compás (Bails, 1788, p. 356) y semicírculo graduado (Bails, 1788, p. 360)

3.2.6. Representaciones gráficas

Todas las obras analizadas incluyen en la parte final o en folios intercalados, láminas desplegables con representaciones gráficas de tipo geométrico o con imágenes, excepto Serrano (1736) que las incluye tras cada problema planteado. Las gráficas de tipo geométrico ayudan al lector a entender cada uno de los pasos que forman parte de la demostración de una proposición o de la resolución de un problema o caso práctico. Las imágenes, además, ofrecen apoyo visual para las definiciones de las herramientas del agrimensor o para que el lector entienda mejor cuáles son los datos aportados y las preguntadas planteadas en los problemas.

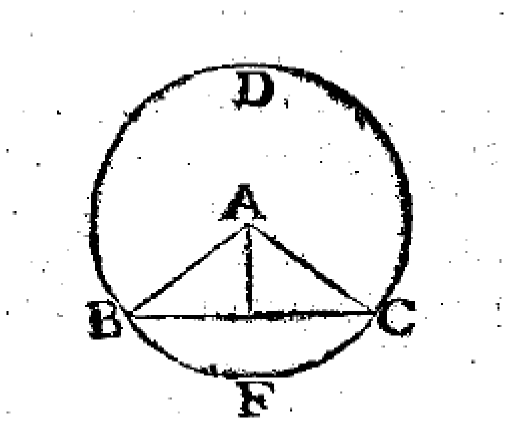


Figura 4 – Representación geométrica de un sector circular (Serrano, 1736, p.52)

3.2.7. Aplicaciones a la práctica

Excepto la obra de Serrano (1736), que solo incluye contenidos de geometría elemental, todos los libros analizados sobre geometría práctica muestran una gran variedad de casos prácticos relacionados con la Agrimensura o la Carpintería, como son la medición de líneas, distancias, alturas o profundidades; la medición, división y permuta de tierras; construcción de planos a escala; o la medición del volumen que ocupan sólidos y líquidos.

En la Tabla 3 se indica con una "X" si las estrategias didácticas han sido halladas en los libros analizados.

Tabla 3 – Estrategias didácticas hallados en los libros analizados

	OU	JSC	EP	SPM	MH	RG	APL
Serrano (1736)	X			X	X	X	
Echeverría (1758)	X			X	X	X	X
Juan Justo García (1782)	X		X	X	X	X	X
Bails (1788)	X		X	X	X	X	X
Hijosa (1791)	X	X	X	X	X	X	X
Verdejo (1794)	X		X	X	X	X	X

Nota. OU= Objetivo y utilidad; JSC= Justificación y secuenciación de los contenidos incluidos; EP= Estructura y precisión en la presentación de los contenidos; SPM= Sugerencias y propuestas metodológicas; MH= Recomendaciones sobre materiales o herramientas; RG= Representaciones gráficas; APL= Aplicaciones a la práctica.

Conclusiones

Tal y como se indica en las obras analizadas, a pesar de que en el siglo XVIII ya se conocían algunos cientos de cifras decimales del número π, los autores de libros de texto continuaban usando aproximaciones de este. Sin embargo, se trata de las mejores aproximaciones halladas en la historia, hasta tal punto que podemos decir que la aproximación propuesta por Mecio, nos acerca más al valor exacto del perímetro de la circunferencia, que 3,14. que es el propuesto por la mayoría de libros actuales de educación primaria y secundaria.

El análisis de las estrategias didácticas evidencia asimismo el interés social y didáctico de los autores de los libros de texto analizados, por acercar a los lectores los conocimientos matemáticos incluidos en ellos. Sin embargo, los libros de Echeverría y Hijosa, reflejan un esfuerzo mayor por instruir a sus lectores, acercándoles los conocimientos teóricos y abstractos de la Geometría mediante casos prácticos en el terreno y uso de las herramientas propias del agrimensor. Este resultado coindice con la opinión de Faus (1995), quien considera el texto de Hijosa como uno de los más comprensibles entre todos los que fueron publicados durante el siglo XVIII.

El conocimiento sobre estos manuales, y en concreto sobre el tratamiento tanto matemático como didáctico dado a los contenidos sobre círculo y circunferencia, permite conocer más sobre la enseñanza de las matemáticas a lo largo de la historia e incluso podrá aportar distintas ideas o recursos al profesorado de matemáticas.

Agradecimientos

Esta comunicación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad (Fondos FEDER) EDU2016-78764-P.

Referencias

Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Bails, B. (1788). *Principios de Matematica de la Real Academia de San Fernando*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.

Blanco, M. (2013). The Mathematical Courses of Pedro Padilla and Étienne Bézout: Teaching Calculus in Eighteenth-Century Spain and France. *Science & Education, 22* (4), 769-788. DOI: https://doi.org/10.1007/s11191-012-9537-6

d'Enfert, R. (2014). The history of mathematics education and textbooks in France in the 19th and 20th centuries. *History of Education and Children's Literature, 9*(1), 17-26.

Echeverría, X. I. (1758). *Geometría práctica: necessaria a los peritos agrimensores y su examen, según la mente de esta MNP/dispuesta por su más afecto, y humilde hijo Xavier Ignacio de Echeverría*. San Sebastián: Oficina de Lorenzo Joseph Riesgo.

Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias pedagógicas, 14*, 169-180.

Faus, A. (1995). El ejercicio profesional de la agrimensura en la España del siglo XVIII: titulación académica y formación teórica de los peritos agrimensores. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 18*(35), 425-440.

Frejd, P. (2013). Old algebra textbooks: a resource for modern teaching. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 28*(1), 25-36.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Universidad de Navarra.

García, J.J. (1782). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Madrid: D. Joachin Ibarra.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 9-22.

González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Gutiérrez-Rubio, D. & Madrid, M. J. (2018). Geometría Selecta Theorica, y práctica del matemático cordobés Gonzalo Antonio Serrano. *Matemáticas, Educación Y Sociedad, 1*(1), 32-39. Recuperado a partir de http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/8

Hijosa, M. (1791). *Compendio de la geometría práctica: con un breve tratado para medir terrenos, dividirlos y levantar planes arreglados a ellos*. Madrid: Imprenta Real.

León Mantero, C. Maz-Machado, A., Madrid, M. J. & Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: Los tratados elementales de Juan Cortazar. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 52*, 34-45.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. & López, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la Vida Diaria en los Libros de Aritmética Españoles del Siglo XVI. *Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 1082-1100. DOI:10.1590/1980-4415v31n59a12

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* . (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. In M. González, M. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM

Maz, A., López, C. & Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en "Arithmetica Practica" de Juan de Yciar. In L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática: homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granada: Editorial Comares.

Maz, A., & Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Maz-Machado, A. & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa, 18*(1), 49-76.

Maza, C. (1998). Aproximaciones históricas al área del círculo. *Suma, 27*, 49-56.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA, 5*(3), 105-127.

Papadopoulos, I. (2014). How Archimedes helped students to unravel the mystery of the magical number pi. *Science & Education, 23*(1), 61-77. DOI: https://doi.org/10.1007/s11191-013-9643-0

Sánchez, I. M. & González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *35*(3), 89-106. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2348

Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation das les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. *Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l´informatique* (pp. 137-145). Francia: Editions La Pensée Sauvage.

Serrano, G.A. (1736). *Geometría Selecta Theorica, y Practica*. Córdoba: Imprenta del autor.

Sierra, M., González, M. T. & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de "límite funcional" en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *17*(3), 463-476.

Verdejo, F. (1794). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud*. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.

PÓSTERS - GD1

LABMATH®: "HANDS-ON ACTIVITIES" MÃOS À OBRA!

João Pedro Correia
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
correia-joao@campus.ul.pt

Palavras-Chave: LabMath; Hands-on activities; Materiais manipulativos; Frações

Os alunos aprendem de várias formas e os professores devem usar diferentes estilos de ensino para ir ao encontro das necessidades dos alunos. Numa primeira abordagem, estes devem compreender conceitos matemáticos de uma forma concreta e não abstrata. Usar materiais manipulativos ou aprender através de atividades Hands-on aumenta a experiência de aprendizagem do aluno. A aplicação de estratégias e de atividades deste tipo promove a literacia matemática e produz resultados positivos em relação à aprendizagem de conceitos matemáticos.

O projeto LabMath baseia as suas práticas em atividades lúdicas e manipulativas ("Hands-on activities") para ensinar matemática a alunos do 1.º ciclo. Este projeto, ainda em curso, levantou várias questões, nomeadamente, perceber se atividades Hands-on beneficiam a compreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos, nomeadamente a compreensão do conceito de frações, decimais e percentagens.

Este projeto iniciou o seu percurso em 2014 como atividade extracurricular numa escola no distrito de Lisboa, concelho de Odivelas, com o objetivo promover e encorajar o desenvolvimento de atividades práticas na área da matemática, envolvendo os alunos na conceção, na realização e avaliação de todo o projeto.

Aprender a fazer é uma das máximas do ensino e justifica-se com a capacidade de aprendizagem que um aluno desenvolve quando faz. Esta ideia de aprendizagem e como surge é enfatizada pela abordagem construtivista que afirma que os alunos constroem o seu conhecimento através de experiências que são importantes e significativas para elas (Dewey, 1966). Os participantes de uma atividade constroem o seu próprio conhecimento testando as suas ideias e conceitos baseados em conhecimentos e experiências anteriores, aplicando-as em novas situações, e integrando o novo conhecimento com construções intelectuais pré-existentes (Roussou, 2004).

Atividades "Hands-on" permitem um aumento cognitivo e de aprendizagem por parte dos alunos baseado nas experiências e no ambiente em que são apresentadas.

Os alunos aprendem quando discutem, investigam, criam e descobrem com outros alunos. Quando os alunos se tornam familiarizados com o conteúdo abordado, começam a tomar decisões, necessitam de menos ajuda por parte do professor, permitindo assim uma maior experiência de aprendizagem interativa (Cooperstein & Kocevar-Weidinger, 2004).

Atividades relacionadas com frações tem demonstrado um enorme potencial. Uma vez que se pretende compreender se as atividades introduzidas no LabMath têm criado um efeito positivo nos alunos em relação aos conceitos trabalhados, nomeadamente a compreensão do conceito de frações, optamos por uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Usei observações participantes, dado que esta metodologia permite uma relação próxima do investigador com o objeto de estudo, no seu contexto natural.

No 1.º Ciclo, há várias atividades que podem ajudar os alunos a compreender frações e decimais, explorar a sua relação e construir os conceitos de ordem e equivalência. De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), é muito importante o uso de materiais manipulativos, diagramas e situações do dia-a-dia como uma combinação de esforços progressivos para descrever experiências de aprendizagem, através da linguagem e de símbolos. O NCTM afirma que, "entre o 3.º e o 5.º ano, os alunos devem construir a compreensão do conceito de fração como parte de um todo e como divisão" (NCTM, 2000, p. 150). Mais, é vital que os alunos vejam e explorem uma variedade de modelos de frações, focando-se primariamente em frações com que estejam mais familiarizados como, por exemplo, metades, terços, quartos, sextos, oitavos e décimos (NCTM, 2000, p. 150). Para além disso, usando modelos de área e de região, os alunos serão capazes de observar como é que as frações fazem parte de um todo, de uma unidade e descobrir frações equivalentes. Os alunos irão criar estratégias para ordenar e comparar frações, muitas vezes usando balizas de conhecimento como, por exemplo ½ e 1" (NCTM, 2000, p. 151).

Este objetivo tem vindo a ser verificado através dos resultados obtidos pelo estudo. Para isso, analisaram-se as discussões coletivas com as professoras titulares e compararam-se os resultados de tarefas realizadas em sala de aula com todos os alunos (os que frequentavam o LabMath e os que não frequentavam).

Em conclusão, foi possível verificar que os alunos têm vindo a demonstrar uma melhor compreensão do conceito de frações e na sua identificação em comparação aos alunos não inscritos no LabMath. Esta conclusão não é definitiva, pois ainda estamos na fase de seleção e recolha de dados que nos possam confirmar esta ideia.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cooperstein & Kocevar-Weidinger, (2004). *Beyond active learning: a constructivist approach to learning*, Reference Services Review, Vol. 32(2), 141-148.

Dewey, J. (1966). *Democracy and Education.* Free Press: New York.

NCTM. (2000). *Principals and Standards for School Mathematics*. Reston: VA.

Roussou, M. (2004). *Learning by doing and learning through play: an exploration of interactivity in virtual environments for children*. ACM Computers in Entertainment, 2(1), 1–23.

EXPLORANDO A CIRCUNFERÊNCIA COM O GEOGEBRA

Sandra Carvalho

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

sandrajpar@gmail.com

Palavras-chave: Geometria, *GeoGebra*, generalização, justificação.

A Geometria é, de acordo com a minha experiência, o tema matemático mais problemático e, por isso, optei por fazer uma intervenção neste ramo da Matemática. Como indica Battista (2007), a Geometria é uma área onde os alunos revelam dificuldades de diversa ordem. A meu ver, as dificuldades manifestadas na aprendizagem estão relacionadas com a dificuldade de visualização e representação mental das situações, o que inibe os alunos de concretizar os problemas e, consequentemente, de estabelecer uma estratégia de resolução. Freudenthal (1973) diz-nos que, a nível mais elementar, a Geometria é essencialmente compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move.

No sentido de rentabilizar a tecnologia atualmente existente, tendo em conta a apetência e o gosto com que os alunos a manipulam, é importante aproveitar todos os recursos disponíveis para fornecer aos alunos novas formas de conhecer e interagir com os objetos geométricos. É neste domínio que os ambientes de geometria dinâmica (AGD), como o *software GeoGebra* utilizado neste estudo, se revelam como ferramentas muito úteis. Ao permitir um grande número de experiências num curto espaço de tempo, os AGD favorecem a formulação de conjeturas através da observação do que permanece constante no meio de tudo o que varia (Veloso, 1998).

Recorrendo ao *GeoGebra* como um recurso que, para além de atrativo, é facilitador e promovedor da capacidade de visualizar, conjeturar e justificar afirmações matemáticas, o propósito geral do trabalho é melhorar a aprendizagem da disciplina de Matemática, tentando ir de encontro às dificuldades dos alunos no tópico "Circunferência" dentro do ramo da Geometria, de acordo com o previsto no programa em vigor (MEC, 2013), que pelo seu conteúdo específico surge, aos olhos dos alunos, como pouco real, difícil de concretizar e compreender. Melhorando as aprendizagens, os alunos melhoram também a visão que têm da disciplina, passam a acreditar mais nas suas capacidades, a confiar em si mesmos e, consequentemente, a desenvolver mais e melhor trabalho.

Concretamente, o objetivo desta investigação é compreender como é que os alunos desenvolvem o seu raciocínio geométrico quando recorrem ao ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra* para resolver tarefas de construção, exploração e investigação. Para atingir este objetivo procurei responder às seguintes questões: Que estratégias utilizam os alunos para resolver as tarefas propostas?; Que generalizações constroem os alunos?; Como é que os alunos justificam afirmações matemáticas?

O quadro teórico refere em que consistem os AGD, e em que medida podem ser usados para melhorar o ensino e a aprendizagem da Geometria. Aborda ainda os processos de raciocínio em geral e geométrico em particular, com especial atenção à generalização e à justificação por parte dos alunos.

A intervenção segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, com observação participante. Consistiu na aplicação de uma sequência de sete tarefas exploratórias e de investigação, trabalhadas num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, tendo surgido alguns momentos de discussão coletiva. Participaram no estudo os vinte e oito alunos de uma turma de 9.º ano, trabalhando em pares. Estas tarefas caraterizam-se pela construção autónoma no *software GeoGebra*, sendo indicados os elementos a construir e as caraterísticas essenciais desses elementos. Depois, os alunos são incitados a procurar regularidades, a conjeturar e, no final, a justificar as suas generalizações, recorrendo a conceitos matemáticos.

O investigador foi interventivo/participativo dado que a recolha de dados foi efetuada numa turma a que lecionei Matemática, como docente titular e única. Na recolha de dados foram utilizados a observação de aulas, com registos em diário de bordo e em gravações áudio, e a recolha documental das produções dos alunos em suporte papel e também em suporte informático. Em cada tarefa os alunos respondiam no enunciado em papel, enquanto desenvolviam o seu trabalho com o *software GeoGebra* e registavam regularmente, em cada ponto em que o enunciado da tarefa o sugeria, as capturas de ecrã em ficheiros *Word*, de modo a ser possível analisar a evolução da tarefa no computador.

Os resultados indicam que, com tarefas de carácter exploratório e investigativo, num ambiente em que se analisam as figuras obtidas com o *software GeoGebra* e se discutem ideias, os alunos formulam conjeturas e produzem generalizações com alguma facilidade. Também conseguem justificar as suas generalizações recorrendo a métodos descritivos ou mais formais, desenvolvendo a sua competência nesta área. O entusiasmo com que trabalharam e se integraram nas discussões coletivas foi, com toda a certeza, facilitador e promovedor de boas aprendizagens bem como do aperfeiçoamento do trabalho autónomo dos alunos.

Referências

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Greenwich, CT: Information Age.

Freudenthal, H. (1973). *Revisiting mathematics education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (PMCM). Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais: Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

UM PROJETO INTERDISCIPLINAR NO ENSINO SECUNDÁRIO: ESTUDO DA SALINIDADE NO ESTUÁRIO DO RIO LIMA

Teresa Pimentel

Agrupamento de Escolas de Santa Maria Maior - Viana do Castelo, Portugal

teresapimentel@esmaior.pt

Palavras-chave: Interdisciplinaridade; projeto; funções; calculadora gráfica.

No passado ano letivo, o Ministério da Educação lançou um plano de flexibilidade curricular, a que aderiram voluntariamente algumas escolas, com o objetivo de promover melhores aprendizagens que desenvolvam competências de nível elevado, centrado nas escolas, nos seus alunos e professores, e favorecendo a gestão curricular de forma flexível e contextualizada (DGE, 2017). Neste documento, que define as competências essenciais, defende-se a mobilização de conhecimentos em contextos matemáticos e não matemáticos, realçando a resolução de problemas, atividades de modelação e projetos, utilizando conhecimentos adquiridos ou estimulando novas aquisições. Simultaneamente, promove-se a aquisição e desenvolvimento de competências de pesquisa, avaliação, mobilização crítica e autónoma de informação.

Embora o nosso agrupamento não tenha aderido ao plano nacional, o Diretor encorajou a emergência deste tipo de trabalho criando um projeto do agrupamento denominado *Mar Maior*. Neste âmbito, três professoras – de Matemática, Fisica e Química e Biologia e Geologia – com duas turmas do 10º ano em comum, engendraram um projeto interdisciplinar envolvendo as duas turmas na investigação da salinidade no estuário do rio que banha e desagua na cidade, em função da profundidade, temperatura e distância à foz.

Quando os alunos se envolvem no *design*, implementação, avaliação e comunicação de um projeto, espera-se que sejam desenvolvidas competências como a organização, a autonomia, a cooperação e a criatividade. Um dos usos mais comuns das funções (Michelsen, 2006; NCTM, 2014) é descrever fenómenos usando a modelação na criação de ferramentas matemáticas de modo a analisar teoricamente uma situação real, relacionando a matemática com as outras ciências. A interdisciplinaridade - inerente a estas iniciativas - é nas últimas décadas uma tendência a nível nacional e internacional, já que é considerada essencial na criação de novo conhecimento (LERU, 2016).

Apresentarei as linhas gerais de um estudo exploratório qualitativo acerca de um projeto interdisciplinar vivenciado por 47 alunos de duas turmas do 10º ano, e que pretende identificar caraterísticas das propostas e/ou do trabalho realizado que podem estimular o esforço e o envolvimento em cada uma das áreas científicas envolvidas.

Os dados foram recolhidos de forma descritiva e interpretativa incluindo observação e fotografia do trabalho dos alunos, notas da professor, conversas entre professoras, análise dos relatórios escritos de cada grupo de alunos e observação das apresentações orais no Congresso Matemático da escola.

Os alunos receberam um guião do trabalho incluindo o protocolo experimental. Numa

1ª fase, com o apoio da Capitania do Porto de Viana do Castelo, realizaram-se percursos fluviais com alunos para recolha de água em diversas localizações e profundidades com uma garrafa de Van Dorn. A 2ª fase realizou-se no laboratório de Química. Os alunos aprenderam a funcionar com os sensores de salinidade e de temperatura. Cada grupo de 4 alunos fez em seguida a medição da salinidade em função de três variáveis: profundidade, distância à foz e temperatura, de acordo com a distribuição previamente organizada pela professora. Na 3ª fase trabalharam na sala de aula de matemática, começando por aprender a introduzir na calculadora gráfica os dados obtidos pelos sensores e, quando necessário, pelo GPS do barco e mapa Google. Depois criaram a nuvem de pontos e geraram a linha de regressão. Nas fases seguintes foram analisados e interpretados os dados e registados resultados. Os valores obtidos foram depois utilizados para o estudo mais formal do conceito de função e suas caraterísticas e propriedades. Mais tarde alguns alunos apresentaram o trabalho e conclusões no Congresso Matemático da escola, que pretende dar espaço aos alunos para comunicar ideias e descobertas matemáticas, a resolução de problemas, bem como curiosidades, puzzles e quebra-cabeças.

Serão apresentados e discutidos os resultados de três grupos de alunos aproveitando a apresentação que eles próprios fizeram.

Serão também apresentados os resultados de um inquérito realizado aos alunos no final do ano letivo que pretendia auscultar as suas opiniões e sentimentos sobre esta experiência.

Referências

DGE (2017). *Autonomia e flexibilidade curricular.* Retrieved from http://www.dge.mec.pt/autonomia-e-flexibilidade-curricular#

LERU (2016). *Interdisciplinarity and the 21st century research-intensive university*. Retrieved from https://www.leru.org/files/Interdisciplinarity-and-the-21st-Century-Research-Intensive-University-Full-paper.pdf

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM, 38(3)*, 269-280.

NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, NCTM.

GRUPO DE DISCUSSÃO 2

A comunicação na aula de Matemática

GRUPO DE DISCUSSÃO 2

A COMUNICAÇÃO NA AULA DE MATEMÁTICA

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, CIEC-UM
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Mária Almeida
UIED, FCT-UNL; Agrupamento de Escolas de Casquilhos
ajs.mcr.almeida@gmail.com

No últimos anos, o foco da aprendizagem tem vindo a situar-se nos alunos enquanto criadores de informação e não tanto nos alunos como consumidores de informação. Esta mudança de paradigma deve-se em grande parte à necessidade de desenvolver competências reconhecidas como essenciais no século XXI. Neste âmbito, destacam-se o pensamento crítico e autónomo, a criatividade, a capacidade de comunicação e o trabalho colaborativo na resolução de problemas reais e de problemas não rotineiros, aspetos que vemos plasmados no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME, 2017). Para que estas competências se evidenciem, o professor deve promover uma cultura de sala de aula que permita que os alunos estejam no centro da aprendizagem, privilegiando as interações e a colaboração, aspetos intrinsecamente ligados à comunicação.

A comunicação é entendida como uma componente fundamental da aula de matemática, ideia que se encontra refletida numa grande diversidade de documentos curriculares (e.g. ME, 2007; NCTM, 2000, 2014; ME, 2017, 2018). Trata-se de uma capacidade transversal a toda a atividade matemática que contribui de forma significativa para a construção de significados, para a consolidação de ideias, bem como para a sua divulgação (NCTM, 2000). Fomentando a comunicação na aula de matemática, os alunos têm oportunidade de refletir, clarificar e expandir as suas ideias e o conhecimento acerca das relações matemáticas em evidência (OMS, 2005).

Sendo a Matemática ela própria uma linguagem que nos permite compreender e representar o mundo (ME, 2007), podemos assumir que existe uma relação direta entre o pensamento matemático e a comunicação matemática. Tal como acontece com a aquisição de qualquer tipo de linguagem, os alunos aprendem Matemática e aprendem a comunicar matematicamente falando, ouvindo, lendo e escrevendo (e.g. Lindquist & Elliot, 1996; Thompson & Chappell, 2007).

Tendo em consideração as diferentes formas de comunicação matemática, Thompson e Chappell (2007) sugerem que a comunicação verbal, na qual se incluem o falar e o escutar, talvez seja a mais natural para os alunos expressarem as suas ideias emergentes. Ao discutir ideias e ao ouvir os outros, os alunos podem: desenvolver os seus conhecimentos e adquirir maior facilidade no estabelecimento de relações matemáticas (Marks Krpan, 2013), criar ambientes de aprendizagem propícios às discussões coletivas (García-Carrión, & Díez-Palomar, 2015) e tornar-se mais rigorosos na avaliação de argumentos matemáticos (Thompson & Chappell, 2007). A orquestração que o professor faz destes momentos é crucial para a constituição de comunidades de aprendizagem assentes numa perspetiva comunicativa. Realça-se aqui a promoção de discussões coletivas que permitem aos alunos participar, expondo as suas ideias, propor e defender argumentos, analisar e contrapor argumentos de outros, como uma oportunidade para o desenvolvimento da comunicação, mas também para potenciar a aprendizagem de conceitos matemáticos (e.g. Yackel & Cobb, 1996). A possibilidade de os alunos explorarem as suas ideias com base no conhecimento partilhado no seio dessas comunidades de aprendizagem permite-lhes tirar ilações acerca da clareza do seu discurso e da validade das suas ideias, o que contribui para que apurem o seu sentido crítico (e.g. Lampert, 1990; NCTM, 2014)

A comunicação escrita também se reveste de especial importância, pois fornece aos alunos um registo do seu próprio pensamento e do desenvolvimento das suas ideias, possibilitando a reflexão acerca do trabalho desenvolvido (NCTM, 2000). Por outro lado, proporciona ao professor insights sobre o raciocínio dos alunos, permitindo-lhe analisar os processos de pensamento expostos no papel, bem como identificar possíveis conceções erradas.

A escrita pode ser vista como um processo que auxilia no desenvolvimento de competências de comunicação e proficiência em matemática (Kostos & Shin, 2010). As competências de comunicação são apuradas na medida em que os alunos: praticam, explicando as suas ideias de forma lógica e coerente (Haltiwanger & Simpson, 2013); desenvolvem uma consciência do público a que se destinam as respetivas produções (Haltiwanger & Simpson, 2013); e avaliam as suas habilidades de comunicação através dos processos de revisão e refinamento (McCormick, 2010). As habilidades matemáticas são desenvolvidas na medida em que, por meio da escrita, os alunos: praticam o uso correto do vocabulário matemático (Kostos & Shin, 2010); facilitam a compreensão e o raciocínio matemático (Kostos & Shin, 2010); e conseguem interrelacionar conceitos matemáticos (NCTM, 2000). Escrever é uma ação generativa que apoia os alunos à medida que analisam, comparam dados e sintetizam informação. Envolve os alunos à medida que manipulam, integram e reestruturam o conhecimento usando e refletindo sobre conhecimentos, conceitos e crenças prévias. Esse envolvimento cognitivo facilita o desenvolvimento de uma compreensão significativa (Lim & Pugalee, 2004).

Frequentemente a comunicação está organizada em torno das vertentes oral e escrita, no entanto na aula de matemática a comunicação pode ser veiculada através de formas não verbais. Incluem-se aqui aspetos relacionados com a postura, a utilização do espaço, o olhar, as expressões faciais e os gestos (Goldin-Meadow, Kim, & Singer, 1999). A utilização e a observação destes comportamentos desempenha um papel único na aula de matemática, sobretudo se considerarmos que as ideias que não são, integralmente ou parcialmente, veiculadas de modo verbal podem ser transmitidas ou complementadas por meios não verbais. Os gestos, por exemplo, podem evidenciar ou mesmo revelar aspetos do pensamento que não são visíveis ou claros através de outras formas de comunicação. Por um lado, constituem um suporte visual ao discurso, mas também podem úteis na resolução de problemas ou na clarificação do pensamento. É também interessante perceber que usamos os gestos com maior frequência quando nos queremos referir a conceitos espaciais ou na descrição de movimentos e imagens, o que sugere que podem atuar como um interface entre o pensamento visual e a linguagem (e.g. Hwang, Herzig & Padden, 2013; Vale & Barbosa, 2017). Neste sentido, a comunicação não verbal poderá ajudar a complementar os diálogos entre professor e alunos, permitindo que o ouvinte retenha mais informações por comparação com situações em que nenhum gesto é realizado (e.g. Goldin-Meadow et al., 1999 ; Vale & Barbosa, 2017).

O grupo de discussão 2 centra o seu trabalho na investigação sobre a aula de matemática dando especial atenção à comunicação, em diferentes vertentes e com diferentes atores. Neste grupo de discussão existem nove comunicações orais e três comunicações em póster, que privilegiam a dimensão oral, com foco no questionamento e nas discussões coletivas, e a dimensão escrita. Nestes trabalhos, discute-se em termos teóricos a comunicação matemática, assumindo-se que através da comunicação, as ideias transformam-se em objetos de reflexão, podendo ser analisadas, discutidas e refinadas. A promoção desta cultura de sala de aula implica que o professor crie um ambiente que motive a participação e o envolvimento dos alunos, colocando questões desafiantes, ouvindo/lendo os seus argumentos. A atividade deste grupo de discussão será pautada pela discussão analítica das principais ideias presentes nas comunicações apresentadas. As comunicações orais deste grupo de discussão foram organizadas em três momentos, ao longo do EIEM2018, pois as comunicações em póster serão apresentadas em espaço próprio.

No primeiro momento as comunicações incidem sobre os primeiros anos, refletindo-se especialmente sobre as discussões coletivas. Aqui procura-se identificar a importância dada à comunicação nas aulas de matemática por um grupo de futuras professoras dos anos iniciais do ensino fundamental (Araújo e Borralho); discute-se sobre a compreensão dos modos de preparar e conduzir discussões coletivas orientadas, em particular, para o ensino da subtração através da resolução de problemas (Prata e Boavida); e, apresenta-se a exploração de uma tarefa em aula, enquadrada numa prática de ensino-aprendizagem exploratório, centrando-se nos momentos de discussão coletiva da tarefa e na forma como estes contribuíram para o conhecimento matemático dos alunos (Mestre).

No segundo momento as comunicações refletem sobretudo sobre o questionamento, englobando estudos incidentes nas práticas de um conjunto de professores. Assim, procura-se descrever e compreender como três professores de Matemática do Ensino Básico dinamizam discussões coletivas envolvendo tarefas algébricas, focando os desafios que enfrentam (Rodrigues, Meneses e Ponte); discute-se o questionamento investigativo, apresentando alguns exemplos de professores do ensino primário que desenvolveram tarefas de matemática e tarefas interdisciplinares que foram implementadas recorrendo ao questionamento investigativo (Costa e Domingos); e, reflete-se sobre o questionamento, nomeadamente o tipo de perguntas colocadas pelos professores, nas suas práticas de sala de aula, em cruzamento com as próprias perceções que têm sobre o discurso oral e escrito, tendo como participantes no estudo quatro professores de matemática de 2.º ciclo.

No último momento, as comunicações discutem as generalizações por parte dos alunos e o papel do professor na gestão de interações que facilitem a comunicação matemática. Pelo que, no universo de uma turma do 11.º ano de escolaridade, procura-se identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam, reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas e caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções dos problemas (Martins e Martinho); reflete-se sobre o impacto do questionamento do professor nos alunos, avaliando-se o impacto do questionamento de uma professora estagiária de Matemática nos alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade; e, procura-se compreender de que modo as ações do professor promovem a generalização por parte dos alunos, focando em generalizações de natureza diversa que emergem em momentos de discussão coletiva relativos a tarefas exploratórias realizadas pelos alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade (Mata-Pereira e Ponte).

No que concerne às comunicações em poster, procura-se compreender as reações de futuros professores do Ensino Básico na resolução de tarefas através de dobragens (Barbosa e Vale); pretende-se compreender as justificações matemáticas dos alunos do 2.º ciclo, na resolução de uma tarefa sobre desigualdade triangular, no decurso de uma experiência de ensino que privilegia a prática de ensino exploratório (Gregório e Oliveira); e, apresenta-se uma página web que contém uma vertente lúdica e interativa, facilmente adaptada a alunos do 1.º Ciclo e do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Este conjunto de comunicações, para além do interesse intrínseco que cada uma apresenta, constituem no seu conjunto um pretexto para a discussão, que se pretende participada no grupo, em torno de questões como:

− Qual é a importância dada pelos professores à comunicação nas aulas de matemática?

− Como podem os professores de Matemática preparar e conduzir discussões coletivas?

− Que desafios enfrentam os professores de matemática quando dinamizam discussões coletivas?

− Como criar tarefas e implementá-las em aula recorrendo ao questionamento investigativo?

− Como percepcionam os professores o discurso oral e escrito e o que acontece na sua prática de sala de aula ao nível do questionamento?

− Que relações existem entre a avaliação e a comunicação nas aulas de matemática ?

− De que forma os momentos de discussão coletiva contribuem para o conhecimento matemático dos alunos?

− Qual o impacto do questionamento do professor nos alunos?

− De que modo as ações do professor promovem a generalização por parte dos alunos?

Referências

García-Carrión, R., & Díez-Palomar, J. (2015). Learning communities: Pathways for educational success and social transformation through interactive groups in mathematics. *European Educational Research Journal*, *14*(2), 151-166.

Goldin-Meadow, S., Kim, S., & Singer, M. (1999). What the teacher's hands tell the student's mind about Math. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 720-730.

Haltiwanger, L., & Simpson, A. M. (2013). Beyond the write answer: Mathematical connections. *Mathematics Teaching In The Middle School*, *18*(8), 492-498.

Hwang, S., Herzig, M. & Padden, C. (2013). Different ways of thinking: The importance of gesture in child development. *Visual language & Visual learning: research brief*. Retrieved in june, 11, 2016, from: http://vl2.gallaudet.edu/files/2913/9216/6292/research-brief-10-different-waysofthinking.pdf

Kostos, K., & Shin, E. (2010). Using math journals to enhance second graders' communication of mathematical thinking. *Early Childhood Education Journal*, *38*(3), 223-231.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Lim, L., & Pugalee, D. K. (2004). Using journal writing to explore "They communicate to learn mathematics and they learn to communicate mathematically." *Ontario Action Researcher*, *7*(2), 17-24.

Lindquist, M. M., & Elliott, P. C. (1996). Communication – an imperative for change: A conversation with Mary Lindquist. In P. C. Elliot & M. J. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 1-10). Reston, VA: NCTM.

Marks Krpan, C. (2013). Math expressions: developing student thinking and problema solving through communication. Ontario: Pearson.

McCormick, K. (2010). Experiencing the power of learning mathematics through writing. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 4, 1-8.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básic*o. Lisboa: ME/Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Retirado em 30 de outubro de 2018, de: https://dge.mec.pt/sites/default/files/Noticias_Imagens/perfil_do_aluno.pdf

Ministério da Educação (2018). Aprendizagens Essenciais. Retirado em 30 de outubro de 2018, de: http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basicoNational Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: NCTM.

Ontario Ministry of Education. (2005). *The Ontario Curriculum, Grades 1 to 8: Mathematics.* Toronto, ON: Queen's Printer for Ontario.

Thompson, D. R., & Chappell, M. F. (2007). Communication and representation as elements in mathematical literacy. *Reading & Writing Quarterly*, *23*(2), 179-196.

Vale, I., & Barbosa, A. (2017). The importance os seeing in mathematics communication. *Journal of the European Teacher Education Network*, *12*, 49-63.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458-477.

COMUNICAÇÕES – GD2

A COMUNICAÇÃO ORAL NAS AULAS DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: PERSPECTIVAS DE FUTURAS PROFESSORAS

Angelica Francisca de Araújo

Universidade Federal do Oeste do Pará (Programa de Ciências Exatas)

angelica.araujo@ufopa.edu.br

António Manuel Águas Borralho

Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora – CIEP-UÉ

amab@uevora.pt

Resumo: Neste artigo abordamos a comunicação oral nas aulas de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental e apresentamos os principais elementos que compõe este processo (mensagem, contexto, remetente, destinatário, contato e código) e suas respectivas funções. Tivemos como objetivo identificar a importância dada à comunicação nas aulas de matemática por um grupo de futuras professoras dos anos iniciais do ensino fundamental. Para alcançar o objetivo proposto optou-se, metodologicamente, por uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, cujos dados foram oriundos de um debate detalhado sobre o tema, numa turma de Licenciatura Integrada em Ciências, Matemáticas e Linguagens do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (LIECML/ IEMCI/ UFPA). Da análise realizada percebemos que para as futuras professoras a comunicação oral é uma forma de interação entre professores e alunos e que esta se estabelece, principalmente, através do diálogo mediado pelo professor que é o responsável pela comunicação na sala de aula. Percebemos então, que as participantes consideram a comunicação como oral um aspecto importante e que deve estar presente nas aulas apesar de suas perspectivas de comunicação ainda estarem focadas na transmissão de conhecimento.

Palavras-chave: Comunicação oral. Aula de Matemática. Formação Inicial de Professores. Anos Iniciais.

Introdução

A comunicação está presente no quotidiano de profissionais das mais diversas áreas. No caso dos professores, estes usam a comunicação, por meio da linguagem verbal, escrita e gestual para ministrar suas aulas, sendo esta a base das relações pedagógicas, e da troca de informações com seus alunos, seus pares e a comunidade escolar. Espera-se que as mensagens trocadas sejam capazes de gerar conhecimento para si e para seus alunos, porém pouco se fala da comunicação que acontece nas salas de aula, com destaque para as aulas de matemática.

Elegemos como objetivo desta investigação identificar a importância dada à comunicação oral nas aulas de matemática por um grupo de futuras professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com base nos seguintes questionamentos: i) o que é comunicação?; ii) como é que a comunicação oral pode ocorrer em sala de aula? e; iii) o que pode contribuir para uma comunicação oral eficaz? Quem decide isso?

Dessa forma, organizamos este artigo em seis partes, além das referências. Nesta primeira fazemos uma breve síntese sobre o tema. Na segunda abordamos alguns aspectos relacionados a comunicação oral, os elementos que estão presentes na comunicação oral e os aspectos relacionados à comunicação nas aulas de matemática. Na terceira apresentamos a metodologia da investigação. Na quarta trazemos as perspectivas das futuras professoras dos Anos Iniciais sobre o tema comunicação oral. E, por último, apresentamos algumas considerações sobre a investigação.

Fundamentação teórica

A Comunicação Oral

A comunicação humana se dá sob dois aspectos que serão definidos com base nas ideias de Bitti e Zani (1997): a) *o verbal*: é o processo que consiste em transmitir ou fazer circular informações através da fala *e; b) não-verbal:* tem base nas informações que provêm da observação do comportamento do interlocutor, seu estado emotivo ou as atitudes interpessoais, ou seja, prestamos atenção não só ao que ele diz como também ao seu tom de voz e aos seus movimentos gestuais. Neste artigo tratamos da comunicação em seu aspecto verbal que ocorre nas aulas de matemática.

Sabemos da importância da comunicação nas aulas de matemática, "no entanto, pouco se tem discutido sobre a importância da oralidade nas aulas de matemática" (Nacarato, 2012, p.9). Um aluno que apreendeu e entendeu o conteúdo matemático, deve ser capaz de comunicar sobre o conteúdo de forma oral e fazer inferências sobre suas certezas e possíveis dúvidas. O professor, ao comunicar suas ideias matemáticas aos alunos, busca ser entendido e promover o raciocínio e a discussão de ideias matemáticas entre ele e seus alunos.

Dentro dessa perspectiva a sala de aula se torna um ambiente dinâmico, já que para Nacarato (2012) "a comunicação oral permite maior interação entre os sujeitos (professor e alunos e alunos entre si)" (p.11), através dos quais professores e alunos irão partilhar informações com base em um objeto que suscitará essa comunicação.

Elementos da Comunicação Verbal

No que diz respeito à comunicação verbal, a língua se torna uma parte determinante e essencial da linguagem, contudo não se confunde com ela. Para Freixo(2011), a linguagem é uma capacidade programada geneticamente que só se atualiza através da língua que é um sistema formal e social. Já Stubbs (1987) nos diz que "nenhuma língua ou dialeto é inerentemente superior ou inferior a outra e que todas as línguas e dialetos se adaptam às necessidades da comunidade que servem" (p.42). Verificamos que a língua é adquirida e convencional, "constitui o sistema de expressão falada próprio de uma determinada comunidade humana" (Stubbs, 1987, p. 195) e como aspecto de uma comunidade, a língua agrega as pessoas que fazem parte da mesma comunidade ou grupo social que possuem o mesmo interesse.

A fala é um ato individual da vontade e da inteligência que pressupõe a atualização da faculdade da linguagem por meio da convenção social que é a língua. A fala une dois componentes importantes no processo de comunicação: a língua e a linguagem. Os conceitos de linguagem, língua e fala, constituem a base para que a comunicação se desenvolva, e no caso específico deste artigo, para que se possa promover uma comunicação oral eficaz nas aulas de matemática. Assim, representamos em um esquema, as comunicações que acontecem em sala de aula da seguinte forma (Figura 1):

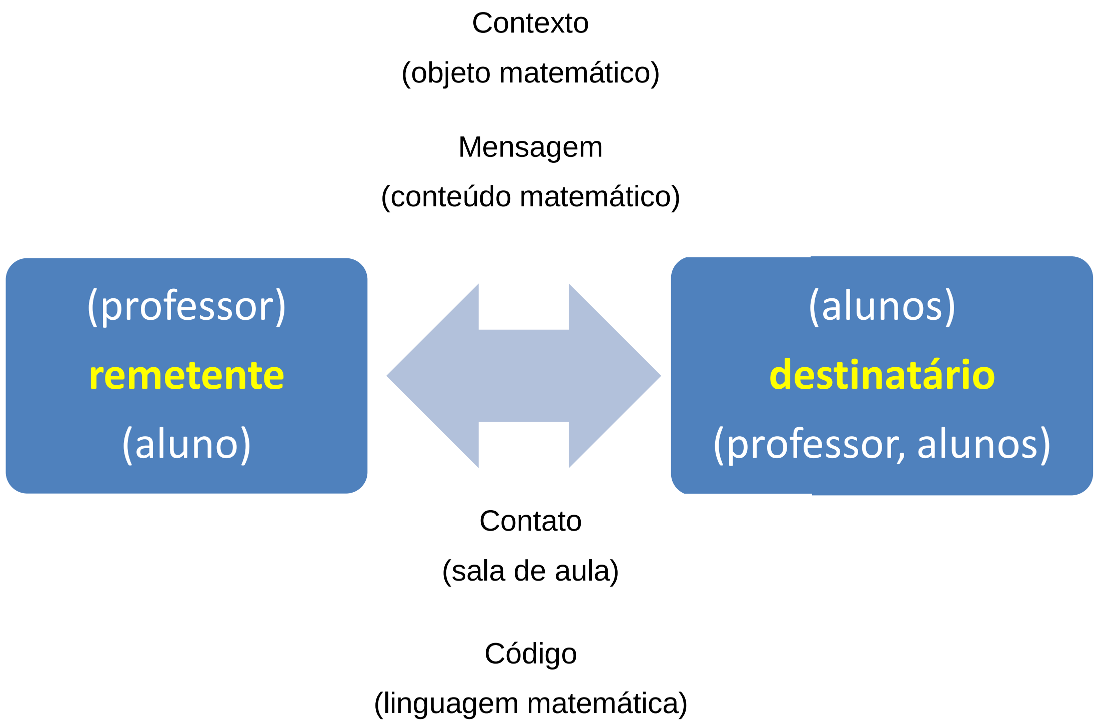


Figura 1 – Elementos de Comunicação Verbal nas Aulas de Matemática (adaptado de Freixo, 2011, p. 197)

A Figura 1 nos mostra uma situação típica do processo de comunicação que esperamos que aconteça em aulas de matemática cujo foco seja o desenvolvimento do conhecimento com o auxílio da comunicação uma vez que, para Bitti e Zani (1997) a situação fundamental da comunicação é o diálogo. Através dele as pessoas trocam informações, interagem e participam de um meio social. Assim, o diálogo é um processo verbal importante de comunicação e, por isso, será necessário esclarecer os elementos que fazem parte deste processo.

O remetente (que ora pode ser o professor, ora pode ser o aluno) emite uma mensagem ao *destinatário* (que neste caso, podem ser os alunos se o remetente for o professor, ou pode ser o professor e os demais alunos se o remetente for um aluno) por meio do *contato* (sala de aula), que é o canal físico que permite a transmissão da mensagem. Bitti e Zani (1997) definem o canal “como o meio físico-ambiental que possibilita a transmissão de uma informação ou de uma mensagem” (p.42). Fica claro nesta citação de Bitti e Zani (1997) que a “relação entre o emissor e o receptor é ‘bilateral’ e ‘reversível’ no sentido em que cada um dos participantes tem a possibilidade de tomar o papel do outro” (p.26).

Para que a *mensagem* emitida atinja seu objetivo, é necessário um *contexto* (objeto matemático) a que se refere e que seja capaz de ser apreendido pelo destinatário da mensagem. Faz-se necessário ainda nessa comunicação a existência de um *código* (linguagem matemática) que seja total ou parcialmente comum aos membros deste ato comunicativo. Tomaremos a definição de ato comunicativo de Bitti e Zani (1997), na qual o ato comunicativo é a menor unidade capaz de fazer parte de uma troca comunicativa e que uma pessoa pode produzir com uma única e bem definida intenção. No caso das aulas de matemática a intenção é tornar a sala de aula um ambiente propício para a comunicação dessas futuras professoras.

A Comunicação nas Aulas de Matemática

Na educação matemática a comunicação ganha importância quando pensamos na necessidade de transformar a sala de aula em um ambiente democrático no qual todos os participantes deste ambiente tenham "voz", esse aspecto democrático é desenvolvido quando o professor é capaz de "envolver cada um dos alunos no discurso da turma" (NCTM, 1991, p.36). Para que esta democracia aconteça é necessário transformar o paradigma da transmissão, no qual o professor fala e os alunos ouvem no paradigma da comunicação, em que o professor passa a ser o mediador e provocador das discussões que ocorrem em sala de aula.

A comunicação nas aulas de matemática permeia a atividade docente representando um dos elementos importantes do desenvolvimento profissional dos professores (Almeida, 2010; Furlan, 2011; Guerreiro, 2011; Martinho, 2007; Menezes, 2004; Souza, 2014), seu papel, as dificuldades que enfrenta para pôr a comunicação em prática nas salas de aula, ou seja, representa diversos aspectos que estão presentes em suas aulas diariamente.

Neste artigo, a comunicação matemática foi tratada em seu aspecto oral, uma vez que "os alunos devem falar, quer uns com os outros, quer para responder ao professor [...] quando os alunos fazem conjecturas públicas e raciocinam com outros acerca da matemática, as ideias e o conhecimento são desenvolvidos em cooperação" NCTM (2014, p.36). Em Menezes et. *al.* (2014, p. 136) constatamos que "a comunicação é um elemento essencial nas práticas letivas dos professores", então podemos dizer que a comunicação que ocorre entre professores e alunos nas aulas de matemática também é essencial para as práticas letivas dos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, fato que justifica a importância em saber sua opinião sobre o tema comunicação.

Como já foi dito anteriormente, a comunicação é um aspecto decisivo das práticas profissionais dos professores e por isso, faz-se necessária uma abordagem que seja capaz de focar "na qualidade do discurso partilhado de professores e alunos e no modo como os significados matemáticos são interativamente construídos na sala de aula" (Ponte & Serrazina, 2004, p. 58), evidenciando que para a melhoria da audiência dos alunos pela fala dos professores, devemos transformar a comunicação que acontece em sala de aula como uma oportunidade de interação social entre professor e alunos e não como uma mera de transmissão de conteúdos e conhecimento.

Esta compreensão da comunicação como interação social está presente em Menezes et. *al*. (2014), quando ele nos aponta que

> Na perspectiva da comunicação como interação social, o conhecimento matemático emerge de uma prática discursiva que se desenvolve na sala de aula, decorrente de processos coletivos de comunicação e interação entre os indivíduos e a cultura da aula, incluindo as interações do professor com os alunos na e acerca da Matemática. (p. 138)

Ou seja, para que os alunos passem a se interessar pela fala do professor é necessário que ele também participe dos discursos que acontecem em sala de aula, comunicando suas ideias matemáticas, fazendo conjecturas, tirando suas dúvidas coletivamente e formulando soluções a partir destas discussões que ocorrerem em sala de aula com a mediação do professor.

Metodologia

O principal objetivo deste estudo foi identificar a importância dada à comunicação oral nas aulas de matemática por um grupo de futuras professoras para os anos iniciais do ensino fundamental. Dada a natureza do objectivo proposto, se desenvolveu em uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo. Na abordagem qualitativa, o pesquisador está em contato direto com os participantes da pesquisa e os dados que utiliza são essencialmente descritivos. Portanto, a opção pela abordagem qualitativa se deu pela necessidade do contato direto com as participantes da pesquisa (Stake, 2016), alunas de um curso de licenciatura integrada, com o objetivo de identificar a importância dada à comunicação nas aulas de matemática por um grupo de futuras professoras dos anos iniciais do ensino fundamental com base nos seguintes questionamentos: i) o que é comunicação?; ii) como é que a comunicação oral pode ocorrer em sala de aula? e; iii) o que pode contribuir para uma comunicação oral eficaz? Quem decide isso?

Para Minayo, Deslandes e Gomes (2015, p.63), "na pesquisa qualitativa, a *interação* entre o pesquisador e os sujeitos pesquisados é essencial". Enquanto que Bogdan e Biklen (1994) nos explicam que a pesquisa qualitativa apresenta cinco características: i) o pesquisador é o principal instrumento de pesquisa e a fonte de dados é o ambiente natural (escolas, famílias, bairros); ii) a pesquisa qualitativa é descritiva, por isso os dados coletados são em formato de palavras, narrativas; iii) os pesquisadores estão mais interessados no processo do que nos resultados; iv) os pesquisadores qualitativos analisam seus dados de forma indutiva, sem se preocupar com a confirmação de hipóteses; e v) valor do significado na pesquisa qualitativa.

Para Ponte (1994, p. 8) "uma das perspectivas teóricas fundamentais que inspira a investigação qualitativa é a perspectiva interpretativa", uma vez que a atividade humana é uma experiência social. Assim, a finalidade da análise e interpretação dos dados na pesquisa qualitativa é "a exploração do conjunto de opiniões e representações sociais sobre o tema que pretende investigar" (Minayo, Deslandes, & Gomes, 2015, p.79).

De acordo com Erickson (1989), o objeto da investigação interpretativa é a ação dos indivíduos e não o seu comportamento. Na investigação interpretativa com foco na educação, o pesquisador busca compreender as formas pelas quais professores e alunos, em ações conjuntas, constituem ambientes um para o outro. O pesquisador de campo concentra a sua observação neste aspecto quando observa uma aula e faz seus registros, assumindo que os fatos observados são significados em ação, sendo ao mesmo tempo o ambiente de aprendizagem e o conteúdo para aprender. Dessa forma, no paradigma interpretativo em sala de aula, o pesquisador irá investigar como as opções e as ações de cada um dos membros constituem um ambiente de aprendizagem.

Os dados foram coletados em uma turma da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemáticas e Linguagens do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (LIECML/ IEMCI/ UFPA), na ocasião a turma estava no 4.º (quarto) semestre letivo. Como motivação foi realizado um debate durante uma aula com o objetivo de identificar o que as alunas pensavam sobre o tema em questão (importância dada à comunicação oral em sala de aula). Estas se dividiram em dois grupos, de acordo com as afinidades manifestadas num questionário aberto cujos resultados foram analisados por meio da técnica de análise de conteúdo, ficando um grupo com 08 (oito) e outro com 07 (sete) participantes. Depois fez-se uma discussão oral aprofundada levada a cabo pelos dois grupos de futuras professoras, tendo como questões orientadoras já anunciadas anteriormente e fazendo a respetiva análise de conteúdo. Minayo, Deslandes e Gomes (2015) nos explicam que "através da análise de conteúdo, podemos caminhar na descoberta do que está por trás dos conteúdos manifestos, indo além das aparências do que está sendo comunicado" (p.84).

As Perspectivas das Futuras Professoras dos Anos Iniciais

As perspectivas das futuras professoras dos Anos Iniciais são oriundas de um debate com as futuras professoras sobre o tema comunicação, estas foram divididas em dois grupos, um com 08 (oito) participantes e outro com 07 (sete) participantes a divisão dos grupos foi realizada por afinidades.

As discussões aconteceram em dois momentos: no primeiro, os grupos tiveram um tempo para discutirem individualmente, fundamentarem seus argumentos e perspectivas sobre comunicação conforme as questões propostas e no segundo os argumentos de cada grupo foram socializados em plenária.

Nos quadros que se seguem, apresentamos uma transcrição da síntese das principais ideias veiculadas por ocasião do debate realizado em sala de aula, durante a formação inicial dessas futuras professoras, participantes da investigação.

Quadro 1 – Transcrição: O que é comunicação? (Acervo da Pesquisadora (2016))

Grupo I	Grupo II
"Comunicar é falar, transmitir uma mensagem (informação, conhecimento, etc.) a algo ou alguém. É uma forma de instruir, divergir, interagir, contribuir e capacitar para a vida. É o ato de transmitir o que se pensa, seja de forma oral, em linguagem verbal ou não-verbal"	*"É a interação entre o professor e aluno com a finalidade de conduzir uma boa convivência em sala de aula. Porém uma comunicação bem clara não deve ser imposta com autoritarismo"*

Verificamos uma tendência à formalidade na descrição do primeiro grupo, uma vez que foram buscar uma definição daquilo que é comunicação. Chamou nossa atenção a presença dos termos "*divergir", "interagir" e "contribuir"* citados pelo grupo I, todos esses elementos estão presentes no ambiente de sala de aula, porém na discussão as divergências foram encaradas de forma negativa pelas futuras professoras.

Na perspectiva do segundo grupo, a comunicação tem uma abordagem mais informal, porém não menos importante, já que o grupo privilegia a comunicação como um fator de boa convivência entre professores e alunos.

Quadro 2 – Transcrição: Como é que a comunicação oral pode ocorrer em sala de aula? (Acervo da pesquisadora (2016))

Grupo I	Grupo II
"Ela pode ser estabelecida de diversas maneiras: através da leitura, conversas, jogos, desenhos, figuras, mímicas, gestos, brincadeiras, músicas, histórias, etc. Na relação entre professor/ aluno e aluno/ aluno, por meio da oralidade ou através da troca de conhecimento, a forma em que o professor avalia seu aluno"	*"Através do diálogo, respeitando o saber de cada criança, mas sempre tendo em mente que o professor deve ser o mediador conduzindo o aluno a refletir sobre todos os aspectos, fazendo-o perceber que essa comunicação é diferente de brincadeiras e sim para que o aluno perceba que através dela adquirimos o saber nas matérias do currículo e de como perceber o mundo mediante seu quotidiano. Essa comunicação poderá ser feita dentro da sala de aula, através de debate como jogos, gincanas, atividades que reúnam todos os alunos para que possam tomar decisões entre si, percebendo os erros para assim acertarem juntos"*

Para esse questionamento os dois grupos concebem as diversas formas de comunicação que estão presentes em sala de aula (gestual, oral, escrita, etc.), porém ambos privilegiam o aspecto dialógico da comunicação como forma de manter a interação entre os participantes do ambiente de sala de aula.

O grupo II mostra a necessidade de o professor assumir o papel de mediador da comunicação em sala de aula, conduzindo os alunos na tomada de decisão com o objetivo de construir o conhecimento matemático.

Vamos conhecer agora, qual o pensamento das participantes desta pesquisa sobre aspectos que facilitam e/ou dificultam a comunicação:

Quadro 3 – Transcrição O que pode contribuir para uma comunicação oral eficaz? Quem decide isso? (Acervo da pesquisadora (2016))

Grupo I	Grupo II
"A comunicação em sala de aula, para que o professor conheça seu aluno, seus conhecimentos prévios e assim, pode-se trabalhar de uma forma a alcançar a todos. Pode ser boa quando é realizada com respeito, não constrangendo e quando se sabe lidar com as diferenças. A	*"Depende do professor, pois suas metodologias irão facilitar ou não esta comunicação"*

maneira que ela é trabalhada e aceita pelos alunos, podendo ser uma linha tênue entre o que pode trazer diversos benefícios e da mesma forma, malefícios. O momento em que ela é posta em prática, pois o professor deve identificar se sua comunicação em sala está tendo êxito. Quando essa comunicação é imposta é ruim, agora se for algo natural é bom, só depende do professor saber como deve se comunicar. Ruim quando não se sabe o momento de ouvir e de falar, quando alguns alunos que se negam participar de socializações, por não se sentirem à vontade. É ruim quando deixa dúvidas. A decisão é do ouvinte, que são os alunos, pois uns discordam ou não"	

Para as futuras professoras, a boa comunicação na sala de aula depende unicamente dos esforços do professor em manter um ambiente harmonioso em sala de aula. O primeiro grupo defende a perspetiva de que o professor deve verificar se a sua comunicação está sendo exitosa ou não e pontua, também, o saber ouvir como um aspecto que quase nunca é privilegiado quando o assunto é a comunicação. As participantes do grupo I abordam a não participação dos alunos em sala de aula como um aspecto que dificulta a comunicação.

Na discussão sobre a questão as futuras professoras afirmaram que para transformar os diálogos em comunicação de qualidade o professor deve encontrar formas de estimular a fala dos alunos durante as aulas.

Estimular a fala dos alunos se torna um desafio, uma vez que queremos que as conversas sejam baseadas em reflexões cheias de significados e baseadas em assuntos matemáticos. Por isso, esse fazer falar deve se realizar no sentido de agregar valor ao assunto matemático abordado através de discussões e interações com o propósito de favorecer o aprendizado dos alunos e, consequentemente, a melhoria dos resultados.

Considerações Finais

O objetivo deste artigo foi identificar a importância dada à comunicação nas aulas de matemática por um grupo de futuras professoras dos anos inicias através das seguintes questões orientadoras: i) O que é comunicação?; ii) Como é que a comunicação oral pode ocorrer em sala de aula? e; iii) O que pode contribuir para uma comunicação oral eficaz? Quem decide isso?

Quando responderam ao primeiro questionamento: **i) o que é comunicação?** Percebemos que apesar de não ser igual, existe uma forte aproximação com a definição que pode ser encontrada no dicionário. Quanto a presença das palavras "*divergir, "interagir" e "contribuir",* podemos afirmar que se centra em um paradigma de comunicação, onde o diálogo é fundamental para que as interações e as argumentações aconteçam, privilegiando a divergência de opiniões como instrumento capaz de fomentar a comunicação em sala de aula e construir significados. Com efeito, em

NCTM (1991) verificamos a importância de envolver os alunos em um discurso coletivo, transformando a sala de aula em um ambiente democrático.

As futuras professoras de matemática, de alguma forma, assumiram que a sala de aula é um ambiente no qual muitas vezes se verificam opiniões diferentes sobre um mesmo tema/ conteúdo, especialmente quando se trata especificamente das aulas de matemática. Daí a importância dada por estas futuras professoras que as diferentes opiniões sejam privilegiadas como uma forma de gerar uma discussão entre os alunos, incentivando a argumentação e a negociação de significados. Ao privilegiar as opiniões diferentes, nos deparamos com o proposto em NCTM (2014), neste documento verificamos que em relação ao aspecto oral da comunicação matemática, os alunos devem falar e fazer conjecturas entre eles e como o professor, como forma de construir ideias matemáticas.

Ao falar em interações, percebemos que o grupo não considerou outros dois tipos de interações que estão presentes em sala de aula (aluno/aluno e aluno/professor). Para Menezes et. *al* (2014), a interação social é um aspecto fundamental da comunicação social, visto que por meio das interações, alunos e professores trocam ideias matemáticas como uma forma de construir o conhecimento. Assim notamos que o grupo ainda tem uma perspectiva de comunicação no qual o professor é o detentor do conhecimento e a comunicação é centrada no professor. Para as participantes pesquisadas assumem a comunicação como algo centrado na transmissão de conteúdos, e neste modelo de comunicação a aula está focada no professor que conduz todo o processo de ensino e aprendizagem.

Em relação ao segundo questionamento: **ii) como é que a comunicação oral pode ocorrer em sala de aula?** Para as futuras professoras a sala de aula deve ser um ambiente rico em conversas com significado para professores e alunos, um ambiente em que todos tenham voz e que as conversas se transformem em diálogo e comunicação de ideias matemáticas. Assim, as participantes acabam por encarar o professor como uma pessoa capaz de refletir e conceber, em suas aulas, a comunicação como ferramenta capaz de privilegiar a oralidade, não como prática discursiva do professor, mas como parte de um processo dinâmico no ensino e na aprendizagem de matemática. Em Ponte e Serrazina (2004), identificamos a comunicação matemática como um aspecto das práticas profissionais dos professores. Assim, a comunicação matemática é usada com a intenção de aumentar a atenção dos alunos na fala dos professores.

Finalizamos, com as considerações relativas ao terceiro questionamento: **iii) o que pode contribuir para uma comunicação oral eficaz? Quem decide isso?** As futuras professoras consideram a boa convivência como um aspecto importante na condução da comunicação em sala de aula. Assim, faz-se necessária uma convivência harmoniosa em sala de aula, onde todos saibam tanto o melhor momento de falar e expor seus argumentos quanto o momento de ouvir as ponderações do grupo (professor e alunos). Bitti e Zani (1997) ao definirem os elementos da comunicação verbal, nos ensinam que "cada um dos participantes tem a possibilidade de tomar o papel do outro" (p. 26). Dessa forma, entendemos que o diálogo que ocorre em sala de aula precisa ser bilateral, ou seja, cada um dos participantes deve saber o seu momento de falar e de ouvir.

Para que a comunicação seja eficiente, as futuras professoras consideram que a responsabilidade está na figura do professor e que depende do tipo de relação que ele desenvolve com seus alunos. Por se tratar da comunicação em sala de aula, onde todos podem e devem participar de forma igualitária e interativa, as participantes entendem a comunicação como uma maneira de promover a aprendizagem onde se debate e compartilha informações com o propósito de construir o conhecimento matemático de forma coletiva.

Para as futuras professoras, a comunicação nas aulas de matemática é um aspecto importante, visto que para as mesmas a comunicação é um processo de interação entre professor e alunos. Para Nacarato (2012) "a comunicação oral permite maior interação entre os sujeitos (professor e alunos e alunos entre si)" (p.11). Desta forma, a sala de aula, na perspectiva dessas participantes, deve ser um ambiente onde todos possam expor as suas opiniões. E, para que a comunicação seja eficaz, é preciso haver uma atuação eficiente do professor, de forma a manter o ambiente harmonioso entre os participantes da sala de aula, onde a comunicação possa ocorrer de forma natural

.

Referências

Almeida, A. L. (2010). *Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio*. Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto.

Bitti, P. R., & Zani, B. (1997). *A comunicação como processo social* (Coleção temas de sociologia). Lisboa: Editora Estampa.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. In M. Wittrok (Ed.), *La investigación de la enseñanza II. Métodos cualitativos de observación* (pp. 203-47). Barcelona: Paidós MEC.

Furlan, J. (2011). *Processos de Avaliação na Resolução de Problemas em Estocástica*. Mestrado em Educação. Universidade São Francisco.

Freixo, M. J. V. (2011). *Teorias e Modelos de Comunicação*. (2ª ed). Lisboa: Instituto Piaget.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Martinho, M. H. (2007). *A Comunicação na Sala de Aula de Matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar matemática: contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Menezes, L. & Ferreira, R. T.& Martinho, M. H. & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135-161). Lisboa: IEUL.

Minayo, M. C. S., Deslandes, S. F., & Gomes, R. (2015). *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. 30ª Ed. Petrópolis, RJ: Vozes.

Nacarato, A. M.(2012). *A comunicação oral nas aulas de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*. *Revista Eletrônica de Educação, 6*(1), 9 -26.

NCTM (1991). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (tradução portuguesa em 1994). Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2014). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática* (tradução portuguesa em 2017). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1994). *O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática*. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Quadrante, *13*(2), 51-74.

Stake, R. E. (2016). *A Arte Da Investigação Com Estudo De Caso*. (4ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stubbs, M. (1987). *Linguagem, Escolas e Aulas*. Lisboa : Editora Livros Horizonte.

O QUESTIONAMENTO INVESTIGATIVO NA AULA DE MATEMÁTICA E NA INTEGRAÇÃO DAS STEM

Maria Cristina Costa

Instituto Politécnico de Tomar & UIED - Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal*

ccosta@ipt.pt

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Portugal & UIED - Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento, Universidade NOVA de Lisboa, Portugal*

amdd@fct.unl.pt

*****This work is supported by national funds through FCT - Foundation for Science and Technology, I. P., in the context of the project UID/CED/02861/2016

Resumo: Nos últimos anos têm aumentado os apelos para a promoção da interdisciplinaridade, nomeadamente a integração das STEM, para preparar melhor os estudantes para os desafios cada vez mais exigentes das sociedades atuais. Além disso, são cada vez mais os estudos que defendem a introdução de novas estratégias de ensino que tornem a aprendizagem mais significativa. Neste sentido, o questionamento investigativo é uma abordagem considerada eficaz para potenciar a aprendizagem dos estudantes, ao ponto de fazer parte do currículo de vários países. No entanto, são inúmeras as referências sobre as dificuldades relacionadas quer com a promoção da interdisciplinaridade quer relativamente à implementação do questionamento investigativo. Este estudo pretende contribuir para a literatura apresentando alguns exemplos de professores que desenvolveram tarefas de matemática e tarefas interdisciplinares que foram implementadas recorrendo ao questionamento investigativo. Com uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, os dados recolhidos consistem em observação presencial e relatórios escritos por professores, no âmbito de um programa de formação contínua. Com base em estudos de caso de alguns professores que participaram no referido programa verificamos que os mesmos conseguem inovar as suas práticas desenvolvendo as suas próprias tarefas e implementando-as recorrendo ao questionamento investigativo.

Palavras-chave: Educação matemática; questionamento investigativo; interdisciplinaridade; desenvolvimento profissional; ensino básico.

Introdução

Nos últimos anos têm aumentado os apelos para a promoção da interdisciplinaridade, nomeadamente a integração das STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), para motivar os estudantes para estas áreas e para os preparar melhor para os desafios cada vez mais exigentes das sociedades atuais (Baker & Galanti, 2017; Costa & Domingos, 2018a, 2018b).

Além disso, são cada vez mais os estudos que defendem a introdução de estratégias de ensino que tornem a aprendizagem mais significativa. Neste sentido, o questionamento investigativo (conhecido internacionalmente como *inquiry*) é uma abordagem considerada eficaz para potenciar a aprendizagem dos estudantes (Krogh & Morehouse, 2014; Rocard et al., 2007), ao ponto de fazer parte do currículo de vários países (Murphy, Smith, Varley, & Razı, 2015; Jocz, Zhai, & Tan, 2014).

Em Portugal, a interdisciplinaridade e o questionamento investigativo (QI) também estão patentes nos princípios orientadores da organização curricular e programas do Ensino Básico. No primeiro Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB), a Matemática e o Estudo do Meio são áreas disciplinares de frequência obrigatória. No programa de Estudo do Meio (ME, s.d.) é referido que este "está na intersecção de todas as outras áreas do programa, podendo ser motivo e motor para a aprendizagem nessas áreas." (p. 101). As indicações metodológicas são que: "A curiosidade infantil pelos fenómenos naturais deve ser estimulada e os alunos encorajados a levantar questões e a procurar respostas para elas através de experiências e pesquisas simples" (p. 115). Os alunos devem, ainda, usar instrumentos de observação e medida, sendo importante que façam registos daquilo que observam. No que diz respeito à Matemática (ME, 2013), a análise do mundo natural é assinalada como uma das três finalidades para o seu ensino, sendo referido que esta "é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia (…)" (p. 2) e "revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico" (p. 2).

No entanto, apesar das recomendações acima descritas, são inúmeras as referências sobre as dificuldades relacionadas com a promoção da interdisciplinaridade (Baxter, Ruzicka, Beghetto & Livelybrooks, 2014; Ríordáin, Johnston, & Walshe, 2016), bem como relativamente à implementação do QI, quer a nível internacional (Rocard et al., 2007; PRIMAS; 2011) quer a nível nacional (Varela & Costa, 2015). De facto, muitos estudos continuam a referir que os professores fazem um ensino expositivo, centrado nos manuais, sem apelar à experimentação e à curiosidade natural das crianças, nos primeiros anos de escolaridade (Afonso, Neves e Morais, 2005; Carvalho, Silva, Lima, Coquet & Clement, 2004; Löfgren, Schoultz, Hultman, & Björklund, 2013; Osborne, & Dillon, 2008).

Neste artigo, pretendemos contrariar esta tendência mostrando que é possível mudar o paradigma e levar os professores a inovarem as suas práticas, de modo a passarem de um ensino tradicional, maioritariamente dedutivo (Rocard et al., 2007), para um ensino construtivista mais centrado nos alunos, como é o caso das abordagens com o QI (PRIMAS, 2011).

Este estudo resulta de um projeto mais amplo (Costa & Domingos, 2018b) que desde 2015, em parceria com um centro de formação, inclui Programas de Desenvolvimento Profissional (PDP) de professores que envolvem ações de formação acreditadas, e visitas às escolas dos professores em formação para os apoiar na inovação das suas práticas. A inscrição dos professores neste programa é voluntária. Neste artigo, a principal questão que queremos investigar é: Como os professores do 1.º CEB que participaram no PDP implementaram tarefas de matemática e tarefas interdisciplinares, em aula, recorrendo ao questionamento investigativo?

Procuramos responder a esta questão apresentando estudos de caso de duas professoras que participaram no referido programa e desenvolveram tarefas investigativas consentâneas com as recomendações dos programas curriculares.

Enquadramento teórico

O conhecido relatório Rocard et al. (2007) identifica um declínio alarmante no interesse dos estudantes pelas ciências e matemática, o que irá comprometer a capacidade de inovação da Europa no futuro, uma vez que irá afetar a necessidade crescente de profissionais relacionados com essas áreas. Em Portugal também se verifica esta tendência, uma vez que apenas 35% dos alunos inscritos no Ensino Secundário, nos anos letivos 2011/2012 e 2012/2013, se encontravam matriculados em cursos de Ciências e Tecnologia, de acordo com os dados da Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência [DGEEC] (2014).

A falta de profissionais nas áreas das STEM deve ser combatida com uma intervenção ao nível dos primeiros anos de escolaridade de modo a motivar os estudantes para estas áreas (DeJarnette, 2012). Neste sentido, vários relatórios (Osborne & Dillon, 2008; PRIMAS, 2011; Rocard et al., 2007) referem que a implementação de atividades experimentais relacionadas com STEM, nos primeiros anos de escolaridade, tem um impacto positivo nos estudantes, despertando o seu interesse por estas áreas. Os mesmos relatórios recomendam a introdução de novas estratégias de ensino que promovam a aprendizagem dos estudantes na área das STEM, como é o caso do QI. De acordo com Artigue e Blomhøj (2013), "a pedagogia baseada no QI pode ser definida como uma forma de ensinar na qual os estudantes são convidados a trabalhar de forma semelhante à qual os matemáticos e cientistas trabalham" (p. 797).

Não há um consenso relativamente à definição de QI, mas teremos como base os relatórios Rocard et al. (2007) e PRIMAS (2011), onde é referido que nesta abordagem, o aluno é conduzido através de questões colocadas pelo professor, questões que levam o aluno a investigar, refletir, experimentar, voltar a refletir e, assim sucessivamente, com o objetivo de finalmente tirar conclusões. Estas conclusões devem, ainda, ser partilhadas e discutidas com a turma. Dos vários aspetos, recomendados como essenciais pelo National Research Council (NRC, 2000), relativamente ao QI em aula, destacamos os seguintes: os estudantes são envolvidos em tarefas através de questões cientificamente orientadas; a partir das evidências desenvolvem e avaliam possíveis respostas às questões e levantam novas questões no sentido de finalmente tirarem conclusões comunicando os resultados aos pares.

Segundo o relatório PRIMAS (2011), o QI não é completamente novo, uma vez que as abordagens construtivistas já mostraram que a aprendizagem dos estudantes é mais significativa, se estes tiverem oportunidade de explorar situações, de se envolverem ativamente em aula, de monitorizar a sua própria aprendizagem, em vez de apenas assumirem uma postura passiva, centrada no professor. No entanto, e apesar de o QI fazer parte do currículo em vários países (Jocz et al., 2014; Murphy et al., 2015) têm sido várias as dificuldades na sua implementação em aula, fazendo com que esta não seja, ainda, uma prática habitual entre os professores, principalmente ao nível do 1.º CEB (Rocard et al., 2007; Varela & Costa, 2015).

O questionamento investigativo no ensino da matemática e das ciências

São cada vez mais as recomendações para a introdução de abordagens de ensino mais centradas no aluno e promotoras da aprendizagem significativa (Ausubel, 2012). De acordo com este autor, é preciso ter em conta o conteúdo e a estrutura cognitiva do estudante, para promover a aprendizagem significativa. Cabe ao professor adequar o ensino de modo a facilitar a interação com o conhecimento prévio do aluno, de forma a potenciar a aprendizagem do mesmo.

Neste sentido, o QI é considerado uma pedagogia eficaz para promover a aprendizagem significativa, uma vez que desenvolve a criatividade e o espírito crítico dos estudantes (Murphy et al., 2015; PRIMAS, 2011; Rocard et al., 2007). No relatório Rocard, esta abordagem é chamada de "*Inquiry-based Science Education*" e a sigla IBSE aparece frequentemente na literatura.

Quanto ao QI aplicado à educação matemática, o mesmo relatório refere a aprendizagem focada nos problemas (*Problem Based Learning*). Deste ponto de vista, o problema é colocado de forma a que as crianças precisem de obter novos conhecimentos para os conseguirem resolver. Na literatura internacional, a sigla IBME (*Inquiry-based Mathematics Education*) tem vindo a aparecer com mais frequência, principalmente nos últimos anos (Artigue & Blomhøj, 2013).

O papel dos professores

Krogh e Morehouse (2014) referem que a aprendizagem deve ser feita através de um constante *inquiry*, acompanhado do estímulo e intervenção dos adultos. Estas autoras defendem, ainda, que o modelo de aprendizagem a que chamam de *inquiry-based, integrated learning* deve ser estendido às escolas pois conduz a um desenvolvimento mais eficaz na aprendizagem dos alunos. Neste sentido, as mesmas autoras salientam o papel dos professores neste processo:

> Se os professores conseguirem abrir as mentes das crianças para estas adquirirem o conhecimento através do *inquiry* (…) de modo a permitir que as mesmas apliquem o seu entendimento de forma significativa, produtiva, e de forma relevante, (…) então os professores estarão a oferecer aos estudantes um presente de valor inestimável. (…) o desembrulhar deste presente demora tempo. Também exige esforço e dedicação por parte do professor para ajudar (…) (p. 354).

A citação anterior refere um aspeto incontornável quando se fala na aprendizagem dos alunos: o papel dos professores. Neste sentido, o relatório Rocard et al. (2007) conclui que os professores "são a pedra basilar de qualquer processo de renovação da educação científica" (p. 11) e que "ser parte de uma rede permite-lhes melhorar a qualidade do seu ensino e motiva-os" (p. 3). O já referido relatório PRIMAS também defende a implementação do QI na matemática e nas ciências através do desenvolvimento profissional dos professores. Também Artigue e Blomhøj (2013) referem que o papel do

professor é crucial e que lhe compete conduzir o processo do QI com recurso a tarefas e lições cuidadosamente desenhadas.
Löfgren, Schoultz, Hultman e Björklund (2013) referem que as dificuldades de implementação desta pedagogia relacionam-se com a concretização de explicações científicas ao nível do ensino básico: “Estas capacidades não são automaticamente atingidas com recurso a materiais baseados no QI – precisam de ser treinadas” (p. 482). Neste sentido, Murphy et al. (2015) recomendam a implementação de um PDP de professores, que lhes dê oportunidade de desenvolver o seu conhecimento concetual e pedagógico em abordagens baseadas no QI. Os mesmos autores referem que para implementar um currículo no ensino básico com a sua máxima eficácia, é fundamental que os professores tenham confiança e competência na aplicação destas abordagens. Além disso, Afonso et al. (2005) recomendam que sejam dadas oportunidades aos professores de trabalhar e experimentar os conteúdos e tarefas, que se espera que venham a desenvolver em aula, num ambiente de reflexão onde se sintam apoiados. Neste sentido, Artigue e Blomhøj (2013) defendem ser essencial procurar um desenvolvimento profissional que apoie os professores enquanto estes experimentam e desenvolvem a sua própria prática de QI no ensino da matemática.
Vários autores defendem, ainda, a importância de apoiar os professores sobre como ensinar, de forma a que estes adquiram conhecimentos pedagógicos e de conteúdo para inovarem as suas práticas (Capps & Crawford, 2013; Zehetmeier, Andreitz, Erlacher, & Rauch, 2015). Neste sentido, Costa e Domingos (2017) também desenvolveram um estudo preliminar, onde verificaram a importância de desenvolver nos professores o conhecimento de conteúdo sobre as matérias a ensinar, para promover o sucesso da implementação de atividades experimentais interdisciplinares, em aula. Os mesmos autores concluem haver necessidade de continuar a investir no seu desenvolvimento profissional, de modo a aumentar a confiança e autonomia dos professores para inovarem as suas práticas, sendo fundamental desenvolver um trabalho colaborativo de modo a apoiá-los neste processo.
Esta investigação alinha com os pontos de vista acabados de descrever por também considerar importante intervir junto dos professores. Nesse sentido, foram criadas ações de formação acreditadas, com o objetivo de munir os professores de conhecimento de conteúdo e pedagógico relacionado com as STEM, de modo a motivá-los e apoiá-los na criação e implementação de tarefas recorrendo ao QI em aula.

Metodologia

Neste artigo, usamos uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa recorrendo a estudos de caso (Cohen, Lawrence, & Keith, 2007). Um estudo de caso consiste numa investigação empírica que observa “fenómenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real” (Yin, 2001, p. 19), podendo permitir uma “generalização dos resultados” obtidos (Yin, 2001, p. 53).

Neste sentido, iremos considerar o estudo de caso de duas professoras que participaram no referido PDP, que ilustram a forma como foi usado o QI para implementar tarefas em aula. Para preservar o anonimato das mesmas os nomes apresentados são fictícios. A professora Luísa, com 56 anos de idade, 37 anos de serviço e responsável por uma turma do 3.º ano do 1.º CEB com 25 alunos, participou no PDP no ano letivo 2015/2016. Este artigo evidencia o trabalho desenvolvido no início do ano letivo seguinte (2016/2017), no qual a professora implementou tarefas essencialmente de matemática centradas nos alunos, desenhadas por ela, durante uma manhã (cerca de três horas). A professora Josefa (42 anos de idade, 18 anos de serviço, turma com alunos do

3.º e 4.º ano) participou no PDP no ano letivo 2016/2017 e escolheu implementar tarefas interdisciplinares relacionadas com a eletricidade. Das várias sessões realizadas pela professora iremos evidenciar uma das sessões onde a professora dinamizou tarefas interdisciplinares que foram conduzidas recorrendo ao QI.

A recolha de dados consiste em observação participante, entrevistas semiestruturadas, *focus group* e relatórios escritos pelas professoras no decorrer e no final do PDP. A primeira autora deste artigo é observadora participante, sendo responsável por tirar fotografias e pela escrita dos diários. O segundo autor é responsável pela triangulação e validação de toda a informação envolvida. A observação participante decorre essencialmente nos *workshops* da formação presencial com os professores e nas visitas às respetivas aulas.

Análise e discussão dos dados

Nesta seção, começamos por analisar o caso da professora Luísa que trabalhou a matemática a partir de tarefas centradas nos alunos e na vida real. De seguida, apresentamos a professora Josefa que trabalhou a matemática, a partir de atividades experimentais relacionadas com a eletricidade. Em ambos os casos, procuramos evidenciar como as professoras usaram o QI na implementação das tarefas com os respetivos alunos.

A professora Luísa (anos letivos 2015/2016 e 2016/2017)

Costa e Domingos (2017) apresentam o caso da professora Luísa, a qual revelou algumas dificuldades em trabalhar a eletricidade no ano letivo 2015/2016. Estas dificuldades estavam essencialmente relacionadas com o conhecimento de conteúdo especializado: “Não sinto confiança para ensinar estes conteúdos porque não domino estes conceitos (…)” (*Focus group*, junho 2016). No entanto, ela reconheceu a importância de realizar atividades centradas nos alunos e, com o incentivo dos formadores, optou por desenvolver tarefas essencialmente de matemática, as quais se encontram descritas em Costa e Domingos (2017).

No ano letivo 2016/2017, e com os alunos no 4.º ano, a professora retomou a atividade de medir as alturas dos seus alunos, com o objetivo de aprofundar a abordagem trabalhada nos *workshops* de formação e de trabalhar mais conteúdos de matemática a partir desta atividade.

A sessão teve início com uma questão desafio tal como recomendado nas abordagens com QI:

> Professora: Hoje vamos ver quem cresceu mais do ano passado para este ano. Como é que vamos descobrir?
>
> Aluno1: Temos que medir as alturas de todos.
>
> Professora: E como é que vamos medir?
>
> Aluno1: Precisamos da fita métrica. Fazemos como no ano passado.

A questão desafio foi facilmente compreendida pelos alunos porque se lembraram que já tinham feito medições das respetivas alturas no ano anterior. Desta forma, a professora passou logo à ação pedindo aos alunos para começarem as medições. Cada aluno dirigiu-se à fita métrica com a ajuda de um colega que marcou com uma régua a respetiva altura na fita métrica (Figura 1). Depois de verificar quanto media, regressou ao seu lugar para registar a sua altura e responder às questões da ficha preparada para o efeito.

Figura 1 – Medir e registar a altura
Fonte: Observação presencial (fotos da primeira autora)

O seguinte excerto de um diálogo ilustra a forma como a professora ajudou a Ana (nome fictício) a registar a sua altura.

> Professora: Vais ter que tirar as botas! Quanto medes?
>
> A aluna contrariada descalça as botas e encosta-se à fita métrica.
>
> Professora: Quanto medes?
>
> Ana: 132 cm. Mas oh professora … porque é que tive que tirar as botas?
>
> Professora: Calça lá as botas e vai-te medir outra vez. [Pausa] Quanto medes agora?
>
> Ana: 138 cm.
>
> Professora: É a mesma medida? Cresceste agora?
>
> Ana: Não!
>
> Professora: Então donde vem a diferença?
>
> Ana: Ah!!! Já percebi! … é por causa dos saltos das botas.

Este diálogo mostra que a professora conduziu a aluna de forma a ela própria concluir por que motivo ela tinha de tirar as botas para recolher a medida correta da sua altura. Este exemplo está relacionado com a importância da estrutura das interações dos diálogos entre o professor e o estudante (Artigue & Blomhøj, 2013).

Enquanto se faziam os registos, a professora pediu aos alunos para irem respondendo às questões da ficha (Figura 2). Depois de terminadas as medições, a professora disse: “Falta descobrir quem é o aluno mais alto da turma para o poderem desenhar. Se não soubermos as alturas de todos não descobrimos quem é". Posto isto, a professora registou no quadro as informações fornecidas pelos alunos (Figura 2).

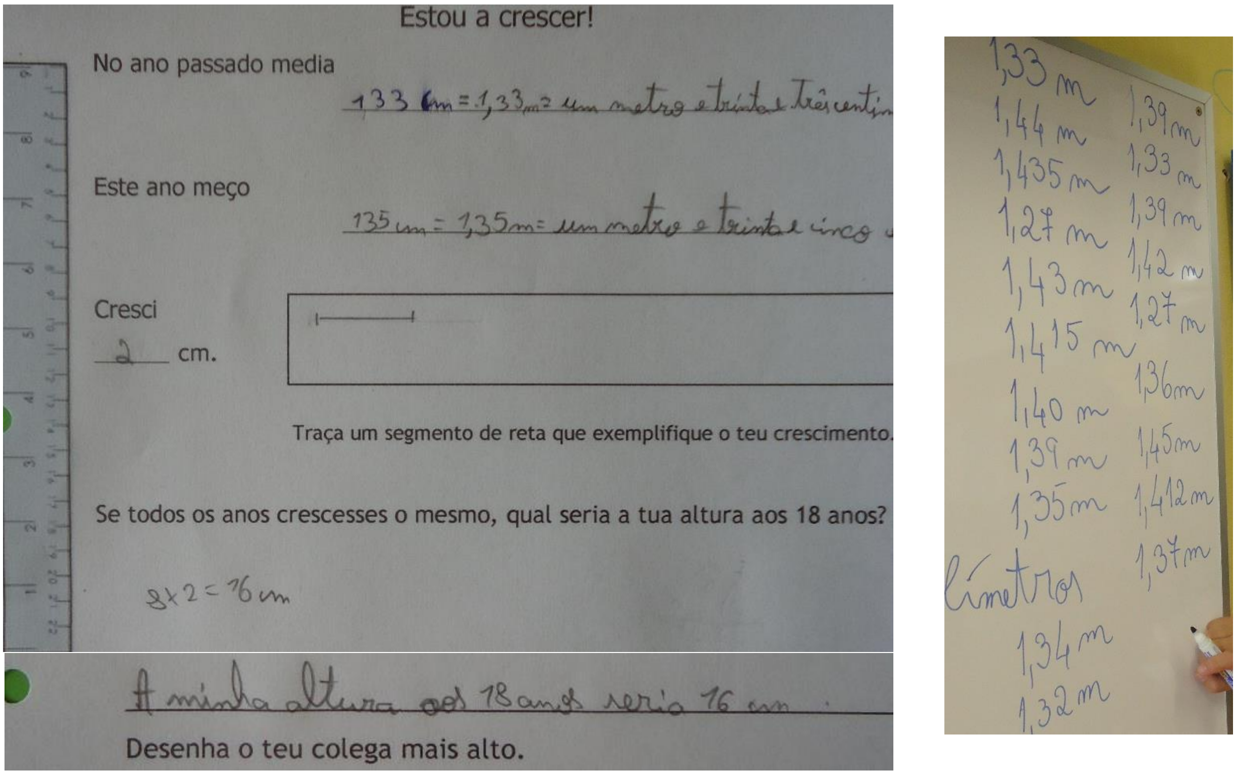


Figura 2 – Excerto da ficha proposta pela professora e registos das alturas de todos alunos
Fonte: Observação presencial (fotos da primeira autora)

Uma das alunas era nova na turma e não sabia a medida da sua altura no ano letivo passado.

> Professora: Como é que vamos resolver este problema?
>
> Como não obteve resposta, continuou:
>
> Professora: Vamos atribuir-lhe um crescimento ao calhas? Vamos atribuir-lhe o maior crescimento da turma? Vamos atribuir-lhe o menor crescimento da turma?

Por fim, após alguma discussão com a turma, lá concluíram que o melhor era atribuir o valor médio do crescimento da turma, cujo cálculo foi o desafio seguinte. Enquanto a professora conduz a discussão certifica-se se os alunos estão a resolver bem as tarefas. Quando alguém tem dúvidas ou não interpretou bem o problema manda ao quadro para expor as dúvidas à turma e de forma a resolverem o problema em conjunto. Este é mais um exemplo identificado por Artigue e Blomhøj (2013) que destacam a interação entre o professor e os estudantes e entre os próprios estudantes.

A determinada altura, a professora manifestou-se muito surpreendida com a questão relacionada com o traçado de um segmento. Ora, muitos alunos deram uma resposta semelhante à indicada na figura 3.

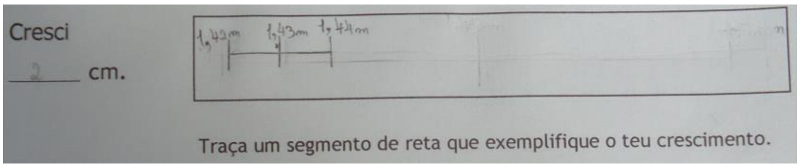


Figura 3 – Resolução do aluno
Fonte: Observação presencial (fotos da primeira autora)

Professora: Agora é que eu estou baralhada com a minha turma! O que é um segmento de reta?

Após alguma discussão manda o Tiago ao quadro representar o seu "segmento".

Professora: O que é que andaste a fazer Tiago?! Mas, afinal o que é que traçaste?

Tiago: Um segmento, professora.

Professora: Não, Tiago! Isso não é um segmento. São dois segmentos! Traça lá um segmento. Turma, ajudem o Tiago a traçar um segmento!

Mais uma vez com uma discussão que envolveu toda a turma, finalmente perceberam como traçar um segmento de reta. Na entrevista semiestruturada, após esta aula, a professora voltou a manifestar a sua surpresa com a confusão dos seus alunos relativamente ao conceito de segmento. "Não é possível! Eu trabalhei muito bem a geometria e os meus alunos nunca se enganaram, antes, a traçar segmentos!" Após alguma discussão lá se concluiu que uma coisa é traçar segmentos numa aula destinada a esse tema, outra coisa muito diferente é traçar num contexto de medições onde sugestionados pela régua e fora do contexto habitual confundiram o conceito de segmento. Este é mais um facto que sugere a importância de colocar os alunos a pensar "fora da caixa". É habitual os alunos resolverem corretamente os exercícios no contexto habitual e, noutro contexto, não conseguirem fazer a ligação com conhecimentos anteriormente adquiridos.

A professora Luísa conseguiu propor e implementar tarefas baseadas em dados da vida real e centradas nos seus alunos, explorando o seu espírito investigativo e propondo questões cuja resolução envolve a matemática. Quando necessário, a professora conduziu os alunos com o objetivo de estes chegarem às suas próprias conclusões. Além disso, promoveu a cooperação entre os alunos lançando desafios à turma para em conjunto resolverem os problemas, tal como recomendado na literatura (Artigue & Blomhøj, 2013).

A professora Josefa (ano letivo 2016/2017)

A professora Josefa desenvolveu atividades relacionadas com a eletricidade, tendo dedicado várias aulas a este tema. Neste artigo, destacamos parte de uma dessas aulas onde foi trabalhada a matemática a par com a eletricidade. Nesta aula, após introduzir pilhas biológicas (frutas ou legumes), a professora pediu para medirem e registarem a diferença de potencial (d.p.) das várias pilhas usadas, recorrendo a multímetros (Figura 4).

Apresentamos de seguida um excerto de um diálogo que reflete a forma como algumas das tarefas foram conduzidas:

Professora:	Qual é a d.p. da laranja?
Aluno:	É 0,51 volts.
Professora:	Quanta d.p. precisa a lâmpada para se acender?
Aluno:	Precisa de 1,5 volts. Olha! É quase o triplo!
Professora:	Então quantas laranjas precisam para acender a lâmpada?
Aluno:	São precisas três.

Pilha Biológica Legumes	Moeda de [illegible] [illegible] à distância de...	Medida em Volt	Intensidade da corrente (ampere)	Potência máxima Watt
cenoura	2 cm	0,89 V	229 Ma	203,81 W
batata	2 cm	0,95 V	559 Ma	531,05 W
batata doce	2 cm	0,79 V	1106 Ma	873,74 W
chicória	2 cm			
cogumelo	2,5 cm	0,65 V	274 Ma	729,7 W
chuchu	2 cm	0,72 V	724 Ma	527,28 W
cebola	2,5 cm	0,83 V	332 Ma	275,56 W
cabeça de nabo	2 cm	0,72 V	192 Ma	138,24 W

Figura 4 – Circuitos com pilhas biológicas e medição da d.p. de pilhas biológicas
Fonte: Observação presencial (fotos da primeira autora)

Tendo em conta que a resposta dos alunos não era a mais adequada, a professora procurou desenvolver tarefas investigativas de forma a estes poderem tirar conclusões:

Professora:	E se partirem a laranja ao meio? Acham que a d.p. é a mesma para cada uma das metades?
Aluno:	Claro que não! Deve ser metade.
Professora:	Então cortem a laranja ao meio e meçam a d.p. de cada uma das metades!
Aluno:	Ah!!! Deu quase igual à da laranja inteira! Não pode ser….
Professora:	Corta as metades ao meio e volta a medir? O que achas que vai acontecer?
Aluno:	Se calhar vai dar o mesmo … pois é! O tamanho da fruta não conta!
Professora:	Afinal, são precisas três laranjas para acender a lâmpada?
Aluno:	Não. Devem bastar três bocados… Vou experimentar! …Acendeu!!!
Professora:	Agora, cada um de vocês vai medir a d.p. da fruta ou legume que têm à vossa frente e vão-me dizer o que obtiveram.

Depois de registar no quadro as d.p., ditadas pelos alunos, a professora continuou:

Professora: Qual a fruta ou legume com maior d.p.? E com menor d.p.?

Alunos: É o tomate. É a maçã.

A professora continuou a colocar questões, trabalhando a eletricidade e ao mesmo tempo a matemática. Este diálogo ilustra a forma ela conduziu as atividades promovendo a realização de tarefas exploratórias e investigativas através de questões. No seu relatório final, a professora também reconhece alterações nas suas práticas: “Fui capaz de aplicar novas práticas e metodologias no contexto da sala de aula integrando a matemática e as ciências experimentais” (Relatório final, junho 2017).

Em ambos os casos, as duas professoras desenvolveram tarefas exploratórias e investigativas. Desta forma, os estudantes realizaram as tarefas guiados pelas professoras que colocavam as questões de forma a conduzir os alunos na investigação com o objetivo de encontrar as soluções. No caso da Josefa, um destes exemplos está relacionado com a questão “Qual a d.p. necessária para acender a lâmpada?” e “Precisam de 3 laranjas para acender a lâmpada?” As tarefas de matemática desenvolvidas por ambas as professoras incluem problemas e exercícios, organização e tratamento de dados incluindo tabelas, gráficos e diagramas.

Considerações Finais

Para fazer face aos apelos para a promoção da interdisciplinaridade (Baker & Galanti, 2017) bem como para usar estratégias de ensino que tornem a aprendizagem mais significativa, como é o caso do QI (Krogh & Morehouse, 2014), inúmeros autores defendem a importância de desenvolver um PDP adequado para apoiar os professores na inovação das suas práticas (Rocard et al., 2007; PRIMAS, 2011).

Apesar das dificuldades identificadas na literatura relacionadas com a promoção da interdisciplinaridade (Ríordáin et al., 2016), bem como com a implementação do QI (Rocard et al., 2007; PRIMAS; 2011; Varela & Costa, 2015), verificamos que as professoras em estudo implementaram diversas tarefas recorrendo ao QI. A professora Luísa trabalhou essencialmente a matemática recorrendo a dados da vida real centrados nos seus alunos, explorando o seu espírito investigativo e promovendo a discussão quer individual com um aluno quer com toda a turma. A professora Josefa criou e implementou tarefas interdisciplinares relacionadas com a matemática e com a eletricidade. Em ambos os casos, os alunos usaram instrumentos de observação e medida, tal como sugerido nos programas curriculares. Além disso, os alunos foram envolvidos em tarefas através de questões orientadas com o objetivo de tirarem conclusões e comunicando os resultados aos pares, tal como recomendado na literatura (NRC, 2000; PRIMAS; 2011). Os diálogos desenvolvidos, quer com um aluno quer com a turma, inserem-se na estrutura destacada por Artigue e Blomhøj (2013) que referem a importância das interações entre o professor e os estudantes e, ainda, entre os próprios estudantes.

Face às investigações que revelam dificuldades na implementação do QI, o que faz com que este raramente seja usado na maioria das escolas portuguesas do 1.º CEB (Varela & Costa, 2015), verificamos ser possível mudar as práticas dos professores passando para um ensino mais construtivista e promotor da aprendizagem significativa, através de um

PDP que exemplifica esta abordagem e apoia os professores na inovação das suas práticas. Esta conclusão está de acordo com vários autores que sustentam a importância de apoiar os professores no contexto do seu desenvolvimento profissional (Capps & Crawford, 2013; Zehetmeier et al., 2015) e referem alterações nas práticas dos mesmos após este frequentarem um PDP adequado (Murphy et al., 2015).

Reconhecemos as limitações deste estudo por apenas apresentarmos os exemplos de duas professoras, mas defendemos que os mesmos ilustram outros casos de professores que também participaram no PDP e desenvolveram outras tarefas de matemática, bem como tarefas de matemática integradas nas STEM tais como as relacionadas com a astronomia (Costa & Domingos, 2018a) e com o som (Costa & Domingos, 2018c), entre outras. Concluímos, assim, que os professores que participaram no PDP conseguem inovar as suas práticas desenvolvendo as suas próprias tarefas e implementando-as recorrendo ao QI.

Referências

Afonso, M., Neves, I. P., & Morais, A. M. (2005). Processos de formação e sua relação com o desenvolvimento profissional dos professores. *Revista de Educação*, *13*(1), 5-37.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810.

Ausubel, D. P. (2012). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Springer Science & Business Media.

Baker C. K., & Galanti T. M. (2017). Integrating STEM in elementary classrooms using model-eliciting activities: responsive professional development for mathematics coaches and teachers. *International Journal of STEM Education. 4*(1), 1-15.

Baxter, J. A., Ruzicka, A., Beghetto, R. A., & Livelybrooks, D. (2014). Professional development strategically connecting mathematics and science: The impact on teachers' confidence and practice. *School Science and Mathematics*, *114*(3), 102-113.

Capps, D. K., & Crawford, B. A. (2013). Inquiry-based professional development: What does it take to support teachers in learning about inquiry and nature of science? *International Journal of Science Education, 35*(12), 1947-1978.

Carvalho, G. S., Silva, R., Lima, N., Coquet, E., & Clement, P. (2004). Portuguese primary school children's conceptions about digestion: Identification of learning obstacles. *International Journal of Science Education, 26*(9), 1111-1130.

Cohen, L., Lawrence, M., & Keith, M. (2007). *Research Methods in Education*. 6th Edition. Taylor and Francis Group.

Costa, M. C., & Domingos, A. (2017). Innovating teachers' practices: potentiate the teaching of mathematics through experimental activities. In CERME 10: Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) (2017). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2828-2835). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Costa, M. C., & Domingos, A. (2018a). *Ensinar matemática recorrendo ao ensino experimental das ciências*. *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação*

Matemática (XXIX SIEM (pp. 97-110). Almada, Portugal.

Costa, M. C., & Domingos, A. (2018b). Promoting STEAMH at primary school: a collaborative interdisciplinary project. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, *4*(8), 234-245.

Costa, M. C., & Domingos, A. (2018c). Promover o ensino da matemática num contexto de formação profissional com STEM. *Revista de Educación Matemática*. In Press.

DeJarnette, N. K. (2012). America's children: Providing early exposure to STEM (science, technology, engineering, and math) initiatives. *Education*, *133*(1), 77-85.

Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência (2014). *Matrículas e transições no 10.º, 11.º e 12.º ano em cursos científico-humanísticos, em 2011/12 e 2012/13, por NUTSII e concelho*. Acedido através de http://www.dgeec.mec.pt/np4/173/

Jocz, J. A., Zhai, J., & Tan, A. L. (2014). Inquiry learning in the singaporean context: Factors affecting student interest in school science. *International Journal of Science Education, 36*(15), 2596-2618.

Krogh, S., & Morehouse, P. (2014). *The Early Childhood Curriculum Inquiry Learning Through Integration*. 2nd Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Löfgren, R., Schoultz, J., Hultman, G., & Björklund, L. (2013). Exploratory talk in science education: Inquiry-based learning and communicative approach in primary school. *Journal of Baltic Science Education*, *12*(4), 482-496.

Ministério da Educação (2013) Metas Curriculares de Matemática. Programa de Matemática para o ensino básico - 1.º Ciclo. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Acedido através de http://www.dge.mec.pt/matematica.

Ministério da Educação (sem data) Programa de Estudo do Meio para o ensino básico - 1.º Ciclo. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação. Acedido através de http://www.dge.mec.pt/ estudo-do-meio.

Murphy, C., Smith, G., Varley, J., & Razı, Ö. (2015). Changing practice: An evaluation of the impact of a nature of science inquiry-based professional development programme on primary teachers. *Cogent Education*, *2*(1), 1077692.

National Research Council of America (2000). Inquiry and the national science education standards. Washington, DC: The National Academy Press.

Osborne, J., & Dillon, J. (2008). Science education in Europe: critical reflections. London: The Nuffield Foundation.

PRIMAS (2011). The PRIMAS project: Promoting Inquiry-based Learning (IBL) in mathematics and science education across Europe. European Union: Capacities. http://www.primas-project.eu Consultado 20/01/2017.

Ríordáin, M. N, Johnston, J., & Walshe, G. (2016). Making mathematics and science integration happen: key aspects of practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(2), 233-255.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education NOW: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Bruxelas: Comissão Europeia.

Varela, P., & Costa, M. F. (2015). Explore the concept of "light" and its interaction with matter: an inquiry-based science education project in primary school. In *Journal of Physics*: *Conference Series*: *605*(1), 012041. IOP Publishing.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (Tradução de Daniel Grassi - 2.ª Ed). Porto Alegre: Bookman.

Zehetmeier, S., Andreitz, I., Erlacher, W., & Rauch, F. (2015). Researching the impact of teacher professional development programmes based on action research, constructivism, and systems theory. *Educational action research*, *23*(2), 162-177.

EXPLORAR RELAÇÕES FUNCIONAIS NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE: A IMPORTÂNCIA DAS DISCUSSÕES COLETIVAS

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada

celiamestre@hotmail.com

Resumo: Esta comunicação apresenta a exploração de uma tarefa em aula, enquadrada numa prática de ensino-aprendizagem exploratório, centrando-se nos momentos de discussão coletiva da tarefa e na forma como estes contribuíram para o conhecimento matemático dos alunos. Insere-se num estudo mais amplo de implementação de uma experiência de ensino com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos do 4.º ano, desenvolvido durante um ano letivo. Em particular, esta comunicação analisa a forma como os alunos se envolveram na discussão coletiva da tarefa, apresentando e explicando as suas resoluções, questionando e procurando entender as resoluções dos colegas; e como estas práticas promoveram o desenvolvimento do pensamento algébrico, mais particularmente no que concerne à compreensão de relações funcionais.

Palavras-chave: discussão coletiva, pensamento algébrico, relações funcionais.

Introdução

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005). Desta forma, o "ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem matemática, mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem" (ME, 2007, p. 8). Neste sentido, Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) referem que os alunos precisam de oportunidades para raciocinar sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva das tarefas matemáticas que realizam.

Esta comunicação foca-se na exploração de uma tarefa em aula, tendo como objetivo analisar a forma como a discussão coletiva assumiu particular importância na construção coletiva da aprendizagem matemática, particularmente no que concerne a aspetos importantes do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, particularmente no que respeita à compreensão de relações funcionais.

A promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula

O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005). Blanton (2008) considera essenciais duas vertentes para o desenvolvimento do pensamento algébrico: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais.

Para a compreensão das relações funcionais, a noção de variação deve ser trabalhada desde cedo na escolaridade (NCTM, 2000). Para Smith (2008), a génese do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve numa atividade, escolhe prestar atenção às quantidades que variam e começa a focar-se na relação entre essas quantidades. O modo como o aluno perceciona a relação de variação dessas quantidades pode ocorrer de forma recursiva ou de forma funcional, sendo esta última mais eficaz por revelar a relação de correspondência direta entre as duas variáveis e por permitir obter o termo de qualquer ordem sem conhecer os termos anteriores. Desta forma, a perceção da relação funcional pode conduzir a níveis mais profundos de generalização.

A introdução do pensamento algébrico na escola elementar constitui uma oportunidade de construir o desenvolvimento conceptual dos conceitos matemáticos mais profundos e complexos desde os primeiros anos de escolaridade (Blanton & Kaput, 2005). A algebrização do currículo matemático depende da capacidade de os professores transformarem os materiais de ensino com que trabalham usualmente a aritmética, possibilitando a exploração de regularidades, a formulação de conjeturas, a generalização e a justificação matemática de factos e relações. Neste sentido, Blanton e Kaput (2005) sugerem as seguintes práticas de ensino para a construção do pensamento algébrico nos alunos: (1) integração natural e espontânea de conversas algébricas na sala de aula; (2) exploração gradual dos temas algébricos durante um significativo período de tempo; (3) integração de múltiplos e independentes processos algébricos válidos; (4) adaptação e desenvolvimento de tarefas matemáticas para promover o pensamento algébrico. Os autores acrescentam ainda que a construção de uma prática de ensino que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos requer um significativo processo de mudança nos professores, os quais, muitas vezes, estão habituados a trabalhar a aritmética de uma forma mais enclausurada em si mesma. Ou seja, os professores devem desenvolver *olhos e ouvidos algébricos*: olhar a matemática que ensinam de uma nova perspetiva e estar atentos ao raciocínio que os alunos expressam, ouvindo-os. Desta forma, os professores serão capazes de identificar, modificar e adaptar materiais e conversações de sala de aula, explorando-os algebricamente.

Também Murray (2010) considera como ingrediente essencial no ensino do pensamento algébrico a focalização por parte do professor no raciocínio dos alunos e no seu discurso. No entanto, o autor alerta para o facto de esse discurso não acontecer de forma espontânea, sendo o resultado do planeamento cuidadoso por parte do professor, onde ele próprio entende os aspetos algébricos subjacentes aos conteúdos matemáticos de forma a promovê-los junto dos seus alunos.

De particular relevância para este estudo é a conceção que Ellis (2007) apresenta relativamente à generalização como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas no seio da comunidade da turma. Esta perspetiva interacionista privilegia tanto as interações professor-aluno como as interações aluno-aluno, tendo em consideração a forma como o professor e os alunos desenvolvem modos partilhados de interagir para promover generalizações. Neste sentido, o papel do professor é também crucial para a promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificações e clarificações.

A importância das discussões coletivas

A principal característica do ensino-aprendizagem exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a gestão que das mesmas se faz na aula, proporcionando aos alunos momentos de discussão entre pares e coletivamente, são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento. No ensino exploratório "a ênfase desloca-se da atividade 'ensino' para a atividade mais complexa 'ensino-aprendizagem'" (Ponte, 2005, p. 13). De acordo com Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), neste tipo de ensino, a aprendizagem é um processo simultaneamente individual e coletivo que resulta da interação dos alunos com o conhecimento matemático e com os outros (colegas e professor), no contexto de desenvolvimento de uma certa atividade matemática e regida por processos de negociação de significados.

No ensino exploratório, os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com as tarefas matemáticas (Canavarro, 2011). De acordo com Canavarro et al. (2012), este tipo de prática "exige do professor muito mais do que a identificação e seleção de tarefas para a sala de aula" (p. 256). Assim, para estes autores, embora a seleção de uma "tarefa adequada e valiosa" (idem) seja particularmente importante, é a sua exploração em sala de aula que permite promover as oportunidades de aprendizagem dos alunos.

Baxter e Williams (1996, referidos por Baxter & Williams, 2010) propõe a designação do "ensino orientado pelo discurso" para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos. Os mesmos autores descrevem o ambiente de sala de aula que promove este tipo de ensino de acordo com a estrutura seguinte: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Conscientes da dificuldade inerente à implementação desta estrutura de sala de aula, os autores referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajude os alunos a trabalharem uns com os outros. Por exemplo, os alunos deverão ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a compreenderem as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação na sala de aula devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemática de sala de aula. Baxter e Williams (2010) concluem que em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois os professores organizam o tempo da aula de forma a que aos alunos sejam dadas mais oportunidades de comunicação, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

Cobb, Wood e Yackel (1991) compreendem a vida de uma sala de aula como uma comunidade de inquirição, onde há a criação de um "conhecimento tomado como partilhado" (p. 24) na comunidade. Assim, os aspetos do conhecimento são partilhados dentro de um quadro interpretativo coletivo que constitui a base de comunicação entre os participantes da comunidade. Estes autores descrevem a negociação que constitui a prática matemática efetiva e apropriada na sala de aula através do envolvimento da comunidade de aprendizagem em conversações sobre como praticar matemática colaborativamente. Essas normas evidenciam um acordo mútuo sobre o que significa praticar matemática na comunidade, o que envolve uma compreensão sobre as formas que são consideradas válidas matematicamente.

Por outro lado, Cobb, Boufi, McClain e Whitenack (1997) focam-se na relação entre o discurso de sala de aula e o desenvolvimento matemático dos alunos que nele participam. Consideram particularmente importante o que denominam como "discurso reflexivo" (p. 258), através do qual a atividade matemática é objetivada e se torna um tópico explícito de conversação. Quando os alunos se envolvem no ato coletivo de *discurso reflexivo* estão em condições de realizar aprendizagens matemáticas, e os seus contributos individuais desenvolvem esse discurso, alimentando-o e mantendo-o. Neste tipo de atividade, o papel do professor é particularmente importante porque é ele que "pode proativamente promover o desenvolvimento matemático dos alunos" (p. 269). A relação entre a aprendizagem individual e a coletiva é bastante complexa. Se, por um lado, o desenvolvimento matemático dos alunos emerge a partir das interações e práticas culturais de sala de aula, por outro, "é o aluno individual que tem de refletir e reorganizar-se enquanto participa" (p. 266) no discurso. Desta forma, o *discurso reflexivo* precisa promover tanto a aprendizagem coletiva como a individual e, nesse sentido, o papel do professor tem de atender a essas duas dimensões.

Metodologia do estudo

Os resultados apresentados nesta comunicação inserem-se num estudo mais amplo (Mestre, 2014), de implementação de uma experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006) desenvolvida durante um ano letivo, onde se exploraram tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

O design de "experiências de ensino em sala de aula" (Gravemeijer & Cobb, 2006) agrega o desenvolvimento de processos de planeamento e ensino, assim como a investigação sobre a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos num contexto social, a sala de aula, e deste modo, procura ser, simultaneamente, educativo e científico (Kelly, 2003). Uma experiência de ensino integra uma sequência de episódios de ensino que incluem, entre outros elementos, um professor-investigador e um ou mais alunos, e um método de recolha de dados que incide sobre esses episódios (Steffe & Thompson, 2000) que visa a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem, e no qual o investigador está envolvido como educador (Kelly, 2003).

Esta comunicação foca-se numa tarefa, envolvendo a exploração das relações funcionais identificadas em uma sequência pictórica crescente e incide na forma como os alunos se envolveram na discussão coletiva da tarefa. Para recolha dos dados, foi feita uma gravação em formato vídeo e analisadas as resoluções dos alunos no momento de trabalho autónomo e o momento de discussão coletiva da tarefa.

A experiência de ensino

Na experiência de ensino foram desenvolvidas quarenta e duas tarefas, organizadas em cinco sequências, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um fio condutor curricular (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular com os temas e conteúdos do currículo do 4.º ano de escolaridade. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, as tarefas foram introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de 90 minutos cada uma. A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade.

A Figura 1 apresenta os aspetos do pensamento algébrico explorados em cada sequência de tarefas, numa lógica evolutiva de complexidade e aprofundamento, identificando as diferentes etapas da trajetória conduzida com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Desta forma, a definição das sequências de tarefas incidiu primeiramente na exploração dos aspetos relativos ao pensamento relacional e, só posteriormente, na inclusão da exploração do pensamento funcional.

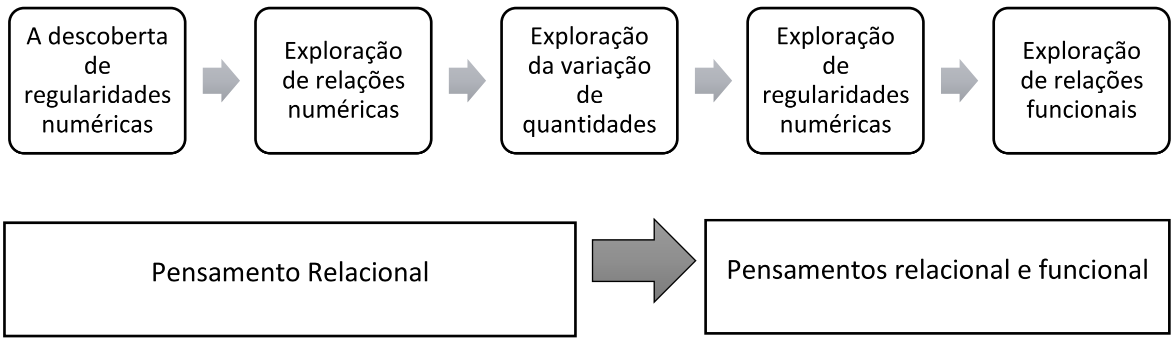


Figura 1 – Etapas da experiência de ensino

A tarefa que se apresenta nesta comunicação foi a décima segunda tarefa da quinta e última sequência de tarefas (41.ª tarefa da experiência de ensino) e realizou-se no final do ano letivo. Tinha como objetivo a exploração de relações funcionais, tendo como contexto uma sequência pictórica crescente e pretendia-se que os alunos identificassem as variáveis dependente e independente e a sua relação com os termos da sequência e a sua ordem, respetivamente. A exploração da tarefa em aula iniciou-se pela solicitação da continuação da sequência e, explicitamente, era pedido aos alunos que revelassem qual a relação entre as variáveis independente e dependente. O modelo de aula desenvolvido desde o início da experiência de ensino procurou respeitar os princípios do ensino exploratório, organizando a aula em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Esta comunicação incide sobre o momento de discussão coletiva da tarefa.

Apresentação dos resultados

A tarefa "Cubos com autocolantes"[1] (Figura 2) explora a situação de uma construção tridimensional envolvendo diferentes números de cubos interligados onde se colam autocolantes nas faces visíveis. Pretendia-se que os alunos expressassem a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes, e determinassem uma regra geral dessa relação. Nesta fase da experiência de ensino os alunos já revelavam bastantes facilidades na apreensão e expressão da generalização em linguagem natural e linguagem simbólica, atribuindo significado aos símbolos que usavam.

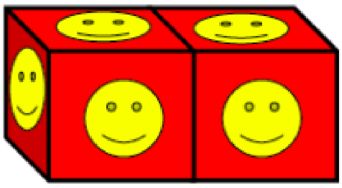
[1] Tarefa adaptada de Moss, Beaty, McNab e Eisenband, (2005).

Na apresentação da tarefa, a situação foi modelada com o recurso a materiais concretos, elaborando-se conjuntamente com os alunos a construção apresentada no enunciado. Durante o trabalho autónomo foram distribuídas aos diferentes grupos de alunos construções com dois e três cubos, com os autocolantes colados. Após o momento de trabalho autónomo, seguiu-se a discussão coletiva, com a apresentação e discussão das resoluções de diferentes pares ou grupos.

Tarefa "Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1.1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

Três cubos.

Quatro cubos.

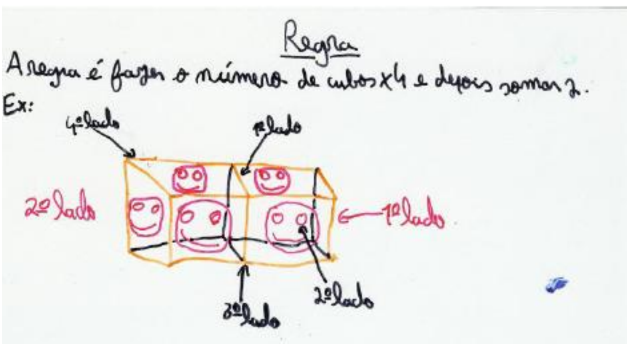
Dez cubos.

Cinquenta e dois cubos.

1.2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 2 – Tarefa "Cubos com autocolantes"

O par Henrique e João P. apresenta a sua forma de resolução (Figura 3). Este par apresenta a regra em linguagem natural e acrescenta um desenho como forma de tornar mais explícita a escrita da regra.



A regra é fazer o número de cubos X4 e depois somar 2.

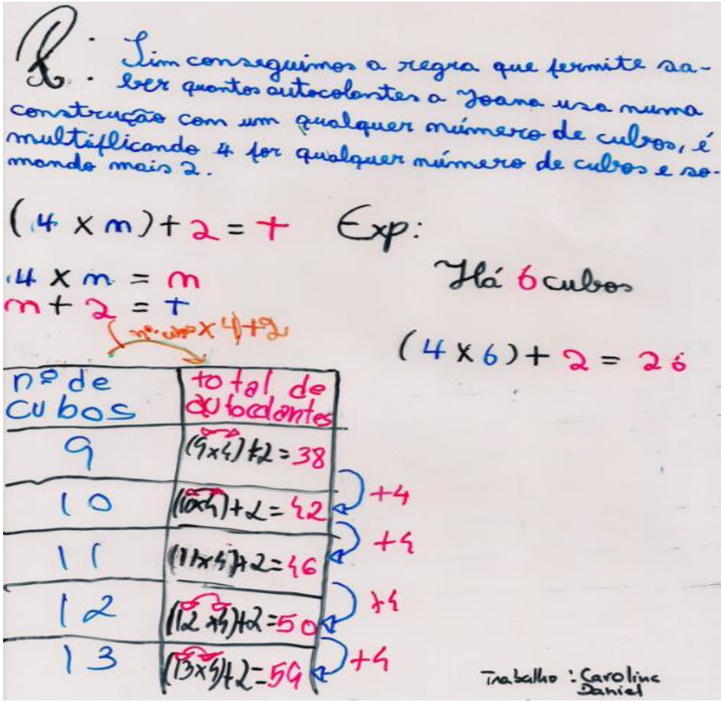
Figura 3 – Resolução do par Henrique e João P.

Na sua explicação à turma, este par recorre ao contexto da situação para clarificar e tornar compreensível a sua forma de representação.

> João P. - A regra é fazer o número de cubos vezes quatro e depois somar dois. Demos só um exemplo, usamos só dois cubos, depois desenhámos os dois cubos. Explicámos aqui este lado de cima, depois este da frente [que] é o segundo lado, depois o de baixo que é o terceiro lado e depois o de trás que é o quarto.
>
> Rita - Porque é que ali repetes duas vezes o primeiro e duas vezes o segundo?
>
> João P. - Então é o primeiro *lado lateral* e o segundo *lado lateral*, depois é só fazer o número de cubos vezes quatro e depois é só somar dois.

Em seguida, é a vez do par Carolina e Daniel apresentar a sua resolução à turma (Figura 4). Na escrita simbólica da regra é interessante verificar a forma como este par utiliza as cores para atribuir diferentes significados ao mesmo símbolo. Inicialmente, estes alunos escrevem corretamente a regra $(4 \times n) + 2 = t$. Depois, apresentam o que parecem ser os procedimentos anteriores que conduzem à escrita dessa regra, revelando incorreções formais. No entanto, utilizam duas cores (vermelho e azul), às quais parecem atribuir uma significação particular. Inicialmente escrevem $4 \times n = n$, representando o primeiro n a azul e o segundo a vermelho, indicando, assim, tratar-se de números diferentes. Depois, escrevem $n + 2 = t$, escrevendo esse n a vermelho, ou seja, sendo este número equivalente à soma da operação anterior. Desta forma, o modo como utilizam diferentes cores para os $n's$ permite perceber que querem representar números diferentes: "$4 \times n$" será igual a determinada quantidade e essa mesma quantidade mais dois é que será igual ao número total de autocolantes. Naturalmente que o procedimento que apresentam não é correto, mas é interessante verificar como atribuem à cor esta significação simbólica.

Para além disto, este par apresenta uma tabela com duas colunas (número de cubos e número de autocolante), a qual completam com diferentes exemplos. Na exploração dessa tabela apresentam tanto uma leitura recursiva ao indicar a variação do número de autocolantes linha a linha, como uma leitura funcional que relaciona diretamente o número de cubos com o número de autocolantes e a indicação explícita da regra. Essa regra é, aliás, usada na determinação do número de autocolantes para cada número de cubos apresentado.



Sim, conseguimos a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos, é multiplicando 4 por qualquer número de cubos e somando mais 2.

Figura 4 – Resolução do par Carolina e Daniel

Na apresentação à turma, a professora solicita ao par que explique a tabela que construíram. Isso conduz a turma a uma discussão sobre a diferença entre o número de autocolantes nos termos consecutivos da sequência, e o valor constante que é adicionado.

> Carolina- Nós pensámos, como no outro dia o grupo do Fábio fez uma tabela assim mais ou menos como esta, e então pensámos que também podíamos fazer uma. E vimos a relação. Então fizemos duas colunas: uma com o número de cubos e outra com o total de autocolantes. O número de cubos é 9,10,11,12,13 e a relação é de um. No total de autocolantes a relação é de quatro. Aqui era de quatro, mas aqui estava sempre a fazer dois, também era de quatro.
>
> Fábio – Essa parte não percebi... era de dois e depois era de quatro?
>
> Carolina- Sim, aqui era de quatro e aqui está sempre a ser dois...
>
> Gonçalo – Não, simplesmente porque ali é vezes quatro...
>
> Carolina- Sim, porque aqui está sempre dois, por isso é de quatro... se fizeres assim, sem o dois, assim 9 vezes 4 é 36, e depois 10 vezes 4 dá 40, 42...
>
> Gonçalo – Não, mas isso é só a tabuada do 4. 9 vezes 4 era 36...
>
> Rita – Vezes 4 é 36, juntando mais 2, como em todos junta mais 2, por isso é que dá mais 4.
>
> Gonçalo – Se tirares o mais 2 é a tabuada do 4.

Nesta altura, a professora procura que os alunos justifiquem o porquê das regularidades identificadas através da exploração da tabela. Conduz, nesse sentido, a discussão coletiva.

P – Porque é que é sempre mais 4?

Fábio - Porque se faz sempre vezes 4...

P – Mas porquê?

Carolina– Porque 9 vezes 4 dá 36, depois com o 2, 38; 10 vezes 4, 40, junta-se o 2, 42, é o 2 que está a fazer isto...

P - O 2 está a fazer isto. Mas porque é que tu dizes ali, vocês têm ali as setinhas, mais 4, mas porquê mais quatro e não outra coisa qualquer?

Carolina- Porque a diferença é de 4.

P – Mas porquê?

Rita - Porque foi assim, eles fizeram 9 vezes 4, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do 4, mas eles puseram mais 2, se eles no próximo metessem mais 3 já não seria mais 4... porque é sempre o mesmo número.

P – Mas eles fizeram e fizeram corretamente... A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação….

Rita – Porque há 4 lados nos cubos.

(...)

João V. – Porque tem 4 lados.

P – O que é que tem 4 lados?

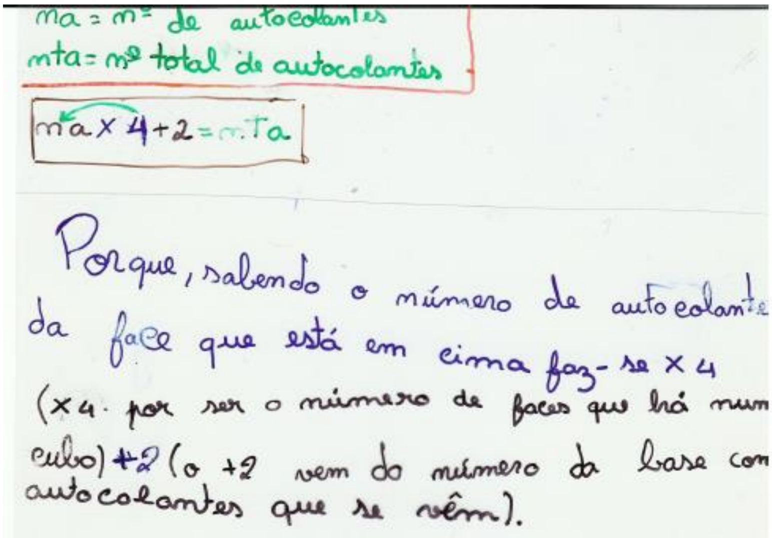
João V. – Sim, 4 faces.

P – Mas o cubo tem 4 faces?

Vários alunos – Não, tem 6...

João V. – Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do outro que também fica tapada.

Em seguida, o grupo formado pelos alunos Rita, Diogo e Beatriz faz a apresentação da sua resolução à turma (Figura 5). Este grupo apresenta a escrita da regra em linguagem simbólica alfanumérica e em linguagem natural. Apresenta uma legenda onde discrimina o significado atribuído a cada variável na escrita simbólica da regra. Na representação em linguagem natural descreve o procedimento que efetua para calcular o número de autocolantes de uma qualquer construção de cubos, considerando o número de autocolantes da “face que está em cima”.



Porque sabendo o número de autocolantes da face que está em cima faz-se X4 (X4 por ser o número de faces que há num cubo) +2 (o +2 vem do número da base com autocolantes que se veem.

Figura 5 – Resolução do grupo Rita, Diogo e Beatriz

Na sua explicação à turma, este grupo mostra que considerou "o número de autocolantes da face que está em cima" como variável independente.

Rita – Nós fizemos muito parecido com o grupo do João. Nós... tivemos que explicar porque é que na vezes 4 mais 2 é igual a nta, que é o que o Diogo agora vai ler.

Diogo – Porque sabendo o número de autocolantes da face que está em cima faz-se vezes 4.

Rita – Se soubermos o número de faces de cima é só multiplicar por 4.

Gonçalo – Mas não precisas de dizer que é em cima.

João V. – Mas pode ser a que está de lado, ou em baixo...

Rita – Sim, mas é a que está em cima.

Por ser diferente do apresentado pelos grupos anteriores, este facto suscitou uma discussão na turma, com alguns alunos a pronunciarem-se contra a opção do grupo ao considerar essa variável como independente.

João V. – Número de autocolantes vezes 4... número de autocolantes?! Assim já sabem o número de autocolantes. Tem de ser o número de cubos, é o número de cubos!

Rita – Mas não é o número de autocolantes, é o número que está em cima.

Gonçalo – Então, só há um.

Rita – Não, pode haver 2 cubos. Seria 2 vezes 4.

João V. – É muito complicado porque o na era o número de autocolantes... isso quer dizer que já sabes o número de autocolantes...

Gonçalo – É a mesma coisa saber o número de autocolantes e fazer vezes 4.

João V. – Mas assim já têm de saber o número de autocolantes.

> Rita – Não, não sabemos nada. Por exemplo, temos este cubo, por exemplo, temos um autocolante em cima e faço vezes 4, mas eu não sei o número total de autocolantes e depois é mais 2.
>
> Carolina – Mas porque não pões o número de cubos? É mais fácil.
>
> (...)
>
> P – Eu gostava de saber o que a Matilde acha sobre este assunto.
>
> Matilde – Eu acho que o que a Rita disse está certo. Eu percebi que ela estava a explicar que podia ser 3 ou 4 cubos, ou 100, pode ser um número qualquer de cubos, em cima tem os autocolantes, depois é fazer esses autocolantes vezes 4 mais 2.

A professora propõe, então, que se comparem diferentes representações, apresentando em simultâneo a resolução do grupo do André, Gonçalo e Joana e do grupo da Rita, Diogo e Beatriz (Figura 6).

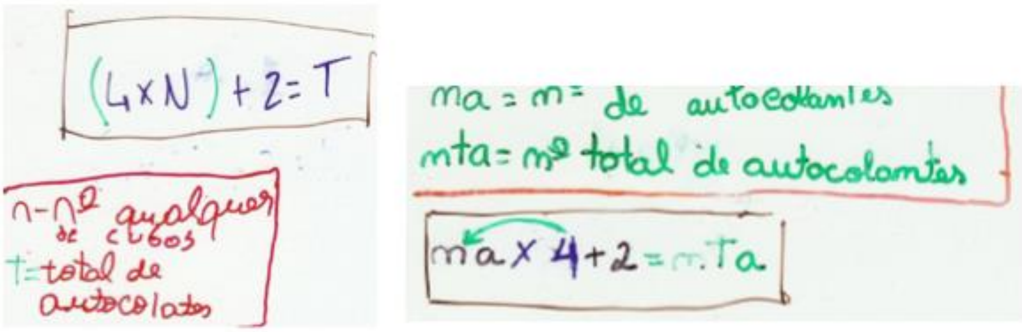


Figura 6 – Comparação entre as resoluções dos grupos

Embora a escrita da regra seja semelhante em ambos os grupos, o primeiro considera o número de cubos como a variável independente e o segundo considera ser o número de autocolantes essa variável.

> Gonçalo – No nosso está a dizer que é um número qualquer de cubos e o dela é um número qualquer de autocolantes... Mas vai dar ao mesmo... Saber o número qualquer de autocolantes ou o número qualquer de cubos é a mesma coisa...
>
> P – É?
>
> Gonçalo – Então é assim: aqui há 3 cubos e os *smiles* de cima... então estes são os *smiles* de cima e são 3 cubos e 3 *smiles*. Tínhamos falado que os *smiles* é 3 vezes 4, viste os *smiles* de cima, mas se souberes os 3 cubos também vai ser 3 vezes 4.
>
> P – Mas o número de autocolantes dessa construção é igual ao número de cubos?
>
> Gonçalo – Não professora, mas só que a Rita estava a dizer que só contava os de cima, que era os de cima vezes 4, então os de cima são 3 e há 3 cubos, então os 3 autocolantes de cima é a mesma coisa que os 3 cubos.
>
> (...)
>
> João V – É a mesma coisa.
>
> P – É a mesma coisa... mas...

João V. – Só que explicado de maneiras diferentes...

P – É a mesma coisa, mas acho que temos de ter um cuidadinho aí...

Carolina – Eu acho que o da Rita e o do Gonçalo são a mesma coisa... porque se soubéssemos o número de autocolantes tínhamos de contar o número de cubos e se soubéssemos o número de cubos tínhamos de contar o número de autocolantes...

(...)

P – Agora eu acho que... há um cuidado quando nós usamos ali um número qualquer de autocolantes, acho que temos de ter um cuidado especial ali...

Gonçalo – Ali ela falou que era o de cima, mas se for o da frente também são 3 autocolantes e 3 cubos.

João V. – Tanto faz.

P – Ok, e se for o número total de autocolantes?... Não é também o número de autocolantes?

Vários alunos – É.

P – Então, o que falta dizer ali? Número de autocolantes...

João V. – E cubos.

Fábio – Não, número de autocolantes de cima.

P – De cima, de uma face... Porque senão eu posso...

João V. – Senão pode ser qualquer face do cubo e não só a de cima...

Em seguida, a professora propõe ao grupo do Fábio, António e Marco que façam a sua apresentação à turma por considerar que estes alunos reconheceram a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes de forma diferente dos restantes grupos (Figura 7). Estes alunos começaram por considerar que “os cubos das pontas” tinham 5 autocolantes cada um e que os restantes teriam 4 autocolantes. Na sua resolução escrita apresentam o percurso que fizeram utilizando esse raciocínio para construções com 2, 3, 4 e 5 cubos até identificarem uma regularidade que lhes permitiu enunciar uma regra da relação para qualquer número de cubos. Aplicam essa regra para construções com 10 e 52 cubos e escrevem-na na sua forma geral.

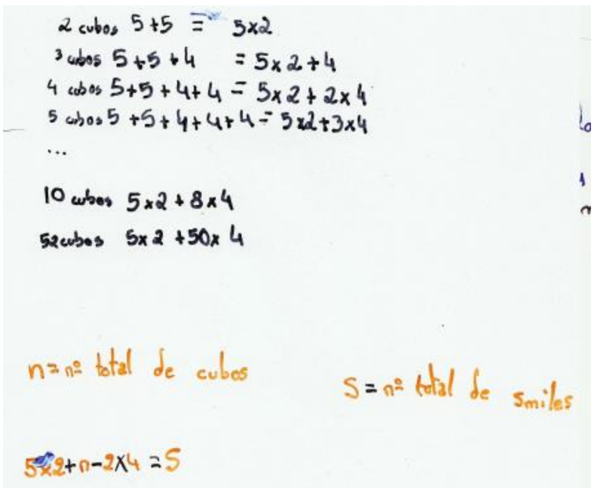


Figura 7 – Resolução do grupo Fábio, António e Marco

> Fábio – Então, nós ali... está ali, 2 cubos, quase todas as pessoas pensaram que é sempre o 4 vezes o 2, 4 vezes o 2 e depois mais estas 2 e nós pensámos (…) porque num quadrado [cubo] havia 5 e depois no outro havia 5, então fizemos 5 vezes 2 que dá 10.
>
> João V. – Eu já percebi! É a mesma coisa feita de maneira diferente.
>
> Fábio – Sim, e depois ali 5 mais 5 era como se nós estivéssemos a repartir, tivesse um cubo com 5 autocolantes e aqui outro com 5 e depois aquilo era igual a 5 vezes 2.
>
> (...)
>
> Gonçalo – Só que depois com 3 cubos já tinhas de mudar a estratégia...
>
> Rita – Fábio, eu não estou a perceber muito bem aquela coisa que está 5 vezes 2 mais 3 vezes 4...

Como alguns colegas manifestavam que não estavam a entender a resolução apresentada por este grupo, a professora propõe a Fábio que explique calmamente, devagar e usando os modelos dos cubos para ilustrar a sua estratégia de resolução. Fábio começou por explicar a regra para uma construção com 2 cubos, e continuou a sua explicação aplicando a regra a construções com um número crescente de cubos: 3, 4 e 5. Em seguida, a professora solicitou que o fizesse para uma construção com 10 cubos.

> Fábio – Então... nós temos aqui 10 cubos e depois dividimos [separamos] as 2 pontas (…) e depois as do meio que eram 8 que tinham 4 [autocolantes], depois era o 5 vezes o 2, mais 8 vezes o 4, que são 8 do meio com 4 autocolantes.
>
> P – Como é que tu sabias que eram 8 do meio?
>
> Fábio – Porque no meio temos sempre menos 2 cubos do que no total.
>
> P – Porque é que temos sempre menos 2 cubos?
>
> Fábio – Porque tirámos os das 2 pontas, que têm 5.

Nesta altura, a professora solicita a Fábio que explique como descobriu uma regra geral para essa relação. Fábio explica a regra enunciada na folha de resolução do grupo. Nessa altura, um aluno, Daniel, sugere a utilização de parêntesis na escrita da regra. Desta forma, no coletivo, vários alunos contribuem para que a escrita da regra seja melhorada.

> Fábio – Então o n é igual ao “número total de cubos” e o s é o número total de *smiles*, então fazemos 5 vezes 2...
>
> P – Podes usar aquele [exemplo] do 10 ou do 52...
>
> Fábio – usando o exemplo da construção com 52 cubos - 5 vezes 2, mais 50 vezes 4 que é tirar dos 52, 2, aqueles ali é 52 mais n menos 2 que é o número total de cubos menos 2 que ia dar, por exemplo, 50 vezes 4, que ia dar o número total de autocolantes.
>
> Matilde – Eu percebi.
>
> João V. – Eu percebi.
>
> (...)
>
> Daniel – Eles não deveriam ter metido parêntesis antes do 5 vezes 2? Por exemplo, no terceiro...

João V. - Não era preciso, dava para perceber.

Matilde – 5 vezes 2 mais 5 vezes 4...

(...)

P – Podiam ter posto... ali, naquele caso específico, não é mesmo, mesmo muito importante, agora aqui nesta regra... Vejam lá se não falta ali qualquer coisa... Portanto, a regra que o grupo do Fábio escreveu foi "5 vezes 2 mais n menos 2 vezes 4 é igual aos *smiles*". Aqui, será que não falta aqui qualquer coisa?

António – Parêntesis.

P – Onde?

Vários alunos – No 5 vezes 2.

João V. – Não, no n menos 2...

P – Porquê?

Gonçalo – É no n menos 2 vezes 4.

João V. – É o resultado do n menos 2 vezes 4.

Fábio reescreve a regra, ficando "$5 \times 2 + (n - 2) \times 4$". A professora refere que esta resolução foi importante para perceberem que não existe apenas uma regra para descrever a relação entre o número de autocolantes e o número de cubos.

Considerações finais

Tendo em conta que a tarefa apresentada se realizou no final da experiência de ensino, pode considerar-se que os alunos já tinham interiorizado a cultura de sala de aula construída durante o percurso de um ano letivo, assumindo um papel de maior responsabilidade no discurso matemático da sala de aula (Baxter & Williams, 2010). De facto, pelos excertos apresentados podemos constatar que os alunos são aqueles que assumem maior tempo de comunicação durante a discussão coletiva, sendo reduzidas e pontuais as intervenções da professora.

Analisando o tempo de comunicação assumido pelos alunos, podemos constatar que os alunos se envolveram na discussão coletiva, tanto pela forma como apresentaram as suas resoluções à turma como pelo modo como procuraram compreender as resoluções apresentadas pelos colegas. Os diferentes pares/grupos de alunos apresentaram resoluções onde empregavam mais do que uma forma de representação da generalização, usando desenhos, esquemas, tabelas, para além da linguagem natural e simbólica. Esta preocupação em tornar claras e explícitas as suas resoluções manifesta-se também nas suas apresentações orais onde procuram que os colegas percebam o que estão a transmitir. Os restantes colegas também assumem um papel ativo, estando genuinamente interessados em envolver-se na compreensão das resoluções apresentadas, interpelando constantemente no sentido de pedir esclarecimentos quando não compreendem o que é referido, ou até mesmo de mostrar desacordo ou sugerir alternativas ao que é apresentado.

Procurando agora analisar a qualidade das intervenções dos alunos durante a discussão coletiva, podemos referir que, partindo das resoluções dos grupos, a discussão permitiu a clarificação de aspetos pertinentes para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, tais como a compreensão da noção de variável, a identificação do que varia e do que se mantém constante, a distinção entre as variáveis dependentes e independentes e a clarificação do uso de símbolos para representar a generalização. Através da negociação de significados, essas discussões parecem ter sido promotoras de um maior desenvolvimento do pensamento algébrico e, especificamente, da construção do sentido de símbolo dos alunos.

Referências

Bater, J. A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education, 13*, 7-26.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, Transforming Practice.* Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-265). Portalegre: SPIEM.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(*3), 258-277.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1991). Analogies from the philosophy and sociology of science for understanding classroom life. *Science Education, 75*(1), 23-44.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino* (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics*. Retirado de: http://www.brookings.edu/gs/ brown/algebraicreasoning.htm.

Murray, M. K. (2010). Early algebra and mathematics specialists. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations, 12,* 73 – 81.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Retirado de http://www.nctm.org/standards/.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29-53.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Smith, E. (2003). Status and change: Integrating patterns, Functions, and algebra throughout the k-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.136-150). Reston, VA: NCTM.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

DISCUSSÕES COLETIVAS EM MATEMÁTICA: UM OLHAR SOBRE A PRÁTICA DE TRÊS PROFESSORES

Cátia Rodrigues

Agrupamento de Escolas de Canas de Senhorim

catiamat@gmail.com

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS

menezes@esev.ipv.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: As discussões matemáticas coletivas são uma ferramenta poderosa a que os professores podem recorrer para proporcionar aos alunos uma aprendizagem da Matemática com compreensão. Essa prática revela-se uma atividade exigente para o professor, colocando-lhe sérios desafios. Neste estudo, procuramos descrever e compreender como três professores de Matemática do Ensino Básico (EB) dinamizam discussões coletivas envolvendo tarefas algébricas, focando os desafios que enfrentam. O estudo, de cunho qualitativo e interpretativo, assenta em estudos de caso de três professores. Os resultados mostram que os professores dinamizam a discussão segundo três componentes principais: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão, revelando flexibilidade na sua atuação, como forma de responder a algumas tensões com que se defrontam.

Palavras-chave: Discussão coletiva; Ensino da Álgebra; Professores; Discurso de sala de aula.

Introdução

Em Portugal, nos últimos anos, tem-se assistido a diversas mudanças nos programas de Matemática. Segundo um recente documento curricular – *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico* – o ensino da Matemática, ao longo da escolaridade básica, deve permitir que os alunos "desenvolvam capacidade de abstração e generalização (…) adquiram o vocabulário e linguagem próprios da Matemática e desenvolvam a capacidade de comunicar em Matemática, por forma a serem capazes de descrever, explicar e justificar, oralmente e por escrito, as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões que obtêm" (DGE, 2018). As discussões matemáticas podem ser um instrumento didático do professor para alcançar essas aprendizagens, na medida em que pressupõem que os alunos se envolvam na apresentação, justificação e argumentação sobre diversas estratégias de resolução de uma tarefa e na sistematização das principais ideias emergentes dessa partilha.

O professor desempenha nessa abordagem ao ensino um papel importante, ao ser responsável por criar oportunidades de aprendizagem aos alunos. Para tal, o professor, apoiado no seu conhecimento didático (Ponte, 2012), seleciona tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos em discussão e, simultaneamente, promovam a aquisição de conceitos e procedimentos e a generalização de relações matemáticas; e prepara e conduz discussões produtivas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Nesta comunicação, pretendemos descrever e compreender como três professores de Matemática do EB dinamizam a discussão coletiva no ensino da Álgebra, focando os desafios que enfrentam nessa prática.

Dinamização da discussão coletiva

O envolvimento dos alunos numa discussão coletiva pode ser um momento rico de aprendizagem ou uma atividade pouco significativa, dependendo da forma como o professor prepara e conduz a discussão. Os professores podem estruturar a discussão em sala de aula em três momentos principais (Sherin, 2002): i) apresentação; ii) comparação e avaliação; e iii) filtragem. O primeiro momento procura levar os alunos a partilhar as suas ideias com a turma. Para isso, o professor coloca questões, como "Porquê?", "O que pensam os colegas?". O professor pode iniciar a apresentação das estratégias de resolução pelas incorretas, de modo a que o erro seja discutido com todos; pelas mais frequentes, já que foram realizadas por grande parte dos alunos; ou pelas de fácil compreensão, para que todos sejam capazes de acompanhar os raciocínios envolvidos (Stein et al., 2008). No segundo momento, os alunos são incentivados a comparar resoluções próximas e distantes e o professor começa a focar a atenção dos alunos no conteúdo da discussão. Por último, o professor leva os alunos a pensarem sobre uma ideia específica que foi partilhada e/ou introduz novas ideias matemáticas que os levem a progredir no assunto em estudo, ajudando-os a estabelecer conexões entre as ideias apresentadas.

O discurso gerado durante a discussão segue um processo de estreitamento e ampliação de ideias, já que inicia com o professor a solicitar e discutir ideias – *solicitação e discussão de muitas ideias* – prossegue com o foco em algumas ideias particulares – *filtragem* – e continua com o professor a incentivar a partilha de mais ideias – *solicitação e discussão de muitas ideias*. Esse processo mostra que, primeiro, o professor está mais preocupado com a partilha de ideias – *conteúdo matemático não filtrado* – e só posteriormente em atingir os objetivos estipulados, enfatizando o conteúdo das ideias apresentadas – *conteúdo matemático filtrado*.

O professor é, assim, responsável por incentivar os alunos a apresentar o seu trabalho, a comparar e avaliar as suas ideias; a filtrar ideias importantes focando aí a sua atenção e assegurar o envolvimento de todos na discussão, mantendo a harmonia entre a comunicação gerada e o conteúdo das ideias partilhadas. É na tentativa de encontrar o equilíbrio entre um ambiente de sala de aula que incentiva as ideias dos alunos e cujo propósito é aprender conteúdos matemáticos que os professores enfrentam tensões, como ouvir um aluno em particular e manter a turma em atividade, conciliar a explicação de regras e procedimentos com a resolução de outros alunos e encontrar conteúdos que permitam promover a discussão e ao mesmo tempo ensinar competências básicas (Yerushalmy & Shulamit, 2010). A essas tensões podem, ainda, juntar-se outras, como a decisão sobre quem deve falar, quando e porquê (NCTM, 2007). Os professores podem apoiar-se no modelo das *cinco práticas* de Stein et al. (2008) para prepararem as discussões coletivas.

Para analisar essas tensões, Speer e Wagner (2009) sugerem o recurso ao *scaffolding* social e analítico. O primeiro diz respeito ao apoio a normas de discurso e participação dos alunos e o segundo ao apoio ao avanço da discussão em direção aos objetivos matemáticos, selecionando criteriosamente as contribuições dos alunos. O sucesso do *scaffolding* analítico depende do reconhecimento pelo professor: i) dos raciocínios dos alunos (corretos ou não); e ii) das ideias que contribuem para atingir os objetivos e o desenvolvimento da compreensão matemática. Segundo Nathan e Knuth (2003), quando os professores se afastam do *scaffolding* analítico para fomentar uma maior participação dos alunos, valorizando o *scaffolding* social, isso promove nas discussões falta de rigor na argumentação. Como forma de vencer essas tensões, Leikin e Dinur (2007) propõem que o professor seja flexível na sua atuação na aula, sendo essa flexibilidade influenciada por três fatores relacionados com o seu conhecimento matemático: *diversidade* (atua de forma flexível se considera que determinada ideia pode levar os alunos a ampliar o seu pensamento e de forma inflexível se entende que essa ideia pode confundir os alunos), *reciprocidade* (aprende com os alunos na discussão, em consequência da partilha de diferentes estratégias) e *intencionalidade* (leva ou não para a discussão determinadas ideias).

Metodologia

O estudo segue uma abordagem interpretativa e qualitativa (Bodgan & Biklen, 1994), já que procura descrever e compreender como três professores de Matemática do EB dinamizam a discussão coletiva relativa a tarefas algébricas, focando os desafios que enfrentam. O *design* é de estudo de caso, ao pretender compreender as suas práticas de discussão (Ponte, 2006).

O estudo decorre no contexto de um trabalho colaborativo com três professores de Matemática que integram o *Projeto Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra* (PPDMEA), assumido como uma estratégia poderosa de desenvolvimento profissional, quando se pretende concretizar mudanças na prática de ensino (Hargreaves, 1998). Para isso, a investigadora dinamizou o PPDMEA organizado em dez sessões conjuntas (SC), com a duração de três horas, a fim de criar dinâmicas de trabalho colaborativo e desenvolver a prática de discussão matemática. Os participantes do estudo são os professores Ana, Afonso e Jorge (nomes fictícios) a lecionar os 7.º e 8.º anos de escolaridade e com percursos profissionais distintos (Quadro 1):

Quadro 1 – Caracterização dos participantes

Professora Ana	**Professor Afonso**	**Professor Jorge**
22 anos de serviço Participa em Encontros de Professores de Matemática; projetos de investigação e curriculares Com o seu envolvimento neste estudo procura novas respostas para o que considera ser o formalismo da linguagem que caracteriza o trabalho em Álgebra Leciona ao 7.º ano	25 anos de serviço Não participa em Encontros de Professores nem em projetos de investigação Decide participar no projeto, porque identifica potencial no temas em estudo, principalmente, a Álgebra enquanto tema que levanta grandes dificuldades aos alunos, fundamentalmente, na simbologia Leciona aos 7 e 8.º anos	30 anos de serviço Formador na especialidade do uso de tecnologias na sala de aula Participa em Encontros de Professores de Matemática; projetos de investigação e curriculares Reconhece potencialidades neste projeto, em particular, porque lhe permite aprofundar um tema matemático tão importante como a Álgebra e que levanta dificuldades aos alunos, nomeadamente, a simbolização e a generalização Leciona ao 8.º ano

A recolha de dados é feita através de: observação participante (OP) de aulas (identificadas por Aula_tema_data) e das sessões conjuntas (identificadas por n.º SC_data) do grupo colaborativo (GC); entrevista inicial (EI) semiestruturada e análise documental dos trabalhos dos alunos. A OP permitiu obter dados da prática dos professores na sua atuação em sala de aula e da sua participação nas sessões de trabalho no GC. A EI possibilitou recolher dados sobre aspetos profissionais, através da voz dos professores. A EI e as sessões do GC foram gravadas em áudio e as aulas em vídeo. A investigadora (primeira autora) assume o papel de observadora participante enquanto elemento ativo do GC e apoiando, pontualmente, os professores na aula e os alunos no seu trabalho individual. Os trabalhos dos alunos completam os dados fornecidos pelos outros instrumentos de recolha.

A análise de dados tem por base a análise de conteúdo e a definição de categorias de codificação. Os dados foram analisados, à luz dos modelos teóricos revistos, com vista à identificação de regularidades que levaram à formulação de categorias (Bodgan & Biklen, 1994). Seguidamente, fez-se uma primeira tentativa de organizar os dados recolhidos nessas categorias para verificar a sua viabilidade e proceder a ajustamentos, que culminaram no abandono de algumas categorias e na definição de outras, até se alcançar as fixadas no Quadro 2, resultantes de um processo de articulação recursivo de categorias *a priori* e *a posteriori* como concretizações de temas estabelecidos para a dimensão: Dinamização da discussão coletiva.

Quadro 2 – Dimensões, Temas e Categorias de análise

	Dimensão	Temas	Categorias de análise
Desafios *Scaffolding* social e analítico; Diversidade e intencionalidade	**Dinamização da discussão coletiva**	Componentes da discussão, discurso	Apresentação; comparação, avaliação e filtragem; conclusão Solicitação e discussão de muitas ideias; filtragem; solicitação e discussão de muitas ideias; conteúdo matemático filtrado; conteúdo matemático não filtrado

No tema componentes da discussão, fez-se um reajustamento do modelo de Sherin (2002) agrupando as duas últimas componentes numa só e incluindo uma terceira designada, neste estudo, de conclusão, por se olhar para a discussão no seu todo e não como um conjunto de vários segmentos e porque a análise preliminar dos dados indicou ser um modelo que se ajustava bem à prática dos professores. Recorre-se aos modelos de Speer e Wagner (2009) e Leikin e Dinur (2007), para analisar os desafios que os professores enfrentam na orquestração da discussão.

Na apresentação de resultados, quando existem várias evidências para uma mesma categoria de análise, mostra-se a título de exemplo dados da aula de um professor, para algumas tarefas usadas nas discussões promovidas, que seguem em Anexo 1 e são brevemente descritas no Quadro 3.

Quadro 3 – Breve descrição das tarefas usadas nas discussões

Tema	Tarefas
Sequências e Regularidades	***Palitos*** Esta tarefa apresenta uma sequência pictórica de vários retângulos construídos com palitos. Os alunos são convidados a determinarem termos próximos e distantes da sequência de figuras apresentada; a verificarem se um determinado elemento é ou não termo da sequência dada; a escreverem uma expressão para o termo geral da sequência apresentada; e a analisarem e explicarem uma expressão dada para o termo geral da sequência. ***Cubos com autocolantes*** Esta tarefa surge num contexto de um jogo com cubos e autocolantes. Os alunos são chamados a determinarem termos próximos e distantes da sequência dada e a escreverem e explicarem uma expressão para o termo geral da sequência de figuras apresentada.
Funções	***Inscrição no ginásio*** A tarefa surge num contexto próximo dos alunos, onde são convidados a preencher uma tabela que relaciona o número de meses de frequência de dois ginásios com o valor total gasto; a elaborar um gráfico que relacione essa informação; a conjeturar sobre o ginásio mais vantajoso; e a traduzir por uma expressão a relação entre as duas variáveis.
Equações	***A cantina da escola*** Esta tarefa apresenta um conjunto de informação em linguagem natural relacionada com o número de almoços servidos pela cantina de uma escola. Pretende-se que os alunos resolvam problemas envolvendo equações. ***A Família Rosa*** Com esta tarefa pretende-se que os alunos resolvam problemas com equações. Esta tarefa surge num contexto de um desafio, a partir do qual os alunos conseguem determinar a idade de cada um dos filhos de uma senhora conhecendo pequenas pistas, como a soma das idades dos quatro filhos e algumas relações entre as suas idades. ***Eleição do delegado de turma*** Com o trabalho nesta tarefa, os alunos resolvem problemas envolvendo equações com denominadores. A tarefa aparece num contexto de eleição do delegado de turma, onde se conhecem informações relativas ao número de votos de três candidatos. ***Sacos e bolas*** Esta tarefa envolve os alunos na resolução de problemas envolvendo equações com denominadores. A tarefa surge num contexto em que os alunos têm que passar bolas de um saco para o outro, de forma a verificarem as condições estabelecidas.

As tarefas *Palitos*, *Cubos com autocolantes*, *Inscrição no ginásio*, *A cantina da escola* e *A família Rosa* são exploradas pelos professores Ana e Afonso e as tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas* são exploradas pelos professores Afonso e Jorge.

Apresentação e discussão de resultados

A apresentação de resultados organiza-se em duas partes: i) componentes da discussão; e ii) discurso da discussão.

Componentes da discussão. Os professores estruturam a discussão coletiva em três componentes: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão.

Apresentação. Os professores iniciam sempre a discussão coletiva com a escolha dos alunos que pretendem que apresentem as suas estratégias de resolução. Essa forma de atuação é assumida por Afonso como uma mudança na sua prática letiva, já que anteriormente privilegiava a participação voluntária dos alunos: “Primeiro procuro saber se há algum voluntário (...) Quando não há (...) vou sempre para aqueles que têm mais competências, ou que eu penso que são melhores alunos, pronto, abrindo sempre discussão” (EI_set 2013). Em resultado da sua participação no GC, Afonso compreende que essa forma de atuação poderia comprometer o sucesso de uma discussão, não alcançando o seu propósito: “Se há uma que tem tudo [refere-se à estratégia algébrica], então as outras não precisam [de ser apresentadas]” (4.ª SC_9 jan 2014).

A alteração da prática de Afonso para dar início à apresentação das resoluções, selecionando os alunos que pretende que partilhem a sua estratégia em oposição à sua participação voluntária, mostra uma opção ao alcance do professor que favorece a promoção da linguagem algébrica.

Em linha com o exposto, os professores iniciam a apresentação das estratégias pelas que recorrem a linguagem matemática informal – estratégias de tentativa e erro. Apoiados nesse critério, ora começam pelas estratégias mais frequentes, ora pelas que surgem de forma isolada. Ana, nas tarefas *Palitos* e *Inscrição no ginásio* inicia pela mais frequente, assim como Jorge na tarefa *Sacos e bolas*, à semelhança de uma outra tarefa:

> **Ana:** Depois na segunda questão houve cinco grupos que fizeram uma continha, porque vocês, a maior parte de vocês tinha dito que já tinha pensado nas operações inversas quando estavam no 5.º ou 6.º ano. Por exemplo, tenho só aqui dois grupos que não fizeram, que fizeram de outra maneira. (Aula_Sequências_nov 2013) (A_S_nov 2013)

Já nas tarefas relacionadas com o tópico das equações, Ana começa pelas resoluções singulares, embora recorrendo também à estratégia de tentativa e erro. Os raciocínios que os alunos mobilizam neste tipo de estratégia são distintos. Na tarefa *A família Rosa*, as tentativas dos alunos consistem em experimentações de números aleatórios, iniciando por um número redondo, 10:

> **Rui:** Então, fui outra vez por tentativas. (...) E experimentei primeiro com o 10 e não deu, tentei baixar mais um bocadinho, fui para o 8, voltou a não dar, fui para o 7 e já deu.
>
> **Ana:** Então, e o 10? Por que é que começaste com o 10?
>
> **Rui:** (...) Foi pura tentativa. (Aula_Equações_abr 2014) (A_E_abr 2014)

Na tarefa *A cantina da escola*, na turma de Ana, o número que os alunos escolhem para iniciar as suas tentativas resulta da manipulação das condições do enunciado e consiste na divisão equitativa do número de almoços sobrantes pelos quatro dias da semana:

> **Rui:** Na semana toda foram servidos 666 almoços e nós tirámos logo 156 que foi o da sexta, que deu 510. Depois dividimos 510 por 4.
>
> **Ana:** Porquê? Explica lá. (...)

Rui: Começámos com 128 na segunda. (A_E_abr 2014)

Afonso também começa a apresentação das resoluções para a tarefa *Eleição do delegado de turma* por uma singular, estando as tentativas organizadas em tabela e consistindo na experimentação arbitrária de um número redondo, 10. No caso de Jorge, as tentativas que os alunos fazem surgem organizadas num texto:

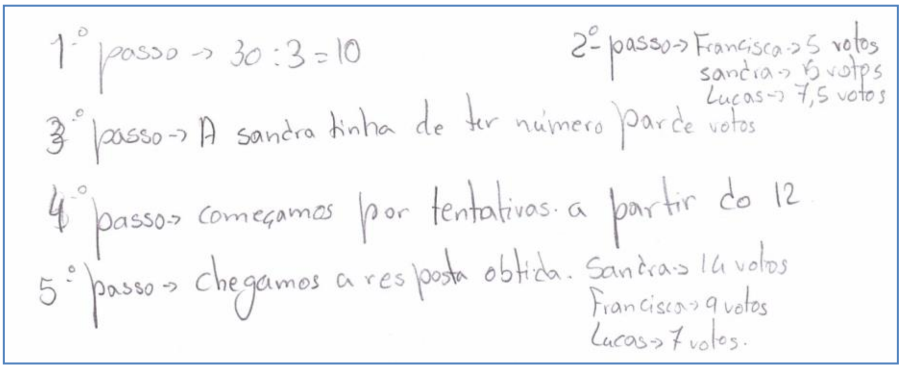


Figura 1 – Resolução baseada na produção de um texto matemático

Os alunos iniciam as suas tentativas por um número redondo (10), mas que corresponde à divisão equitativa do número de votos pelos concorrentes e não à experimentação aleatória, como noutras estratégias escolhidas para dar início à discussão.

Na tarefa *Palitos*, Afonso também inicia por uma estratégia singular e que recorre à tentativa e erro:

Afonso: Como é que justificaram se era possível construir uma figura com 76 palitos? (...)

Aluno: Fiz a contagem, se adicionarmos sempre 3 ao termo anterior acabamos por ver que dá 76. (A_S_dez 2013)

Só de seguida avança para a estratégia mais frequente:

Ricardo: 76 palitos. Fiz 76 menos 1 que vai dar 75 e depois dividi por 3.

Afonso: Fizeste a inversa, não foi? (A_S_dez 2013)

Seguindo um critério diferente para escolha das estratégias que dão início à apresentação, Afonso, na tarefa *A cantina da escola*, começa pelas estratégias algébricas, porque não surgiram outras nas resoluções dos alunos, em virtude do momento em que introduz a tarefa – a concluir a temática da resolução de problemas envolvendo equações. Contudo, em linha com outras discussões, seleciona a estratégia mais frequente para fomentar a apresentação das resoluções dos alunos: “Portanto, quem vai apresentar é quem considerou x na segunda-feira” (A_E_mai 2014).

Um olhar sobre a prática de Ana e Jorge denota que o primeiro critério tem em conta a promoção da linguagem algébrica e o segundo baseia-se no que consideram potenciar o envolvimento dos alunos na discussão, selecionando para apresentação as estratégias seguidas por um maior número de alunos. Acreditam, assim, que terão os alunos envolvidos na discussão, acrescentando contributos importantes e participando ativamente nas explicações, justificações e argumentações oferecidas, já que desenvolveram o mesmo tipo de raciocínio. Já Afonso também apoia a sua prática na promoção da linguagem algébrica, iniciando pelas estratégias de tentativa e erro, contudo, na tarefa *Palitos*, fá-lo da estratégia singular para a mais frequente, face aos raciocínios dos alunos mobilizados nas resoluções. Na estratégia mais frequente, os alunos recorrem às operações inversas para verificar a pertença de um termo a uma sequência, em oposição à determinação de todos os termos da sequência até chegar ao pretendido, como apresentava a estratégia singular.

Comparação, avaliação e filtragem: Os professores dão continuidade à apresentação de estratégias introduzindo outras para análise, com propósitos claros e carregados de intencionalidade matemática e não pela simples razão de que todas as estratégias de resolução devem ser apresentadas em coletivo, apoiando normas de discurso (articulação entre o *scaffolding* social e o analítico). É característica da prática de Ana justificar aos alunos as opções que toma no decorrer da discussão, como mencionar as razões que a levam a introduzir mais uma resolução para análise:

> **Ana:** Esta é a resolução aqui deste grupo da frente e eu fiquei muito confusa. (...) Então, 15 é igual a 46? 20 é igual a 61? E 25 é igual a 76? (...) é só para vos dizer que isto ficou assim escrito, não puseram mais nada. (...) Então os meninos deste grupo têm agora oportunidade para se defenderem. (A_S_nov 2013)

Com esta ação, a professora alerta os alunos para a importância de apresentarem com rigor os seus raciocínios. Na tarefa *A cantina da escola*, a sua intervenção serve para clarificar os alunos da possibilidade de traduzirem a mesma informação apresentada em linguagem verbal em linguagem matemática de diversas formas: "Pronto, então agora se calhar ia-vos só apresentar a primeira parte, depois a resolução é idêntica à deste grupo. (...) Só para vocês verem que pode ter outra leitura do problema, está bem?" (A_E_abr 2014).

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, o propósito da professora é despertar a curiosidade dos alunos para analisarem duas expressões distintas para o termo geral de uma mesma sequência pictórica, destacando que uma delas é mais frequente na turma: "Eu queria aqui falar em dois casos, porque há aqui dois casos que têm regras diferentes (...). Na segunda questão, qual é a regra que a maior parte de vocês faz?" (A_S_nov 2013).

Os objetivos matemáticos que os professores procuram atingir com a introdução de novas estratégias de resolução para comparação e avaliação são diversos. Ana promove a comparação de estratégias na tarefa *Palitos*, a partir da filtragem, isto é, aproveita uma ideia que estava a ser valorizada na apresentação das estratégias (verificação da pertença de um termo à sequência a partir da escrita da expressão do termo geral) para os levar a concluir que não é necessário conhecer o termo geral de uma sequência para verificar se um termo pertence ou não a essa sequência, embora sendo uma ideia menos potente do ponto de vista do uso da linguagem algébrica:

Constança: Nós já sabíamos que a lei de formação era $3n+1$ e então fizemos a operação inversa, fizemos $76-1$ a dividir por 3.

Ana: Porque já tinham a lei de formação. (...) Então e quem não tem a lei de formação como é que resolveria? Não resolve? (...)

Aluno: Fizemos por tentativas. (A_S_nov 2013)

A professora, ao interromper a explicação da aluna para seguir uma ideia que lhe parece importante, mostra o quanto é importante saber o que agarrar e deixar cair numa discussão, como foi o caso desta em que não deixa a aluna concluir a sua intervenção (faltava a explicação da verificação da resposta), para seguir uma ideia que reconheceu ser importante, revelando, assim, flexibilidade na sua atuação – diversidade e intencionalidade. Este episódio permite refletir sobre a imprevisibilidade de uma discussão e os desafios que o professor enfrenta na sua condução.

Jorge recorre à transição entre linguagens matemáticas diferentes (não algébrica para algébrica), na tarefa *Sacos e bolas*, para incitar a comparação, através da atribuição da incógnita a designações distintas, assim como Afonso na tarefa *Eleição do delegado de turma*:

Afonso: [Primeiro tinha sido apresentada a resolução apoiada numa tabela] Então e depois como é que surgiu a outra parte? (...) Talvez, este grupo que fez uma maneira um bocadinho diferente, não foi? (...)

Aluna: Nós escolhemos a Sandra, em que x era o número de votos da Sandra.

Afonso: x. A vossa colega anterior considerou o x como sendo o número de votos da Francisca, este grupo considerou o x o número de votos da Sandra, portanto o resultado vai ter que dar diferente, certo? (A_E_jan 2014)

Nesta tarefa, Jorge recorre à análise de um passo errado numa resolução que está a ser apresentada para estimular a comparação, com a finalidade de levar os alunos a compreenderem a importância do rigor da linguagem matemática:

Jorge: Por que é que aquele segundo passo está mal?

Mafalda: Então porque não há meios votos.

Jorge: A conclusão está correta, mas esse segundo passo não está muito correto, o segundo passo em si. (...)

Aluno: Não podemos ter 7 votos e meio. (...)

Aluno: Não, é porque 5 mais 15 mais 7 e meio dá 27 e meio e não vai dar 30. (...)

Mafalda: 5 votos de diferença. (...)

Jorge: Deixa ficar o 7 e meio, não há problema nenhum. Assim, já está mais de acordo, apesar de que não são 30 votos. Pronto, mas o que o grupo pensou foi o seguinte: bem, pelo menos eu já sei que a Sandra nunca pode ter um número ímpar de votos, portanto e já restringiu nos 30 votos, deitou logo ali uma série de votos fora, tornou mais fácil a conclusão e depois fizeram por tentativas, não foi? (A_E_jan 2014)

A análise e discussão de erros é um aspeto que Jorge valoriza bastante numa discussão e que o distingue dos outros casos deste estudo. A oportunidade que reconhece na partilha destas situações é possível graças à sua preparação da discussão, em particular da seleção e sequenciação das resoluções dos alunos, aprendizagem alcançada com a sua participação no GC. Na sua prática letiva anterior, a discussão decorria em função das respostas dos alunos. Embora o primeiro aluno apresente um argumento válido para justificar o erro cometido, no passo em análise, o professor continua a insistir no erro, de forma a levar os alunos a introduzirem mais justificações, até alcançar a que considera mais importante e que relaciona informação do enunciado. O professor revela uma atuação flexível, na medida em que tem ideias claras do que pretende seguir e aprofundar com o raciocínio em análise – diversidade e intencionalidade.

Na tarefa *A família Rosa*, a comparação que Ana promove tem como objetivo alertar os alunos para a importância de apresentarem a resposta ao problema e não apenas a solução da equação resolvida:

> **Ana:** Pronto, está a explicar a resolução da equação, não é? Pronto, e então quando chegaste ao fim obtiveste.
>
> **Paulo:** 2.
>
> **Ana:** 2, mas não resolveste o nosso problema. Pois não?
>
> **Paulo:** Não, saltei a última parte.
>
> **Ana:** Pois foi. Conclusão, chegámos ao fim: F é 2, batemos palmas e não chegou. (...) É só para dizer: o Augusto teve o cuidado de pôr ali. Vocês tiveram o cuidado de pôr isso no vosso papel? (A_E_abr 2014)

Ana, na tarefa *Cubos com autocolantes*, usa a comparação para analisar com os alunos a emergência de duas expressões distintas para o termo geral da sequência:

> **Mara:** Então. Na figura com 10 cubos os 2 do canto tem sempre 5 autocolantes e os 10 menos 2 dá 8. Como os cubos do meio tem 4 autocolantes faço 4 vezes 8 igual a 32 mais 10, 42. (...)
>
> **Vera:** Como é sempre de 4 em 4, acrescentam-se sempre 4 autocolantes, depois por exemplo o número, no segundo caso 4 vezes 2, 4 vezes que é o segundo termo. (...) Dá 8. Para chegar a 10, mais 2. (A_S_nov 2013)

A professora usa, também, a comparação, na tarefa *Inscrição no ginásio*, para prevenir para o uso da linguagem matemática com rigor e para levar os alunos a compreender raciocínios que podem e não podem desenvolver numa certa resolução, isto é, podem recorrer à ideia de dobro numa situação envolvendo uma relação de proporcionalidade direta, mas não o podem fazer em casos em que relação entre as variáveis não é desse tipo. Analisa, ainda, com os alunos o raciocínio que poderiam desenvolver de forma a usar a ideia de dobro numa função afim, promovendo, assim, a avaliação de ideias:

> **Tomás:** Nós até aos 4 meses fizemos tal e qual como a Íris disse, nos *100 calorias* aos 8 meses também. No *Em forma* dos 4 meses para os 8, como a mensalidade era gratuita fizemos vezes 2. Pronto. (...)

> **Ana:** Então e porque é que eu não posso, e agora se calhar o grupo ali da frente. O Tomás está aqui a dizer que para passar dos 4 meses para os 8 pode duplicar no ginásio *Em forma* mas não pode fazer o dobro no *100 calorias*, mas tenho ideia que o grupo ali da frente duplicou. (...)
>
> **Vicente:** Mas depois subtraímos os 50.
>
> **Ana:** Será que pensou bem? (...) Ele diz que pode chegar aos 4 duplicar e tirar os 50.
>
> **Tomás:** Pode. (Aula_Funções_mar 2014) (A_F_mar 2014)

Ana leva, também, os alunos a avaliar os raciocínios em jogo através do questionamento que dirige aos que estão a acompanhar a explicação que está a decorrer no quadro. A avaliação surge, também, através de reações dos alunos face a interpretações que a professora oferece para raciocínios apresentados, como foi o caso da tarefa *A cantina da escola*, onde menciona que as equações escritas para o problema são idênticas e onde leva os alunos a relacionar o conjunto solução de equações diferentes com a unicidade da resposta ao problema:

> **Ana:** Hã? Idêntica, mas diferente. Reparem, o que é que está diferente? Tem um denominador e tem parêntesis, que a outra não tinha. (...) Então, o que é que tu achas, de acordo com o resultado que ali está, o que é que vai ter que dar o nosso x?
>
> **Guilherme:** 180.
>
> **Ana:** Pronto. Foi isso que aconteceu. (A_E_abr 2014)

Conclusão. Os professores usam o fecho da discussão para focarem, relacionarem ou generalizarem ideias importantes discutidas ao longo da apresentação e comparação das diversas estratégias. Na tarefa *Inscrição no ginásio*, Ana leva os alunos a relacionarem a expressão da função linear e afim com o respetivo nome:

> **Ana:** Que tipo de função?
>
> **Alunos:** Linear.
>
> **Ana:** Linear. (...) Qual é a constante? (...) Então e aquela daquele lado? Também é linear?
>
> **Vários:** Não.
>
> **Íris:** Tem ali o mais 50.
>
> **Ana:** Então e como se chamavam aquelas?
>
> **Alunos:** Afim. (A_F_mar 2014)

Afonso aproveita, também, esta tarefa para relacionar representações, nomeadamente, a gráfica e a algébrica e para atribuir significado aos parâmetros envolvidos em cada uma das expressões:

> **Afonso:** Qual das retas é que lhe corresponde? À preta ou à vermelha?
>
> **Alunos:** À preta.
>
> **Afonso:** Então na preta podes pôr y igual a...

Aluno: kx. (...)

Afonso: Quanto é que é o k?

Aluno: Ah! 45.

Afonso: 45. $45x$. E a vermelha?

Aluno: $y = 40x + 50$.

Afonso: Isso. (...) Por que é que começa no 50?

Aluno: Porque é o valor da inscrição. (A_F_mar 2014)

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, Ana usa a conclusão para generalizar e explicar uma relação encontrada para os diversos termos da sequência:

Ana: Vamos tentar generalizar esta fórmula. E se eu quisesse para o caso geral? (...) Se tivéssemos a figura número n.

Aluno: Era 4 vezes n menos 2.

Ana: n menos 2. Muito bem, por que tiras 2?

(um aluno faz uma pergunta mas é impercetível)

Então se eu tiro 2 da ponta, quantos ficam por dentro? Ficam menos 2. E na figura 10? Então não é? Tenho 10 cubinhos seguidos. Ele tira os 2 da ponta, tira este e tira aquele e fica com 8 cubos aqui no meio. Então o que é que ele faz? Tem 4 autocolantes para 8 cubos mais 5 deste e 5 deste que dá 10. Muito bem. Está bem? É outra técnica. A maior parte dos alunos foi pela outra. (A_S_nov 2013)

Nas tarefas do tema das equações, a conclusão permite, aos três professores, focar ideias importantes como, sensibilizar os alunos para a escrita de diferentes equações para a tradução da mesma informação apresentada em linguagem natural. Jorge reforça, ainda, as alterações de procedimentos e de conceitos entre as diferentes equações escritas e relembra os passos a seguir na resolução de uma equação, na tarefa *Sacos e bolas*, alertando para a relação entre a solução da equação e a resposta ao problema:

Jorge: Esta é ligeiramente mais simples que aquela equação. Aquela tem parêntesis e denominadores. Não se esqueçam que ele primeiro ali tirou os parêntesis (...) Depois é que foi aos denominadores. (...) Portanto, dependendo do que eu chamo à variável assim eu tenho uma equação diferente. De certeza que se tudo estiver bem, a solução do problema fica exatamente igual. Ou seja, resolver um problema não tem que ser sempre da mesma maneira. A abordagem pode ser feita de maneiras diferentes, está bem? (A_E_jan 2014)

A conclusão da discussão é o aspeto mais frágil da prática de condução da discussão coletiva dos três professores estudados, em particular da prática de Afonso. É possível que os professores assumam que, com os anteriores momentos de discussão proporcionados aos alunos, os conceitos matemáticos que pretendiam discutir tenham sido alcançados, não sentido necessidade de valorizar este último momento. É, contudo, importante que os professores reflitam sobre a importância deste momento para alunos desta idade, pois a falta de sistematização das principais ideias pode levar a que elas se percam face às dificuldades que os alunos demonstram no reconhecimento do que é realmente importante de tudo o que foi apresentado e analisado.

Discurso da discussão. Na discussão, o discurso segue um processo de estreitamento seguido de ampliação, e assim sucessivamente, em consonância com as componentes da discussão. Os professores começam por solicitar a um grupo de alunos para apresentar a sua estratégia de resolução – *solicitação e discussão de muitas ideias* – correspondendo ao momento de apresentação das estratégias de resolução. Seguidamente, focam a atenção dos alunos em alguma característica particular – *filtragem* – de modo a promoverem a comparação, avaliação e filtragem. A análise desses raciocínios específicos pretende levar à introdução de mais ideias na discussão, através da inclusão de mais estratégias para comparação, originando, em termos de discurso, uma nova *solicitação e discussão de mais ideias*. Esse encadeamento continua até à conclusão da discussão. Olhando, também, para o conteúdo do discurso, a prática dos professores denota que, numa primeira fase, a sua preocupação reside, essencialmente, no início da discussão, tendo uma resolução para analisar – *conteúdo matemático não filtrado*. Face a essa estratégia, a sua preocupação evolui para a análise de raciocínios especiais – *conteúdo matemático filtrado* – como um erro, uma explicação que precisa ser melhorada, uma ideia que necessita ser desconstruída... Com este tipo de atuação, os professores revelam flexibilidade, ao decidirem levar para a discussão essas ideias – intencionalidade e diversidade. O afunilamento que fazem aos raciocínios dos alunos é para alcançar o propósito que definem para a discussão e para o estabelecimento de conclusões importantes. Os professores apoiam normas de discurso que articulam *scaffolding* social e analítico, já que evidenciam mudança de preocupação para o conteúdo das ideias matemáticas quando já conseguem ter os alunos a participar no discurso.

Conclusão

Os professores do estudo dinamizam a discussão coletiva segundo três componentes principais: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão, à semelhança do proposto por Sherin (2002). Dão início à discussão com práticas muito semelhantes, com a escolha de um aluno para apresentar a sua resolução, privilegiando, para começar, as resoluções que envolvem linguagem informal e foram realizadas por muitos alunos. Evoluem, imediatamente, para o convite aos alunos que seguiram outras estratégias envolvendo linguagem mais formal, garantido assim a promoção da linguagem algébrica. Deixam para último a apresentação das estratégias singulares, com recurso a linguagem algébrica. A forma como transitam da apresentação para a comparação, promovendo o discurso entre os alunos, é distinta nos três casos: Ana leva os alunos a analisar uma estratégia menos frequente, ou resoluções que recorram a representações diferentes; Afonso desafia os alunos a comparar designações diferentes para a incógnita e Jorge encaminha os alunos para a análise de um erro ou para a explicação de uma estratégia. Com estas opções, Ana leva os alunos a: analisar duas expressões distintas para o termo geral de uma sequência; compreender raciocínios que podem ou não desenvolver para as funções lineares e afins; relacionar a solução de uma equação com a resposta ao problema, destacando a importância da apresentação da resposta. Jorge e Afonso promovem a conexão entre linguagens. Adicionalmente, Ana contribui com a sua atuação para desconstruir erros e Jorge para levar os alunos a analisar um passo errado de uma resolução. Jorge, em oposição ao professor *Gage*, do estudo de Speer e Wagner (2009), reconhece potencial nos erros dos alunos para aprofundar ideias matemáticas, não se limitando a responder às incorreções.

O discurso promovido pelos professores sofre um afunilamento desde o momento de apresentação das estratégias até à conclusão, onde as ideias são por eles sistematizadas em colaboração com os alunos. Os professores sensibilizam os alunos para a escrita de diferentes equações para a mesma informação em linguagem natural. Jorge recorda, ainda, aos alunos, no tema das equações, os passos a seguir na respetiva resolução. Já Ana leva os alunos a generalizar e explicar relações matemáticas e a relacionar a expressão das funções afim e linear com a sua representação gráfica e com a sua designação, à semelhança de Afonso.

Enquanto no estudo de Leikin e Dinur (2007), a flexibilidade de *Anat* favoreceu a introdução de uma solução nova para o problema, nestas discussões os professores revelam flexibilidade de atuação na promoção do discurso em sala de aula, em particular na justificação da introdução de determinadas resoluções para análise e na interrupção de explicações dos alunos para seguir certas ideias.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

DGE (2018). *Aprendizagens essenciais: Ensino básico*. Consultado em 5 de setembro de 2018 através: http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna.* Lisboa: McGraw-Hill.

Leikin, R., & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 328-347.

Nathan, M.J., & Knuth, E. J. (2003). A Study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction*, *21*(2), 175–207.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Educación matemática: teoría, crítica y prática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J.P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Sherin, M.G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 205-233.

Speer, N.M., & Wagner, J.F. (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 530-562.

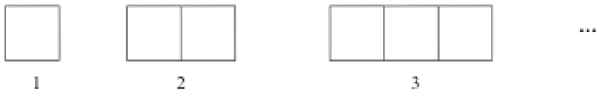
Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Yerushalmy, M., & Shulamit, E. (2010). Examples of learning through teaching: Mathematical pedagogy. In R. Leikin, & R. Zazkis (Eds.), *Learning through teaching mathematics* (pp. 191-207). New York, NY: Springer.

ANEXO 1

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n-1)}$$

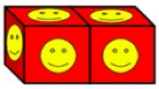
Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

TAREFA: Inscrição no ginásio

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios ***100 calorias*** ou ***Em forma*** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias

Inscrição: 50 €

Mensalidade: 40 €

Em Forma

Inscrição: Gratuita

Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	1	3		8		11	12
Total (em euros)	*100 calorias*			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

TAREFA: A cantina da escola

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da *Escola Azul* do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana? Explica como pensaste.

TAREFA: Família Rosa	

A D. Miquelina Rosa tem 4 filhos, dois rapazes e duas raparigas. No dia em que festejou o seu 47.º aniversário, apercebeu-se que a soma das idades dos seus 4 filhos era igual à sua. A Maria tem 5 anos de diferença da irmã mais nova, a Sara. Um dos irmãos da Maria, o João, tem o triplo da sua idade e o outro, o Manuel, tem mais 10 anos do que a Maria. Qual é a idade de cada um dos filhos da família Rosa? Explica como pensaste.

Tarefa 1 – "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

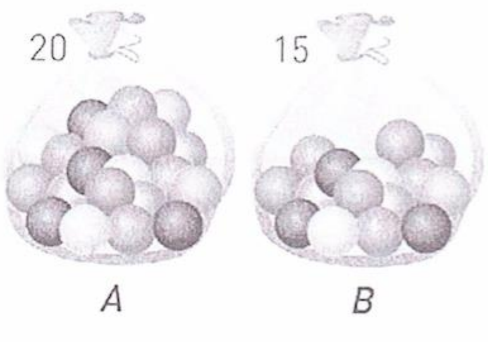
- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Tarefa 2 – "Sacos e bolas"

Na figura estão representados dois sacos com bolas. O saco A tem 20 bolas e o saco B tem 15 bolas.



Determina o número de bolas que devem passar do saco A para o saco B para que este fique com $\frac{3}{2}$ do número de bolas que ficam no saco A.

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

PREPARAR E CONDUZIR DISCUSSÕES COLETIVAS NO 2º ANO DE ESCOLARIDADE: PRÁTICAS E DESAFIOS

Cátia Sofia Dias Prata

Colégio de São Filipe, Setúbal

catia.prata@saofilipe.pt

Ana Maria Roque Boavida

Instituto Politécnico de Setúbal, Escola Superior de Educação

ana.boavida@ese.ips.pt

Resumo: Esta comunicação decorre de um estudo cujo principal objetivo foi analisar e compreender de que modo uma futura professora poderia preparar e conduzir discussões coletivas orientadas para o ensino da subtração via resolução de problemas bem como os desafios por si experienciados. Do ponto de vista metodológico, constitui uma investigação sobre a própria prática e está associado a uma intervenção pedagógica realizada numa turma do 2º ano.

Os resultados permitem evidenciar que uma preparação cuidadosa e pormenorizada das aulas, em que se inclui a seleção de problemas cujo contexto esteja próximo da vivência dos alunos e que possibilitem a emergência de diferentes estratégias de resolução, dota o professor de recursos que contribuem para sentir maior segurança nas atividades de monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, lidar com as suas dificuldades e conduzir discussões coletivas matematicamente produtivas para a aprendizagem. Permitem, ainda, destacar que os principais desafios se situaram ao nível da gestão do tempo, do incentivo à participação de todos os alunos nas discussões e de os ajudar a encarar o erro como uma forma de pensar legítima que os pode ajudar a avançar na sua compreensão da Matemática.

Palavras-chave: Discussões coletivas; Resolução de problemas; Ensino da Matemática no 1.º Ciclo; Subtração.

Introdução

Sabe-se, hoje, que a compreensão, pelos alunos, de conceitos e processos matemáticos, a sua capacidade e confiança para os mobilizar na resolução de problemas e o desenvolvimento de uma disposição produtiva relativamente à Matemática, são modelados pelo ensino que encontram na sala de aula (NCTM, 2000; Smith, & Stein, 2011). Além disso, a investigação evidencia que a natureza e o carácter das práticas discursivas em que alunos e professores se envolvem, tem um profundo impacto nas oportunidades de aprendizagem dos alunos e "molda as suas identidades como conhecedores e fazedores de Matemática" (Cirillo et al., 2014, p. 141).

Se se pretende apoiar e promover a "proficiência matemática" (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, p. 5) dos alunos, é importante que o discurso matemático que ocorre na aula tenha por ponto de partida a sua exploração de tarefas cognitivamente desafiadoras e que estes se envolvam ativamente em discussões coletivas de estratégias de resolução destas tarefas que sejam matematicamente produtivas, isto é, em discussões em que o professor, tirando partido do que os alunos dizem e fazem, os conduz em direção a um pensamento matemático mais poderoso, eficiente e preciso (Lampert, 2001; NCTM, 2014; Smith, & Stein, 2011).

Embora discussões coletivas deste tipo sejam um contexto muito poderoso para a aprendizagem da Matemática, orquestrar "uma discussão matemática produtiva (…) é uma tarefa extremamente exigente e complexa. O papel do coordenador da discussão é particularmente difícil" (Sfard, 2003, p. 375). Mesmo professores experientes enfrentam dificuldades e desafios que não existiriam se o controle do discurso da aula estivesse sobretudo nas suas mãos (Boavida, 2005; Canavarro, 2011; Lampert, 2001; Ponte, & Quaresma, 2016; Smith, & Stein, 2011).

Esta comunicação decorre de um estudo realizado pela primeira autora durante a frequência da unidade curricular Estágio III inserida no plano de estudos de um curso de mestrado da ESE/IPS (Prata, 2017). O seu principal objetivo foi analisar e compreender de que modo a futura professora — adiante apenas designada por professora — poderia preparar e conduzir discussões coletivas orientadas para o ensino da subtração através da resolução de problemas. Neste âmbito, foram formuladas as questões: (i) A que aspetos deu especial atenção na preparação das aulas? Que desafios experienciou? e (ii) Como conduziu a discussão de estratégias de resolução de problemas? Que desafios experienciou?

Este texto está organizado em cinco secções principais de que a *Introdução* é a primeira e a intitulada *Considerações finais,* a última. A segunda e a terceira secções focam-se, respetivamente, nos principais aspetos do quadro teórico que informou o estudo e da metodologia utilizada. A quarta centra-se na descrição e análise de dados relacionados com uma das tarefas propostas durante uma intervenção pedagógica realizada numa turma do 2º. ano de escolaridade: a tarefa "Invizimals à solta" (abreviadamente designada por TIS).

Enquadramento teórico

Uma discussão coletiva matematicamente produtiva não é uma mera partilha de ideias. Referindo-se ao ensino e aprendizagem da Matemática, Staples e Colonis (2007) distinguem o que designam por discussões de partilha e por discussões colaborativas. Em ambos os casos, os alunos partilham as suas estratégias de resolução de tarefas, espera-se que entendam e respeitem o que os colegas dizem e o professor valoriza as suas contribuições. Contudo, nas discussões de partilha "muito frequentemente mantêm o foco principal no seu próprio processo de raciocínio" (Staple & Colonis, 2007, p. 258) e, em consequência, "alunos cujas ideias originais estavam incorretas podem persistir em matemática incorreta" (ibidem, p. 259). Em contrapartida, nas discussões colaborativas, "apoiam-se no pensamento subjacente às respostas dos seus colegas, têm em consideração as ideias dos colegas e trabalham explicitamente com estas ideias de modo a ampliar a linha de pensamento que emerge" (idem). Neste âmbito, as ideias apresentadas são tratadas como "trabalhos em progresso" (idem) e uma resposta errada é perspectivada como um catalisador da discussão; os alunos são incentivados a relacionar as suas próprias ideias com as de outros ou a ir para além do que pensaram encarando os problemas sob novas perspectivas; o professor procura estabelecer conexões produtivas entre o discurso que ocorre e ideias matemáticas importantes.

Para que uma discussão coletiva seja matematicamente produtiva, é essencial que os alunos resolvam tarefas matemáticas que sejam poderosas para a aprendizagem, que se envolvam ativamente na análise conjunta de estratégias de resolução destas tarefas e que haja debates de ideias destinados quer a fundamentar raciocínios quer a problematizá-los, através da apresentação de argumentos, visando justificar a sua adequação ou inadequação (Boavida, 2005; Canavarro, 2011). Este tipo de discussões, que vão no sentido das que Staples e Colonis (2007) designam por colaborativas, são fundamentais para a "negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p. 18) e ajudam os alunos a começar a "desenvolver identidades como pensadores de uma comunidade matemática e a compreender o que significa participar no discurso matemático" (Choppin, 2007, p. 308).

A orquestração de discussões coletivas, sobretudo se estas forem equacionadas como discussões colaborativas, é uma atividade muito exigente, que requer uma preparação cuidadosa e que, como vários estudos destacam, coloca o professor perante múltiplos desafios (Boavida, 2005; Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013). Para lidar com esta complexidade, Smith e Stein (2011) propõem um modelo composto por "cinco práticas": antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e conectar.

A prática de *antecipar* consiste em prever, antes das aulas, como é que os alunos poderão abordar, do ponto de vista matemático, as tarefas que lhes serão propostas. Inclui inventariar estratégias de resolução, tanto corretas como incorretas, eventuais dificuldades que podem surgir e formas de lhes fazer face. A segunda prática — *monitorizar* — ocorre durante o trabalho autónomo dos alunos: o professor circula na sala para "recolher informação de como estão a trabalhar e que ideias matemáticas estão a explorar, da sua diversidade e validade matemática" (Canavarro, 2011, p. 13). Segue-se a prática de *selecionar* determinadas estratégias de resolução a partilhar na turma. Esta seleção, que é apoiada pela recolha de informação feita durante a fase de monitorização, deve ser orientada pelos objetivos matemáticos da aula, bem como pela avaliação que o professor faz do modo como cada uma das estratégias poderá contribuir para atingir estes objetivos. A prática de *sequenciar* diz respeito à "ordem pela qual as mesmas [estratégias] irão ser apresentadas" (Smith & Stein, 2011, p. 10) na fase da discussão. Por último, é essencial que o professor ajude os alunos a *estabelecer conexões* entre a sua resolução e as de outros colegas bem como a relacionar o que foi debatido com ideias-chave da sua agenda de ensino.

As práticas apresentadas "podem ajudar os professores a gerir as discussões da aula produtivamente" (Smith & Stein, 2011, p. 61). No entanto, não são suficientes. É, também, essencial que definam, com clareza e adequação, os objetivos a atingir e que desenvolvam um reportório de ações diversificadas que lhes permitam, nomeadamente trazer as contribuições dos alunos para o espaço discursivo da aula e saber o que fazer com estas contribuições. Entre estas ações está o questionamento bem como o que Ponte e Quaresma (2016) designam por convidar, apoiar/guiar, informar/sugerir e desafiar. Além disso, é fundamental que selecionem tarefas que proporcionem aos alunos oportunidades para pensar e raciocinar matematicamente. Entre estas tarefas estão os problemas entendidos como situações motivadoras e intelectualmente estimulantes para as quais "não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução" (Vale & Pimentel, 2004, p. 12).

Resolver problemas numéricos é essencial para que os alunos aprendam as operações aritméticas elementares sobretudo quando se perspetiva esta aprendizagem privilegiando o desenvolvimento do sentido de número, uma ideia que constitui um dos eixos centrais da aprendizagem da Matemática (Delgado, 2013).

No caso da subtração, ir ao encontro desta perspectiva requer, nomeadamente propor problemas com contextos (i) que permitam explorar os diferentes significados desta operação: mudar tirando (retirar), completar e comparar, com diferença ou referente desconhecidos (Ferreira, 2012); (ii) que remetam para situações que sejam significativas para os alunos: do dia-a-dia ou que façam parte dos seus interesses, tendo em vista despertar a vontade de as explorar, de suscitar “interrogações e constituir um desafio” (Delgado, 2013, p. 84); (iii) e em que os números envolvidos tenham sido selecionados, criteriosa e intencionalmente, pois estes números podem proporcionar ou obscurecer pistas sobre estratégias de resolução a adotar, apoiar, ou não, os alunos na tomada de decisões e favorecer ou dificultar a utilização de representações ou métodos eficazes de cálculo (Delgado, 2013). Neste âmbito, é fundamental que a atividade desenvolvida a partir dos problemas permita aos alunos relacionar o contexto com os cálculos necessários, compreender que se podem resolver problemas de subtração recorrendo a diversas estratégias em se incluem as aditivas, que há várias formas de representar o raciocínio e que é importante rever os dados e o resultado.

Metodologia

A nível metodológico, o estudo realizado enquadra-se num paradigma interpretativo (Erickson, 1986) e numa abordagem qualitativa de investigação (Bogdan & Biklen, 1994). Além disso, constitui numa investigação sobre a própria prática (Ponte, 2002).

Os dados empíricos foram recolhidos através da observação participante e da recolha documental. A observação participante esteve associada a aulas lecionadas numa turma de 2.º ano durante uma intervenção pedagógica com a duração de seis semanas. Neste período, e para efeitos do desenvolvimento do estudo, foi proposto aos alunos um conjunto de seis tarefas matemáticas cada uma das quais composta por vários problemas relacionados. Estas tarefas foram construídas de raiz, tendo em atenção os interesses dos alunos, as recomendações da literatura quanto aos números envolvidos e os diferentes sentidos da subtração. As aulas em que foram exploradas organizaram-se em três fases principais: (i) apresentação da tarefa e exploração do enunciado; (ii) resolução pelos alunos em trabalho autónomo e (iii) discussão/sistematização das estratégias apresentadas. Estas aulas foram registadas em áudio e vídeo e, posteriormente, transcritas. Além disso, foram elaboradas notas de campo. A recolha documental, incidiu nas produções dos alunos e nos materiais de apoio à preparação das aulas.

O *corpus* foi objeto de uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas. Estas categorias, que emergiram do cruzamento entre o objetivo e questões do estudo, o enquadramento teórico e o que Bardin (1977) designa por leitura flutuante dos dados, foram: (i) preparação das discussões (antes da aula e nas fases da aula que as antecedem); (ii) condução das discussões (ações e intenções); (iii) desafios experienciados (na preparação e na condução das discussões).

Trabalhando com a tarefa Invizimals à Solta

Esta secção centra-se na descrição e análise de dados relacionados com a tarefa TIS e está organizada em torno de sete pontos que dizem respeito à preparação da aula em que foi explorada (1 e 2), à sua condução (3, 4, 5 e 6) e aos desafios (7).

A tarefa TIS foi a quarta das seis apresentadas no âmbito da intervenção pedagógica. A aula em que foi resolvida teve a duração de cerca de 100 minutos e houve aspetos da dinâmica adotada até aí que foram reformulados de modo a rentabilizar melhor o tempo: os alunos passaram a registar as suas estratégias de resolução em folhas de papel A3 usando marcadores de ponta grossa e, na altura da discussão, as folhas correspondentes às estratégias selecionadas eram afixadas no quadro.

1. Selecionando a tarefa. Durante o período de estágio a professora observou que os alunos jogavam, amiúde, com cartas de "Invizimals" e conversavam, animadamente, sobre estas criaturas. Este interesse, levou-a a construir uma tarefa cujo contexto envolvesse os "Invizimals" (Anexo 1). Esta tarefa é composta por quatro problemas que concebeu com o objetivo de favorecer o uso de diversas estratégias e de contemplar os vários sentidos da subtração: retirar (TISP1[1] e TISP4), comparar com diferença desconhecida (TISP2) e completar (TISP3). Os números escolhidos são múltiplos de 5 e de 10, ou números vizinhos destes múltiplos, uma vez que eram números de referência para os alunos. A sua diferença é significativamente maior do que os usados nas tarefas anteriores, pois pretendia impulsionar um progressivo afastamento de estratégias baseadas na contagem de 1 em 1 ou apoiadas em representações pictóricas.

2. Antecipando estratégias e dificuldades. A figura 1 ilustra um excerto da planificação da aula em que se pode observar a inventariação de estratégias de resolução da tarefa TIS, uma prática adotada pela professora relativamente a qualquer outra.

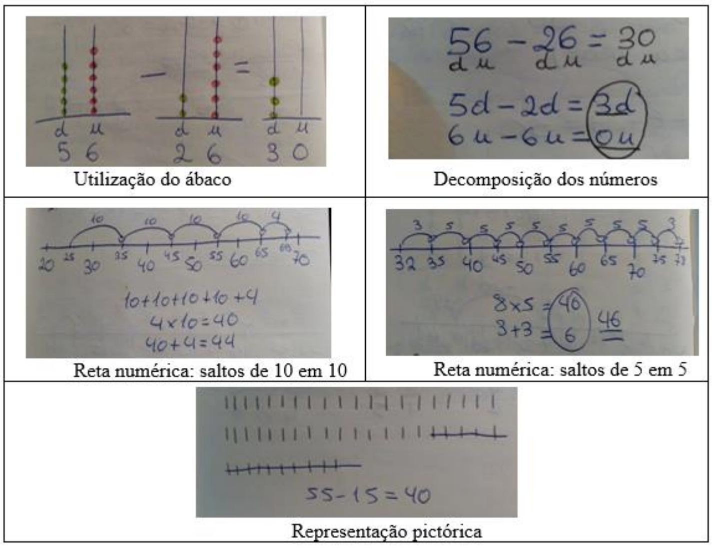


Figura 1 - Extrato da planificação da aula: antecipação das estratégias dos alunos (TIS)

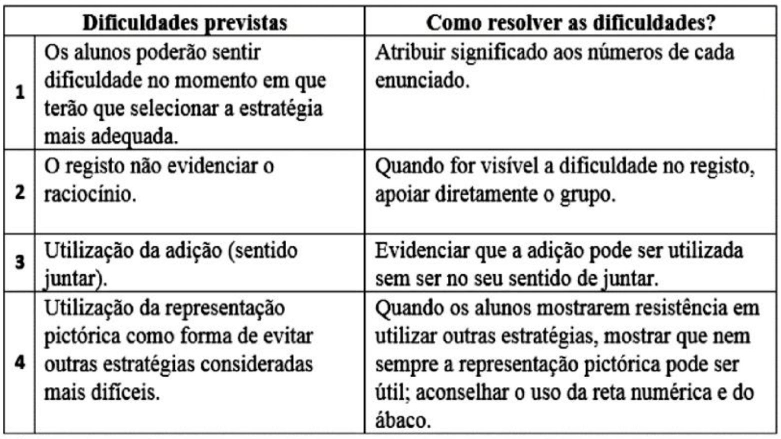
As designações usadas para as nomear são curtas, para facilitar o seu registo em tabelas concebidas para monitorizar a atividade dos alunos, pelo que não podem ser

[1] Neste texto à sigla usada para designar a tarefa "Invizimals à solta" será justaposta a letra P a que se seguem números indicadores de cada um dos problemas desta tarefa. Por exemplo, TISP1 significa problema 1 da tarefa TIS.

interpretadas como a designação correta de estratégias de cálculo. Tendo em conta as observações efetuadas em aulas anteriores, antecipou estratégias habitualmente utilizadas de forma recorrente: representação pictórica e recurso à reta numérica. Além disso, pensou que os alunos poderiam recorrer ao ábaco e à decomposição dos números tendo em conta o valor posicional dos algarismos.

A professora considera que a prática de antecipação de estratégias de resolução foi fulcral para refletir acerca de dificuldades que poderiam surgir. A figura 2 mostra as previstas para a exploração da tarefa TIS bem como o que tencionava para lhes fazer face. Por exemplo, como era frequente a utilização da adição para resolver, incorretamente, problemas de subtração se verificasse que os alunos adicionavam os números que constavam do enunciado, colocaria questões que os ajudassem a problematizar o resultado obtido e a visualizar como poderiam usar uma estratégia aditiva; se optassem por representações pictóricas ou pela contagem de 1 em 1 tentaria que compreendessem aspetos negativos desta forma de resolução e incentivaria o uso de modelos de apoio ao cálculo.

3. Apresentando a tarefa. Usualmente, a professora apresentou as tarefas usando duas vias complementares: (i) a leitura e interpretação do enunciado e (ii) o destaque das informações essenciais. Começava por solicitar a um aluno que lesse o enunciado mas como a leitura ainda não era fluída e nem sempre audível, em seguida relia-o. Posteriormente, passava à sua interpretação como ilustra o episódio 1:



	Dificuldades previstas	Como resolver as dificuldades?
1	Os alunos poderão sentir dificuldade no momento em que terão que selecionar a estratégia mais adequada.	Atribuir significado aos números de cada enunciado.
2	O registo não evidenciar o raciocínio.	Quando for visível a dificuldade no registo, apoiar diretamente o grupo.
3	Utilização da adição (sentido juntar).	Evidenciar que a adição pode ser utilizada sem ser no seu sentido de juntar.
4	Utilização da representação pictórica como forma de evitar outras estratégias consideradas mais difíceis.	Quando os alunos mostrarem resistência em utilizar outras estratégias, mostrar que nem sempre a representação pictórica pode ser útil; aconselhar o uso da reta numérica e do ábaco.

Figura 2 - Extrato da planificação da aula: antecipação de dificuldades dos alunos (TIS)

Episódio 1

P.: Vão todos agarrar no lápis e vamos sublinhar o que é importante neste problema. Então, quantas cartas tinha o Gabriel?

Margarida: 56.

P.: Então vão sublinhar "o Gabriel tem 56 cartas". Quantas cartas o Gabriel deu ao João?

Catarina: Deu 26.

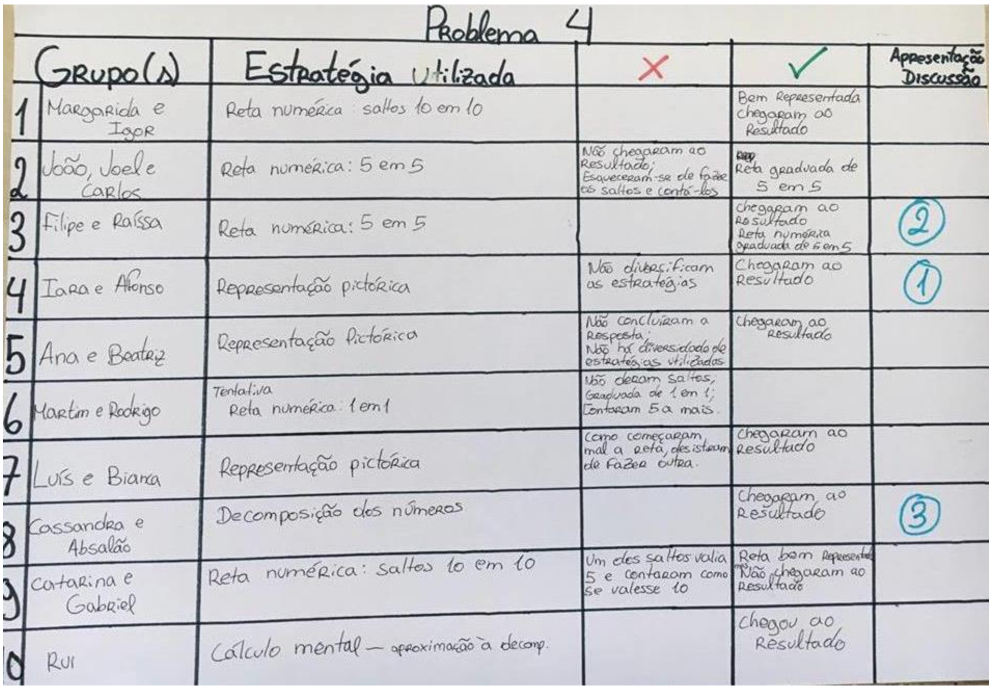
P.: Vamos sublinhar "deu 26 cartas ao João". E o que é que nós queremos saber com este problema?

Margarida: Com quantas cartas ficou o Gabriel.

P.: Então vão sublinhar "com quantas cartas ficou o Gabriel".

Este episódio, que surge após a leitura e releitura do enunciado de TISP1, revela que a professora, procurando que houvesse uma boa compreensão do problema, promoveu a exploração do enunciado de forma análoga à usada para trabalhar um texto nas aulas de Português: colocando questões-chave e incentivando os alunos a sublinhar informações importantes com o objetivo de as destacar.

4. Monitorizando o trabalho autónomo dos alunos. A tarefa TIS, tal como as restantes, foi resolvida pelos alunos organizados, maioritariamente, em pares. Para monitorizar a sua atividade, a professora circulava pelos grupos para se aperceber do que faziam e diziam. Para facilitar a prática de monitorização, construiu uma grelha onde registava os nomes dos elementos de cada grupo, as estratégias de resolução utilizadas, os aspetos positivos e negativos de cada uma, as que seriam discutidas coletivamente e a sua seriação. A figura 3, mostra esta grelha preenchida com dados relativos à resolução de TISP4.


Problema 4

	Grupo(s)	Estratégia utilizada	✗	✓	Apresentação & Discussão
1	Margarida e Igor	Reta numérica: saltos 10 em 10		Bem representada chegaram ao resultado	
2	João, Joel e Carlos	Reta numérica: 5 em 5	Não chegaram ao resultado; Esqueceram-se de fazer os saltos e contá-los	Reta graduada de 5 em 5	
3	Filipe e Raíssa	Reta numérica: 5 em 5		Chegaram ao resultado Reta numérica graduada de 5 em 5	2
4	Iara e Afonso	Representação pictórica	Não diversificam as estratégias	Chegaram ao resultado	1
5	Ana e Beatriz	Representação pictórica	Não concluíram a resposta; Não há diversidade de estratégias utilizadas	Chegaram ao resultado	
6	Martim e Rodrigo	Tentativa Reta numérica 1 em 1	Não deram saltos; Graduada de 1 em 1; Contaram 5 a mais.		
7	Luís e Bianca	Representação pictórica	Como começaram mal a reta, desistiram de fazer outra.	Chegaram ao resultado	
8	Cassandra e Absalão	Decomposição dos números		Chegaram ao resultado	3
9	Catarina e Gabriel	Reta numérica: saltos 10 em 10	Um dos saltos valia 5 e contaram como se valesse 10	Reta bem representada Não chegaram ao resultado	
10	Rui	Cálculo mental — aproximação à decomp.		Chegou ao resultado	

Figura 3 - Grelha de monitorização do trabalho autónomo dos alunos

Em geral, na fase de monitorização privilegiou a observação do trabalho dos alunos tendo em vista a sua compreensão; a utilização do questionamento para obter clarificações/justificações acerca das estratégias usadas, promover e sustentar a reflexão e ajudar a avançar face a dificuldades; a seleção e sequenciação das estratégias que seriam discutidas; e o incentivo e apoio ao registo de raciocínios. Por exemplo, em TISP1, ao aperceber-se que o registo da estratégia de um dos grupos estava incompleto, procurou dialogar com os alunos no sentido de os fazer tomar consciência deste aspeto e de fomentar a interajuda: "Então vocês têm que fazer o quê na reta numérica? (...) O Gabriel conseguiu explicar-me, por isso, ele agora vai-te explicar e ajudar-te a perceber". Em TISP4, ao constatar que outros alunos estavam com bastantes dificuldades porque pretendiam recorrer a uma estratégia icónica e a ordem de grandeza dos números era elevada, procurou que refletissem sobre esta forma de pensar: "Martim, achas que da forma que estás a fazer é fácil? Consegues meter aqui 69 pontinhos? (...)

Quais são os números que vocês têm que utilizar? (...) são números grandes: têm o 69 e têm o 25.”

5. *Selecionando e sequenciando estratégias.* Para selecionar e sequenciar as estratégias a analisar coletivamente, a professora estabeleceu critérios com base nas observações que efetuava durante a monitorização da atividade dos alunos. No geral, procurou que as estratégias fossem sequenciadas pelo seu grau de sofisticação matemática, tendo em vista incentivar a comparação da sua eficiência. Este modo de agir, visava, nomeadamente que os alunos fossem adotando estratégias mais poderosas na exploração dos problemas seguintes. A figura 4 ilustra a seleção e seriação feita quanto a TISP4. A análise desta figura revela que escolheu três estratégias ordenando-as pelo grau de complexidade. De início seria apresentada uma estratégia icónica em que o procedimento de cálculo foi a contagem de 1 em 1. Escolheu esta estratégia para que alunos que ainda estivessem no nível de cálculo por contagem pudessem compreender como se resolvia o problema e, também, porque pretendia evidenciar que há melhores formas de chegar à solução. Uma destas formas envolve o recurso a modelos de apoio ao cálculo como é o caso da reta numérica. Por esta razão, a segunda estratégia ilustrava o uso deste modelo. Os alunos que a utilizaram adotaram uma estratégia aditiva apoiando-se na reta numérica vazia que estruturaram de cinco em cinco. Posteriormente, para confirmar o resultado efetuaram uma contagem de 1 em 1, apoiando-se, também, na reta numérica, o que poderia permitir evidenciar a diferença entre este tipo de contagem e o uso de saltos de maior amplitude na reta numérica. Por último, seria apresentada uma estratégia subtrativa em que foi usado o cálculo horizontal apoiado numa decomposição dos números.

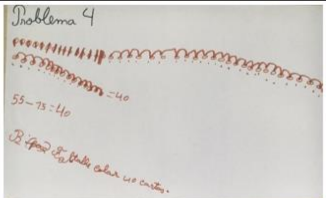
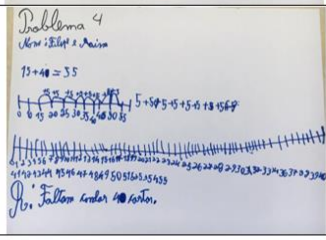
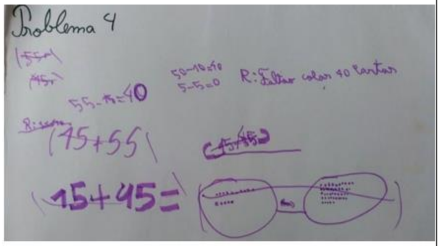
Problema 4	
Estratégia 1 Representação pictórica (*Afonso e Iara*)	
Estratégia 2 Reta numérica: saltos de 5 em 5 (*Filipe e Raíssa*)	
Estratégia 3 Decomposição dos números quanto ao valor posicional dos algarismos (dezenas e unidades) (*Cassandra e Absalão*)	

Figura 4 – Seleção e seriação de estratégias de resolução de TISP4

6. *Conduzindo discussões coletivas.* A discussão das tarefas foi organizada por problemas, ou seja, só após a análise das estratégias de resolução selecionadas relativamente a cada um dos problemas, é que os alunos passavam ao problema seguinte. Para lhe dar início, a professora convidava os autores da primeira estratégia escolhida a ir ao quadro partilhá-la incentivando-os a explicar a forma como pensaram. O episódio 2, referente a TISP1, ilustra este modo de agir:

Episódio 2

P.: Rui, conta-nos lá como é que tu pensaste, explica como explicaste a mim e à Joana.

Rui: O Gabriel tinha 56 e deu ao João 26 igual a 30.

P.: Então, o Gabriel tinha 56 cartas e deu 26 ao João e tu descobriste que o Gabriel ficava com 30. Como é que tu descobriste que eram 30 cartas? O que é que tu fizeste primeiro?

Rui: Pus as bolas.

P.: E quantas bolas contaste primeiro?

Rui: [olha para a estratégia] 26.

P.: 26, e o que é que fizeste a seguir?

A análise do episódio revela que face a uma resposta de um aluno que não permitia que outros compreendessem o modo como pensou (§2), a professora começa por redizer a sua contribuição trazendo à tona informação pressuposta (§3). Em seguida, recorre ao questionamento para o orientar sobre como iniciar a explicação (§3) e, perante respostas não esclarecedoras (§4), coloca novas questões tentando, por esta via, tornar visível o seu raciocínio (§5 e §7).

Relativamente à forma como os alunos comunicavam as suas ideias, uma preocupação recorrente da professora foi conseguir que se expressavam de forma a que todos ouvissem o que era dito, o que, com alguma frequência, não acontecia. No início da intervenção pedagógica, quando esta situação surgia deslocava-se até ao aluno que estava no quadro e repetia o que este dizia num tom de voz mais elevado. Por concluir que esta ação não favorecia a compreensão do valor da expressão audível nem a aprendizagem deste modo de falar, posteriormente, optou por se afastar bastante do quadro e, se a situação ocorria, tentava mostrar que este modo de agir não era adequado: "P.: Gabriel, estou cá atrás e não te consigo ouvir. Tens que falar mais alto".

Com o objetivo de envolver os alunos nas discussões e, simultaneamente, de impulsionar a compreensão, a professora procurava que explicassem estratégias diferentes das que tinham adotado: "P.: 30 cartas. Muito bem Rui. [dirigindo-se a*os outros alunos*] Perceberam como é que o Rui fez? [*os alunos dizem que sim*] Beatriz e Ana, o que é que o Rui fez?" (TISP1).

Uma intenção recorrente foi ajudar os alunos a entender os erros como "tentativas" e "formas de pensar", procurando retirar-lhes conotação negativa que frequentemente lhes é associada. O episódio 3, relativo à discussão de TISP4, ilustra intervenções que fez com este propósito.

Episódio 3

P.: Então tu acabaste por explicar, não conseguiste foi registar a forma como estavas a pensar.

Cassandra: [*aponta para os riscos*] Por isso é que nós temos tantos erros.

P.: Sim, porque aquilo que está nessa folha foram os vários pensamentos que a Cassandra e o Absalão tiveram.

Quando a diversidade de estratégias de resolução era ténue ou quando estas eram pouco eficientes sobretudo se os números envolvidos tinham uma maior ordem de grandeza, a professora optou por levar os alunos a contactar com outras mais poderosas. Por exemplo, na fase de sistematização da discussão de TISP1, estes revelaram ter uma predileção especial por uma estratégia que envolvia o recurso a uma representação pictórica e à contagem de 1 em 1. Diziam que "tinha as bolinhas todas (...) assim é mais fácil contar". Procurando que a fossem abandonando progressivamente e que no problema seguinte houvesse uma maior variedade, apresentou uma nova estratégia baseada na decomposição dos números estabelecendo conexões com as que tinham sido discutidas.

7. Desafios. A intervenção pedagógica no âmbito do qual foi proposta a tarefa TIS foi realizada em contexto de estágio por uma professora cuja experiência profissional era quase inexistente e que lecionava, há cerca de um mês, numa turma que não era sua. Este contexto contribuiu para que não fosse simples antecipar estratégias que, plausivelmente, os alunos poderiam utilizar, bem como possíveis dificuldades. Com efeito, esta antecipação requer, nomeadamente um bom conhecimento didático que permita identificar recursos a usar e um conhecimento amplo dos saberes e dificuldades dos alunos com quem se trabalha. Na tarefa TIS as estratégias que antecipou foram uma replicação das que anteriormente tinha observado e a ambição, na sua perspetiva pouco realista, de poderem surgir outras mais eficazes.

A monitorização do trabalho dos alunos foi, também, um desafio, tal como o foi escolher as estratégias de resolução a discutir coletivamente. A professora previu que conseguiria tirar notas sobre as estratégias usadas pelos alunos à medida que acompanhava a sua atividade, o que se revelou impossível. Privilegiou o apoio a prestar pelo que se esqueceu delas e apenas conseguiu registar a ordem das apresentações. É um facto que a seleção e seriação das estratégias foi orientada por determinados critérios. No entanto, tinha sempre receio de negligenciar outras que pudessem ser mais relevantes para a aprendizagem. Por exemplo, na resolução de um dos problemas da tarefa TIS, dois alunos utilizaram uma estratégia de cálculo sequencial. Poderia ter sido discutida tendo em conta o seu potencial mas não o foi pois, ao analisar as resoluções dos outros grupos e as suas dificuldades, considerou que deveria centrar-se noutras que permitissem esclarecer as dúvidas existentes.

Durante condução das discussões coletivas, um dos principais desafios foi conseguir envolver os alunos na discussão. Várias vezes, quando tentava que participassem ou auxiliassem um colega, não obtinha resposta sendo frequente o silêncio: "Alguém percebeu como é que o Rui pensou? [*silêncio*] O Rui tinha 56 bolas e riscou as 26? [*vários alunos respondem que não*] Então o que é que o Rui fez? [*silêncio*] Ele contou até que número, João?" (TISP1). Nalgumas ocasiões os alunos só explicavam os seus raciocínios, nas palavras da professora, quase obrigados: "Vocês os dois, vão ter com o João ao quadro. Virem-se para a frente e fiquem lado a lado. Estiquem as vossas mãos. Agora mostrem-nos como contaram (TISP1). Conseguir que os alunos comentassem as estratégias apresentadas por colegas foi, simultaneamente, uma preocupação e uma dificuldade. A professora receava que as discussões fossem apenas de partilha, tendo a noção de que em alguns momentos o foram e serviram apenas para esclarecer dúvidas ou focar determinados aspetos: por exemplo, como usar, corretamente, a reta numérica. Por último, a gestão do tempo também foi algo difícil de controlar embora as alterações introduzidas na dinâmica da aula, referidas no início desta secção, se terem revelado uma boa opção.

Considerações finais

Os resultados do estudo permitem destacar que para conduzir discussões coletivas orientadas, em particular, para o ensino da subtração através da resolução de problemas, é essencial uma preparação meticulosa das aulas, incluindo aqui a seleção de tarefas, a inventariação de estratégias de resolução e a identificação de eventuais dificuldades dos alunos e de modos de lhes fazer face.

No caso da tarefa TIS, os problemas propostos possibilitavam o surgimento de diferentes estratégias de resolução, envolviam números escolhidos com critério tendo em conta os alunos a quem se destinavam e o seu contexto era próximo da vivência destes alunos. A conjunção destes aspetos contribuiu para favorecer e manter o seu envolvimento na resolução e facilitou a atribuição de significado aos enunciados, o que vai ao encontro do que é referido por vários autores (Canavarro, 2011; Delgado, 2013; Ponte, 2005).

O modelo de cinco práticas proposto por Smith e Stein (2011) ajudou a professora a lidar com a complexidade das discussões coletivas tirando partido de estratégias de resolução de problemas propostas pelos alunos. A prática de inventariação dotou-a de recursos que lhe foram úteis para monitorizar o trabalho autónomo e contribuiu para que se sentisse mais segura no momento de iniciar as discussões. Embora tenha sido difícil colocar-se no lugar dos alunos, pensar onde poderiam bloquear ou errar, considera que lidar com esta dificuldade é um desafio incontornável pois "só experimentando a matemática implícita numa tarefa se consegue imaginar algumas das dificuldades que esta pode colocar aos outros" (Canavarro, 2011, p. 13). A monitorização do trabalho autónomo dos alunos, que culminou na seleção e sequenciação das estratégias a discutir, foi fundamental para a condução destas discussões. Aqui o desafio essencial passou por apoiar os alunos sem fornecer informação excessiva e evitar que se cingissem a determinadas estratégias pouco poderosas. Na seleção e sequenciação de estratégias, os principais desafios prenderam-se com o receio de não conseguir escolher estratégias que potenciassem discussões coletivas poderosas e de não ser capaz de as ordenar de modo a favorecer a exploração das ideias matemáticas que pretendia.

Na condução das discussões coletivas, as principais preocupações da professora foram: envolver um número significativo de alunos nos debates; solicitar que clarificassem e justificassem as suas estratégias; pedir que explicassem estratégias diferentes das suas; incentivá-los a colocar questões a colegas ou a comentar a sua resolução; relacionar resoluções; ajudar os alunos a entender os erros como "obras em curso"; e sistematizar as principais ideias matemáticas discutidas tendo em vista a consolidação de aprendizagens e/ou a ampliação de conhecimentos. Neste âmbito, foi confrontada com o que considera serem os maiores desafios que experienciou destacando a gestão do tempo, o incentivo à discussão e reflexão e uma "orquestração da discussão que leve os alunos a identificar e compreender o erro" (Staples & Colonis, 2007, p. 259), ajudando-os, simultaneamente, a entender que este é uma forma de pensar que também têm valor.

Orquestrar discussões coletivas é um empreendimento muito complexo que requer "reflectir na acção com "mil olhos" a tudo o que acontece. No entanto (...) não é uma missão impossível" (Boavida, 2005, p. 915). Os diversos desafios com que a professora se confrontou levaram-na a refletir constantemente na sua ação e sobre a sua ação, a ensaiar soluções e a analisar os seus efeitos, num ciclo que se manteve ao longo do estudo. Neste percurso foi aprendendo a ser professora.

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação - Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática , 115*, pp. 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte, (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 183-214). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Choppin, J. (2007). Teacher-orchestrated classroom arguments. *Mathematics Teacher 101*(4), 306-310.

Cirillo, M., Steele, M. D., Otten, S., Herbel-Eisenmann, B. A., McAneny, K., & Riser, &. J. (2014). Teacher discourse moves: Supporting productive and powerful discourse. In: K. K. (Ed.), *Annual perspectives in mathematics education 2014: Using Research to Improve Instruction* (pp. 141-149). Reston, VA: NCTM.

Delgado, C. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: Um estudo no 1.º ciclo.* Lisboa: APM.

Erikson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In: M. W. (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Ferreira, E. (2012). *O desenvoltimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2º. ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Research Council.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven: Yale University Press.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII,* (2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93,* 51–66.

Prata, C. (2017). *As discussões coletivas no 2.º ano de escolaridade enquanto via para ensinar a subtrair: um estudo sobre as práticas de uma futura professora*.

HYPERLINK "https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/17575" https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/17575 .

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: NCTM.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions. Reston, VA:* NCTM.

Staples, M., & Colonis, M. (2007). Making the most of mathematical discussions. *Mathematics Teacher*, *101(4)*, 257-261.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.

Anexo 1 – Enunciado da tarefa TIS

Invizimals à solta

<u>Problema 1</u>

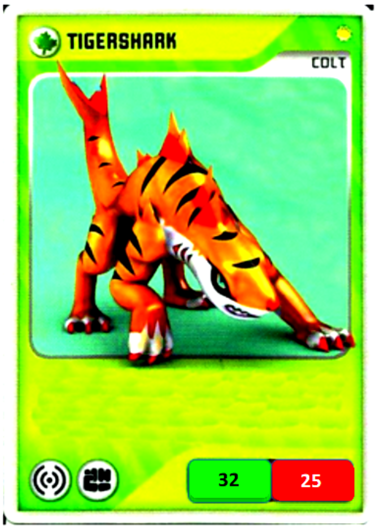
O Gabriel tem 56 cartas dos Invizimals. No intervalo, deu 26 cartas ao João. Com quantas cartas ficou o Gabriel?

<u>Problema 2</u>

O Gabriel tem 69 cartas e o João tem 25. Quantas cartas tem o Gabriel a mais do que o João?

<u>Problema 3</u>

A coleção do Gabriel tem muitas cartas, mas ele, como gosta muito de fazer contas decidiu escolher duas cartas e brincar com os números. Observa as duas cartas que se seguem



3.1. O Gabriel olhou para os valores de ataque que estão nas duas cartas e pensou:

- Quanto faltará ao Tigershark para ser tão poderoso como o Minotaur?

Ajuda o Gabriel a descobrir. Explica como pensaste.

<u>Problema 4</u>

O Afonso estava a colocar as cartas numa caderneta onde cabiam 55. Já tinha colado 15. Quantos lhe falta colar?

QUESTIONAR *A APRENDIZAGEM E PARA A APRENDIZAGEM*

Cristina Martins

ESE, Instituto Politécnico de Bragança

mcesm@ipb.pt

António Guerreiro

ESEC, Universidade do Algarve

aguerrei@ualg.pt

Resumo: Num estudo que temos vindo a desenvolver centrado na avaliação e na comunicação na sala de aula, entre outros aspetos, foi possível verificar uma estreita ligação entre estes processos, através da discussão, do diálogo, do questionamento, dos registos escritos, da interação e da partilha de ideias. Neste artigo, pretendemos divulgar um fragmento do estudo, na qual o foco de investigação recaiu, particularmente, no questionamento, procurando, por um lado, perceber de que forma, quatro professores de matemática de 2.º ciclo do ensino básico, participantes no estudo, enquadram o discurso oral e escrito e percecionam que o fazem, na sua prática de sala de aula, e, por outro, averiguar, de forma sustentada, se as questões que colocam se direcionam para a comunicação da aprendizagem ou para a comunicação para a aprendizagem, ou para ambas. Este estudo é de natureza eminentemente qualitativa e recorremos à realização de entrevistas e observação de aulas. Foi possível, pois, constatar a assunção e prática da oralidade como antecâmara da escrita no processo de ensino e de aprendizagem, bem como a atribuição das funções de síntese e formalização da linguagem matemática, entre outras, à escrita. O questionamento surge como uma regularidade na interação entre o professor e os alunos, sendo evidente a utilização de diferentes tipos de questões, surgindo fortemente acoplado à comunicação da aprendizagem.

Palavras-chave: comunicação, questionamento, 2.º ciclo, matemática.

Investigar a prática de avaliação e de comunicação na sala de aula

A atividade de investigação em educação e a reflexão sobre a prática docente, neste caso em educação matemática, pressupõe uma atitude de valorização do conhecimento académico e profissional. A observação constante das práticas de ensino, em sala de aula, constitui, para o investigador e para o professor, a base de reconhecimento de padrões de avaliação e de comunicação, os quais sustentam análises e teorias, mas também promovem mudanças das práticas docentes com o propósito de uma maior eficiência no ensino e na aprendizagem da matemática. Foi a partir desta conjetura que nos desafiamos a estudar as relações entre a avaliação e a comunicação, num contexto colaborativo, tendo em vista proporcionar significativas aprendizagens matemáticas dos alunos.

Adotamos a perspetiva da avaliação na sua dupla função (complementar e não exclusiva) de avaliar *a* aprendizagem e avaliar *para a* aprendizagem, assumindo uma relação interativa entre aquilo que o aluno conhece e aquilo que se perspetiva vir a conhecer. Neste sentido, o professor e o próprio aluno partem das aprendizagens realizadas para novas aprendizagens, num processo de constante regulação do conhecimento. Como refere Fernandes (2015), "a avaliação *para as* e *das* aprendizagens é um processo de natureza eminentemente pedagógica cujo fundamental propósito é melhorar o que e como se ensina e o que e como se aprende" (p. 13, itálico nosso).

Reportando à comunicação matemática na sala de aula, concebemos em similaridade uma comunicação *da* aprendizagem e uma comunicação *para a* aprendizagem. A comunicação *da* aprendizagem é caracterizada pela transmissão do conhecimento dos alunos e do professor, num sentido de reconhecimento do aprendido, enquanto que a comunicação *para a* aprendizagem se alicerça no desafio de aquisição de novos conceitos e ideias matemáticas, numa perspetiva de ampliação do conhecimento, num contexto de interação social e de negociação de sentidos e conhecimentos matemáticos.

Uma comunicação *da* aprendizagem centra-se na linguagem oral e escrita dos alunos, como um meio de expressão do aluno e das suas ideias construídas individualmente (Radford & Barwell, 2016), envolvendo como interlocutor o professor, sem valorizar a discussão e os diálogos em confronto entre os alunos. A comunicação *para a* aprendizagem não se restringe à linguagem dos alunos, mas aposta em evidenciar o seu pensamento através da comunicação reflexiva (Brendefur & Frykholm, 2000), com o propósito de partilhar ideias e aprofundar o entendimento matemático dos alunos (Ulleberg & Solen, 2018).

No estudo, em curso, partimos de uma questão orientadora de investigação – Que relações existem entre a avaliação e a comunicação nas aulas de matemática no 2.º ciclo do ensino básico? – e assumimos um *design* de investigação qualitativo e interpretativo, com uma componente de colaboração entre investigadores e os professores participantes. Os dados, recolhidos até ao momento, apontam para uma relação estreita entre a avaliação e a comunicação através do questionamento, do diálogo, da discussão, dos registos escritos, da interação e da partilha de ideias.

Neste artigo, pretendemos dar ênfase às perceções e às práticas que os professores têm sobre o discurso oral e escrito, nomeadamente ao tipo de questões colocadas pelos professores nas suas práticas de sala de aula: Como percecionam o discurso oral e escrito e o que acontece na sua prática de sala de aula? As questões dos professores direcionam-se para a comunicação da aprendizagem ou para a comunicação para a aprendizagem, ou conjugam-se em ambos os propósitos?

Enquadramento teórico: papel e tipo de questões

O questionamento surge como uma função da comunicação na sala de aula, caracterizado por pedido de informação, com ou sem a forma interrogativa (Menezes, Guerreiro, Martinho & Tomás Ferreira, 2013). As questões colocadas pelo professor desempenham um papel crucial na comunicação matemática, no desenvolvimento do pensamento matemático e na cultura de sala de aula, definidora do tipo de ensino e de aprendizagem dos alunos. Questões de diferentes tipos surgem na sala de aula, desde retóricas sobre conhecimentos matemáticos até às que promovem uma reflexão sobre o pensamento matemático e a natureza da própria matemática. Ulleberg e Solen (2018) propõem um modelo de classificação das questões, enunciadas pelos professores, representadas graficamente por quatro quadrantes. O eixo horizontal representa as intenções do professor, de orientar a influenciar, e o eixo vertical representa o conhecimento do professor, de não sabe a resposta até sabe a resposta (ver Figura 1).

As quatro áreas, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018), definidas de modo contínuo por A, B, C e D, traduzem duas perspetivas na classificação de questões. O eixo vertical traduz a dicotomia de questões de teste e de inquirição (Mason, 2000). Para Mason (2000), as questões de teste ou confirmação apresentam o padrão em que o professor questiona e o aluno tenta acertar com o pensamento do professor. O eixo horizontal aponta para orientar os alunos em relação ao que conhecem em contraponto com o influenciar, levar os alunos a pensar matematicamente. Estas questões, representadas pela variação do eixo horizontal, são similares às questões de focalização, numa dicotomia de incidência na resolução da tarefa matemática ou no pensamento do aluno. Este autor salienta que o professor questiona porque considera, em termos didáticos, que questionar é melhor que dizer, mas direciona as questões para o seu pensamento e muito raramente para o pensamento do aluno.

Figura 1 – Modelo de questionamento (Ulleberg & Solen, 2018, p. 6)

As autoras (Ulleberg & Solen, 2018) consideram o seu modelo um espaço contínuo com interligação entre as diferentes áreas. A área A representa as questões de teste, em que o professor conhece a resposta e tenta orientar o aluno. Na área B, o professor pretende que o aluno descubra padrões e aprenda a justificar e a argumentar. Na área C, o professor não conhece a resposta, mas está interessado na discussão dos alunos com vista à definição e justificação de estratégias de resolução das tarefas. Na área D, o professor desafia os alunos, podendo-os levar a direções inesperadas, por vezes, também desconhecidas do próprio professor. Esta área D está associada à constante partilha de conhecimentos entre os alunos e entre estes e o professor.

Numa perspetiva das práticas em sala de aula, Way (2008) agrupa as questões em quatro categorias atendendo ao seu papel no contexto de tarefas matemáticas abertas: (i) Questões de partida, assumem a forma de questões abertas que pretendem focar o pensamento dos alunos numa determinada direção. Visam desencadear a atividade do aluno e podem fazer parte dos enunciados das tarefas; (ii) Questões para estimular o pensamento matemático, são questões para ajudar os alunos a concentrarem-se numa estratégia particular, a procurar regularidades e relações. Promovem a formação de uma rede conceptual forte. Podem servir como um alerta quando os alunos se encontram num impasse. Contudo, muitas vezes os professores são tentados a transformar essas questões em instruções, o que impede o estímulo do pensamento do aluno e retira-lhe a responsabilidade pela investigação; (iii) Questões para avaliação, são as que permitem ao professor ver como os alunos pensam, o que compreendem e como. Consistem em solicitar aos alunos a explicação do que estão a fazer e como chegaram à solução. Claro que estas questões só fazem sentido quando os alunos já tiveram tempo para progredir na resolução do problema e para registar alguns resultados alcançados; (iv) Questões para discussão final, são as que congregam os esforços de toda a turma e servem para partilhar e comparar as estratégias e soluções. É uma fase crucial nos processos de pensamento matemático, pois oferece oportunidade para reflexão e tomada de consciência das ideias matemáticas e de conexões, incentivando os alunos a avaliarem o seu trabalho.

Segundo Way (2001) as questões podem ser usadas pelo professor para guiar os alunos através das investigações enquanto estimulam o seu pensamento matemático e para obter informação acerca do seu conhecimento e estratégias. Para Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) podem também ser adotadas em outras tarefas matemáticas.

Apresentação dos resultados: Oralidade, escrita e questionamento

Para dar resposta às questões evidenciadas neste artigo e recordando que decorrem de um estudo mais amplo (Guerreiro & Martins, 2017), optamos por apresentar uma análise centrada nos resultados das entrevistas realizadas aos quatro professores participantes (Manuel, Martins, Teresa e Violeta) em articulação com os resultados emergentes das aulas observadas. Seguimos como metodologia específica de análise a verificação da presença de evidências ligadas ao questionamento, inseridas na oralidade e na escrita. Desta feita, aportámos a intenção clara de efetuar uma análise afastada de uma categorização específica prévia, pelo que a procura de regularidades sustentadas nos resultados anteriores e no enquadramento teórico serviram de guia a todo o processo.

A oralidade e a escrita constituem duas vertentes significativas na comunicação na aula de matemática, as quais se perspetivam como processos valorativos na construção do conhecimento matemático. Na oralidade existe uma negociação de significados matemáticos com os outros, atendendo à possibilidade constante de reconstrução do discurso oral, num fazer e refazer de sentidos, enquanto a escrita, que vai além dos registos, nos apoia na reflexão sobre a nossa própria experiência, construindo e reconstruindo o sentido das significações matemáticas (Powell & Bairral, 2006). Neste artigo apresentamos a ligação entre a oralidade, a escrita e o questionamento. Para tal, expomos evidências que traduzem as perceções e práticas dos professores, salientando o que existe em comum, ressalvando algum aspeto particular.

Para estes professores, a oralidade é apresentada como uma antecâmara da escrita no processo de ensino e de aprendizagem – “A ideia do privilégio da oralidade é que os alunos consigam depois transcrever, registar e resolver mais facilmente o que lhes é pedido” [Teresa]. As aulas caracterizam-se pela oralidade sem uma natureza de sistematização, função atribuída aos registos escritos – “claramente desequilibrada …

no discurso … mais oral … a escrita é mais para o registo desses momentos” [Martins].

Neste sentido, a oralidade domina a aula – “o discurso [oral] faz parte de grande parte da aula” [Martins] – e a escrita caracteriza-se pelo registo de definições e sínteses – “faz sentido os miúdos registarem … sínteses, alguma definiçãozinha que seja necessária” [Martins]. Por exemplo, para Martins a explicitação dos objetivos e conteúdos da lição surge enquadrada na oralidade:

> Martins: O que é que o professor quer ver agora convosco? Quer ver, para além de nós irmos fazer as nossas contagens, ver qual é a frequência absoluta, a frequência relativa, vamos focarmos um bocadinho … (…) Vamos ter que nos focarmos um bocadinho ali sobre a frequência relativa. Porquê? Como vocês vão ver a frequência relativa pode ter vários aspetos. Ali vimos o aspeto de uma fração, de uma fração, mas como vocês vão ver, ela pode vir com o aspeto de um numeral decimal ou pode vir no aspeto de uma percentagem. A gente agora vai ver como fazemos essas coisas e até que ponto isso é útil ou não. Está bem? [aula].

Apesar de ser visível nas perceções dos professores o predomínio da oralidade em sala de aula, é clara uma ligação constante ao registo escrito:

> É-me difícil dizer, acho que nós aliamos uma coisa à outra. São muito privilegiados os registos, aliás eu utilizo muito esquemas, vou muito por aí, até para mim próprio. Acho que privilegio tanto uma [linguagem oral] como a outra [linguagem escrita] [Manuel].

Assim, à oralidade é atribuído o importante papel da condução da aula, da regulação de comportamentos “[o diálogo] serve para tudo, serve para verificar se o aluno está ou não com atenção e dá a oportunidade a todos os alunos de intervirem” [Teresa], e da aprendizagem, com uma natureza de retorno: “[o *feedback*] acaba por ser mais oral, individualizado” [Martins].

O questionamento dos alunos no contexto do discurso oral apresenta uma regularidade de interação entre o professor e os alunos, individualmente e em grupo turma. As questões incidem nos conteúdos lecionados, como se pode verificar no caso da professora Teresa, no âmbito de uma questão do manual:

> Professora Teresa: Lê o exercício desde o início.
>
> Irene: A Tita comprou 15 saquinhos de balões vermelhos para a sua festa de aniversário. Contou o número de balões de cada saquinho…
>
> A professora inicia o diálogo com a aluna, a partir do gráfico de barras constante no enunciado.
>
> Teresa: Que tipo de gráfico é esse?
>
> Irene: De barras.
>
> Teresa: Vai ao quadro.
>
> Outra aluna: Já fizemos.
>
> Teresa: Não interessa, vamos ver se ainda te lembras. Não se esqueçam o que têm de calcular primeiro, para calcularem a amplitude.

As questões da professora, no contexto de resolução desta tarefa, caracterizam-se por questões de teste ou confirmação (área A, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)) – Que tipo de gráfico é esse? – e de focalização na tarefa matemática (área C, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)) – Não se esqueçam o que têm de calcular primeiro, para calcularem a amplitude, assumindo uma intenção clara de orientar o aluno para um dado desempenho. Teresa assinala que tenta diversificar o tipo de questões, classificando-as, umas como simples e outras como as que devem dar origem a uma justificação. A este respeito, refere:

> Normalmente as primeiras perguntas, aquelas que iniciam [o diálogo], são sempre simples. É isto ou é aquilo e só depois é que vêm as outras: Então porque é isto, porque aquilo? Um diz uma coisinha, mas ainda não está tudo. Então depois outro complementa. Digo: O teu colega já disse e tu vais completar. Assim vai-se conseguindo que efetivamente eles justifiquem [Teresa].

A incidência em conteúdos trabalhados anteriormente é notória nas questões dos professores participantes. A título exemplificativo, adiantamos um episódio da aula do professor Manuel em que trabalha uma tarefa, centrada nas temperaturas máximas e mínimas registadas nos últimos dez dias em Bragança, focada na classificação e construção de gráficos. O professor circula pelos lugares dos alunos, acompanha o seu trabalho, questionando:

> Professor Manuel: O que falta aí no gráfico?
>
> Manuel: Que gráfico é esse?
>
> Aluno: Gráfico de barras.
>
> Manuel: Helena, que gráfico é esse?
>
> Aluna: É um gráfico de linhas.

O mesmo é possível verificar, no episódio registado na aula do professor Martins. Este questiona os alunos a propósito dos conteúdos lecionados, neste caso, a tabela de frequências absolutas:

> Professor Martins: Frequência absoluta, no fundo é o quê? Quem consegue dizer, por palavras vossas, o que significa esta frequência absoluta? Mara, consegues dizer?
>
> Mara: Quantas pessoas escolheram …
>
> Martins: Quantas pessoas, neste contexto, é que escolheram, no caso, por exemplo, Benfica. Quantas é que escolheram Sporting, por aí fora, sim senhor. Portanto, frequência absoluta … diz lá, Paulo.
>
> Paulo: Outra maneira é dizer, aquelas são o mesmo número racional …
>
> Martins: Dizer o número racional, explica, estamos na frequência absoluta.
>
> Paulo: A frequência absoluta é traduzir o número romano [pensa no processo de contagem *tally chart*] em racional.

Neste episódio, particularizamos uma confusão de linguagem e conceitos matemáticos, por parte do aluno (Paulo), levando o professor a interroga-lo, através de uma questão com características de inquirição (área D, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)), apesar de não resultar de uma intencionalidade questionadora:

> Martins: O número romano para racional?
>
> Paulo: Cardinal.
>
> Martins: Eu presumo que tu estás a tentar dizer o seguinte: é traduzirmos a contagem que nós fizemos para um número, certo? É isso que estavas a tentar dizer?
>
> Paulo: Sim.

Desta feita, é também manifesto que este professor utiliza o questionamento, no contexto do discurso oral, para testar os conhecimentos e clarificar o discurso dos alunos. O professor Martins utiliza questões direcionadas para os conteúdos (área A, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)) – "às vezes com pequenas perguntinhas … às vezes com uma pequena revisão, com uma pequena pergunta". Na sala de aula, as questões são maioritariamente centradas no conhecimento dos alunos e nas tarefas matemáticas:

> Professor Martins: Sporting, temos uma pessoa, um tracinho, aqui corresponde a uma pessoa, aqui será quanto a relação?
>
> Alunos: Um em treze.
>
> Martins: Um em treze, não é?
>
> Aluno: Um treze avos.

Contudo, destacamos que as questões apresentam diferentes níveis de dificuldade – «Qual a percentagem de alunos que têm menos de dois irmãos?» ou «Diz-me qual o número de alunos que têm três ou mais irmãos?» –, apelando ao raciocínio dos alunos.

Na sala de aula de Manuel, verificamos que as questões apresentam uma intenção de clarificação do desempenho dos alunos (área C, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)):

> Professor Manuel: Explica lá o que fizeste?
>
> Aluno: Construí um gráfico de linhas.
>
> Manuel: As temperaturas medem-se em?
>
> O aluno completa, indicando os graus.
>
> Manuel: Há alguma coisa mais a dizer?
>
> Aluno: Fizemos uma linha para as temperaturas mínimas e uma linha para as máximas

No caso da professora Violeta, a utilização do questionamento oral oscila entre o grupo e o indivíduo, com a intenção de influenciar os alunos no reconhecimento de uma dada estratégia de resolução (área B, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)):

> Professora Violeta: Vamos perceber como é que eles fizeram. Vamos ouvir …
>
> Alunos: Nós fizemos um quadrado e são todos iguais, então isso mede 42 cm e fizemos 42 a dividir por 5, e vai dar 8 e sobra 2, mas não ligamos ao 2. Então aqui só podem estar 8 quadrados.
>
> Violeta: Porque é que dividiste 42 por 5?
>
> Aluna: Porque …
>
> Professora: Porquê?
>
> Aluno: Porque é para ver quantas vezes cabe um quadrado …
>
> Violeta: Isso, quantas vezes cabe ali o 5.
>
> Aluno: Depois fizemos 33 a dividir por 5… vai dar 6, sobra 3.
>
> Violeta: Carolina, olha
>
> Aluna: Fazemos seis vezes 8 vai dar 48.
>
> Violeta: Então, qual é a resposta?
>
> Alunos: 48.
>
> Violeta: 48 quê?
>
> Alunos: 48 quadrados.
>
> Violeta: Então o tabuleiro fica todo, todo preenchido ou não?
>
> Alunos: Sim.
>
> Violeta: Todo, todo, todo?
>
> Alunos: Não, sobra uma parte que não fica tapada, não é?

Neste episodio, a predominância das questões, em que o professor conhece a resposta, leva os alunos a tentarem acertar com a resposta do professor, como refere Violeta "muitas vezes os miúdos estão à espera e querem dar a resposta que o professor quer ouvir" [Violeta]. Para contrariar este tipo de interações com os alunos, a professora tenta fazer questões mais abertas – "tento mais fazer uma pergunta mais aberta" [Violeta] –, de modo a levar os alunos a argumentarem e a defenderem as suas ideias matemáticas – "tentam argumentar, tentam explicar (…) de argumentar, de defender o seu próprio pensamento" [Violeta]. Para Teresa, esta omnisciência do professor parece também estar assente no controlo da aula: "por norma as questões são mais ou menos controladas exatamente para não haver o barulho, se não nem ouve um nem ouve o outro" [Teresa].

É comum, as intervenções orais dos professores e dos alunos conjugarem uma linguagem matemática formal (especialmente por parte dos professores) e uma linguagem informal. Teresa assinala: "Às vezes até acho que nem deveria utilizar aquela linguagem, mas ao nível do 5.º ano tem de ser. Se usasse o tipo de linguagem que está preconizado nas *Metas* não me entendiam" [Teresa]. Para Martins, a linguagem matematicamente correta e "uma linguagem mais terra a terra" são utilizadas em sala de aula numa tentativa de adequação à linguagem dos alunos:

> Professor Martins: Da tabela de frequências para o gráfico de barras, ok? Que é, digamos assim, do ponto de vista visual, se vocês olharem para um gráfico de barras e para uma tabela de frequências, na minha opinião é mais apelativo. É menos chato entre aspas, como vocês dizem, olhar para um gráfico de barras do que olhar para uma tabela.

A oralidade domina as práticas de comunicação em sala de aula. As questões elaboram-se a partir dos conhecimentos do professor e centram-se nos conhecimentos e nas estratégias matemáticas dos alunos. A escrita surge assumindo o papel de registo e de formalização da linguagem matemática, e está associada aos instrumentos de avaliação, como os testes escritos e outros trabalhos dos alunos.

Na opinião de Teresa, nas aulas "é mais comunicação oral e só sintetizo por escrito, de facto, para registarem a noção" [Teresa]. Violeta assume a importância da escrita nas suas aulas – "os miúdos precisam muito de concretizar a parte escrita" –, entendida de modo amplo, como qualquer forma de registo. Nesta escrita matemática, a professora íntegra todo o tipo de registos icónicos, gráficos e tabelares, seja por sua iniciativa – "eu tenho sempre a necessidade de um registo" – ou por ação dos alunos – "eles têm de registar, pode ser através duma imagem, duma tabela, através de um gráfico, através de um desenho, através dum esquema, de umas setas". O professor Manuel partilha desta opinião ao ampliar o registo escrito a formas icónicas e gráficas – "na parte escrita tanto pode ser utilizando a linguagem matemática, quer utilizando um esquema, um gráfico".

A formalização matemática da linguagem dos alunos surge na escrita. A professora Violeta, enquanto regista no quadro $M_5=\{0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$, esclarece os alunos:

> Professora Violeta: Os múltiplos tinham de começar pelo zero, eu disse que isto foi a estratégia deles e não colocaram o zero, mas se quiserem os múltiplos, múltiplos de 5, então seria, zero, não é? cinco vezes zero, zero, um vezes cinco, cinco, dez, quinze, vinte, vinte e cinco …

Esta professora recorre ao contexto da tarefa para testar o conhecimento dos alunos (área A, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)) sobre o conceito de múltiplo de um número, empregando alguma informalidade:

> Professora Violeta: Então oiçam lá, eles ali utilizaram a divisão, e eles aqui de outra maneira chegaram ao mesmo resultado, oiçam lá uma coisa, 5, 10, 15, 20, 25, isto é o quê?

A formalização da linguagem matemática surge igualmente na correção das resoluções dos alunos, como é visível num episódio da aula do professor Manuel:

> Professor Manuel: Uma das outas coisas que tinham para fazer era calcular a média das temperaturas máximas e a média das temperaturas mínimas (dirige-se a aluna no quadro). O que estás a calcular? Como sei se é a média da temperatura máxima ou da mínima? (tendo por intuito que a aluna escreva não só o símbolo

> da média como também registe à frente máxima ou mínima)

A linguagem matemática formal traduz-se geralmente em registos escritos, o professor Martins valoriza a escrita de definições e de sínteses. Na aula define Moda (Mo), escreve a definição no quadro, e solicita aos alunos o seu registo escrito no caderno:

> Moda (Mo)
>
> É o dado estatístico com maior frequência. No nosso exemplo a moda é os alunos preferirem o "Benfica".

As sínteses escritas são uma das características das aulas da professora Teresa que, como refere, valoriza a sua realização, no quadro, sobre "o que é importante" e o posterior registo das mesmas – "Eu penso que aí o registo é fundamental" –, por parte dos alunos, no caderno diário. Esta dinâmica foi observada em contexto de sala de aula:

> Professora Teresa: Olha para o livrinho. Não risques. Apaga e volta a escrever. Sara põe uma setinha e dois pontos. E fazemos isso assim? Põe a resposta. A média é então?
>
> Sara (escreve) A média é 11,8.
>
> Teresa: Balões ou saquinhos?
>
> Sara (acrescenta) balões.

A sistematização dos conceitos matemáticos com base no registo escrito gera questões em que a professora tenta orientar a aluna (área C, segundo o modelo de Ulleberg e Solen (2018)) – E fazemos isso assim? Põe a resposta –, na organização dos apontamentos escolares, tendo por pressuposto que estes constituem uma mais-valia para o sucesso dos alunos. Teresa, referindo-se especificamente aos testes, clarifica o tipo de questões escritas que fazem parte do seu repertório, adiantando construi-los "com diferentes graus de dificuldade, envolvendo perguntas de escolha múltipla, perguntas de ligação, alguns problemas, e perguntas que exigem justificações" [Teresa]. No mesmo sentido, Violeta refere que faz diversos tipos de questões:

> faço aquela pergunta de escolha múltipla, a pergunta em que não têm de justificar, não é? Há a pergunta em que eles têm de explicar como pensaram, há a pergunta mais aberta, a pergunta mais fechada, há uma pergunta de resposta curta, faço todo o tipo de perguntas [Violeta].

A escrita ajuda a sistematizar os conhecimentos e a formalizar a linguagem matemática. As questões apresentam uma natureza de regulação e os registos escritos apresentam-se como a intenção de sistematização dos conteúdos matemáticos em estudo.

E por falar em questões

Com o propósito de dar resposta às questões principais deste trabalho: Como percecionam o discurso oral e escrito e o que acontece na sua prática de sala de aula? e

As questões dos professores direcionam-se para a comunicação da aprendizagem ou para a comunicação para a aprendizagem, ou conjugam-se em ambos os propósitos?, destacamos o que emerge da análise efetuada.

No concerne à primeira questão evidenciamos: (i) a oralidade como antecâmara da escrita no processo de ensino e de aprendizagem; (ii) vinculação da função de sistematização aos registos escritos, muito embora a assunção de clara ligação entre a oralidade e o registo escrito; (iii) a oralidade associada à condução da aula e à regulação de comportamentos; (iv) a escrita surge com funções de síntese, correção da linguagem oral e formalização da linguagem matemática.

Acerca do questionamento relevamos os seguintes aspetos: (i) o questionamento como uma regularidade de interação entre o professor e os alunos; (ii) incidência das questões em conteúdos lecionados; (iii) surgimento de diferentes tipos de questões (modelo de questionamento de Ulleberg e Solen (2018)); (iv) o questionamento associado à verificação dos conhecimentos anteriores e à clarificação de ideias; (v) conjugação de linguagens formal e informal.

No respeitante à segunda questão, torna-se evidente, em conformidade com o apresentado, a ligação das questões à comunicação da aprendizagem e menos à comunicação para a aprendizagem. Apesar da diferente natureza das questões, estas remetem, em geral, para os conhecimentos adquiridos dos alunos. As questões ligadas às estratégias utilizadas pelos alunos resultam como clarificação das resoluções e não como perspetiva de desenvolvimento de conjeturas sobre hipóteses de resolução. As questões de inquirição estão quase ausentes e não resultam de desafios matemáticos.

Para terminar e reforçando a nossa ideia inicial acerca da atividade de investigação no e para o desenvolvimento profissional do professor, cremos que esta será muito mais eficiente e profunda se enquadrada na prática quotidiana do professor. Como refere Zeichner (2008), os professores não podem ser vistos como técnicos que se limitam a cumprir o que outros lhes ditam de fora da sala de aula. A produção de conhecimento sobre o que é um ensino de qualidade também lhes pertence, pois têm teorias que podem contribuir para uma base codificada de conhecimento do ensino. O processo de compreensão e melhoria do ensino do professor deve começar pela reflexão sobre a sua própria experiência, tendo presente que o processo de aprender a ensinar prolonga-se durante toda a carreira do professor.

É, pois, a partir destes pressupostos que deixamos as seguintes interrogações sobre as questões para autorreflexão dos professores: As questões que coloco … são reveladoras da resposta que quero obter? Estimulam os alunos a pensar? Informam-me sobre o que os alunos sabem? Conduzem o aluno a novos conhecimentos? Exigem uma única resposta? Permitem que o aluno possa colocar várias alternativas? Centram-se no processo ou no produto? Incidem apenas na memória ou conduzem o aluno à reflexão, análise e explicação do seu raciocínio?; Quando questiono os alunos … Dou tempo aos alunos para pensar? Valorizo as suas respostas? Utilizo as respostas dos alunos para a tomada de decisões sobre planificação das ações futuras? Valorizo as respostas erradas, ou simplesmente passo à frente? Procuro que os alunos respondam às questões dos colegas?

Referências

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of*

Mathematics Teacher Education, 3, 125-153.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G. Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Fernandes, D. (2015) Prefácio. In Neves, A. C. & Ferreira, A. L. (2015). *Avaliar é Preciso? Guia prático de avaliação para professores e formadores.* Lisboa: Guerra & Paz.

Guerreiro, A. & Martins, C. (2017). Avaliação e comunicação na aula de Matemática: um projeto de investigação. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 330-342). Viseu, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 31(1), 97-111

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sysiphus, 1*(3), 44-75.

Powell, A. & Bairral, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático.* São Paulo: Papirus.

Radford, L., & Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. *Second Handbook of PME* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense.

Ulleberg, I. & Solen, I (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge.* 12 (1), 1-21.

Way, J. (2008). Using Questioning to Stimulate Mathematical Thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13 (3), 22-27.

Zeichner, K. (2008). Uma análise crítica sobre a "reflexão" como conceito estruturante na formação docente. *Educação e Sociedade*, 29(103), 535-554.

ESTRATÉGIAS, DIFICULDADES E COMUNICAÇÃO ESCRITA DE UMA TURMA DE 11.º ANO NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA MATEMÁTICO

Letícia Gabriela Martins

CIEd, Universidade do Minho

lgb.martins@hotmail.com

Maria Helena Martinho

CIEd, Universidade do Minho

mhm@ie.uminho.pt

Resumo: O uso da resolução de problemas na sala de aula é muito importante já que permite estimular o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Mais do que saber aplicar os seus conhecimentos, é essencial que saibam estabelecer estratégias para ultrapassar algum problema que tenham de enfrentar, tanto no ambiente escolar como, no futuro, a nível profissional. Para isto, desenvolver o raciocínio e a capacidade de resolver problemas são dois fatores de extrema importância e que podem ser trabalhados em simultâneo. Mas, quando se trata de desenvolver certas competências, há dificuldades que surgem e é importante detetá-las, para que possam ser ultrapassadas. Quando os alunos têm oportunidade de confrontar diferentes estratégias e trocar ideias, tomam contacto com outros raciocínios que podem ser uteis para novos problemas. E, ligado a tudo isto, torna-se necessário perceber como é que os alunos comunicam por escrito, tentando que, a cada problema resolvido, o aluno melhore também a forma como organiza a sua resposta. Assim, nesta comunicação pretende-se identificar as estratégias utilizadas e as dificuldades sentidas pelos alunos, bem como caracterizar a comunicação escrita nas respetivas resoluções. Para responder a esses objetivos, são apresentados os resultados encontrados na análise das respostas de uma turma de 11.º ano de Matemática A a um problema proposto em sala de aula. Na resolução deste problema, as estratégias a que os alunos mais recorreram foram a construção de esquemas/figuras e a construção de um modelo. Quanto às dificuldades, estas foram sentidas na interpretação de resultados e a nível de estratégia, tanto na escolha como na execução. Já na comunicação escrita, foi percetível alguma dificuldade em fundamentar claramente as respostas, vários alunos recorreram à experimentação na fundamentação utilizada e, no que toca às representações, evidenciaram-se a simbólica e a icónica.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Ensino Secundário; Estratégias de resolução de problemas; Dificuldades na resolução de problemas; Comunicação escrita.

Introdução

A resolução de problemas, em conjunto com o raciocínio, constitui uma das dez áreas de competências consideradas no "Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória", documento criado pelo Ministério da Educação e Ciência (MEC) em 2017.

Ainda no mesmo documento, percebemos que uma das práticas docentes que são decisivas para o desenvolvimento desse perfil passa por "promover de modo sistemático e intencional, na sala de aula e fora dela, atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores" (MEC, 2017, p. 24). Esta importância na resolução de problemas é também visível no Programa do Ensino Secundário de Matemática A (MEC, 2013), pois em todos os domínios encontramos a resolução de problemas no desenvolvimento dos seus conteúdos.

No contexto do PISA 2012, conseguimos reforçar a importância de desenvolver a capacidade de resolver problemas, sendo esta competência considerada essencial no mundo profissional. Como vivemos, cada vez mais, rodeados pela tecnologia, os alunos precisam de estar mais preparados para desenvolver estratégias de resolução de problemas, e não apenas de "domínio de um repertório de factos e procedimentos" (OECD, 2014, p.26). Assim, a Matemática deve ser vista como algo mais do que um mero conjunto de exercícios em que se aplicam conhecimentos uma vez que, se um aluno realizar apenas tarefas rotineiras, a sua imaginação e a sua capacidade de raciocínio acabarão por ser bloqueadas.

Assim, tendo em consideração a relevância que tem o uso da resolução de problemas na sala de aula, este estudo centra-se nos seguintes objetivos: identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam, reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas e caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções dos problemas. Com esta comunicação, pretende-se apresentar os resultados da análise das respostas de uma turma de 11.º ano de Matemática A a um problema proposto aquando deste estudo.

Enquadramento teórico

O assunto principal desta comunicação é a resolução de problemas. Mas, afinal, o que é um problema? Neste trabalho, um problema é assumido como sendo uma tarefa que se quer resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução. Passando à resolução de problemas, é vista como o processo de descoberta do método que permite resolver o problema, ou seja, a descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

Nesta secção, e agora que já estão esclarecidos os conceitos de base de problema e de resolução de problemas, será explicitada a lista de estratégias de resolução de problemas às quais se pode recorrer, as diferentes dificuldades que são esperadas por parte dos alunos e ainda os critérios que nos permitem analisar a comunicação escrita dos alunos.

Estratégias de resolução de problemas

Vários são os autores que apresentam listas de estratégias de resolução de problemas, como é o caso de Musser e Shaughnessy (1980), Posamentier e Krulik (1998) ou Lopes (2002). Este último autor, por exemplo, refere seis categorias básicas no que toca às estratégias de resolução de problemas: construir um modelo; construir uma tabela; tentar, conferir e rever; simplificar; eliminar; encontrar padrões. Na nomenclatura de Lopes, estamos a *construir um modelo* quando recorremos a uma "equação, algoritmo, fórmula, esquema, esboço, desenho, diagrama" (Lopes, 2002, p. 24). Já *construir uma tabela* é a estratégia em que recorremos à elaboração de um gráfico. Quanto a *tentar,* *conferir e rever* consiste em pensar em possíveis soluções, e tentar perceber se estas obedecem às informações do problema e ao objetivo do mesmo, sendo que esta estratégia é também conhecida como tentativa e erro. *Encontrar padrões* é uma estratégia que se baseia em examinar pequenas secções do problema, de maneira a, como o nome indica, encontrar algum tipo de padrão. Encontrado este padrão, o resolvedor poderá passar para um processo de generalização. No que toca a *simplificar*, inclui a decomposição do problema em problemas mais simples ou ainda trabalhar do fim para o início. E por fim, *eliminar*, é a estratégia mais utilizada no quotidiano e consiste em organizar uma lista de possibilidades e, tendo por base as informações dadas pelo problema, ir eliminando hipóteses. Lopes (2002) acrescenta que esta última estratégia é utilizada no próprio processo de seleção da estratégia para resolver um problema, e ainda quando se recorre ao raciocínio lógico.

Nesta investigação, procurou-se identificar as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos. Assim, foram consideradas algumas estratégias de resolução de problemas: tentativa e erro – correspondente a *tentar, conferir e rever* de Lopes (2002) –, procura de um padrão, generalização, dedução, resolução do fim para o início, construção de esquemas ou figuras, construção de tabelas e construção de um modelo. Além destas, um resolvedor de problemas pode ainda recorrer a três estratégias: resolução por partes, aplicação de fórmulas e exaustão. A *resolução por partes* consiste em resolver o problema por etapas bem definidas e independentes umas das outras. Quanto à *aplicação de fórmulas* é exatamente uma estratégia em que se recorrem a fórmulas previamente conhecidas, como seria o caso de utilizar a fórmula resolvente quando um problema envolve a resolução de uma equação do 2.º grau, por exemplo. Já a *exaustão* baseia-se num processo em que se analisa exaustivamente todas as possibilidades, fazendo uma lista das mesmas e usando argumentos para excluir algumas delas, chegando a uma só, considerada como sendo a resposta correta.

Dificuldades na resolução de problemas

Superar dificuldades é um passo importante quando queremos desenvolver a capacidade de resolução de problemas. Para as superar, temos primeiro de reconhecer essas mesmas dificuldades.

Phonapichat, Wongwanich e Sujiva (2013) referem sete tipos de dificuldades encontradas na resolução de problemas. Destas sete, apenas três delas são relativas ao papel do aluno, e é a estas que se dará destaque, e as restantes estão relacionadas com o papel do professor. A primeira passa pela dificuldade de *compreensão do problema*, total ou parcialmente, devido à falta de imaginação. A segunda é relativa à *leitura, seleção da informação e organização da mesma*, de modo a conseguir traduzir as palavras para símbolos matemáticos. A terceira refere a *falta de interesse dos alunos*, que pode ser devido à extensão do problema ou à complexidade do mesmo, o que é um fator de desmotivação. Quanto às restantes dificuldades referidas pelos autores, passam pelos professores não utilizarem problemas relacionados com a realidade presente no quotidiano dos alunos e trabalharem demasiado a ideia de memorização, de seguir exemplos e repeti-los e ainda descartar todo o processo de pensar no problema.

Ainda que não refira de modo explícito as dificuldades na resolução de problemas, D'Ambrósio (1989) faz o levantamento de dois aspetos que se deve ter em atenção na atitude dos alunos: a adequação das soluções a situações reais e a persistência. Para a autora, o facto de os alunos lidarem constantemente com a característica formal da Matemática, cria neles uma perda de autoconfiança na sua própria intuição matemática.

Com isto, os alunos perdem o seu “bom senso” matemático, afastando-os da relação existente entre a Matemática e as situações do dia a dia. Por este motivo, uma dificuldade presente na resolução de problemas poderá ser a *adequação da solução a uma situação real*. Outra dificuldade será a ausência de persistência, que muitas vezes é motivada pelo hábito excessivo de resolver apenas exercícios. D’Ambrósio (1989) afirma que é muito comum um aluno desistir quando está perante a resolução de um problema matemático, com a justificação de “não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão” (D’Ambrósio, 1989, p. 15). Esta fundamentação é motivada pelo facto de o aluno não conseguir reconhecer de imediato qual é o processo de resolução que deve utilizar.

Uma dificuldade também pode ser vista como sendo um obstáculo. É nesta ideia que Sternberg (1998) se concentra, referindo três grandes obstáculos na resolução de problemas, que podem aparecer de forma isolada ou em simultâneo: configuração e fixação mental, fixação funcional e transferência negativa. O primeiro, *configuração e fixação mental*, aparece quando, na resolução de um problema, estamos focados em aplicar uma estratégia específica que funcionou numa outra situação, mas que não funciona no problema que estamos a enfrentar. A *fixação funcional* traduz o obstáculo de não saber plicar os conhecimentos aprendidos noutros contextos, a contextos novos. Por último, a *transferência negativa* está relacionada com os conhecimentos anteriores que, se não estão bem cimentados, fazem com que as novas aprendizagens sejam feitas de modo mais complicado, causando dificuldades em adquirir e armazenar os novos conhecimentos.

Para esta investigação, foram consideradas dificuldades em quatro níveis distintos: persistência, interpretação, seleção de informação e estratégia. A nível de *persistência* estão incluídas dificuldades em iniciar a resolução do problema e também em concluí-lo, já que há alunos que conseguem começar um processo de resolução, mas não sabem como o concluir, desistindo. Já as dificuldades a nível de *interpretação* foram vistas sob dois pontos de vista: a interpretação do problema e a interpretação do resultado. A interpretação do problema incide no facto de o resolvedor compreender o que é pedido e os dados do problema, enquanto a interpretação do resultado estará relacionada com a atribuição de significado às soluções que se vão obtendo, tanto no contexto do problema como no contexto real. O terceiro nível enunciado, *a seleção de informação*, será relativo à dificuldade que poderá existir diante da recolha de dados do problema. Finalmente, a dificuldade a nível de *estratégia*, está presente tanto na escolha da estratégia como na sua execução.

Comunicação escrita

Quando se resolve um problema, principalmente em grupo, a comunicação é um fator muito importante. Os elementos do grupo devem saber comunicar entre si, para poderem apresentar e defender as suas ideias, e também aceitar e argumentar sobre as ideias dos restantes colegas. Além disso, é importante conseguir escrever essas ideias de modo claro, para que haja um registo escrito da resolução feita, tanto para que o grupo possa recorrer a ela sempre que ache necessário, como também para a poderem dar a ler a outras pessoas, que não assistiram a toda a discussão e ao processo de resolução do grupo.

Esta importância da comunicação na resolução de problemas está presente no Programa de Matemática A (MEC, 2013). Neste documento, está referido que os alunos devem ser estimulados a expor as suas ideias, comentar o que é exposto pelos colegas e colocar as suas dúvidas. Mais especificamente quanto à comunicação escrita, ainda no mesmo programa, há indicação para a importância de incentivar os alunos a redigir as suas respostas, apresentando o seu raciocínio da melhor forma que conseguirem, e deixando claras as conclusões que retiraram. Esta apresentação de resultados por escrito deve ser feita "em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas" (MEC, 2013, p. 7).

Para caracterizar a comunicação escrita dos alunos, é necessário estabelecer critérios. No seu estudo, Santos e Semana (2014) elaboraram uma lista com três pontos a ter em consideração quando se analisa a comunicação escrita: a interpretação do objetivo da tarefa, as justificações apresentadas e as representações usadas. No primeiro ponto, a *interpretação do objetivo da tarefa*, as autoras consideram duas partes: a declaração da meta, onde se inclui a identificação do objetivo da tarefa e a completude da informação recolhida, e a linguagem utilizada, na qual se analisa o formato, ou seja, se a declaração da meta é transcrita ou se é reescrita utilizando as próprias palavras, e a precisão da linguagem. No segundo ponto, as *justificações apresentadas*, considera-se o tipo de justificação e a correção e completude da mesma. Os tipos de justificação apresentados pelas autoras são: vaga (justificação pouco clara ou pouco informativa), regra (justificação com uso exclusivo de regras, algoritmos ou definições), procedimental (justificação do que é feito em determinada etapa, mas sem explicar a validade da mesma) e relacional (justificação da validade de um passo, incluindo ou não a justificação do que é feito em determinada etapa, dando espaço a que haja um entendimento relacional). No último ponto, as *representações usadas*, são considerados os tipos de representação e a precisão e completude da mesma. Os tipos de representação avançados por Santos e Semana (2014) são: linguagem verbal (a linguagem natural, feita pelas palavras dos alunos e com a terminologia matemática), representação icónica (utilização de esquemas ou desenhos) e representação simbólica (recurso a símbolos numéricos e/ou algébricos).

Nesta investigação, para caracterizar a comunicação escrita dos alunos na resolução dos problemas, foram tidos em conta os seguintes pontos, tendo por base o modelo de Santos e Semana (2014), e as alterações realizadas por Martinho e Rocha (2017):

1. Compreensão do problema – o aluno:
    - mostra que entendeu o que é pedido?
    - recolheu bem e de forma completa a informação?
    - transcreveu o objetivo e as informações do problema, ou reescreveu com as suas próprias palavras?
2. Fundamentação da resposta apresentada:
    - consoante o nível de fundamentação:
        - correção
        - clareza
        - completude
    - consoante o tipo de fundamentação:
        - vaga, pouco clara ou pouco informativa
        - uso exclusivo de regras, algoritmos ou definições
        - recurso à experimentação
        - procedimental (justificação do que é feito numa das etapas, sem explicar a validade da mesma)
        - relacional (justificação da validade de uma etapa)

3. Representações utilizadas:
    - linguagem verbal (linguagem natural com utilização de palavras próprias do dia a dia ou com terminologia matemática)
    - representação icónica (utilização de esquemas ou desenhos)
    - representação simbólica (utilização de símbolos algébricos)

Seguindo este modelo, poder-se-á fazer uma caracterização, de forma estruturada, da comunicação escrita dos alunos na resolução do problema proposto.

Contexto e Metodologia

Este estudo foi desenvolvido numa turma de 11.º ano do curso de Ciências e Tecnologias, de uma escola pública do distrito de Braga. A turma era constituída por 22 alunos, 12 raparigas e 10 rapazes, e não estava habituada a resolver problemas antes da intervenção realizada pelo primeiro autor no contexto desta experiência.

Como a finalidade desta experiência passava por perceber como é que os alunos da turma resolviam problemas, optou-se por realizar um estudo experimental com uma abordagem qualitativa e interpretativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa, os dados são recolhidos através de um forte contacto entre o investigador e os indivíduos que pertencem ao estudo, já que a investigação é feita com base num diálogo constante entre estes e o investigador. Além disso, ainda de acordo com Bogdan e Biklen (1994), neste tipo de investigação, os resultados escritos incluem, maioritariamente, a transcrição de diálogos ou registos oficiais – que, no caso deste estudo, são as resoluções dos alunos da turma.

Os resultados que serão apresentados nesta comunicação fazem parte de um estudo com a duração de um mês, no qual os alunos foram confrontados com problemas distintos. Portanto, para a realização de todo o estudo, foram utilizados diferentes métodos de recolha de dados. Inicialmente, foi aplicado uma ficha de diagnóstico, composto por três problemas sem aplicação direta de nenhum conteúdo específico. Durante as aulas seguintes, foram propostos diversos problemas aos alunos, alguns com o objetivo de serem realizados individualmente e outros em grupo, e as resoluções foram recolhidas para análise. Além disto, quando os alunos trabalhavam em grupo, foi também efetuada a gravação áudio de cada grupo durante a resolução dos problemas propostos, de modo a complementar a resolução escrita e ainda a observação da postura de cada aluno perante aquela tarefa. Por fim, foi aplicada uma ficha final que continha quatro problemas, com a qual se pretendia fazer uma comparação entre a resolução que o aluno fez na ficha de diagnóstico e esta ficha final. Ademais, foi ainda aplicado um questionário, de modo a conhecer as perspetivas dos alunos relativamente à resolução de problemas, nomeadamente no que toca às dificuldades que sentiram e às estratégias que mais utilizaram.

Nesta comunicação, o foco irá estar num dos problemas da ficha de diagnóstico, mais especificamente o primeiro problema da mesma. Esta escolha foi feita pelo facto de ter sido o primeiro problema com o qual a turma se confrontou, sendo que foi, também, na realização desta ficha que se sentiu um maior entrave por parte dos alunos na resolução de problemas. Como a turma não estava habituada a resolver problemas, com esta primeira abordagem foi possível identificar as dificuldades de base que a turma teria de ultrapassar durante a restante intervenção.

Apresentação dos resultados

No início deste estudo, a turma realizou uma ficha de diagnóstico com três problemas distintos. Nesta secção, irei apresentar os resultados obtidos na análise feita às respostas ao primeiro problema, relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, as dificuldades que estes demonstraram e ainda o modo como apresentaram as suas respostas. O problema tinha o seguinte enunciado:

> *Um sapo está no fundo de um poço com 10 metros de profundidade. Durante o dia, o sapo sobe 4 metros através da parede do poço, mas, durante a noite, e enquanto dorme, escorrega e desce 2 metros. Desta forma, quantos dias levará o sapo a atingir o cimo do poço?*[1]

Todos os alunos da turma resolveram este problema, embora apenas nove tenham dado a resposta correta. Os restantes treze chegaram a conclusões erradas devido a dificuldades e erros que cometeram ao longo da sua resolução, algo que veremos mais à frente. Antes disso, vejamos as estratégias que foram utilizadas na resolução deste problema.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

Na resolução deste problema, as estratégias mais utilizadas foram a construção de modelos que pudessem responder ao problema e o recurso a esquemas. No que toca aos *modelos construídos*, estratégia utilizada por quase 50% da turma, a sua maioria era semelhante ao modelo construído pelo aluno A17, apresentado na figura 1.

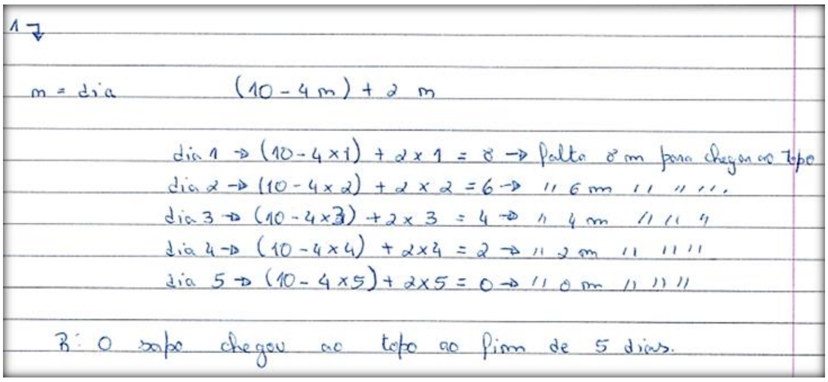


Figura 1 – Resolução do problema pelo aluno A17

Já no que toca aos *esquemas*, houve uma variedade na sua utilização. Quase todos usaram esquemas em forma de desenho, como é o caso do aluno A8 (Figura 2).

[1] Retirado de Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IEE.

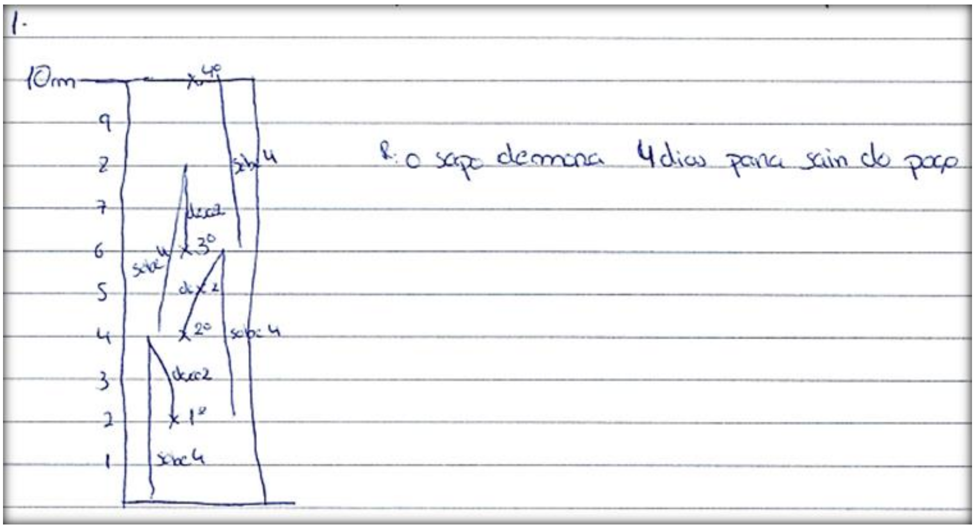


Figura 2 – Resolução do problema pelo aluno A8

Apesar de a maioria dos esquemas utilizados serem semelhantes aos da figura 2, um membro da turma recorreu a um esquema diferente, um diagrama (Figura 3).

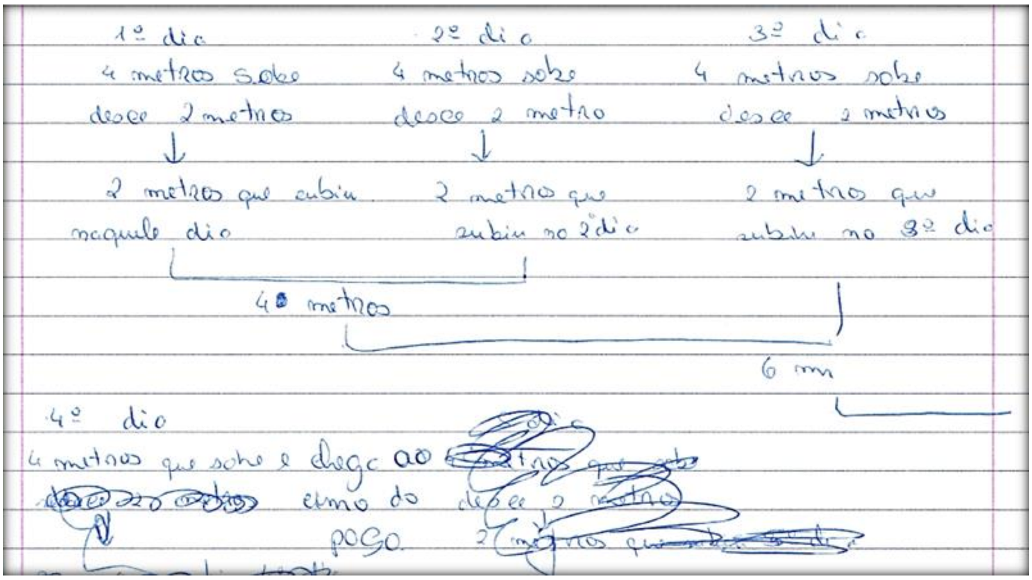


Figura 3 – Resolução do problema pelo aluno A15

Uma outra estratégia foi seguida por apenas dois alunos da turma, e foi a *construção de uma tabela* para organizar a informação. A resolução de um desses alunos pode ser vista na figura 4.

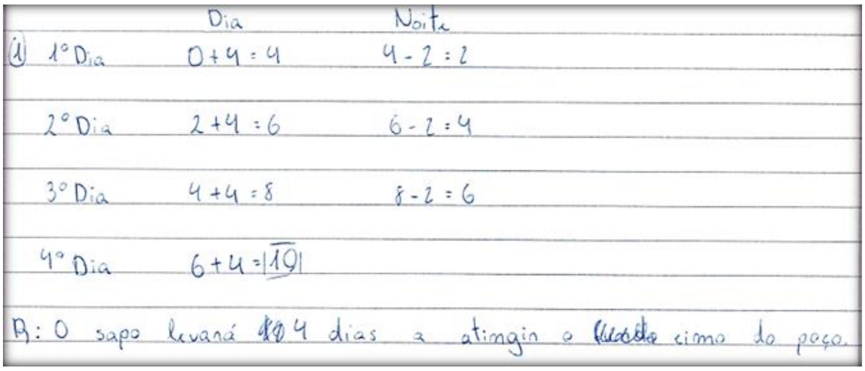


Figura 4 – Resolução do problema pelo aluno A7

Além das três estratégias já mencionadas, ou seja, a construção de um modelo, o recurso a um esquema e a elaboração de uma tabela, houve um aluno que utilizou uma fórmula que, na sua perspetiva, poderia ajudar a resolver o problema. Nesse caso, a fórmula utilizada foi a *regra de três simples*, como é possível ver na figura 5.

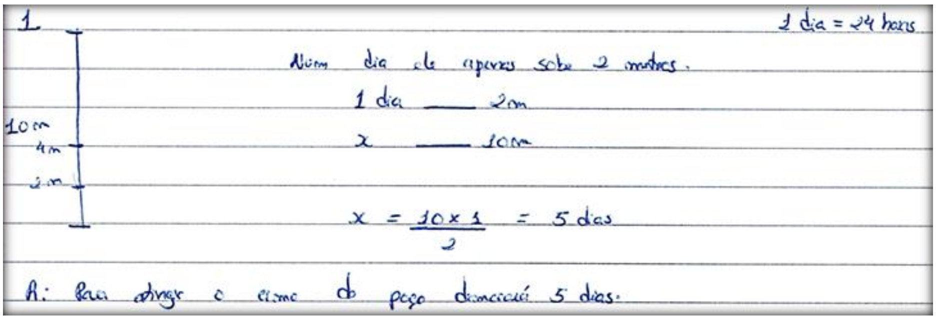
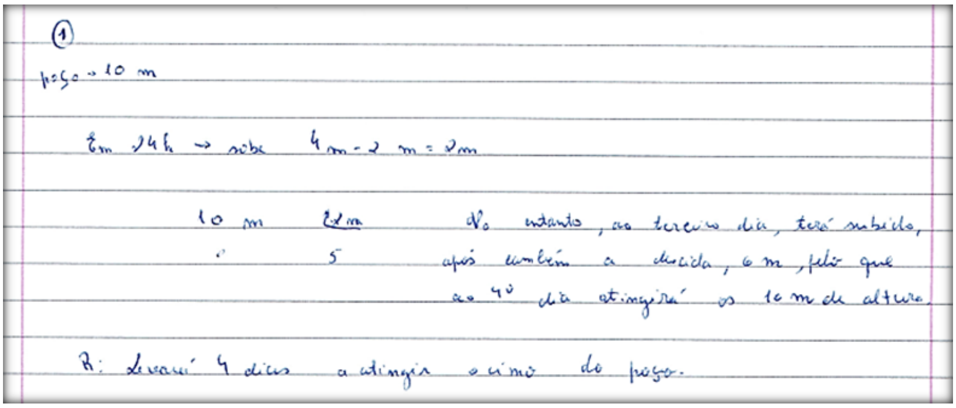


Figura 5 – Resolução do problema pelo aluno A1

Finalmente, em três das resoluções foi percetível que o problema foi *resolvido por partes*. Os três alunos começaram por utilizar um modelo que lhes permitisse chegar a uma resposta mas, após obterem um valor com esse modelo, relacionaram o número obtido com a situação do problema e reformularam uma resposta com um valor distinto. Um exemplo da resolução por partes pode ser visto na figura 6.


(1)
poço = 10 m

Em 24h → sobe 4 m - 2 m = 2 m

10 m | 2 m
 | 5

No entanto, ao terceiro dia, terá subido, após também a descida, 6 m, pelo que ao 4º dia atingirá os 10 m de altura.

R: Levará 4 dias a atingir o cimo do poço.

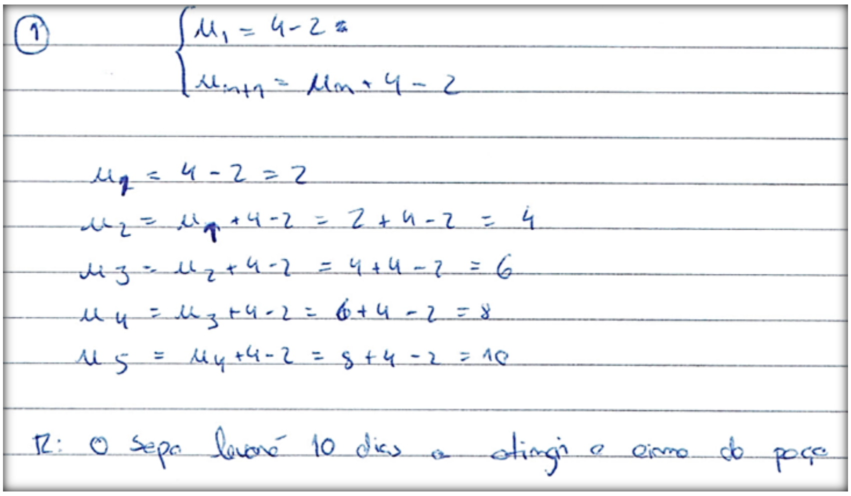
Figura 6 – Resolução do problema pelo aluno A14

Na figura 6, percebemos que o aluno começou por pensar num modelo. Esse modelo consistia em dividir os 10 metros de profundidade do poço pelos 2 metros que resultam da diferença entre aquilo que o sapo sobe durante o dia e aquilo que desce durante a noite. Assim, esta foi a primeira parte da resolução do problema. Já na segunda parte, vemos que o aluno voltou a pensar no problema, concluindo uma resposta inferior àquela que tinha obtido inicialmente, tendo mantido a resposta obtida na primeira parte como uma referência.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Na análise das resoluções dos alunos, foram detetadas dificuldades na interpretação dos resultados obtidos, na escolha da estratégia e ainda no desenvolvimento da mesma. De seguida, apresentam-se resoluções que exemplificam essas dificuldades.

No que à interpretação de resultados diz respeito, verificou-se o caso de um aluno que, apesar de apresentar uma estratégia adequada, conclui de forma errada. Na figura 7, percebemos que o aluno, na sua resposta, confundiu as representações: assumiu que u_n seria o número de dias, em vez de o fazer para o valor de n.


(1)
$$\begin{cases} u_1 = 4-2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 - 2 \end{cases}$$

$u_1 = 4 - 2 = 2$

$u_2 = u_1 + 4 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

$u_3 = u_2 + 4 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$

$u_4 = u_3 + 4 - 2 = 6 + 4 - 2 = 8$

$u_5 = u_4 + 4 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$

R: O sapo levará 10 dias a atingir o cimo do poço

Figura 7 – Resolução do problema pelo aluno A21

Além disso, ainda na figura 7, é possível ver uma resolução em que o desenvolvimento da estratégia escolhida não foi bem conseguido. Isto porque o aluno, à semelhança de alguns colegas que seguiram uma estratégia semelhante, não se apercebeu que, no cálculo do termo de ordem 4, passou pela resposta correta, já que “6+4” já resultaria no número 10, que era o valor pretendido. Este tipo de dificuldade verificou-se em estratégias baseadas em cálculos, mas também em resoluções feitas com o recurso a esquemas, como é o caso do exemplo da figura 8.

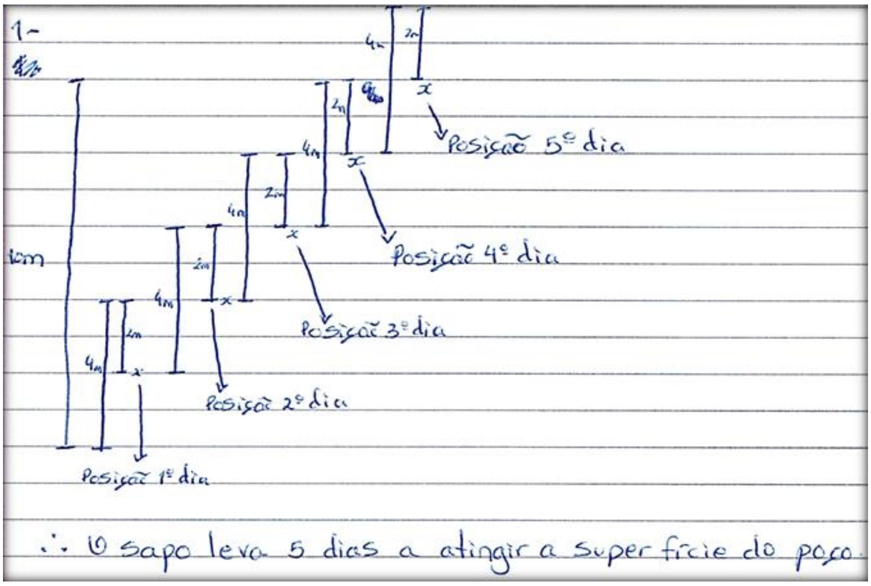


Figura 8 – Resolução do problema pelo aluno A5

Na figura 8, é possível reparar que, entre aquilo que o aluno assume ser a posição do 3.º dia e a posição do 4º dia, o sapo já chegou ao cimo do poço, o que resolveria de imediato o problema. Mas, tal como aconteceu nas estratégias que envolveram cálculos, o aluno só termina o raciocínio quando o sapo completa o ciclo “dia-noite”, ou seja, quando o sapo sobe e desce de seguida. Assim, a dificuldade que os alunos demonstraram no desenvolvimento da estratégia, deveu-se ao facto de estarem demasiado “presos” à ideia de que a posição do sapo, no dia n, era obtida apenas após o sapo descer durante a noite, não considerando a respetiva posição após a subida durante o dia.

O último exemplo de dificuldades encontradas pode ser encontrado na resolução do aluno A1, já apresentada na figura 5. Nessa resposta, podemos ver que a estratégia escolhida poderá não ter sido a melhor. Isto porque, ao contrário do que aconteceu com as estratégias observadas nas figuras 7 e 8, aqui não foi possível passar pelo resultado correto ao longo do processo.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

A análise da comunicação escrita começa pela compreensão do problema, por parte dos alunos. Neste aspeto, todos os alunos demonstraram ter entendido o que era pedido e também recolheram devidamente e de modo completo a informação. Além disso, todos reescreveram os dados recolhidos com a sua própria linguagem, não se limitando a transcrever do problema. Um exemplo disso está presente na figura 9:

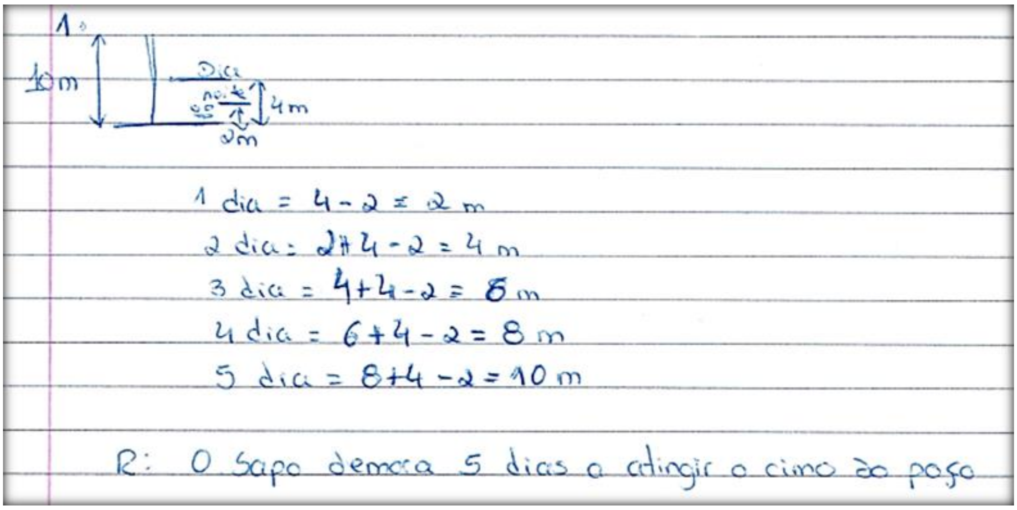


Figura 9 – Resolução do problema pelo aluno A22

Nesta figura, vemos, no canto superior esquerdo, que o aluno recolheu a informação do problema e a escreveu sob a forma de um esquema, não fazendo apenas uma transcrição da informação.

Relativamente à *fundamentação da resposta* apresentada, já foi referido que apenas nove alunos apresentaram uma resposta correta: o sapo levará quatro dias a atingir o cimo do poço. Um exemplo desta resposta pode ser visto na figura 6. Entre as restantes respostas, um aluno refere que o sapo levaria dez dias a atingir o cimo do poço (Figura 7), nove respostas indicavam que seria cinco dias, à semelhança do que vemos na figura 9, e ainda duas respostas em que o sapo demoraria quatro dias e doze horas. Por último, um dos alunos não indicou qualquer resposta, tendo sido o único a apresentar uma resolução sem resposta e, portanto, incompleta, como se percebe pela figura 10.

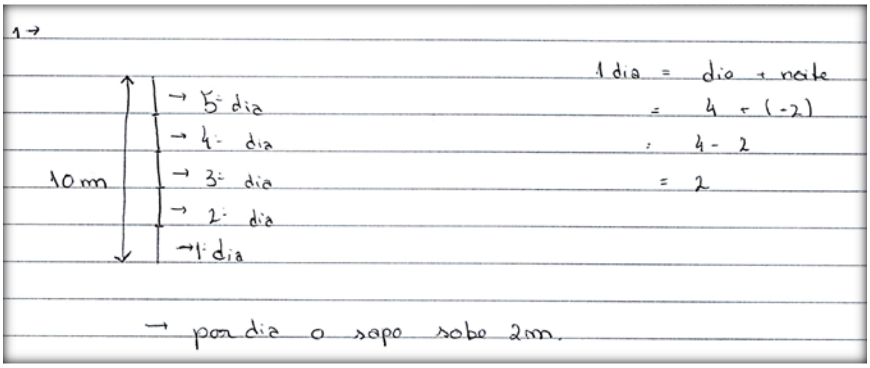


Figura 10 – Resolução do problema pelo aluno A9

Ainda dentro do nível de fundamentação da resposta, resta apresentar os resultados a nível de clareza. Apesar de alguns alunos conseguirem explicar de forma clara aquilo que pensaram para resolver o problema, isso não é um processo fácil para todos, principalmente quando não recorrem à representação simbólica ou a esquemas. Por exemplo, recorrendo aos exemplos já utilizados, na figura 8 o aluno deixou claro o seu raciocínio através de uma sucessão definida por recorrência. O mesmo acontece na figura 9, em que o esquema utilizado deixa claro o modo como o aluno pensou. No entanto, tal não acontece na figura 11.

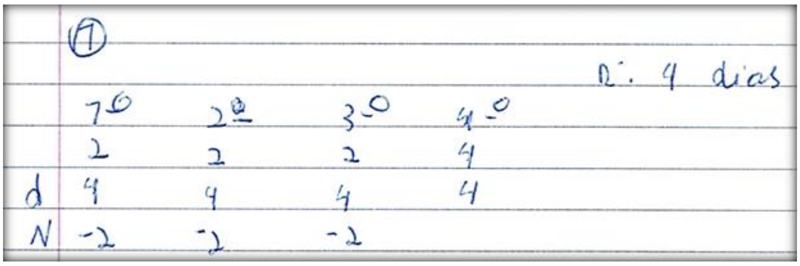


Figura 11 – Resolução do problema pelo aluno A18

Nesta figura, o aluno mostra ter dificuldades em explicar e apresentar de forma compreensível o seu raciocínio, mesmo tendo elaborado uma tabela. Já no que toca ao tipo de fundamentação da resposta, podemos então concluir que esta resolução é um pouco vaga a esse nível, pois o aluno não deixa muita informação sobre o seu raciocínio. O mesmo pode ser visto na figura 10, sendo que, além destes dois alunos, houve mais uma resposta cuja fundamentação foi pouco clara.

O *tipo de fundamentação* da resposta que foi mais vezes encontrado na resolução deste problema foi o recurso à experimentação. Isto pode ser visto, por exemplo, nas figuras 8 e 9, sendo que estes alunos foram fazendo cálculos ou desenhos que lhes permitiram chegar a uma resposta. Estes processos foram desenvolvidos através de uma experimentação que consistia em fazer com que o sapo subisse quatro unidades, e descesse duas, até chegar ao resultado esperado. Apesar de o recurso à experimentação ter sido o tipo de fundamentação mais encontrado, utilizado por doze alunos, três resoluções mostravam um uso exclusivo de regras ou algoritmos. Este grupo de alunos usou exclusivamente regras conhecidas previamente, mas não justificaram as etapas seguidas nem a validade das mesmas. Um exemplo disso pode ser visto na figura 12.

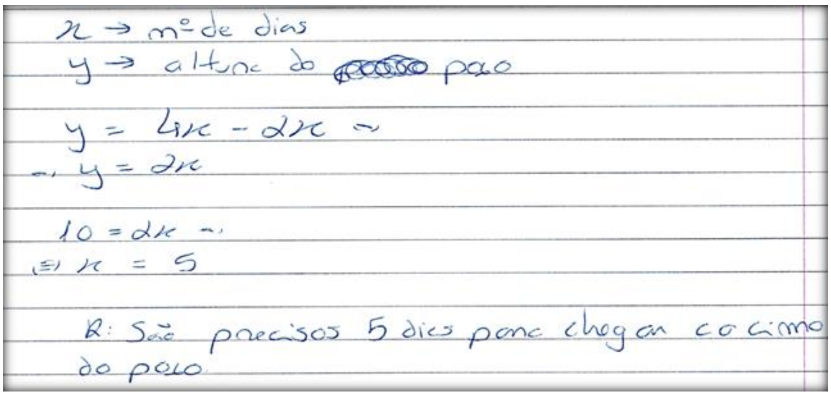


Figura 12 – Resolução do problema pelo aluno A6

Já no que diz respeito à fundamentação procedimental, não foi detetada em nenhuma das vinte e duas resoluções, mas a fundamentação relacional foi apresentada por quatro alunos da turma. Um exemplo deste tipo de fundamentação é encontrado na resolução do aluno A16 (Figura 13).

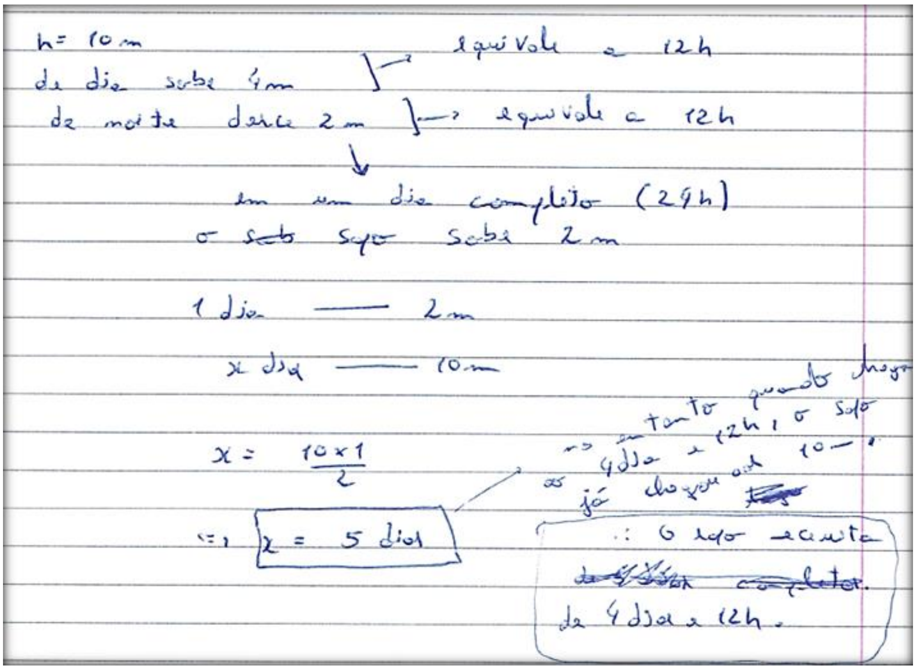


Figura 13 – Resolução do problema pelo aluno A16

Na resolução da figura 13, o aluno seguiu uma estratégia que fez com que chegasse a uma primeira resposta: “5 dias”. Mas acabou por responder ao problema com “O sapo necessita de 4 dias e 12h.”. No entanto, entre essas duas respostas, estabeleceu uma justificação para a validade dessa passagem de uma resposta para outra.

Ao longo desta apresentação de resultados, foram sendo referidas as representações utilizadas pelos alunos. No quadro 1, encontram-se as percentagens de utilização de cada uma das representações. É importante referir que, nas resoluções a este problema, apenas se está a considerar que o aluno utilizou linguagem verbal, se esta foi utilizada ao longo do processo de resolução, e não exclusivamente na sua conclusão.

Quadro 1 – Representações utilizadas nas resoluções do problema

Tipo de representação	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (em %)
Linguagem verbal	5	23%
Representação icónica	11	50%
Representação simbólica	14	64%

Pelo que já foi visto anteriormente, apenas um aluno não apresentou uma resposta completa para o problema. Mas, apesar de quase todos os alunos terem dado uma resposta, no final do processo de resolução do problema, esta foi apenas uma frase onde concluíam o resultado a que chegaram. Ao longo do processo, a turma deu preferência ao uso de desenhos, esquemas, tabelas e algoritmos matemáticos, deixando de parte a justificação através de linguagem verbal.

Considerações Finais

Na introdução desta comunicação, foram definidos os objetivos que se pretendia responder: identificar as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos, reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução do problema e caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções do problema.

No que toca às estratégias, as que foram mais utilizadas foram a *construção de esquemas/figuras* e a *construção de um modelo*, ambas com 41% dos alunos a recorrer a elas. Convém acrescentar que apenas um dos alunos utilizou as estratégias em simultâneo. Além destas estratégias, quatro dos alunos da turma recorreram à *aplicação de fórmulas*, sendo que dois deles conciliaram esta estratégia com uma estratégia de *resolução por partes*. Esta última foi utilizada por um total de três estudantes. Finalmente, a estratégia menos utilizada foi a *construção de tabelas*, tendo dois alunos a recorrer a ela de modo exclusivo. A nível de dificuldades, apenas um dos alunos revelou ter dificuldades a nível de interpretação, nomeadamente em interpretar o significado do resultado que obteve. As restantes dificuldades registadas foram a nível de estratégia, já que oito alunos não conseguiram *escolher uma estratégia* que lhes permitisse chegar à resposta correta, e cinco alunos não *executaram a estratégia* escolhida da melhor maneira. Ademais, um dos obstáculos que se sentiu na escolha da estratégia, em algumas resoluções, recaiu sobre a configuração e fixação mental, referida por Sternberg (1998). Isto foi visível nos casos em que os alunos aplicaram uma *regra de três simples*, ou até quando estavam demasiado presos ao ciclo completo de "dia – noite", sendo que estas ideias não lhes permitiram chegar à resposta correta. Tanto as estratégias utilizadas como as dificuldades sentidas foram objeto de discussão, tendo sido dado um feedback individual a cada aluno relativamente à sua resolução e esclarecendo os aspetos positivos e aquilo que poderia ser melhorado, sendo que este feedback teve um efeito direto nos alunos.

Por fim, quanto à comunicação escrita, foi notório que os alunos não tiveram dificuldades em compreender o problema. Quanto à fundamentação das respostas apresentadas, mais especificamente quanto ao nível, já foi dito anteriormente que a *correção* esteve presente em nove respostas, a *completude* apenas não se verificou na resposta de um aluno e, quanto à *clareza*, foi percetível que cinco dos alunos não conseguiam explicar de forma clara aquilo que pensaram aquando da resolução do problema. Relativamente ao tipo de fundamentação, três alunos apresentaram uma resposta considerada *vaga, pouco clara ou pouco informativa* e a mesma quantidade de respostas tinha um *uso exclusivo de regras*. Além disso, o tipo de fundamentação *relacional* foi visto em quatro respostas e o *recurso à experimentação* foi encontrado em mais de metade das respostas, num total de doze. Quanto às representações, e tal como podia ser visto no quadro 1, as mais utilizadas foram a representação simbólica e a representação icónica, informação compatível com o facto de as estratégias mais utilizadas serem a construção de esquemas/figuras e a construção de um modelo, sendo que mais de 50% da turma utilizou cada um destes tipos de representação, e apenas 23% dos alunos recorreu à linguagem verbal. Resta concluir que, ao contrário do que aconteceu no estudo de Martinho e Rocha (2017), nas resoluções deste problema não se encontrou nenhuma relação entre o tipo de fundamentação da resposta e a correção da mesma, já que houve respostas vagas que permitiram aos alunos alcançar a solução correta, e até fundamentações relacionais que levaram os alunos a soluções erradas. A fundamentação da resposta pode revelar as dificuldades que alguns alunos têm em expressar o seu pensamento matemático de forma clara, mas não se pode concluir que está diretamente relacionado com a capacidade de resolver um problema.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pelo CIEd – Centro de Investigação em Educação, projetos UID/CED/1661/2013 e UID/CED/1661/2016, Instituto de Educação, Universidade do Minho, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

D'Ambrósio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje? *SBEM*, *4*(2), 15-19.

Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática*. Lisboa: Edições ASA.

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2017). A escrita matemática na resolução de um problema de geometria por alunos de Licenciatura em Educação Básica. In H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro & J. P. da Ponte, *O ensino e a aprendizagem da Geometria*. Lisboa: EIEM, SPCE.

MEC (2013). *Programa de Matemática A*. Lisboa: MEC.

MEC (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: MEC.

Musser, G. L., & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem-solving Strategies in School Mathematics. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 136-145). Reston, Virgínia: NCTM.

OECD (2014). *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving – Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V)*. Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf.

Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2013). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 116* (2014), 3169-3174.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for eficiente and elegant solutions: A resource for the mathematics teacher*. Thousand Oaks, Califórnia: Corwin Press, Inc.

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(1), 65-87.

Sternberg, R. J. (1998). *In search of the human mind*. Orlando, Flórida: Harcout Brace & Company.

O IMPACTO DO QUESTIONAMENTO DO PROFESSOR ESTAGIÁRIO DE MATEMÁTICA NOS ALUNOS

Micaela Martins

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

msterceiro@campus.ul.pt

Resumo: Muitos são os estudos em que o tema é o questionamento realizado em sala de aula. A conclusão é semelhante: é o professor que monopoliza o discurso, sendo este baseado na formulação de perguntas. Sendo assim, torna-se pertinente questionar: qual a perceção que os alunos têm do impacto do questionamento do professor na sua aprendizagem? O presente estudo teve como objetivo avaliar a perceção do impacto do questionamento de uma professora estagiária de Matemática nos alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade de uma escola do distrito de Aveiro. Para isto foi aplicado um questionário aos 26 alunos da referida turma, na qual a professora estagiária (autora desta comunicação) teve intervenções. De acordo com os resultados obtidos, é possível verificar que os alunos consideraram, na sua maior parte, que as perguntas colocadas pela professora estagiária são essenciais no seu percurso escolar. Também é possível aferir que os alunos que afirmaram gostar da disciplina de Matemática tendem a considerar que as perguntas colocadas pela professora contribuíram para o aumento do gosto pela disciplina e para a melhoria dos seus resultados, contrariamente à opinião dos alunos que dizem não gostar de Matemática enquanto disciplina.

Palavras-chave: Questionamento; questionamento em sala de aula; ensino da Matemática.

Introdução

Muitos são os estudos que se têm realizado em torno da comunicação em sala de aula e, com especial enfoque, sobre questionamento. Numa sala de aula a comunicação é indispensável e aparece, predominantemente, sob a forma verbal. As investigações têm mostrado que é o professor que ocupa maior parte do tempo do discurso, sobrando apenas uma pequena parte para os alunos. Ferreira (2010), com base nos estudos de Flanders (1987), afirma que 68% do tempo letivo é ocupado pela fala do professor e apenas 20% pela dos alunos. Do tempo em que o professor fala, 70 a 80%, é a formular perguntas. Embora este estudo não seja recente, o autor referido assevera que investigações atuais têm revelado valores próximos.

Considerando o tempo que o professor ocupa a formular perguntas, é fácil constatar que o questionamento é o principal instrumento de comunicação usado pelos professores, assumindo, desta forma, uma clara importância no processo de ensino e aprendizagem. Assim, e para fomentar uma aprendizagem ativa e com significado, é fundamental que os alunos sejam expostos a perguntas com diferentes níveis cognitivos, consoante o momento da aula, o objetivo pretendido e mesmo o tipo de tarefa que se está a trabalhar. Mason (2002) afirma que as questões têm a capacidade de direcionar a atenção das pessoas o que nos permite corroborar a ideia de que o professor assume o papel principal no tipo de aula e no tipo de raciocínio que pretende que os seus alunos desenvolvam. Segundo o mesmo autor (2000), o estilo e a natureza das questões colocadas têm uma grande influência na significação que é dada a determinado conteúdo.

É importante que os professores saibam questionar os seus alunos. Se o professor praticar um questionamento com qualidade pode conseguir envolver os alunos e motivá-los a, também eles próprios, formularem perguntas levando-os a aprender e desenvolver o seu espírito crítico, alcançando assim uma aprendizagem ativa (Coutinho, 2012). A disciplina de Matemática não é exceção no que respeita à preocupação do tipo de perguntas que o professor coloca perante os seus alunos.

Nesta linha de pensamento, surge a questão: qual será a perceção do impacto do questionamento do professor nos alunos? Pretendo, deste modo, compreender se o questionamento de uma professora estagiária contribui, na perspetiva dos alunos, para o seu próprio desenvolvimento de capacidades e aprendizagem.

O questionamento na sala de aula

Uma vez que a palavra *questionamento* já foi referida diversas vezes ao longo desta comunicação, urge a necessidade de esclarecer o seu significado e alguns conceitos que com ela se relacionam e/ou interligam. Coutinho (2012) define *questionamento* como sendo "o ato de interrogar e responder, as suas caraterísticas e o contexto em que decorre" (p. 9). Também os conceitos de *interrogação*, *pergunta* e *questão* surgem associados ao termo *questionamento*. As perguntas são realizadas sobre a forma de interrogações, sendo seguidas por um tempo de espera, com o intuito de obter uma resposta por parte do recetor, afirma Menezes (1996) apoiando-se em Pereira (1991). Estas não têm obrigatoriamente de terminar com um ponto de interrogação, podendo assumir diferentes formas sintáticas: interrogativa, imperativa ou declarativa. Já a *questão* é mais do que uma pergunta, no sentido em que inclui reflexão quer na sua elaboração, quer na sua resposta.

Assim, várias são as categorizações consideradas para as perguntas formuladas pelo professor, dependendo dos objetivos da própria investigação e, claro, do autor. Uma das categorizações mais utilizada é a Taxonomia de Bloom que divide as perguntas em seis níveis de complexidade crescente: conhecimento (recorda ou conhece informações na forma em que foram aprendidas); compreensão (compreende e interpreta informação com base em conhecimento prévio); aplicação (utiliza o que aprende em situações novas e concretas); análise (relaciona conhecimento); síntese (relaciona ideias para formar algo); avaliação (avalia ou critica padrões específicos).

Já Ferreira (2010) carateriza as perguntas do professor quanto à sua função comunicativa, definindo assim duas categorias: científicas (perguntas diretamente ligadas com temas científicos) e não científicas (perguntas de rotina, gestão sala de aula ou retórica). Em relação ao nível cognitivo, as perguntas com função comunicativa científica são divididas em perguntas fechadas (solicitam resposta exata e fatual e a confirmação ou clarificação de informação, tem uma resposta considerada a correta) e perguntas abertas (originam várias respostas, interligam várias áreas do conhecimento e podem construir novo conhecimento).

Ainda Pedrosa de Jesus, Sá-Correia e Abrantes (2005), tendo por base trabalhos de Jesus, Van Manen e Smyth, obtém quatro categorias para as perguntas com nível cognitivo crescente: confirmação/cooperação (próximas da retórica); descrição/eliciação (apelam à memória e referem-se a situações de sala de aula); interpretação (ligam a teoria com a prática e estimular a criatividade e descoberta de caminhos alternativos); avaliação (pretendem obter juízos de valor, análises críticas e defesas de posições em relação a determinados temas, demonstrando conhecimento).

Tendo em conta a questão a que me propus, considero que a categorização que mais se adequa ao objetivo formulado é a definida por Pedrosa de Jesus (1987) que categoriza as perguntas consoante o seu nível cognitivo. A autora considera existir perguntas fechadas, que requerem um nível cognitivo baixo, e perguntas abertas, com nível cognitivo alto. Dentro das perguntas fechadas, define duas subcategorias: Conhecimento-Memória (requerem apenas o apelo à memória) e Pensamento Convergente (envolvem a análise, associação ou explicação de fatos). Dentro das perguntas fechadas, considera Pensamento Divergente (permitem criar próprias ideias) e Pensamento Avaliativo (exigem que o aluno argumente e defenda o seu ponto de vista). Além destes tipos de perguntas, admite ainda as perguntas de Rotina, que são facilitadoras da gestão de sala de aula, e as perguntas de Retórica, que servem para realçar alguma informação e não esperam resposta.

Apesar da grande quantidade de estudos no que respeita ao questionamento, pouco se tem investigado acerca do impacto deste nos alunos e nos seus resultados escolares. Considerando que a interação entre professor-aluno e, em particular, o questionamento que é realizado, é um fator relevante no processo ensino-aprendizagem, torna-se evidente a importância de perceber qual o impacto que as perguntas colocadas pelo professor tem nos seus alunos, na sua própria perspetiva.

Metodologia de investigação

Participantes

Este estudo é uma investigação sobre a minha própria prática profissional, como professora estagiária de Matemática. O estágio estava inserido numa unidade curricular do ciclo de estudos que estava a frequentar, com a duração de um ano letivo, e no qual assumi algumas aulas de duas turmas, embora existisse uma professora titular em ambas.

Neste estudo participaram os alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade de uma escola do distrito de Aveiro. A turma era composta por 26 elementos com idades entre os 14 e os 15 anos, sendo 65% do sexo masculino e 35% do sexo feminino e todos responderam ao questionário aplicado. Confrontados com a pergunta “Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?”, cerca de 65% dos alunos responderam negativamente.

Instrumentos

De forma a avaliar a perceção do impacto do questionamento da professora estagiária na turma considerada, tendo em conta a opinião dos alunos, foi-lhes aplicado um questionário no final do ano letivo, construído com base na literatura e tendo como base a investigação de Adedoyin (2010) e o questionário que o autor aplicou à sua amostra. Note-se que foi solicitada antecipadamente uma autorização (em formato papel) aos Encarregados de Educação dos alunos da turma participante.

O questionário está dividido em três partes distintas. A Parte I pretende conseguir uma caracterização da turma em geral, categorizando assim os alunos consoante o seu género e consoante o seu gosto pessoal em relação à disciplina de Matemática. A Parte II pretende avaliar de que forma o questionamento dos professores de Matemática tem impacto no desenvolvimento do aluno, sob o seu próprio ponto de vista, contemplando um total de 5 afirmações. A terceira e última parte engloba 20 afirmações as quais estão ordenadas segundo vários objetivos pretendidos e que apenas dizem respeito à prestação da professora estagiária. Da afirmação 1 à 3, elaboradas com base no questionário aplicado por Adedoyin (2010), pretende-se obter a perceção dos alunos relativamente à frequência das perguntas colocadas em sala de aula; da afirmação 4 à 8 pretende-se compreender se os alunos perceberam a intenção das perguntas colocadas, as quais foram elaboradas com base na categorização de perguntas proposta por Pedrosa de Jesus (1987); da afirmação 9 à 12 pretende-se compreender se as perguntas colocadas ajudaram os alunos a seguirem um método de Resolução de Problemas eficaz, sendo a sua formulação baseada na metodologia de Resolução de Problemas de Polya; e por último, da afirmação 13 à 20, pretende-se perceber aspetos gerais do questionamento criado em sala de aula, compreendendo a perceção dos alunos relativamente às perguntas colocadas, sendo também estas adaptadas do estudo de Adedoyin (2010).

Importa ainda referir que as Partes II e III contêm perguntas fechadas, sob a forma de afirmações, tendo os alunos à disposição uma escala para assinalar a resposta que consideravam mais adequada: Discordo Totalmente (DT), Discordo (D), Concordo (C) e Concordo Totalmente (CT).

Análise dos dados

As respostas dos alunos participantes no estudo foram analisadas essencialmente sob o ponto de vista quantitativo, havendo assim recurso ao *software* SPSS para compreender qual a maioria de respostas dadas, em cada uma das questões. Foi ainda feito um teste para garantir a confiabilidade das respostas dos participantes a todo o questionário, obtendo assim 0,79 para o coeficiente de Alfa de Cronbach.

A escala do questionário foi utilizada no SPSS sob a forma de valores, estabelecendo-se assim a seguinte correspondência: DT-1, D-2, C-3 e CT-4. Dado existirem questionários incompletos nas partes II e III, considerou-se ainda a opção de Não Respondeu (NR) com o valor 5.

Para facilitar o processo de referência a determinada afirmação, será utilizada a numeração romana para identificar a parte do questionário seguida de um ponto e do respetivo número da afirmação nessa mesma parte (por exemplo, III.8 corresponde à afirmação número 8 da parte III, exemplificando, “A professora estagiária fez perguntas para verificar se eu tinha compreendido.”).

De forma a analisar a distribuição das repostas dadas pelos alunos foram criadas tabelas com as medidas de dispersão e de localização consideradas pertinentes neste estudo. Para fazer uma análise mais exaustiva às respostas dos alunos que revelaram uma distribuição mais dispersa e uma vez que o número de participantes a considerar é pequeno, foram escolhidos testes não paramétricos, no caso, tabelas de contingência de comparação simples. Importa ainda referir que as tabelas apresentadas revelam o somatório das percentagens relativas aos alunos que escolheram as opções “Concordo” e “Concordo Totalmente” e, da mesma forma, o somatório das percentagens dos alunos que assinalaram “Discordo” e “Concordo Totalmente”.

A análise dos dados assume ainda uma natureza qualitativa, implicitamente, na medida em que é analisado o conteúdo, isto é, importa não apenas que parte dos alunos concordam ou discordam com a afirmação, mas também as conclusões que se retiram da interpretação dessa afirmação.

Apresentação e análise dos resultados

Questão: *Qual a perceção do impacto do questionamento da professora estagiária de Matemática nos alunos*?

Como já referido anteriormente, mais de metade da turma envolvida no estudo nega que Matemática se inclui numa das suas três disciplinas preferidas. De entre todas as respostas da questão aberta que exigia a justificação da resposta à pergunta "Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?", as que mais se destacaram foram: "prefiro outras [disciplinas]", "nunca consegui perceber muito da matéria" ou "nem sempre consigo perceber a matéria", "porque se tem de pensar muito" e "envolve muito raciocínio". Assim, é necessário compreender que a amostra em causa contempla muitos indivíduos que não compreendem bem "a matéria" e que consideram que a Matemática exige um nível de pensamento e raciocínio elevado.

Para responder à questão a que me propus, as respostas dos alunos foram analisadas recorrendo ao SPSS e às tabelas de frequência resultantes, perfazendo a tabela seguinte.

Tabela 1 – Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos da Parte II

	Discordantes	Concordantes	Média	Desvio-Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
II.1	15,40	84,60	2,88	0,431	3	2	4
II.2	88,40	11,50	1,92	0,560	2	1	3
II.3	7,70	88,50	3,15	0,613	3	2	5
II.4	11,50	88,40	2,88	0,516	3	1	4
II.5	11,50	88,50	3,00	0,632	3	1	4

De um modo geral, os professores de Matemática que tens tido…

II.1	*… fazem muitas perguntas durante as aulas.*
II.2	*… desperdiçam muito tempo das aulas a fazerem perguntas.*
II.3	*… fazem perguntas que têm sempre impacto na minha compreensão dos conceitos matemáticos.*
II.4	*… fazem perguntas que influenciam o meu desempenho nas aulas.*
II.5	*… fazem perguntas que são essenciais para que eu seja bem sucedido.*

Perante os dados representados na Tabela , pode-se concluir que os alunos consideram que, apesar dos professores de Matemática, em geral, fazerem muitas perguntas em contexto de sala de aula, estas são fundamentais para o seu próprio desenvolvimento. Para os alunos, o tempo de aula utilizado pelo professor para formular perguntas não é um desperdício e as perguntas que este coloca influenciam o seu desempenho na sala de aula e o próprio sucesso escolar.

Tendo em conta que o questionário implementado visava obter as perceções dos alunos relativamente ao questionamento da professora estagiária, de seguida apresentam-se 4 tabelas idênticas à anterior, com objetivos distintos, mas que pretendem apenas concluir acerca do questionamento da professora estagiária.

Tabela 2 – Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente à frequência das perguntas

	Discordantes	Concordantes	Média	Desvio-Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
III.1	15,40	80,80	3,00	0,632	3	2	5
III.2	11,50	88,40	2,92	0,392	3	2	4
III.3	15,40	84,60	2,88	0,431	3	2	4

Nota. 3,8% dos alunos não responderam a III.1

A professora estagiária…

III.1	*… fez muitas perguntas nas aulas.*
III.2	*… fez muitas perguntas nos momentos de resolução de exercícios.*
III.3	*… fez muitas perguntas nos momentos de exposição de conteúdos programáticos.*

Através da observação da Tabela é possível aferir que, relativamente à frequência das perguntas colocadas em sala de aula pela professora estagiária, os alunos tendem a concordar que a professora fez muitas perguntas, independentemente da natureza das aulas.

Tabela 3 – Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente à intenção das perguntas

	Discordantes	Concordantes	Média	Desvio-Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
III.4	38,50	61,50	2,65	0,562	3	2	4
III.5	15,40	84,60	3,08	0,628	3	2	4
III.6	30,70	65,40	2,81	0,801	3	1	5
III.7	11,50	88,40	3,08	0,560	3	2	4
III.8	26,90	73,10	3,04	0,774	3	2	4

Nota. 3,8% dos alunos não responderam a III.6

A professora estagiária…

III.4	*… fez perguntas que apenas exigiam que eu me lembrasse de factos ou fórmulas.*
III.5	*… fez perguntas que me obrigaram a interpretar informação.*
III.6	*… fez perguntas que me permitiram criar as minhas próprias ideias.*
III.7	*… fez perguntas que me obrigaram a justificar a minha resposta.*
III.8	*… fez perguntas para verificar se eu tinha compreendido.*

Relativamente à intenção das perguntas colocadas pela professora estagiária, e que têm como base a categorização proposta por Pedrosa de Jesus (1987), a análise da Tabela sugere-nos que os alunos tendem a concordar que a professora tenha feito muitas perguntas em todas as categorias.

Posto isto, os alunos consideram que a professora fez perguntas de baixo nível cognitivo, que exigiam recordar fatos ou fórmulas (III.4) ou obrigavam a interpretação de informação (III.5) e ainda perguntas com um nível cognitivo maior, que permitiam aos alunos criarem as suas próprias ideias (III.6) e em que se pedia a justificação de respostas (III.7). Os alunos tendem ainda a concordar que a professora estagiária colocou perguntas por forma a verificar se haviam entendido o problema proposto (III.8).

Tabela 4 – Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente aos processos de resolução de problemas

	Discordantes	Concordantes	Média	Desvio-Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
III.9	23,10	73,00	2,96	0,720	3	2	5
III.10	30,80	69,20	2,73	0,533	3	2	4
III.11	19,20	80,70	2,88	0,653	3	1	4
III.12	23,10	76,90	2,88	0,588	3	2	4

Nota. 3,8% dos alunos não responderam a III.9

A professora estagiária…	
III.9	*… fez perguntas que me ajudaram a compreender os problemas propostos.*
III.10	*… fez perguntas que me ajudaram a construir uma estratégia para a resolução dos problemas propostos.*
III.11	*… fez perguntas que me ajudaram a resolver os problemas propostos.*
III.12	*… fez perguntas que me permitiram encontrar estratégias para confirmar as soluções obtidas.*

No que respeita às perguntas colocadas pela professora estagiária por forma a conduzir os alunos a seguirem um método de resolução de problemas eficaz, não existem diferenças significativas nas respostas dos mesmos.

Mais uma vez os alunos reúnem consenso, tendendo para concordar com as afirmações. Este fato sugere-nos que, no ponto de vista dos alunos, a professora estagiária parece ter tido particular cuidado com o tipo de perguntas a colocar em cada fase da resolução de problemas. Este aspeto é fundamental na criação de um questionamento favorável para ambientes de aprendizagem. Mason (2000) refere mesmo que “Questions arise as pedagogic instruments both for engaging students in and assessing students’ grasp of, ideas and techniques” (p. 97).

Tabela 5 – Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente ao desempenho, em geral, da professora estagiária

	Discordantes	Concordantes	Média	Desvio-Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
III.13	73,10	26,90	2,31	0,549	2	2	4
III.14	15,30	84,60	2,96	0,662	3	1	4
III.15	38,50	61,50	2,73	0,667	3	2	4
III.16	53,80	46,20	2,50	0,707	2	1	4
III.17	46,20	53,8	2,58	0,578	3	2	4
III.18	50	50	2,46	0,706	2,5	1	4
III.19	42,3	57,7	2,65	0,846	3	1	4
III.20	15,40	84,6	2,96	0,528	3	2	4

A professora estagiária…	
III.13	*… fez perguntas que compreendi sempre.*
III.14	*… deu tempo para pensar e responder às perguntas que colocava.*
III.15	*… fez perguntas que fizeram com que eu prestasse mais atenção às aulas.*
III.16	*… colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de participar nas aulas.*
III.17	*… colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de fazer mais perguntas.*
III.18	*… colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de aprender Matemática.*
III.19	*… fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação.*
III.20	*… fez perguntas que ajudaram no desenvolvimento da minha aprendizagem.*

A Tabela reúne os resultados obtidos para o conjunto de afirmações baseadas em Adedoyin (2010) que têm como objetivo perceber quais as falhas do questionamento em sala de aula é a que apresenta alguma falta de consenso.

Começando pela afirmação “A professora estagiária fez perguntas que compreendi sempre” (III.13), mais de 70% dos alunos discordaram. No entanto, pouco mais de 60% dos alunos consideram que as perguntas fizeram com que estivessem com mais atenção nas aulas (III.15).

Quase 85% dos alunos consideram que a professora deu tempo para poderem pensar e responder às perguntas (III.14). Exatamente com a mesma percentagem, 84,6% de concordância da afirmação referida anteriormente temos a III.20, em que os alunos concordam que as perguntas colocadas pela professora estagiária ajudaram no desenvolvimento da aprendizagem.

As afirmações III.16 e III.17 foram as que ficaram muito próximas, em termos de percentagens de respostas ao nível da tendência para concordar ou discordar. Os alunos dividiram as suas respostas de forma muito próxima, não nos permitindo saber se acham que as perguntas colocadas pela professora estagiária fizeram com que tivessem mais vontade de participar nas aulas ou de fazer perguntas. O mesmo aconteceu na III.19, os alunos ficaram muito divididos quanto ao fato de as perguntas terem influenciado os seus resultados em momentos de avaliação. Com exatamente a mesma percentagem de concordância e discordância, temos a afirmação que pretendia saber se os alunos consideram que as perguntas colocadas os motivaram para aprender matemática (III.18).

Por forma a analisar estas últimas afirmações pouco consensuais (III.16, III.17, III.18 e III.19), irei considerar as respostas dadas consoante o gosto dos alunos em relação à disciplina de Matemática.

Tabela 6 – Diferenças entre as respostas dos alunos às afirmações III.16, III.17, III.18 e III.19 quando divídos por preferência pela disciplina

		Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?	
		Sim	**Não**
III.16. A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de participar nas aulas.	**Discordantes**	33,3%	64,7%
	Concordantes	66,7%	35,3%
III.17. A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de fazer mais perguntas.	**Discordantes**	33,3%	52,9%
	Concordantes	66,7%	47,1%
III.18. A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de aprender Matemática.	**Discordantes**	22,2%	64,7%
	Concordantes	77,8%	35,3%
III.19. A professora estagiária fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação.	**Discordantes**	33,3%	47,1%
	Concordantes	66,7%	52,9%

Quando confrontados com a afirmação “A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que tivesse mais vontade de participar nas aulas” os alunos que gostam de Matemática e os que não gostam tomaram posições contrárias. Os que gostam maioritariamente, 66,7%, tenderam em concordar. Por outro lado, 64,7% assinalaram as opções de discordância. Parece-nos pertinente concluir que, na reduzida amostra analisada, o questionamento da professora estagiária não teve qualquer impacto positivo na maioria dos alunos que não gostam de Matemática, não os motivando para participar nas aulas. O contrário acontece com os alunos que gostam de Matemática que maioritariamente concordam com a afirmação.

Mais uma vez, a maior parte dos alunos que não gostam de Matemática afirmaram que as perguntas da professora estagiária não fizeram com que tivessem vontade de fazer mais perguntas (52,9%). No entanto, esta maioria não é significativa, ficando muito próxima da percentagem dos que tenderam a concordar. Por outro lado, os alunos que gostam de Matemática tenderam a concordar maioritariamente com a afirmação, obtendo-se assim exatamente as mesmas percentagens que na afirmação anterior.

Na afirmação que relaciona a vontade de aprender Matemática com o questionamento praticado pela professora estagiária (III.17), os alunos que gostam e não gostam de Matemática assumem posições opostas. De entre os que gostam, 77,8% concordam e, de entre os que não gostam, 64,7% discordam. Mais uma vez, o questionamento da professora estagiária, não se mostrou eficaz, na voz dos próprios alunos, para que os que não gostam da disciplina se interessassem por ela, por forma a motivar para a sua aprendizagem.

Os alunos que não gostam de Matemática ficam muito divididos quanto ao facto de o questionamento da professora estagiária ter influenciado a sua prestação nos momentos de avaliação, sendo que 47,1% tenderam a discordar e os restantes 52,9% a concordar. Já os alunos que gostam de Matemática consideram maioritariamente (66,7%) que a professora estagiária influenciou, através do seu questionamento, os resultados dos momentos de avaliação.

Limitações e constrangimentos

Este estudo tem uma índole subjetiva na medida em que nos deparamos com o ponto de vista dos alunos relativamente ao questionamento que a professora estagiária praticou. Pretende-se indagar acerca da opinião dos alunos, analisando uma amostra com cerca de 3 dezenas de indivíduos que não parece ser uma amostra significativa da prática docente da investigadora. Para além deste facto, acredito que a elaboração de entrevistas a um grupo selecionado de alunos, para melhor compreender os resultados obtidos através do questionário, se tornasse uma mais-valia para responder de forma mais completa e fundamentada às questões deste estudo. No entanto, as autorizações aos Encarregados de Educação da turma envolvida demoraram em ser conseguidas o que limitou bastante o tempo disponível para este estudo, não sendo assim possível proceder a mais recolha de dados, utilizando outro tipo de instrumentos.

Conclusão

Com a análise dos dados, podemos retirar algumas conclusões válidas no seio dos alunos participantes no estudo:

- Os alunos consideraram que, em geral, os professores de Matemática colocam muitas perguntas e que estas não são um desperdício de tempo;
- Para os alunos, o questionamento usado pelo professor influencia o seu desempenho a nível escolar;
- Na opinião dos alunos, a professora estagiária fez perguntas com diferentes níveis cognitivos;
- Os alunos consideram que a professora estagiária, em momentos de resolução de problemas, colocou perguntas essenciais para a sua resolução;
- Os alunos concordaram, maioritariamente, que o questionamento praticado pela professora estagiária lhes permitiu obter melhores resultados em momentos de avaliação;
- Em geral, os alunos que gostam de Matemática, ao contrário dos que não gostam, tendem a considerar que as perguntas colocadas pela professora estagiária os motivou para serem um elemento ativo na sua aprendizagem, permitindo ainda aumentar o gosto por esta área científica.

Em suma, é importante registar que os alunos têm consciência da importância do questionamento do professor em sala de aula e que, na sua perspetiva, uma boa prática de colocação de perguntas e questões é potenciadora do seu desenvolvimento e permite alcançar melhores resultados. Acredito que este estudo tem bastante importância para o meu desenvolvimento profissional na medida em que, se eu estiver acautelada e atenta à opinião dos alunos relativamente à minha prática de questionamento, tenho informação para encontrar estratégias que a melhorem por forma a garantir ambientes de aprendizagem em sala de aula. Tal como Mason (2000) refere, ao pensar nas perguntas que se colocam aos alunos e estando consciente da sua importância e dos seus processos, é possível criar ambientes dinamizadores e potenciadores do pensamento matemático.

Referências

Adedoyin, O. (2010). An investigation of the effects of teachers' classroom questions on the achievement of the students in mathematics: case study of botswana community junior secondary school. *European Journal of Educational Studies*, *2*(3), 313–329.

Coutinho, M. J. P. (2012). *Estratégias potenciadoras do questionamento em ciências naturais* (Dissertação de mestrado). Universidade de Aveiro. Aveiro. Retirado de http://hdl.handle.net/10773/10070

Ferreira, A. P. B. (2010). *Questionamento dos professores: O seu contributo para a integração curricular* (Dissertação de mestrado). Universidade de Aveiro. Aveiro. Retirado de http://hdl.handle.net/10773/3815

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Mason, J. (2002). Minding Your Q's and R's: effective questioning and responding in the mathematics classroom. In L .Haggerty (Ed) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perpectives on practice* (pp. 248-258). RotledgeFalmer, London.

Menezes, L. (1996). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Que formação?* (pp. 105-116) Lisboa: SPCE.

Pedrosa de Jesus, M. H. T. (1987). *A descriptive study of some science teachers questioning practices* (Dissertação de mestrado). University of East Anglia. Norwich, U.K.

Pedrosa de Jesus, M. H., Sá Correia, M. J., & Abrantes, M. M. (2005). A importância do questionamento no desenvolvimento da competência reflexiva em contextos de supervisão. In *XIV Colóquio da AFIRSE | Para um Balanço da Investigação em Educação de 1960 a 2005. Teorias e Práticas Actes* (pp. 1–11). Lisboa: Faculdade de Psicologia e Ciências de Educação da Universidade de Lisboa. Retirado de http://hdl.handle.net/10400.11/1017

PROMOVER A GENERALIZAÇÃO NA SALA DE AULA: AÇÕES DO PROFESSOR NOS MOMENTOS DE DISCUSSÃO COLETIVA

Joana Mata-Pereira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

joanamatapereira@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: O objetivo do estudo apresentado nesta comunicação é compreender de que modo as ações do professor promovem a generalização por parte dos alunos. A generalização, sendo um processo central do raciocínio matemático, pode ser de natureza indutiva, abdutiva ou dedutiva. Nesta comunicação, focamo-nos em generalizações de natureza diversa que emergem em momentos de discussão coletiva relativos a tarefas exploratórias realizadas pelos alunos. Este estudo insere-se no terceiro ciclo de design de uma investigação baseada em design, em aulas numa turma de 7.º ano sobre equações lineares. A recolha de dados inclui a observação em sala de aula, vídeo e áudio gravada, e notas em diário de bordo. A análise de dados foca-se nas generalizações dos alunos e nas ações do professor em momentos de discussão coletiva. Os resultados mostram que sequências de ações do professor, com uma ação central de desafiar, favorecem a realização de generalizações abdutivas, indutivas e dedutivas por parte dos alunos.

Palavras-chave: Generalização, Raciocínio Matemático, Ações do Professor.

Introdução

Generalizar, sendo uma parte essencial do que é a Álgebra (Kaput, 2008), é um aspeto fundamental no ensino e aprendizagem em Matemática. Para além disso, generalizar é ainda central enquanto processo de raciocínio matemático. Assim, o que o professor faz em sala de aula para promover as generalizações por parte dos alunos é de extrema importância. Para promover o raciocínio matemático em sala de aula e, consequentemente, promover a generalização, é necessário estabelecer um ambiente de aprendizagem desafiante que vai além de propor exercícios para os alunos resolverem utilizando procedimentos já conhecidos.

Nesta investigação, consideramos as discussões matemáticas desencadeadas pela realização de tarefas exploratórias (Ponte, 2005) como momentos privilegiados para promover o raciocínio matemático dos alunos. Assim, realizamos uma investigação baseada em design (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016) que visa compreender como o professor pode promover o raciocínio matemático dos alunos. Nesta comunicação, focamo-nos em situações do terceiro ciclo de design, procurando compreender como sequências de ações do professor, apoiadas por princípios de design que visam a generalização, promovem generalizações de natureza indutiva, abdutiva e dedutiva por parte dos alunos.

Raciocínio matemático

As definições de raciocínio matemático variam de autor para autor. Contudo, a maioria destas definições têm em comum a ideia de fazer inferências justificadas (e.g. Aliseda, 2003; Pólya, 1954; Rivera & Becker, 2009). O que difere nas várias definições de raciocínio matemático é o modo como acontece a passagem do conhecimento anterior para o conhecimento novo. Assim, uma perspetiva ampla sobre o raciocínio matemático não se reduz ao raciocínio dedutivo, mas acomoda tanto aspetos lógicos como aspetos intuitivos, permitindo um espectro de processos que inclui inferências dedutivas, indutivas e abdutivas.

As inferências dedutivas, caracterizadas por uma perspetiva lógica, têm duas características centrais: (1) certeza, que considera uma relação necessária entre as premissas e a conclusão, na qual a conclusão decorre necessariamente de um conjunto de premissas e (2) monotonicidade, relacionada com a irrefutabilidade das conclusões, ou seja, a inferência mantém-se válida quando são acrescentadas premissas adicionais (Aliseda, 2003). As inferências dedutivas, identificáveis com a noção de Tarski de inferência lógica, são muitas vezes apresentadas como o paradigma do raciocínio matemático (Aliseda, 2003).

Contudo, destacamos que o raciocínio matemático não decorre necessariamente de inferências dedutivas. Existem outras formas rigorosas de raciocinar, como as inferências indutivas e as inferências abdutivas (Jeannotte & Kieran, 2017; Rivera & Becker, 2009), ainda que não permitam a mesma certeza e monotonicidade que as inferências dedutivas (Aliseda, 2003). Russel (1999) refere que o raciocínio matemático consiste em pensar sobre propriedades de um objeto matemático e desenvolver generalizações que se aplicam a uma classe mais alargada de objetos reforçando, assim, a vertente indutiva do raciocínio matemático já anteriormente destacada por Pólya (1954). Por um lado, as inferências indutivas surgem essencialmente quando se fazem previsões ou se formulam conjeturas (Aliseda, 2003) e estão também associadas à identificação de uma característica comum a vários casos que levam à generalização (Rivera & Becker, 2009). Por outro lado, as inferências abdutivas têm essencialmente um papel explicativo e, tal como as inferências indutivas, têm um papel de criação de conhecimento. As inferências abdutivas têm por objetivo constituir hipóteses para um fenómeno desconhecido, ou seja, de um modo geral, é o raciocínio utilizado para explicar algo intrigante (Aliseda, 2003) ou para descobrir algo (Magnani, 2001). Neste sentido, o raciocínio abdutivo é identificável com a formulação de uma generalização baseada em relações entre aspetos de uma dada situação (Rivera & Becker, 2009). Assim, as conclusões do raciocínio abdutivo são plausíveis no contexto da situação em questão (Rivera & Becker, 2009).

Generalização

Atendendo à sua natureza complexa, o raciocínio matemático envolve uma variedade de processos que se evidenciam no pensamento e significação individual dos alunos, no seu trabalho em sala de aula e nas interações que ocorrem durante os momentos de discussão coletiva (Brodie, 2010). Estes processos incluem formular questões e estratégias de resolução, formular e testar generalizações e outras conjeturas e justificá-las. De entre estes processos de raciocínio, destacamos nesta comunicação a generalização enquanto processo central do raciocínio matemático.

Generalizar, ao incluir afirmar que uma ideia, propriedade ou procedimento é válido num dado conjunto de objetos (Dörfler, 1991; Ellis, 2007; Jeannotte & Kieran, 2017), é a base de muitas ideias e conceitos matemáticos. No dia a dia, os alunos estão naturalmente predispostos a generalizar (Becker & Rivera, 2005). Contudo, importa ressalvar que, na sala de aula, as generalizações podem ser incorretas ou apresentadas apenas implicitamente (Becker & Rivera, 2005; Reid, 2002). Assim, para promover o raciocínio matemático dos alunos, é necessário criar situações nas quais a generalização assuma um papel central (Kieran, 2007), de modo a que apresentem generalizações baseadas em ideias, conceitos ou propriedades matemáticas.

As generalizações que os alunos apresentam e usam na sala de aula podem emergir de diferentes abordagens e a diferentes níveis. Para desenvolver a capacidade de formular generalizações, tanto em abordagens empíricas como dedutivas, os alunos podem atuar a três níveis: factual, contextual e simbólico (Radford, 2003). As generalizações factuais decorrem da observação empírica ou de casos particulares que se aplicam a novos casos no mesmo conjunto de objetos matemáticos. As generalizações contextuais, também baseadas na observação empírica ou em casos particulares, pressupõe um alargamento a um novo conjunto de objetos matemáticos. A generalização simbólica surge do uso e compreensão da linguagem simbólica.

Em cada um destes níveis, as generalizações dos alunos podem surgir de (i) relacionar, quando os alunos estabelecem uma relação ou uma conexão entre situações, ideias ou objetos; (ii) procurar, quando os alunos procuram uma semelhança entre dois ou mais objetos, ideias ou situações e (iii) ampliar, quando os alunos vão além da situação ou caso particular que originou a generalização (Ellis, 2007). Complementarmente, como destacado por Jeannotte e Kieran (2017), generalizar é um processo relacionado com a procura de semelhanças e diferenças. Assim quando um aluno generaliza, é possível identificar (a) um fenómeno de continuidade, (b) um elemento de semelhança, ou (c) um princípio geral (Ellis, 2007). As generalizações referem-se a um fenómeno de continuidade quando os alunos identificam propriedades que vão além de uma situação em particular. Quando se trata de um elemento de semelhança, os alunos identificam uma propriedade comum, as mesmas situações ou os mesmos objetos ou representações. Quando a generalização afirma um princípio geral, os alunos identificam regras gerais, padrões, estratégias ou regras globais.

Ações do professor nos momentos de discussão coletiva

Para promover a generalização a diferentes níveis e, consequentemente, para contribuir para a capacidade dos alunos de usar apropriadamente o raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo, as ações do professor são um aspeto central. Estas ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula podem ocorrer nos diversos momentos de uma aula. Em aulas de ensino exploratório (Ponte & Quaresma, 2016), os momentos de discussão coletiva destacam-se como promissores para promover o raciocínio matemático dos alunos (Ponte, 2005).

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) identificam quatro categorias centrais para as ações do professor que podem ser reconhecidas durante os momentos de discussão coletiva e que se encontram diretamente relacionados com os processos matemáticos: (i) ações de convidar – que incitam os alunos a participar na discussão, (ii) ações de guiar/apoiar – que levam os alunos, implícita ou explicitamente, a continuar a discussão, (iii) ações de informar/sugerir – que introduzem informação ou um argumento ou que validam uma dada afirmação, estratégia ou solução dos alunos e (iv) ações de desafiar – que incitam os alunos a acrescentar informação, ir além num argumento ou avaliar um argumento, uma estratégia ou uma solução. As ações de guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar são estruturantes no desenvolvimento de discussões coletivas e envolvem processos como (a) representar – apresentar, redizer, usar ou alterar uma representação (incluindo procedimentos), (b) interpretar – interpretar uma afirmação ou ideia, estabelecer conexões, (c) raciocinar – levantar questões sobre uma afirmação ou justificação, generalizar um procedimento, conceito ou propriedade, justificar, apresentar um argumento e (d) avaliar – fazer juízos sobre uma estratégia ou solução, comparar diferentes estratégias.

Metodologia de Investigação

Esta comunicação apresenta parte de uma investigação baseada em design (*design-based research*) (Cobb et al., 2016; Ponte et al., 2016) que tem por objetivo desenvolver uma teoria local sobre promover o raciocínio matemático dos alunos na sala de aula. Tendo em vista este objetivo, estabelecemos um conjunto de princípios (Cobb et al., 2016) com base na literatura e em ciclos de design anteriores com foco nas tarefas e nas ações do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos, particularmente a generalização e a justificação. Nesta comunicação focamo-nos especificamente em três princípios para as ações do professor que têm por objetivo promover as generalizações dos alunos e indicam que o professor deve (a) encorajar a partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; (b) apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização; e (c) desafiar os alunos a ir além da tarefa. Estes princípios fazem parte de um conjunto mais amplo de princípios de design usados no 3.º ciclo desta investigação baseada em design (Mata-Pereira & Ponte, 2017).

Os episódios apresentados nesta comunicação dizem respeito ao terceiro ciclo de design que decorreu em nove aulas sobre equações lineares numa turma de 7.º ano com 27 alunos. Antes deste ciclo, foi realizado um ciclo de design em aulas de 8.º ano sobre sequências e um segundo ciclo em aulas de 7.º ano também sobre equações lineares. Foi feito um plano de aula detalhado de cada uma das aulas considerando as tarefas a propor e as ações do professor para promover o raciocínio matemático dos alunos. Cada plano de aula foi proposto pela primeira autora e discutido em detalhe com a professora da turma, que fez as alterações e ajustes que considerou necessários atendendo às características da turma e aos recursos disponíveis.

A professora participante foi convidada para integrar este estudo atendendo à sua experiência, o seu constante investimento no desenvolvimento profissional e a sua disponibilidade para participar no estudo com as possíveis alterações à sua prática que este envolveria. Todos os participantes desta investigação são voluntários e deram o seu consentimento informado para participar, sendo que os nomes utilizados nesta comunicação são fictícios.

Os episódios apresentados nesta comunicação são sobre o número de soluções de uma equação linear, com um foco específico nas equações sem solução, e decorrem na aula 3 e na aula 6. Ambas as aulas foram observadas diretamente e vídeo e áudio gravadas, tendo sido tomadas notas no diário de bordo. A análise de dados foca-se nas generalizações dos alunos e também nos princípios de design e quadro conceptual sobre as ações do professor. Os dados foram analisados com recurso ao software NVivo, sendo os episódios codificados de acordo com estes focos.

Uma generalização inesperada

Após um momento de discussão coletiva sobre uma tarefa que tinha por objetivo introduzir o princípio de equivalência da multiplicação, a professora inicia o registo deste princípio no quadro. Contudo, enquanto escreve o princípio, a professora apercebe-se que durante a discussão anterior, a exceção em relação ao zero não foi considerada. Assim, coloca uma questão aos alunos sobre possíveis exceções:

> Professora: Vá, registar aí o princípio de equivalência da multiplicação, que diz que, se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros da equação por um mesmo número, a... Qualquer número? Ou tenho que fazer aqui alguma salvaguarda? Se multiplicarmos ou dividirmos os membros da equação pelo mesmo número, a minha questão é, por qualquer número? Ou haverá algum número que eu tenha que excluir?

Como a tarefa que os alunos realizaram e discutiram anteriormente não incluía uma questão referente a esta exceção, ao colocar a questão aos alunos, a professora *desafia-os* a ir além da tarefa proposta (princípio c). Clara, uma das alunas da turma, responde prontamente à questão. Contudo, a professora opta por aprofundar a discussão ao *desafiar* os alunos a apresentar uma justificação (princípio c).

> Clara: Zero.
>
> Professora: Porquê?
>
> Gabriel: Porque é neutro, é neutro! É o elemento neutro.

Gabriel apresenta uma justificação inválida, contudo, em vez de *informar* diretamente desse facto os alunos, a professora opta por *guiar* os alunos a desconstruir esta afirmação (princípio a):

> Professora: Calma, é o elemento neutro de que operação?
>
> Vários alunos: Da adição.
>
> Professora: Mas estamos a falar da adição?
>
> Leonardo: Ah, não, é da multiplicação.
>
> Professora: É o elemento... Não é nulo, como é que ele se chama?
>
> Gabriel: Neutro!
>
> Leonardo: Não, é o que absorve tudo.
>
> Clara: Absorvente.

Após as intervenções de diversos alunos, um deles apresenta uma justificação que é considerada pela professora como parcialmente correta. No entanto, a professora continua a *guiar* os alunos com o objetivo de completar a justificação (princípio a).

Professora: Absorvente. Então, eu posso dividir... Posso dividir por zero?

Vários alunos: Não.

Professora: Não, não faz sentido. Posso multiplicar... Qual é o problema de eu multiplicar ambos os membros por zero?

Vários alunos: Vai dar zero.

Professora: Vou ficar com zero igual a zero e não vou conseguir avançar dali. Então, [continua a escrever o princípio no quadro] diferentes de zero, o conjunto-solução não se altera.

Neste momento da discussão, a professora *informa* os alunos de qual é a exceção que é preciso considerar de modo a dar por concluída a introdução do princípio de equivalência da multiplicação (princípio b).

Após clarificar que o zero deve ser excluído no princípio de equivalência da multiplicação e imediatamente após escrever no quadro este princípio, Clara pede para participar:

Clara: Stôra, não sei porquê mas, depois da stôra ter escrito isso [princípio de equivalência da multiplicação] acho que... Fiquei com a sensação de que nem todas as equações têm solução.

Tendo por base o princípio de equivalência da multiplicação, Clara *generaliza* que nem todas as equações têm solução. Esta generalização não era expectável nesta fase, contudo, a professora *desafia* Clara a desenvolver a sua ideia (princípio c).

Professora: Porque é que isto a levou a pensar que nem todas têm solução?

Clara: Não sei, mas…

Professora: Mas fiquei curiosa, porque é que alguma coisa que eu tenha dito aqui...

Clara: Nem eu sei, mas... Acho que é por causa do zero... Não sei, mas fiquei com a sensação que nem todas têm.

. . .

Professora: Olhe, retenha, se for preciso registe aí que foi quando... A dizer isto fez-me pensar que pode haver equações que não têm solução. Para nós depois na altura em que discutirmos isso, que não será agora já, já, vermos.

Como Clara não consegue avançar na sua justificação, a professora *desafia-a* novamente para apresentar uma justificação (princípio c), mas, atendendo à resposta da aluna, não insiste nessa justificação e *informa* a turma de que a ideia de Clara será discutida posteriormente. A generalização apresentada por Clara neste episódio, por se basear em aspetos da situação que está a ser discutida, mas sem uma justificação, é de natureza abdutiva.

Validar a generalização de Clara

Algumas aulas mais tarde, a professora propõe uma tarefa aos alunos que visa introduzir a classificação de equações lineares quanto ao número de soluções. Enquanto os alunos resolvem uma equação proposta na tarefa usando os princípios de equivalência, surge a equação $0x = 18$, desencadeando a discussão:

Leonardo: Mas isto vai continuar a dar infinitas soluções.

Professora: Será?

Leonardo: Ai, não é, não é, não vai dar para todos os números.

Professora: Não vai dar para todos os números?

. . .

Leonardo: Não, porque nenhum número vezes zero dá 18! . . . Então, isto não é uma igualdade numérica falsa? É, não é? Isto é uma igualdade numérica falsa, porque qualquer número vezes zero vai dar zero.

Professora: E portanto…

Gustavo: Esta não tem solução stôra. . . É impossível.

. . .

Leonardo: Então quer dizer que há equações sem solução.

Como numa situação anterior uma equação da tarefa tinha infinitas soluções, Leonardo *generaliza* erradamente que esta equação também tem infinitas soluções. A professora não informa o aluno do seu erro e, em vez disso, *desafia-o* a avaliar a sua afirmação (princípio a). O aluno avalia corretamente a sua afirmação e a professora *desafia-o* uma vez mais, solicitando uma justificação (princípio c) e Leonardo responde ao desafio. Ao *guiar* os alunos para que continuem (princípio a), os alunos generalizam que há equações sem solução, tendo por base o exemplo da equação que estão a resolver.

Neste episódio, a generalização que surge, concretizada na afirmação "há equações sem solução", pela sua formulação lógica, apenas necessita de um exemplo para ser validada, o que os alunos fazem recorrendo ao exemplo $0x = 18$. Assim, esta generalização é de natureza dedutiva.

Após a conclusão deste segmento de discussão, Clara intervém, relembrando que já tinha apresentado esta mesma generalização:

Clara: Stôra, lembra-se daquela aula em que eu tinha... Aquilo que nós tínhamos do princípio de equivalência da multiplicação, que eu disse que... Porque eu ouvi falar do zero e era...

Professora: Exatamente, foi por causa do zero. Por isso é que perguntei porque é que a tinha levado a pensar. Foi quando eu falei no zero que a Clara fez essa observação. . .

Clara: Era por causa do zero, mas não soube [explicar].

Neste momento da discussão, a professora *informa* os alunos da validade da generalização de Clara e também da validade do argumento utilizado, ainda que incompleto, visto que na altura Clara não conseguiu justificar a sua afirmação (princípio b).

Discussão e conclusão

Em ambos os episódios, as generalizações surgem de uma sequência de ações da professora desencadeada por uma ação central de desafiar. Estas sequências de ações incluem ainda ações de desafiar adicionais ou ações de guiar e terminam com uma ação de informar. Estas ações do professor encontram-se estreitamente relacionadas com os princípios de design da investigação. As ações de guiar e de desafiar encontram-se essencialmente relacionadas com situações onde surgem contribuições parciais ou inválidas ou situações onde os alunos são desafiados a ir além do que foi inicialmente proposto. Complementarmente, as ações de informar relacionam-se com situações em que a professora procura destacar uma generalização.

Ainda que as sequências de ações orientadas pelos princípios de design levem, em ambos os episódios, a generalizações, a natureza das generalizações que emergem é distinta. No primeiro episódio, Clara, apoiada na discussão em torno do princípio de equivalência da multiplicação, apresenta uma generalização abdutiva pois relaciona aspetos da situação apresentada, apesar de não ser capaz de justificar a sua afirmação. Esta generalização, ao ir além do âmbito da propriedade que está a ser discutida, é uma generalização contextual e que amplia um princípio geral. Como refere Ellis (2007), este é o tipo de generalizações que os investigadores procuram. No segundo episódio, a generalização que surge é de natureza mais dedutiva. Esta generalização, pela sua formulação lógica, apenas necessita de um exemplo para ser validada. Assim, ao usarem como exemplo a equação que está a ser discutida, os alunos conseguem apropriadamente concluir que nem todas as equações têm solução. Esta generalização, apesar de também estar a um nível contextual, é uma generalização de relacionar um fenómeno contínuo.

Este estudo mostra como generalizações de natureza diversa podem emergir na sala de aula e particularmente que sequências de ações do professor podem levar a tais generalizações. Neste âmbito, o quadro das ações do professor proposto por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) assim como os princípios de design têm um papel fundamental. Outro aspeto a destacar neste estudo é a ideia de que o desenvolvimento do raciocínio matemático é um processo que decorre ao longo do tempo, atendendo a que esta capacidade deve incluir a paciência intelectual necessária para uma compreensão parcial e a confiança que, com ações futuras, o conhecimento irá avançar (Arcavi, 2007). Assim, este estudo sugere que devem ser consideradas na sala de aula oportunidades para que os alunos generalizem abdutiva e indutivamente para, mais tarde, promover oportunidades que levem a generalizações de natureza dedutiva.

Agradecimento

Este estudo foi apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída a Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese*, *134*(1/2), 25–44.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Revista Uno*, *44*, 59–75.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne: PME.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Boston, MA: Springer.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61–85). Dordrecht: Springer.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221–262.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Reston, VA: NCTM.

Magnani, L. (2001). *Abduction, reason and science*. Boston, MA: Springer US.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169–186.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77-98.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *XXII*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 51-66.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and*

Learning, *5*(1), 37–70.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5–29.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(4), 212–221.

Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1–12). Reston, VA: NCTM.

PÓSTERS – GD2

AS DOBRAGENS PARA COMUNICAR IDEIAS MATEMÁTICAS DE FORMA ATIVA

Ana Barbosa

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

anabarbosa@ese.ipvc.pt

Isabel Vale

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Palavras-chave: Aprendizagem; Visualização; Dobragens; Comunicação; Formação Inicial de Professores.

O trabalho a apresentar neste poster tem como finalidade compreender as reações de futuros professores do EB na resolução de tarefas através de dobragens, pelo que se procurou responder às seguintes questões: 1) Que relevância atribuem a tarefas envolvendo dobragens para a construção do conhecimento matemático?; 2) Que dificuldades evidenciam na resolução de tarefas desta natureza?

O professor deve ter consciência de que a aprendizagem é um empreendimento ativo, quer físico, quer intelectual, quer social. As tarefas que implicam o recurso à manipulação de materiais levam os alunos a refletir sobre as transformações realizadas, envolvendo-os diretamente na aprendizagem, promovendo o trabalho colaborativo e discussões produtivas (e.g. Edwards, Kemp & Page, 2014; NCTM, 2014). As dobragens exigem capacidades auditivas e envolvem estímulos visuais, promovem o desenvolvimento de habilidades espaciais, a construção de significados matemáticos, especialmente ligados à geometria, e facilitam a visualização, a modelação ou até a resolução de problemas (Vale & Barbosa, 2015). Tendo em conta que esta abordagem permite que os alunos estejam fisicamente, intelectualmente e socialmente envolvidos, faz dela uma estratégia ativa (e.g. Edwards, et al., 2014), com potencial para desencadear aprendizagens significativas.

Adotou-se uma metodologia qualitativa, numa turma de 45 alunos de um curso de formação inicial de professores em EB. Numa unidade curricular de Didática da Matemática foi proposta uma sequência de tarefas nas quais seria necessário recorrer a dobragens: *Comunicação sem ver*; *Comunicação icónica*; *Comunicação com material*. Estas propostas permitiam evidenciar capacidades transversais, em particular a comunicação matemática, e conteúdos do domínio da Geometria. Na resolução destas tarefas os alunos tiveram oportunidade de trocar ideias, podendo movimentar-se pela sala de aula à medida que realizavam as dobragens. Os dados foram recolhidos com base em observações, questionário (implementado no final das tarefas), produções dos alunos e registos fotográficos.

Apresentam-se neste texto alguns resultados da implementação da tarefa *O coração* (comunicação sem ver). Os alunos trabalharam em pares, tendo um dos elementos observado as várias etapas da dobragem de um papel retangular para obter um coração. O professor da disciplina realizou a demonstração sem qualquer instrução verbal, cabendo a cada aluno decidir como explicar ao seu par as ações a realizar na dobragem. Para a comunicação entre pares os alunos posicionaram-se de costas um para o outro. Com esta dinâmica, nem o transmissor nem o recetor tinham acesso ao que o outro elemento fazia. Identificou-se a utilização de vocabulário diferente. Em alguns casos houve correta referência a termos geométricos, noutros foi usada linguagem matemática inadequada/imprecisa (e.g. "casinha" em vez de pentágono). Nem sempre o recetor interpretou a mensagem do modo como o emissor pretendia, dobrando erradamente o papel (Figura 1).

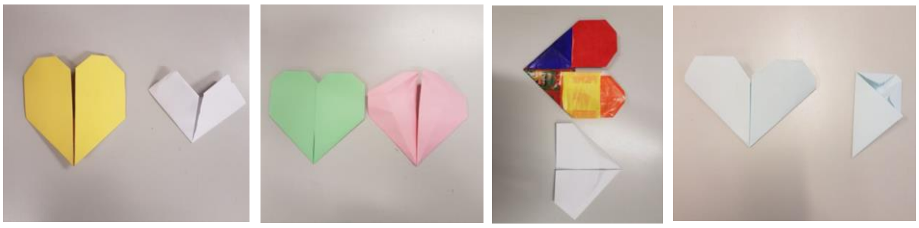


Figura 1 – Dobragens que não coincidem com o pretendido

Foi interessante perceber a necessidade da maioria dos alunos de recorrer a gestos para complementar o seu discurso, mesmo que não fossem observados pelo par (Figura 2). Os gestos funcionaram como ferramentas de pensamento, apoiando o raciocínio dos alunos quando não encontravam as palavras mais adequadas para expressar as suas ideias.

Figura 2 – Os alunos usam gestos como complemento

Esta tarefa foi considerada como sendo "diferente", "uma nova forma de comunicar", tendo também tomado consciência da necessidade de usarem uma linguagem clara e adequada para serem compreendidos.

Conclui-se que os alunos reagiram positivamente às tarefas propostas, com interesse e motivação, reconhecendo o seu potencial ao nível do envolvimento e da aprendizagem, sendo destacados o refinamento da linguagem na comunicação oral e o desenvolvimento de conceitos geométricos. As dificuldades identificadas nos alunos incidiram: na utilização de linguagem incorreta/imprecisa; no recurso isolado à comunicação oral sem apoio de um suporte visual (e.g. gestos, desenho); na falta de conhecimento matemático no que refere a determinado conceitos geométricos. Apesar das dificuldades, destacaram as dobragens como uma estratégia dinâmica que permite evidenciar a comunicação e facilitar a aprendizagem.

Referências

Edwards, S., Kemp, A., & Page, C. (2014). The middle school philosophy: Do we practice what we preach or do we preach something different? *Current Issues in Middle Level Education*, *19*(1), 13 –19.

NCTM (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: NCTM.

Vale, I. & Barbosa, A. (2015). Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. *Boletim GEPEM, 65*, 3-12.

AS JUSTIFICAÇÕES MATEMÁTICAS DE ALUNOS DO 2.º CICLO NO ESTUDO DA DESIGUALDADE TRIANGULAR

Marisa Gregório

Agrupamento de Escolas Rainha D. Leonor

marisaspg@gmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Palavras-chave: Justificação matemática; Geometria; Ensino aprendizagem exploratório.

Este póster apresenta um estudo com o objetivo de caracterizar as justificações matemáticas de alunos do 2.º ciclo, na resolução de uma tarefa sobre desigualdade triangular. Neste estudo adota-se a noção de raciocínio matemático proposto por Jeannotte e Kieran (2017) como sendo um processo de comunicação que permite inferir afirmações matemáticas de outras afirmações matemáticas e abrange processos relacionados com a identificação de semelhanças e diferenças, tais como, conjeturar e comparar, e processos referentes à validação, entre os quais justificar. A justificação é vista como um argumento que garante (ou refuta) a veracidade de uma afirmação e usa formas matemáticas de raciocínio aceites como universais na comunidade de sala de aula. Para analisar as justificações dos alunos, utilizou-se um referencial com cinco níveis organizados hierarquicamente (Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998). No nível 1 – Autoridade externa – é apresentada uma justificação baseada num elemento considerado de autoridade que pode ser o professor, um colega ou manual. No nível 2 – Empirismo naïf – consideramos duas categorias: o empirismo naïf percetual, em que é apresentada uma justificação baseada em observações percetivas, mostrando um desenho ou fazendo gestos e o empirismo naïf indutivo na qual a justificação é baseada na verificação de alguns casos em que a conjetura é verdadeira. No nível 3 – Experiência crucial – é apresentada uma justificação baseada num exemplo cuidadosamente selecionado, revelando intencionalidade na sua escolha. No nível 4 – Empirismo genérico – são utilizas operações baseadas em propriedades dos objetos para a sua justificação, no entanto sem explicitação da propriedade utilizada na operação. No nível 5, – Empirismo mental – é apresentada uma justificação baseada nas propriedades e relações entre os objetos.

A experiência de ensino, cuja professora foi simultaneamente investigadora (primeira autora), desenvolveu-se no domínio da geometria, numa turma do 5º ano, tendo os alunos realizado várias tarefas seguindo uma metodologia de ensino exploratório. Nesta prática de ensino a atividade matemática desenvolve-se numa interação simultânea dos alunos com o conhecimento matemático, com os outros (colegas e professor), sobrevindo processos de negociação de significados (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). As justificações matemáticas foram fomentadas pela natureza das tarefas, criteriosamente selecionadas e pelos momentos de discussão coletiva. Na tarefa sobre a qual incide este póster pretendia-se que os alunos verificassem a possibilidade de construção de um triângulo, a partir de três segmentos que não respeitavam a desigualdade triangular. A tarefa foi realizada individualmente, seguindo-se uma discussão coletiva das resoluções selecionadas.

Este estudo adotou uma abordagem qualitativa em que os dados recolhidos provêm das resoluções escritas dos alunos, dos registos escritos da professora, bem como da gravação áudio da discussão coletiva.

A análise dos dados permitiu identificar justificações matemáticas de alunos que se enquadram maioritariamente nos níveis 2 e 3 do modelo adotado. Contudo, surgiram justificações de nível 4, nomeadamente com recurso à construção, com rigor, de uma figura, de onde concluíram a impossibilidade de construção do triângulo, tendo em conta a relação entre os comprimentos dos segmentos. Também se registaram algumas justificações de nível 5, em que os alunos concluíram a impossibilidade da construção baseando-se explicitamente na relação da desigualdade triangular. Destaca-se, assim, a potencialidade da experiência de ensino, nomeadamente, através das discussões coletivas, para a progressiva familiarização dos alunos com o processo de validação, um aspeto central do raciocínio matemático**.**

Referências

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education, III*, 234-283.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22 (2), 30-53.

DESPERTAR A CURIOSIDADE PELA MATEMÁTICA

Armando Gonçalves
ESEC-Instituto Politécnico de Coimbra
adsgoncalves@esec.pt

Márcio Nascimento
CI&DETS, ESTGV-Instituto Politécnico de Viseu
mnasce@estgv.ipv.pt

O presente trabalho tem por objetivo a construção do conhecimento matemático através da resolução de problemas de investigação relacionados com conteúdos programáticos em vigor no Ensino Básico.

Assim, e na sequência de um trabalho de investigação na área de Matemática (Gonçalves & Jesus, 2015), foi desenvolvida uma página web que permite explorar, de forma lúdica e motivadora, a aquisição de conhecimento matemático.

O contributo deste trabalho no alcance do objetivo proposto é sugerido pela análise dos resultados.

Palavras-chave: Aprendizagem, Ensino, Matemática, Sucesso.

A conceção que cada professor tem sobre o ensino da Matemática influencia os seus planos de ação. É função do professor priorizar práticas pedagógicas dinâmicas e propiciar condições para que o estudante analise, reflita e interiorize, efetivando uma aprendizagem de qualidade. Nesse sentido, foi criada uma página web, disponível no sítio http://tinyurl.com/projeto2Fibonacci.

A investigação é o melhor processo para resolver problemas através da pesquisa sistemática e respetiva interpretação e uma ferramenta primordial para adquirir conhecimento. Utilizar investigação matemática na sala de aula é a forma de construir conhecimento (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006). Ou seja, a investigação matemática está subjacente ao trabalho diferenciado da aula de Matemática. Para Lamonato (2007), o professor numa aula investigativa deve desafiar os alunos a raciocinar. Para Paraná (2008) "na investigação matemática, o aluno é chamado a agir como um matemático".

Na investigação educacional compreender o fenómeno educativo é o objetivo maior. Assim, decidir sobre a metodologia apropriada, apesar de difícil, é primordial. Considerando o problema em estudo e o objetivo a atingir, foi adotada uma abordagem empírica qualitativa, interpretativa e crítica.

A metodologia adotada, à qual está subjacente a apresentação de valor próprio, aplicabilidade, consistência e credibilidade, foi aplicada, em 2014/15, a um grupo de 24 alunos do 3º ciclo do Ensino Básico, em Viseu.

Realizou-se um campeonato entre grupos de 4 alunos, que decorreu ao longo de cinco meses. No final de cada mês, realizou-se uma prova com o objetivo de aplicar competências curriculares aos desafios propostos.

Cada questão da prova foi classificada atendendo a: rigor matemático, raciocínio, argumentação e apresentação. Apresenta-se, a título ilustrativo, uma dessas questões.

Corta-se um quadrado 8×8 em quatro partes que se reorganizam de forma a construir um retângulo 5×13.

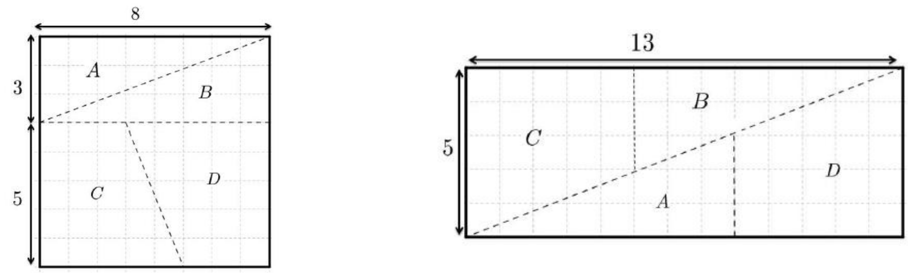


Figura 1 – Paradoxo Geométrico

Após o cálculo da medida das áreas do quadrado e do retângulo, respetivamente, 64 e 65 unidades, cada grupo devia apresentar uma justificação dessa realidade.

Os resultados obtidos mostraram alguma disparidade nas classificações obtidas pelos diferentes grupos (**Tabela 1**), os quais são referenciados por $G_i,\ i = 1, \cdots, 6$.

Sendo $P_i,\ i = 1, \cdots, 5$ a $i - ésima$ prova, os valores que constam na última coluna da tabela, foram obtidos de acordo com a fórmula

$$R = P_1 + 1{,}1 \times P_2 + 1{,}2 \times P_3 + 1{,}3 \times P_4 + 1{,}4 \times P_5$$

Tabela 1 – Classificações

Grupo	**Classificação (0 a 30)**					**Ranking**
	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	$\boldsymbol{P_3}$	$\boldsymbol{P_4}$	$\boldsymbol{P_5}$	$\boldsymbol{R}$
G_1	25	23	27	30	17	146
G_2	24	20	29	30	23	152
G_3	23	17	26	29	26	147
G_4	20	13	20	27	19	120
G_5	14	25	28	26	18	134
G_6	14	21	22	20	9	102

O instrumento de trabalho para a concretização do objetivo de investigação foi, por parte dos alunos, a exploração de uma página web.

A partir da **Tabela 1**, é visível uma alternância de grupo “vencedor”, que se pode dever ao empenho e entusiasmo dos grupos.

No final do ano letivo, constatou-se um crescente interesse dos participantes pela Matemática, tendo desenvolvido um raciocínio robusto, abstrato e independente.

Este processo de ensino-aprendizagem contribuiu para a aquisição de novas perspetivas da aprendizagem matemática, potenciando eventual sucesso na disciplina.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/Multi/04016/2016. Agradece-se ao Instituto Politécnico de Viseu e ao CI&DETS pelo apoio prestado.

Referências

Gonçalves, A., & Jesus, M.N. (2015). *The generating function of the generalized Fibonacci sequence. Integers*. 15 (A24).

Lamonato, M. (2007). *Investigando geometria: aprendizagens de professores da educação infantil.* Universidade Federal de São Carlos.

Paraná. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.* Secretaria de Estado da Educação do Paraná.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2006). *Investigação Matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

GRUPO DE DISCUSSÃO 3

O professor e a aula de Matemática

GRUPO DE DISCUSSÃO 3

O PROFESSOR E A AULA DE MATEMÁTICA

Helena Rocha

Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade NOVA de Lisboa, UIED

hcr@fct.unl.pt

Paula Teixeira

Agrupamento de Escolas João de Barros, UIED

teixeirapca@gmail.com

Ensinar matemática é uma atividade complexa que encontra na aula o seu ponto central, mas que na verdade a transcende largamente. Como referem Artzt, Sultan, Curcio e Gurl (2012), a sua complexidade é tal que apenas é ultrapassada pela de preparar alguém para ser um professor de matemática exemplar. A aula de matemática surge como o campo aglutinador do trabalho do professor numa dupla vertente que se une num ciclo único: por um lado a aula de matemática é o foco do trabalho do professor, onde as opções previamente assumidas são implementadas; e, por outro lado, é um ponto de partida para a reflexão e o desenvolvimento profissional do professor.

Uma aula de Matemática pode assumir formas muito diferentes. Ao discutir a diversidade de aulas de Matemática que caracterizam diferentes países, Kaur (2017) apoia-se nas conclusões do estudo conduzido por Stigler e Hiebert (1999) pondo em evidência as diferenças entre países como os Estados Unidos da América e o Japão. O ensino americano é assim caracterizado como sendo bastante limitado, focando-se essencialmente na aquisição de conhecimento processual:

> Independentemente de os alunos estarem sentados individualmente ou em grupo, de terem acesso às mais recentes tecnologias ou apenas a papel e lápis, eles passam o tempo a aprender procedimentos isolados através da prática repetitiva (Stigler & Hiebert, 1999, p. 10).

Já o ensino japonês é marcado pela importância atribuída à compreensão conceptual:

> No Japão os alunos passam tanto tempo a resolver problemas desafiadores e a discutir os conceitos matemáticos envolvidos como a praticar procedimentos (Stigler & Hiebert, 1999, p. 11).

A formação e o desenvolvimento profissional do professor são reconhecidamente assumidos como determinantes para as opções que este assume na sala de aula. É o seu conhecimento, aquilo que valoriza e o contexto onde se encontra inserido que determinam as experiências de aprendizagem que proporciona aos seus alunos. Um professor de Matemática não necessita apenas de saber realizar cálculos corretamente, tendo também que saber como recorrer a figuras e diagramas para apresentar conceitos e procedimentos matemáticos aos alunos, disponibilizando-lhes explicações para regras e procedimentos, para além de ser capaz de analisar as soluções e explicações avançadas por estes (Hill, Rowan, & Ball, 2005). Tem ainda de conhecer situações da vida real que dêem significado às noções que ensina, tornando-as relevantes para os alunos, menos abstratas e mais próximas da sua realidade (Hill *et al*., 2008). O papel do professor, e em particular a escolha de tarefas que faz, torna-se particularmente relevante num contexto onde se assume que cabe ao professor proporcionar aos seus alunos experiências de aprendizagem ricas, onde estes não tenham apenas oportunidade para realizar determinados procedimentos, mas também para raciocinar, estabelecendo conexões entre diferentes ideias e representações matemáticas (Boston, 2013).

As tarefas matemáticas podem oferecer aos alunos a possibilidade de se envolverem em processos cognitivos de alto nível (tais como raciocinar, justificar ou estabelecer relações) ou de baixo nível (tais como realizar procedimentos rotineiros ou memorizar). A variedade de tarefas, em manuais escolares, em fichas de trabalho dos autores dos manuais, em cadernos de apoio aos currículos e numa multiplicidade de outras fontes, torna a sua seleção num desafio de elevado nível de exigência para os professores.

Tal como as tarefas, também os recursos usados pelo professor e a forma como este os íntegra na aula têm impacto na aprendizagem dos alunos. O papel de relevo que a tecnologia assume nos nossos dias, reflete-se também na diversidade de recursos tecnológicos disponíveis para a aula de matemática. Mas tal como no que respeita às tarefas não importa apenas o nível cognitivo que se lhe encontra associado, sendo determinante a forma como são implementadas; no que respeita à tecnologia também não se trata apenas de a usar, sendo fundamental a forma como esta é integrada em aula. Assim, é importante num primeiro momento qual a tecnologia escolhida. E alguns autores organizam as tecnologias precisamente em termos da função que se lhe encontra associada, referindo-se a tecnologia para fazer matemática, para praticar e para desenvolver conceitos (Roschelle, Noss, Blikstein, & Jackiw, 2017). Mas para além de escolher cuidadosamente a tecnologia, é fundamental ponderar o que se faz com ela. Com efeito, tal como refere Hoyles (2018), o conhecimento matemático e as opções didáticas são indissociáveis das ferramentas utilizadas, mas como Drijvers (2018) enfatiza, a tecnologia tem impacto sobre a aprendizagem matemática moldando os significados e transformando as práticas de professores e alunos. É precisamente este reconhecimento do impacto que a tecnologia pode ter sobre as práticas dos professores que levou ao desenvolvimento de conceptualizações do conhecimento profissional onde a tecnologia é um domínio do conhecimento explicitamente considerado. É o caso do modelo do conhecimento conhecido por TPACK, de Mishra e Koehler (2006), e do modelo do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia, de Rocha (2013). Em ambas as conceptualizações é reconhecida a importância da tecnologia, sendo considerados domínios do conhecimento de formas um pouco diferenciadas nos dois modelos, mas tendo ambos em conta o conhecimento do impacto da tecnologia sobre a Matemática e sobre o conhecimento do professor de como ensinar.

O conhecimento do professor é efetivamente um elemento importante com forte impacto sobre as opções do professor, independentemente de se tratar de escolher uma tarefa, ou os recursos a usar, ou de tomar qualquer outra decisão. E também independentemente de se tratar da fase de preparação da aula ou da sua implementação em sala de aula. Neste último caso, para além de procurar pôr em prática o que planificou, o professor tem que ouvir os alunos, tomar decisões sobre o que dizer a seguir, que exemplos acrescentar, que contributos solicitar e a que alunos, entre muitas outras decisões que são fundamentais para o desenrolar da diversidade de relações dinâmicas que se estabelecem numa aula e onde a adaptação e adequação do plano inicial são uma constante. Mas conseguir superar este desafio permanente requer um forte envolvimento do professor e uma contínua busca pela evolução e pelo seu desenvolvimento profissional. E vários investigadores têm apontado a aprendizagem colaborativa como uma via para esse desenvolvimento.

De acordo com Jaworski *et al*. (2017), a colaboração envolve professores em atividades conjuntas, com um propósito comum, e requer diálogo crítico e apoio mútuo. Estes professores abordam questões que os desafiam profissionalmente e refletem sobre o seu papel na escola e na sociedade. A colaboração pode não ocorrer exclusivamente entre professores, incluindo outros elementos como, por exemplo, investigadores. A iniciativa pode também ter origens diversificadas, podendo partir de alguma fonte institucional, seja ela interna ou externa à escola, ou dos próprios professores. A forma como a colaboração é concebida e implementada são ainda aspetos importantes a ter em conta.

A formação inicial e contínua de professores é um espaço privilegiado para a promoção da colaboração entre professores, abrangendo o planeamento, e em particular a escolha de tarefas e recursos a utilizar, a antecipação das situações que podem emergir no decorrer da aula e por último a reflexão sobre episódios da aula, tenha sido esta conduzida pelo próprio ou por outro professor.

Neste grupo de discussão abordaremos todas estas temáticas, tendo por base um conjunto de dez estudos. Partiremos de uma caracterização das opções assumidas pelo professor desde o momento de preparação da aula até à sua implementação, sem esquecer a componente de avaliação. Neste estudo, da autoria de Rocha e Viseu, para além de se caracterizarem as perspetivas do professor relativamente à sua prática, são ainda analisadas as diferenças existentes entre professores de 3.º ciclo e do ensino secundário, no que se refere ao ensino das funções.

Daremos depois atenção aos recursos utilizados pelo professor e à escolha que faz das tarefas. Iniciaremos esta abordagem colocando o foco nos recursos tecnológicos utilizados pelo professor, considerando a forma como se caracteriza o conhecimento de futuros professores e procurando promover o seu desenvolvimento tendo por base o modelo TPACK. Daremos depois atenção aos critérios em que o professor se baseia para analisar um recurso tecnológico e decidir quanto à adequabilidade da sua utilização em determinado momento. Mais especificamente, tomaremos por base o trabalho de Martins, Martins, Costa e Silva e a utilização que é feita em aula por futuros professores de Educação Básica da *applet Base Blocks Addition*, para caracterizar o seu conhecimento à luz do modelo TPACK. Discutiremos depois, a partir do estudo de Jahn, a construção de critérios para a análise de recursos tecnológicos e o foco colocado pelos professores no conteúdo científico, tal como é apresentado pela tecnologia, no potencial didático-pedagógico e nas condições de implementação em aula. Uma análise que será feita a partir dos aplicativos *Kahoot* e o *Arithmetic Quizz*.

Relativamente à escolha das tarefas por parte do professor, teremos igualmente por base dois estudos. Um desses estudos, da autoria de Caseiro, Machado e Tempera, foca-se na importância das tarefas de elevado nível de exigência cognitiva para promover o desenvolvimento do conhecimento estatístico de futuros professores. Analisam assim a forma como as tarefas matemáticas propostas e as dificuldades detetadas no decorrer da sua resolução, contribuem para a apropriação de conhecimentos e para o desenvolvimento de capacidades e competências.

O outro estudo, da responsabilidade de Santos, Oliveira, Ponte e Henriques, incide sobre professores em exercício. Também aqui o foco está nas tarefas e especificamente nas tarefas desafiantes. Aspetos como a importância de não baixar o nível de exigência cognitivo das tarefas e os desafios que tal coloca aos professores no que respeita ao apoio a prestar aos alunos e a outras variáveis da gestão da aula são discutidos ao longo deste estudo. Uma análise que dá ainda atenção às diferentes fases do trabalho do professor desde a elaboração das tarefas até à sua implementação, destacando o facto da realização de tarefas desafiantes mantendo o seu nível de exigência apresentar, ela própria, um elevado nível de exigência para os professores, caracterizando-se por ser complexa, dinâmica e específica.

A fase prévia, de planificação da aula, será igualmente alvo de atenção. Com uma perspetiva histórica são analisados por Santiago os planos de aula como elemento da formação inicial de professores. Dados recolhidos no Liceu D. João III, atual Escola Secundária José Falcão, em Coimbra, contribuirão para revisitarmos os planos de aula elaborados pelos professores, durante o seu estágio, em 1936-1937.

Daremos igualmente atenção à colaboração entre professores tendo por base três estudos. Apoiado no ciclo PDR - Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão, a investigação de Trevisan e Ribeiro assenta numa perspetiva do trabalho colaborativo para promover o desenvolvimento profissional do professor. Um outro estudo, da responsabilidade de Aguiar, Ribeiro e Ponte e com fortes pontos de contacto com o anterior, apoia-se igualmente no ciclo PDR, mas neste caso integra professores em exercício e professores em formação inicial. A intenção é igualmente promover o desenvolvimento profissional dos envolvidos, a partir de discussões coletivas sobre a aula preparada em conjunto e implementada por um dos professores do grupo. Uma abordagem que enfatiza a importância da forte articulação entre a formação e a prática, mas também a relevância do papel do formador.

A investigação de Quaresma e Ponte, adota o estudo de aula como um processo de desenvolvimento profissional, procurando compreender como os professores estabelecem relações de colaboração. Integrando, à semelhança dos dois estudos anteriormente referidos, momentos de planeamento de tarefas e de análise do trabalho dos alunos, evidencia a relevância da colaboração para promover momentos de reflexão aprofundada por parte do professor como forma de desenvolvimento profissional. Por último, o estudo de Loureiro, Morais e Guerreiro apresenta uma metodologia baseada em *design*, centrada no desenvolvimento profissional, onde o ponto de partida para o trabalho colaborativo entre os participantes de uma ação de formação é um vídeo de um momento de discussão coletiva de uma tarefa matemática. Os dados recolhidos resultam de um primeiro ciclo de *design* tendo em vista a construção e aperfeiçoamento de referenciais teóricos, a ser refinados em futuros ciclos de *design*.

Também dois posters se centram em aspetos no âmbito da temática deste grupo de discussão. Um, da autoria de Araman, apresenta resultados de uma ação de formação em que foram desenvolvidas tarefas para a aula de matemática com o recurso tecnológico denominado por Lousa Digital Interativa. As tarefas planeadas no curso de formação foram aplicadas nas aulas das turmas das participantes. A análise das aulas filmadas assentou no modelo TPACK, tendo a investigadora procurado evidências do desenvolvimento do conhecimento tecnológico-pedagógico do conteúdo. Um segundo poster, da autoria de Vale e Barbosa, apresenta resultados de um estudo que envolve a abordagem de estratégias instrucionais, consideradas não convencionais e inovadoras. A intenção é compreender em que medida estas estratégias constituem um contexto favorável para a aprendizagem, ao nível dos temas matemáticos, capacidades transversais e atitudes de alunos e futuros professores do Ensino Básico.

O conjunto de estudos que integra este grupo de discussão aborda assim diversas temáticas relativas ao professor e à aula de Matemática, onde merecem destaque aspetos como as tarefas propostas aos alunos, os recursos tecnológicos e o conhecimento e desenvolvimento profissional do professor. Apesar da especificidade óbvia de cada estudo, é pois possível identificar problemáticas transversais e avançar um conjunto de questões que parecem de algum modo ser levantadas por estes e cuja discussão se afigura pertinente no âmbito da investigação na área:

Qual o papel dos diferentes tipos de tarefas no ensino da Matemática? Qual a melhor forma de promover o conhecimento do professor relativamente aos diferentes tipos de tarefas e ao potencial de cada um deles para o ensino da Matemática?

Quais as exigências colocadas pelos diferentes tipos de tarefas sobre o professor em cada uma das etapas do seu trabalho (desde a conceção/seleção da tarefa até à sua implementação em sala de aula)?

Quais as principais características do conhecimento necessário para ensinar com tecnologia?

Como conseguir promover o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor tendo em vista a integração da tecnologia na aula de Matemática?

Qual a relevância do desenvolvimento de taxonomias para análise de tecnologias? E qual o impacto previsível destas sobre a prática do professor?

Como é que a reflexão e o trabalho colaborativo promovem alterações no conhecimento e na prática profissional do professor?

Quais as características essenciais do trabalho colaborativo com impacto sobre o desenvolvimento profissional do professor?

Referências

Artzt, A., Sultan, A., Curcio, F., & Gurl, T. (2012). A capstone mathematics course for prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(3), 251-262.

Boston, M. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers' knowledge to their experiences in a professional development workshop. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 7-31.

Drijvers, P. (2018). Tools and taxonomies: a response to Hoyles. *Research in Mathematics Education*. Advance online publication (DOI: 10.1080/14794802.2018. 1522269).

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. B. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *29*(4), 430-511.

Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 371-406.

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*. Advance online publication (DOI: 10.1080/14794802.2018.1484799).

Jaworski, B., Chapman, O., Clark-Wilson, A., Cusi, A., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., Joubert, M., & Robutti O. (2017). Mathematics Teachers Working and Learning Through Collaboration. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 261-276). Cham, Switzerland: Springer.

Kaur, B. (2017). Mathematics classroom studies: Multiple lenses and perspectives. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 45-62). Cham, Switzerland: Springer.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Rocha, H. (2013). Knowledge for teaching mathematics with technology – a new framework of teacher knowledge. In A. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME37* (vol. 4, pp. 105-112). Kiel, Germany: PME.

Roschelle, J., Noss, R., Blikstein, P., & Jackiw, N. (2017). Technology for learning mathematics. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 853-876). Reston, Va.: NCTM.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap - Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

COMUNICAÇÕES – GD3

O ENSINO DE FUNÇÕES NO 3.º CICLO E NO ENSINO SECUNDÁRIO: QUE DIFERENÇAS?

Helena Rocha

UIED, Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade NOVA de Lisboa

hcr@fct.unl.pt

Floriano Viseu

Universidade do Minho

fviseu@ie.uminho.pt

Resumo: Neste estudo analisamos as perceções que professores do 3.º ciclo e do ensino secundário têm da sua prática no âmbito do ensino de Funções, com o objetivo de as caracterizar e de identificar as diferenças existentes entre estes dois grupos de professores. Um aspeto particularmente relevante se tivermos em conta que se tratam de dois grupos de professores com formações iniciais idênticas. Adotamos uma metodologia mista, com uma vertente quantitativa apoiada na aplicação de questionários e uma vertente qualitativa baseada na realização de entrevistas. As principais conclusões alcançadas apontam para semelhanças nas perceções dos professores, mas também para algumas diferenças em função do ciclo de ensino. Na planificação das aulas os manuais são amplamente utilizados, mas de forma diferente consoante o ciclo de ensino do professor. Os professores de ambos os ciclos de ensino estabelecem conexões entre diferentes representações, mas valorizam de diferentes formas as representações disponíveis. O envolvimento dos alunos nas atividades da aula é outro aspeto destacado pelos professores, mas uma vez mais existem diferenças. Na avaliação o recurso ao teste é enfatizado pelos dois grupos de professores, mas já existem diferenças quanto à importância atribuída ao trabalho de grupo.

Palavras-chave: Professores, 3.º ciclo e ensino secundário, Funções.

Introdução

As Funções constituem um dos temas mais importantes da Matemática (Mesa, 2004). Seja pela relevância de alguns dos conceitos matemáticos que se lhe encontram associados ou pela forma como estas podem contribuir para compreender a realidade que nos rodeia, modelando fenómenos e ajudando-nos a resolver problemas. A importância que o tema assume na Matemática não poderia naturalmente deixar de se refletir no seu ensino. E o elemento central do ensino é a aula de Matemática, onde, por seu turno, o papel assumido pelo professor é determinante. É a sua prática profissional que determina o que acontece na aula. Uma prática que sabemos ser marcada pelo conhecimento profissional do professor, pelas suas conceções e pelo contexto onde se encontra inserido.

Neste estudo analisamos as perceções que professores do 3.º ciclo e do ensino secundário têm da sua prática no âmbito do ensino de Funções, com o objetivo de as caracterizar e de identificar as diferenças existentes entre estes dois grupos de professores. Um aspeto particularmente relevante se tivermos em conta que se tratam de dois grupos de professores com formações iniciais idênticas. Concretamente, procuramos responder às seguintes questões de investigação:

(1) Quais as perceções de professores do 3.º ciclo e do ensino secundário relativamente ao ensino de Funções?

(2) Quais as diferenças existentes entre as perceções de professores do 3.º ciclo e do ensino secundário relativamente à sua prática no âmbito do ensino de Funções? Pretendemos ainda equacionar alguns elementos ao nível do conhecimento dos professores e do contexto onde ensinam que de algum modo possam justificar as diferenças identificadas.

Neste estudo entendemos por *perceções* as formas de pensar ou imagens expressas pelo professor ao falar da sua prática profissional e apoiamo-nos nelas como forma de aceder ao conhecimento profissional do professor.

Funções e o seu ensino

De acordo com os programas em vigor (MEC, 2013, 2014), as Funções são abordadas no 7.º ano, o primeiro ano do 3.º ciclo, continuando a ser abordadas em cada um dos três anos de escolaridade que compõem este ciclo. Segue-se o ensino secundário, onde o tema é mais uma vez retomado em cada um dos anos (MEC, 2014). Trata-se, portanto, de um tema que será necessariamente ensinado por qualquer professor destes ciclos de ensino, independentemente do nível (ou níveis) que se encontre a lecionar em determinado ano letivo.

No ensino e aprendizagem de Funções, as suas diferentes representações assumem um papel importante (Friedlander & Tabach, 2001), por permitirem ao aluno compreender numa outra forma aquilo que não era possível compreender na representação inicial, tornando-se fundamentais para a compreensão do conceito (Kaput, 1992).

O uso de diferentes representações, com a particularidade de se tirar partido do recurso à tecnologia, que possibilita um acesso simples e rápido (Kaput, 1992), permite estabelecer ou reforçar ligações de uma forma que de outro modo não seria possível (Cavanagh & Mitchelmore, 2003), potenciando o desenvolvimento de uma melhor compreensão das Funções, da noção de variável e da capacidade de resolver problemas (Bardini, Pierce, & Stacey, 2004; Burril, 2008). A conexão entre diferentes representações cria uma visão global, que, segundo Kaput (1989), é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações. A tecnologia propícia uma exploração plena das abordagens numérica e gráfica de uma forma que até então não era possível, favorecendo assim uma abordagem integrada das diferentes representações e, concludentemente, o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda.

As representações mais utilizadas no estudo das funções e disponibilizadas pelas diferentes tecnologias a que o professor tende a recorrer têm características e potencialidades diferentes (Friedlander & Tabach, 2001). Segundo estes autores, a representação numérica permite o recurso a objetos familiares para demonstrar relações e analisar casos específicos. Ao focar-se apenas nalguns casos particulares, trata-se de uma representação que carece de generalidade. Já a representação gráfica caracteriza-se por permitir uma utilização que transcende os conhecimentos algébricos, tornando possível encontrar soluções quando não se conhece uma abordagem analítica ou mesmo quando esta não existe. Caracteriza-se ainda por ser uma representação mais intuitiva. A representação algébrica é concisa e geral na apresentação de regularidades. Contudo, o recurso exclusivo a esta representação pode dificultar a compreensão do significado matemático e causar dificuldades nas interpretações. Esta é uma das razões apontadas por Quesada e Dunlap (2008) para a importância de recorrer a diferentes representações durante o processo de ensino e aprendizagem. Como enfatiza Ford (2008), não se trata de recorrer a elas simplesmente porque a tecnologia facilita o acesso, mas sim de o fazer porque é necessário para a compreensão dos alunos.

Conhecimento profissional

Diferentes autores têm desenvolvido diferentes modelos para o conhecimento do professor. Entre esses modelos, adoptaremos neste estudo um que tem tido ampla divulgação, da autoria de Deborah Ball e colegas, e que se inspira no trabalho de Shulman, sendo designado por Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT – Mathematical Knowledge for Teaching). Neste modelo, no âmbito do conhecimento do conteúdo, Hill e Ball (2009) consideram o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK – *Common Content Knowledge*), um conhecimento idêntico ao utilizado noutras profissões em que existe conhecimento matemático envolvido; o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK – *Specialized Content Knowledge*), um conhecimento específico dos professores; e o Conhecimento do Horizonte Matemático (HCK – *Horizon Content Knowledge*), uma espécie de visão abrangente sobre o ensino da Matemática. No âmbito do conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) consideram o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS – *Knowledge of Content and Students*), o que combina conhecimento dos alunos e da Matemática; o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT – *Knowledge of Content and Teaching*), que articula o conhecimento sobre a Matemática e sobre ensinar; e o Conhecimento do Currículo (KC – *Knowledge of Curriculum*).

Metodologia

Este estudo adota uma metodologia mista, qualitativa e quantitativa, tendo sido recolhidas as perceções de 129 professores através de questionário (vertente quantitativa) e de quatro professoras através de entrevista (vertente qualitativa). Adotou-se uma abordagem quantitativa no tratamento da informação resultante das respostas dos professores ao questionário elaborado, tendo em vista descrever e interpretar essa informação (Gall, Gall, & Borg, 2003). Para além de itens destinados à caracterização dos participantes, o questionário utilizado nesta pesquisa é organizado em duas dimensões de análise: uma relativa ao ensino de Funções, com 24 itens; e outra relativa à utilização da tecnologia no ensino de Funções, com 19 itens. Atendendo aos objetivos deste trabalho, aqui a nossa análise incide apenas nas respostas dadas pelos professores aos itens da primeira dimensão, cujas opções de resposta eram quatro: *Nunca ou raramente* (codificada por 1); *Algumas vezes* (codificada por 2); *Muitas vezes* (codificada por 3); e *Sempre ou quase sempre* (codificada por 4). A amostra foi definida pelo método de conveniência (Hill & Hill, 2012), tendo os questionários sido distribuídos em várias escolas por professores conhecidos dos autores. A amostra ficou constituída pelos 129 professores, 64 do 3.º ciclo e 65 do ensino secundário.

Adicionalmente, de modo a esclarecer e aprofundar alguns aspetos da dimensão em análise, cruzamos os resultados do questionário com dados das entrevistas semiestruturadas realizadas a duas professoras do 3.º ciclo e a duas professoras do ensino secundário (sendo que aqui apenas apresentados elementos relativamente a uma professora de cada um dos ciclos de ensino considerados: a professora Ana, com 16 anos de serviço docente e a lecionar no 3.º ciclo, e a professora Celeste, com 36 anos de serviço e a lecionar no ensino secundário), cujo guião se estrutura nas mesmas dimensões de análise do questionário.

Na análise ao questionário começou por se determinar as médias e os desvios-padrão dos valores das codificações em cada item. Posteriormente, aplicou-se o Teste-T para amostras independentes tendo em vista comparar as médias dos dois grupos de níveis de ensino definidos, enfatizando os itens em que se verificaram diferenças estatisticamente significativas entre os grupos. A análise estatística foi efetuada através da utilização do *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS), versão IBM SPSS Statistics 23 do Windows, e na tomada de decisão acerca da existência de diferenças estatisticamente significativas adotou-se o nível de significância de 0.1, considerado adequado para um estudo de natureza exploratória, como o que aqui se relata.

Resultados

Ao incidirmos o nosso olhar sobre as representações que os professores têm do seu ensino de Funções procurámos identificar as fontes que utilizam nos momentos em que planificam as suas aulas. Na planificação das aulas sobre tópicos de Funções, os professores do 3.º ciclo recorrem mais aos manuais adotados na escola do que os professores do ensino secundário, que procuram mais fontes de informação noutros manuais do que os professores do 3.ºciclo. Para além dos manuais, os professores de ambos os níveis de ensino pesquisam, muitas vezes, sites da Internet com materiais de apoio à sua prática letiva (Tabela 1).

Tabela 1 – Planificação de aulas sobre tópicos de Funções

	3C (n=64)		ES (n=65)	
Itens	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
1. Na planificação das aulas recorro preferencialmente ao manual escolar adotado na escola	3,52	0,617	3,25	0,848
2. Na planificação das aulas consulto outros manuais escolares para além do adotado na escola	3,25	0,735	3,48	0,687
3. Na planificação das aulas consulto sítios da Internet que tenham materiais de apoio	2,92	0,860	2,80	0,870

Independentemente do ciclo de escolaridade, os professores tendem a planificar as suas aulas individualmente, procurando, por vezes, tirar dúvidas com os colegas, como expressa a professora Ana (3C): "Geralmente [planifico] sozinha, embora costume tirar dúvidas com colegas sobre as tarefas a selecionar e a sequência da aula" (E).

Um aspeto inerente ao ato de planificar uma aula inscreve-se na definição de estratégias para o ensino de tópicos de Funções, ao que os professores ponderam recorrer às que costumam usar no ensino de outros temas matemáticos. Na concretização das suas estratégias de ensino, os professores de ambos os níveis de ensino recorrem, muitas vezes, à exploração de exemplos para estabelecer definições ou propriedades ou à exposição dos conteúdos teóricos para de seguida os alunos aplicarem o que aprenderam na resolução de tarefas (Tabela 2).

Tabela 2 – Estratégias a usar no ensino de tópicos de Funções

	3C (n=64)		ES (n=65)	
Itens	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
12. As mesmas estratégias de ensino a que recorro noutros temas matemáticos	2,92	0,674	2,80	0,642
17. Parto de exemplos para estabelecer as definições/propriedades	3,09	0,583	3,02	0,673
18. Exponho os conteúdos teóricos e de seguida os alunos aplicam-nos na resolução de exercícios/problemas	3,00	0,816	2,91	0,897
22. Envolvo os alunos na elaboração das definições/propriedades dos conceitos estudados	3,08	0,741	3,00	0,661

As médias das respostas dos professores apontam a adopção de métodos convergentes de ensino independentemente do tema em estudo, revelando a preocupação de envolver os alunos, tal como referem as professoras Celeste e Ana:

> Procuro atender aos interesses dos alunos. (Celeste, E, ES)
>
> Às vezes sou eu que dito a definição, devido à natureza do conteúdo. Quando o conteúdo é mais simples permito que sejam eles a chegar à definição. (Ana, E, 3C)

Na introdução de tópicos de Funções, os professores recorrem a diferentes representações. Os professores do 3.º ciclo exploram mais as tabelas do que os professores do ensino secundário, o que se inverte na exploração de gráficos e de expressões algébricas. Quanto à conexão entre as diferentes representações, os professores do 3.º ciclo destacam-se ligeiramente em relação aos professores do ensino secundário tanto no recurso que fazem a diferentes representações na introdução de conceitos de Funções como na seleção das tarefas que propoem aos alunos (Tabela 3).

Tabela 3 – Formas de introduzir tópicos de Funções

	3C (n=64)		ES (n=65)	
Itens	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
16. Introduzo os conceitos de Funções a partir de tabelas	2,53	0,712	2,18	0,917
19. Introduzo os conceitos de Funções a partir de gráficos	2,67	0,778	2,82	0,659
23. Introduzo os conceitos de Funções ligando mais do que uma representação (algébrica, tabelar, gráfica)	3,45	0,641	3,37	0,627
26 Introduzo os conceitos de Funções a partir de expressões algébricas	2,37	0,882	2,49	0,753
25. Proponho tarefas para que os alunos liguem as várias representações (algébrica, tabelar, gráfica)	3,39	0,581	3,12	0,650

A utilização de diferentes representações dos tópicos de Funções visa potenciar a compreensão pelos alunos do que aprendem, como exemplifica a afirmação da professora Celeste:

> As funções caracterizam-se pela diversidade de representações a que podemos recorrer. Eu costumo dizer aos alunos que devem ter na mente o gráfico, é importante fecharem os olhos e verem o gráfico da função com que estão a trabalhar. Ao fazerem uma análise do gráfico que estão a representar fazem um estudo muito mais rapidamente do que através da expressão analítica. Mas isso não significa que não tenham que saber fazer o estudo de uma função através da expressão que a define. A conexão entre as duas enriquece a compreensão dos alunos. (Celeste, E, ES)

A conexão entre diferentes representações pode ser potenciada pelo uso de materiais tecnológicos. A utilização de softwares e da calculadora gráfica é mais frequente pelos professores do ensino secundário sobretudo por este material didático ser de uso obrigatório neste nível de ensino. Já os professores do 3.º ciclo exploram mais os materiais convencionais, como, por exemplo, o caderno e o quadro (Tabela 4).

Tabela 4 – Utilização de materiais didáticos no ensino de tópicos de Funções

	3C (n=64)		ES (n=65)	
Itens	$\overline{x}$	s	$\overline{x}$	s
13. Utilizo software específico para o ensino de Funções	2,52	0,908	2,71	0,805
14. Utilizo a calculadora gráfica para explorar Funções	2,16	1,057	3,42	0,635
15. Privilegio as atividades de papel e lápis e de quadro e giz	3,08	0,599	2,86	0,808

Na dinamização das atividades que se realizam na sala de aula, os professores do 3.º ciclo tendem a valorizar a resolução das tarefas pelo professor no quadro. Tal perspetiva pode dever-se à preocupação da gestão e do cumprimento dos programas curriculares, o que não impede que incentivem os alunos a apresentar as suas resoluções das tarefas da aula. Quando nessas resoluções surgem resultados diferentes, os professores indiciam envolver os alunos na discussão da resposta a dar à tarefa proposta (Tabela 5).

Tabela 5 – Atividades a realizar no ensino de tópicos de Funções

	3C (n=64)		ES (n=65)	
Itens	$\overline{x}$	s	$\overline{x}$	s
4. Nas aulas resolvo os exercícios/problemas no quadro para poder concretizar o programa	3,52	0,642	3,29	0,805
20. Resolvo os exercícios/problemas no quadro e os alunos passam para o caderno	2,53	0,959	2,54	0,831
7. Nas aulas são os alunos que resolvem os exercícios/problemas	3,16	0,597	3,02	0,599
21. Incentivo os alunos a apresentar as suas resoluções e resultados	3,45	0,561	3,29	0,655
9. Quando os alunos obtêm resultados diferentes envolvo a turma na validação das respostas	2,84	0,840	2,82	0,900
24. Promovo a discussão sobre as resoluções e resultados dos alunos	3,16	0,739	2,98	0,673

Como referem as professoras entrevistadas, na resolução das tarefas propostas importa envolver os alunos na apresentação das suas resoluções à turma, tal como afirmam as professoras Celeste e Ana:

> Procuro envolver os alunos nas atividades das minhas aulas, de modo que não estejam à espera de que seja eu a resolver as tarefas propostas. (Celeste, E, ES)
>
> Na componente prática trabalho sobretudo com exercícios e problemas. Os exercícios para sistematizar e treinar. Os problemas para desenvolver a capacidade de interpretação e de raciocínio. Deixo-os ler e tento que sejam eles a interpretar os enunciados do problema (…) a maior dificuldade está na relação entre a interpretação do problema e o que se quer fazer. (Ana, E, 3C)

A participação dos alunos na resolução das tarefas propostas na sala de aula pode servir para a sua avaliação formativa. Porém, os professores de ambos os níveis de ensino avaliam sobretudo as aprendizagens dos alunos através de testes escritos, em detrimento de outras formas de avaliação como, por exemplo, os trabalhos de grupo (Tabela 6).

Tabela 6 – Atividades de avaliação no ensino de tópicos de Funções

	3C (n=64)		ES (n=65)	
Itens	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
5. Nas aulas avalio a aprendizagem dos alunos através de questões orais	3,05	0,722	2,94	0,704
8. Nas aulas avalio a aprendizagem dos alunos no trabalho de grupo	1,92	0,803	2,20	0,887
10. Nas aulas avalio as aprendizagens dos alunos, principalmente, através de testes escritos	3,14	0,732	3,23	0,632

A valorização dos testes escritos na avaliação das aprendizagens dos alunos deve-se, como refere uma das professoras, por se tratar de uma modalidade de avaliação mais próxima da avaliação externa, o que permite "preparar os alunos para um exame, onde vai ser avaliada a capacidade de responderem por escrito a questões concretas" (Celeste, E, ES).

Globalmente, uma análise mais aprofundada das médias de frequência e de concordância dos professores aos itens que estruturam a dimensão contemplada permitiu determinar diferenças estatisticamente significativas em oito itens (Tabela 7).

Tabela 7 – Itens com diferenças estatisticamente significativas segundo os níveis de escolaridade

Itens	valor p
1. Na planificação das aulas recorro preferencialmente ao manual escolar adotado na escola.	0,041**
2. Na planificação das aulas consulto outros manuais escolares para além do adotado na escola.	0,072*
16. Introduzo os conceitos de Funções a partir de tabelas.	0,018**
25. Proponho tarefas para que os alunos liguem as várias representações (algébrica, tabelar, gráfica).	0,015**
14 Utilizo a calculadora gráfica para explorar Funções.	0,000**
15 Privilegio as atividades de papel e lápis e de quadro e giz.	0,086*
4. Nas aulas resolvo os exercícios/problemas no quadro para poder concretizar o programa.	0,084*
8. Nas aulas avalio a aprendizagem dos alunos no trabalho de grupo.	0,064*

*diferenças estatisticamente significativas para $p < 0{,}1$; **diferenças estatisticamente significativas para $p < 0{,}05$.

Relativamente aos itens sobre as atividades que os professores realizam no ensino de Funções, a comparação das médias dos dois grupos definidos, através da aplicação do Teste-T para amostras independentes, determinou diferenças estatisticamente significativas entre esses grupos nos itens: "Na planificação das aulas recorro preferencialmente ao manual escolar adotado na escola" (p=0,041); "Na planificação das aulas consulto outros manuais escolares para além do adotado na escola" (p=0,072); "Introduzo os conceitos de Funções a partir de tabelas" (p=0,018); "Proponho tarefas para que os alunos liguem as várias representações (algébrica, tabelar, gráfica) " (p=0,015); "Utilizo a calculadora gráfica para explorar Funções" (p=0,000); "Privilegio as atividades de papel e lápis e de quadro e giz" (p=0,086); "Nas aulas resolvo os exercícios/problemas no quadro para poder concretizar o programa" (p=0,084); "Nas aulas avalio a aprendizagem dos alunos no trabalho de grupo" (p=0,064).

Entre os dois grupos, é o dos professores do 3.º ciclo que revela uma maior frequência média no uso do manual escolar na planificação das aulas, em introduzir os conceitos de Funções a partir de tabelas, em propor tarefas que permitam aos alunos conectar diferentes representações, em privilegiar as atividades de papel e lápis e em resolver nas aulas as tarefas no quadro de modo a concretizar o programa. Já os professores do ensino secundário revelam uma maior frequência média na consulta de outros manuais escolares para além do adotado na escola ao planificar as aulas, em utilizar a calculadora gráfica no ensino de tópicos de Funções e na avaliação das aprendizagens dos alunos quando realizam trabalhos de grupo.

Conclusões

O olhar introspectivo dos professores do 3.º ciclo e do ensino secundário sobre 'imagens' da sua prática profissional no que diz respeito ao ensino de tópicos de Funções faz emergir, numa primeira instância, momentos em que planificam as suas aulas. Nesta atividade, os professores recorrem preferencialmente ao manual escolar adotado na sua escola e a outros manuais escolares. Foram, contudo, notadas diferenças estatisticamente significativas em função do ciclo de ensino dos professores. E uma justificação para tal poderá residir na idade dos alunos e na etapa dos estudos em que se encontram. A existência de um exame no final do ensino secundário, com grande importância para a vida futura dos alunos, pode levar os professores a procurarem confrontá-los com a maior diversidade de tarefas possível e, como tal, optarem por não se limitar ao manual adotado. No final do 3.º ciclo embora exista igualmente um exame, este não tem o mesmo impacto sobre o percurso dos alunos, pelo que a influência sobre a prática dos professores não será obviamente a mesma. Para além disso, um recurso mais intenso ao manual adotado neste ciclo de ensino pode ser uma forma de estimular a autonomia dos alunos ensinando-os a usar o manual. São portanto os aspetos relativos ao conhecimento que o professor detém dos seus alunos que mais influenciam as opções que assume (Hill & Ball, 2009).

Atendendo à natureza dos tópicos das Funções, os professores de ambos os ciclos de ensino estabelecem conexões entre diferentes representações, com maior destaque para os professores do 3.º ciclo. O recurso a tabelas é significativamente mais valorizado pelos professores do 3.º ciclo nos momentos de introdução de conceitos. Tal pode prender-se com as diferenças entre as representações e com a maior facilidade que, segundo Friedlander e Tabach (2001), se encontra associada à representação tabular. A reduzida utilização da representação tabular ao nível do ensino secundário, também identificada por Rocha (2016), pode dever-se ao maior nível de exigência deste nível de ensino e do conhecimento do professor ao nível dos alunos e do seu horizonte matemático (Hill & Ball, 2009).

A tecnologia desempenha um papel importante no desenvolvimento de conexões entre as diferentes representações, sobretudo a analítica e a gráfica. No que respeita à utilização da calculadora gráfica, verifica-se que é significativamente mais usada no ensino secundário, enquanto os professores de 3.º ciclo privilegiam significativamente mais os materiais convencionais (papel e lápis/quadro e giz). Algo que poderá estar estreitamente relacionado com a obrigatoriedade de utilização da calculadora gráfica no ensino secundário. Constata-se que é a acessibilidade que determina a utilização desta tecnologia e não tanto o conhecimento detido pelo professor. Ainda assim, o contributo que a tecnologia pode trazer ao desenvolvimento de conexões parece ser reconhecido pelos professores, o que sugere conhecimento do impacto desta sobre o ensino (Mishra & Koehler, 2006).

Nas aulas, embora os professores de ambos os ciclos de escolaridade permitam que sejam os alunos a resolver as tarefas que propõem, os do 3.º ciclo tendem a valorizar significativamente mais a resolução das tarefas pelo professor no quadro do que os professores do ensino secundário. Tal diferença poderá estar relacionado com a menor idade dos alunos e uma preocupação em que os registos sejam feitos de forma adequada. Uma outra preocupação que os professores manifestam é o cumprimento do programa, que não os impede de incentivar os alunos a apresentar as suas resoluções e discuti-las quando surgem resultados diferentes.

Em ambos os ciclos de ensino, a avaliação é feita essencialmente com recurso a testes. Ainda assim existe uma diferença estatisticamente significativa relativamente à avaliação dos alunos através de trabalhos de grupo, sendo que esta é mais frequente ao nível do ensino secundário. Parece pois poder-se concluir que a avaliação é encarada como algo distinto e separado da aprendizagem, o que espelha o conhecimento profissional do professor ao nível do ensino (Hill & Ball, 2009). A valorização atribuída à realização de trabalhos de grupo deixa transparecer a importância atribuída a elementos relativos à comunicação matemática e, no seio desta, à capacidade de argumentação. Ainda assim, os elementos recolhidos não oferecem qualquer evidência relativamente à razão responsável por esta diferença entre estes ciclos de escolaridade.

Globalmente podemos concluir que os elementos contextuais têm um forte impacto sobre a prática dos professores. De entre estes são determinantes elementos externos relacionados com diretivas do Ministério de Educação para o ciclo de ensino (como a obrigatoriedade de uso da calculadora gráfica ou a existência de determinado exame) e elementos relativos aos alunos (como a sua idade ou nível de aprendizagem matemática em que se encontram). Estas diferenças acabam por levar o professor a mobilizar diferentes componentes do seu conhecimento profissional, originando diferenças na prática do professor em função do ciclo de ensino.

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho foi apoiado em parte por fundos da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

Referências

Bardini, C., Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphic calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(3), 353-376.

Burril, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics. In *Proceedings of ICME 11*. Monterrey, México: ICME.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, *5*, 3-18.

Ford, S. (2008). *The effect of graphing calculators and a three-core representation curriculum on college students' learning of exponential and logarithmic functions*. Tese (Doutoramento em Educação), North Carolina State University.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston: NCTM.

Gall, M., Gall, P., & Borg, W. (2003). *Educational Research: an introduction*. Boston: Allyn and Bacon.

Hill, H., & Ball, D. (2009). The curious – and crucial – case of Mathematical Knowledge for Teaching. *Phi Delta Kappan*, *91*(2), 68-71.

Hill, M., & Hill, A. (2012). *Investigação por Questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, Va: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: an empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2-3), 255-286.

Ministério da Educação e Ciência – MEC (2013). *Programa de Matemática para o ensino básico*. Lisboa: MEC.

Ministério da Educação e Ciência – MEC (2014). *Programa de Matemática A - Ensino secundário*. Lisboa: MEC.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006) Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Quesada, A., & Dunlap, L. (2008). The preparation of secondary pre- and inservice mathematics teachers on the integration of technology in topics foundational to calculus. In W. C. Yang, M. Majewski, T. Alwis, & K. Khairiree (Eds.), *Proceedings of 13th Asian Technology Conference in Mathematics*. Bangkok: ATCM.

Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and its Applications*, 35(2), 53-64.

DESENVOLVIMENTO DO MODELO TPACK NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Nuno Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE, Portugal

nmartins@esec.pt

Fernando Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE, Portugal

Instituto de Telecomunicações, Delegação da Covilhã, Portugal

fmlmartins@ubi.pt

Cecília Costa

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal

CIDTFF - Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (Lab-DCT da UTAD), Portugal

mcosta@utad.pt

Ricardo Silva

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE, Portugal

rjpsilva@esec.pt

Resumo: O Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e do Conteúdo (TPACK) é um referencial teórico, desenvolvido por Mishra e Koehler, que assenta numa estrutura para a base de conhecimentos que os professores necessitam para fazer a integração da tecnologia, de forma adequada, nas suas aulas. Neste estudo de natureza qualitativa, de índole interpretativo e com um *design* estudo de caso, realizado numa turma com 24 estudantes de uma unidade curricular da área da matemática do 3.º ano de uma licenciatura em Educação Básica, identificam-se os conhecimentos relacionados com as dimensões do conteúdo, pedagogia e tecnologia e a sua articulação. Criaram-se tarefas com o conteúdo subjacente ao algoritmo da adição, aplicando-se em duas sessões, que foram resolvidas com o auxílio da *applet Base Blocks Addition* inserida no repositório *National Library of Virtual Manipulatives*. Na recolha de dados utilizou-se os registos escritos, as gravações em áudio e as imagens dos ecrãs dos computadores. Através desta experiência de ensino, os resultados mostraram evidências de aquisição de conhecimentos, por parte dos estudantes, de algumas das dimensões constantes no modelo TPACK. O conhecimento relativo à articulação das três dimensões, revelou-se mais deficitário, o que seria, de certa forma, expectável dado que estes estudantes ainda não tiveram oportunidade de vivenciar práticas letivas.

Palavras-chave: formação inicial de professores, *applets*, algoritmo da adição, TPACK.

Introdução

O crescimento e disseminação da tecnologia tem sido muito mais rápido do que o previsto há algumas décadas (Sintema & Phiri 2018; Tondeur, Scherer, Siddiq & Baran, 2017). Os professores, hoje em dia, lidam com uma geração de alunos que cresceram sob uma grande influência da tecnologia. De facto, estes já trazem de casa um bom conhecimento de manipulação de ferramentas tecnológicas e de uso de *software* ou aplicativos. Como tal, é desejável que todos os professores saibam utilizar e fazer a adequada integração da tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem. No entanto, apesar de os professores terem oportunidades de acesso aos meios informáticos nas salas de aula, estas não se traduziram num uso adequado da tecnologia na educação (Herold, 2015; Tondeur, et al., 2017). Existem evidências que indicam que os professores não alteraram a sua maneira de ensinar e que o uso da tecnologia, nas suas práticas, para um ensino centrado no aluno, não é consistente, e muito menos se "infiltrou" nas salas de aula (Sintema, 2018). Os investigadores, apesar destes constrangimentos, mostram como os professores desempenham um papel importante na promoção de ambientes de aprendizagens com a tecnologia. Neste sentido é um desafio para a formação de professores garantir que os futuros profissionais da educação sejam dotados de competências que lhes permitam usá-la nas suas futuras práticas (Sintema & Phiri, 2018).

Deste modo, a formação inicial de professores pode ser também uma oportunidade para alicerçar formação de Educadores/Professores para o século XXI, com a articulação obrigatória da dimensão Tecnologia, com as dimensões do Conteúdo e da Pedagogia. Assim, coloca-se o seguinte problema: como promover a aquisição de conhecimentos, relacionados com o modelo TPACK, por parte de estudantes na formação inicial de professores? Este estudo teve como objetivo analisar os conhecimentos dos estudantes da formação inicial de professores, usando o modelo conceptual TPACK e com base numa experiência de ensino relacionada com a operação aritmética adição. Pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

(i) que conhecimentos, relacionados com as dimensões do conteúdo, pedagogia e tecnologia, são adquiridos através desta experiência de ensino?

(ii) que conhecimentos, relacionados com a articulação dessas dimensões, são adquiridos através desta experiência de ensino?

Enquadramento teórico

O Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e do Conteúdo (TPACK) (Mishra & Koehler, 2006) é um referencial teórico que identifica o conhecimento que os professores necessitam para ensinar de forma eficaz com a tecnologia. Este referencial tem sido usado em estudos onde a integração da tecnologia na educação, em diferentes áreas do saber, é abordada. A matemática tem sido uma das principais áreas onde este referencial tem sido mais focado (Sintema, 2018). O referencial TPACK baseia-se numa interligação entre três dimensões do conhecimento: o conhecimento do conteúdo (CK), o conhecimento pedagógico (PK) e o conhecimento tecnológico (TK). Destas interseções resultam quatro novas dimensões intermédias do conhecimento: o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), o conhecimento pedagógico e tecnológico (TPK), o conhecimento tecnológico do conteúdo e o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK) (Figura 1).

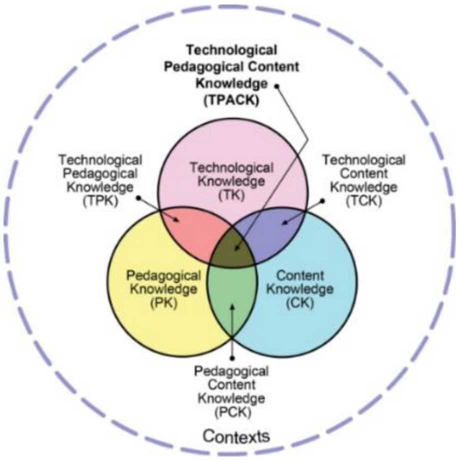


Figura 1 – O modelo conceptual TPACK (Koehler & Mishra, 2009)

Devido a esta complexa interligação, muitos futuros professores poderão ter dificuldades na aquisição e desenvolvimento destes conhecimentos (Koehler & Mishra, 2009). Tem sido feita alguma investigação em questões focadas no modelo TPACK e o modo como estes futuros professores adquirem e desenvolvem os conhecimentos constantes no modelo (Can, Doğru & Bayir, 2017; Gill & Dalgarno, 2017; Sintema & Phiri, 2018). Estes, devido à sua natural falta de experiência, precisam de ser ensinados em como integrar de forma adequada a tecnologia nas suas futuras práticas letivas. Abbitt (2011) descobriu uma forte correlação positiva entre o TPACK e a confiança dos professores para a integração das TIC. Estes professores têm um ensino mais eficiente pois o seu nível de autoconfiança permite-lhes uma integração mais eficaz da tecnologia nas suas aulas. Assim, é importante para (futuros) professores desenvolverem as dimensões do conhecimento do modelo TPACK, pois as suas competências para fazer uma adequada integração da tecnologia na sala de aula e proporcionar ambientes ricos e favoráveis para a aprendizagem dos alunos aumentam. Deste modo essa integração no processo de ensino e de aprendizagem é que constitui um grande desafio para muitos professores e alvo de vários estudos (Brenner & Brill, 2016; Davies, Dean & Ball, 2013; Mishra & Koehler, 2006; Silva, 2018).

O trabalho, em sala de aula, com *applets* ainda é relativamente recente, no entanto tem vindo a aumentar (Cope, 2015) assim como a investigação sobre o papel e a eficácia desta tecnologia, no ensino da matemática. De entre os estudos com futuros professores, destacamos o de Daher (2009) que investigou a perceção do uso de *applets* no contexto da resolução de problemas e o de Akkan e Çakir (2012) que investigaram as opiniões de futuros professores sobre a utilização de manipulativos concretos e virtuais. Estes autores concluíram que os futuros professores preferiam os virtuais devido a razões como: incluírem atividades extras, darem *feedback* imediato, apresentarem atividades para os alunos, construírem a informação por si mesmo, diminuírem a possibilidade de se cometer erros, etc. Estes futuros professores também realçaram que o uso de manipulativos virtuais contribui para a compreensão dos conceitos matemáticos e o uso de linguagem matemática.

Opções metodológicas e contexto de intervenção

Este estudo foi desenvolvido numa unidade curricular de Matemática com 24 estudantes do 3.º ano, de um curso de Educação Básica de uma instituição de ensino superior portuguesa. A natureza do estudo é qualitativa de índole interpretativa e *design* de estudo de caso (Creswell, 2009).

O conteúdo específico abordado foi o algoritmo da operação aritmética adição e seus sentidos e, de forma implícita, os princípios fundamentais de um sistema de numeração (agrupar em conjuntos com número de elementos igual ao valor da base; valor posicional) (Aharoni, 2008). Outro conceito específico também abordado foi a composição em uma unidade de ordem superior (Ma, 2009) que está presente nos procedimentos do algoritmo da adição. Também a terminologia usada, como, por exemplo, a dos elementos constituintes da operação, como o adicionando e o adicionador (Caraça, 1989, p. 17) foram objeto de análise. As tarefas (Figura 2) foram resolvidas com o auxílio da *applet Base Blocks Addiction* do repositório *National Library of Virtual Manipulatives*. Cada uma das tarefas tem subjacente uma ligação às dimensões do conhecimento do modelo TPACK. Assim, na Parte I, a) CK e TCK, b) CK, c) CK. Na Parte II, tarefa 1 CK e TCK, tarefa 2 PK, tarefa 3-a TK, TCK e PCK, tarefa 3-b TPK e TCK, tarefa 4.1. TPK, TCK e PCK e tarefa 4.2. TPACK. Os estudantes da turma foram agrupados de acordo com as condições da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) (Vygotsky, 1978) cujos níveis de discrepância ótima foram estabelecidos pelos resultados do questionário (N. Martins, Sampaio, Costa, & F. Martins, 2017) sobre as suas perceções das dimensões do conhecimento relacionadas com o modelo conceptual do TPACK, aplicado antes das sessões. O ambiente de aprendizagem foi desenvolvido com os estudantes a trabalhar em 12 grupos de dois e cada grupo possuía, pelo menos, um computador. Para a seleção do grupo para este trabalho teve-se em consideração a perceção média que os estudantes manifestaram na resposta ao questionário. O grupo é constituído por duas alunas (A e B). Num primeiro momento, os investigadores possibilitaram a exploração livre das a*pplets* pelos alunos tendo, depois, orientado a exploração. Percorreram os diversos grupos, fazendo questões, esclarecendo dúvidas sobre as tarefas propostas, tendo por objetivo que os estudantes se consciencializassem dos seus conhecimentos e desenvolvessem competências técnicas, pedagógicas e didáticas de modo a que compreendessem como a tecnologia pode ser integrada na aula de matemática.

Parte I

Instruções

Resolva as tarefas 1., 2. e 3. com a *applet*. Nas tarefas 1. e 2. deverá:

a) mencionar os objetos que foram usados (cubinhos, barras, placas, cubos) e porquê, bem como a razão do local onde estão posicionados;

b) explicar como foi resolvida, passo a passo, a situação, usando terminologia matemática adequada;

c) explicar o significado do resultado obtido e a sua relação com a resposta ao enunciado.

Tarefas

1. Calcule:

   1.1) 465 + 321   1.2) 5 873 + 857

2. O José, no mês de agosto do ano passado, tirou 467 fotografias das suas férias. Este ano tirou, no mesmo mês, 384. Nestes últimos dois anos quantas fotografias tirou o José das suas férias?

3. Crie uma situação problemática para cada um dos sentidos da operação adição: *juntar* e *acrescentar*.

Parte II

Considere as seguintes questões, no sentido de refletir sobre a *applet*.

1. Que conceitos matemáticos estão envolvidos na *applet*?

2. Nas orientações oficiais para o Ensino Básico, onde se enquadram os conceitos matemáticos referidos na questão 1? (indique o ano de escolaridade, domínio, subdomínio e conteúdo específico)

3. Relativamente à *applet*, indique potencialidades e limitações quanto:

   a) às funcionalidades da mesma;

   b) aos conceitos matemáticos que esta permite trabalhar.

4. Supondo que pretendia incorporar esta *applet* nas suas aulas enquanto futuro professor:

   4.1. construa uma tarefa com vista a ser realizada, nas aulas, com os seus (futuros) alunos;

   4.2. faça uma descrição de como a tarefa elaborada em 4.1. poderá ser apresentada em sala de aula, contemplando os seguintes itens: nível de ensino, ano de escolaridade, domínio, subdomínio, conteúdos, conhecimentos prévios dos alunos, materiais utilizados, duração prevista, estratégias e desenvolvimento da aula (incluindo, se possível, momentos de discussão em grande grupo) e avaliação.

Figura 2 – Tarefas propostas

A recolha dos dados decorreu em duas sessões de 2 horas cada, no ano letivo 2017/2018. Foram utilizadas diferentes fontes, tais como: os registos escritos, individuais e de grupo, efetuados pelos estudantes aquando da realização das tarefas; o registo e observações do professor e o diário de bordo do investigador. Para as gravações em áudio e das imagens dos ecrãs dos computadores em que os estudantes trabalharam, recorreu-se ao *software FlashBack Express*.

A análise dos dados foi feita de acordo com os critérios mencionados na Tabela 1.

Tabela 1 – Critérios de análise dos dados

Dimensões do modelo TPACK	Descritores
CK – Conhecimento de Conteúdo Matemático	• Usa terminologia matemática adequada. • Compreende os princípios fundamentais de um sistema de numeração: agrupar em conjuntos com o número de elementos do valor da base e valor posicional. • Demonstra compreender os procedimentos envolvidos no algoritmo da adição.
TK – Conhecimento Tecnológico	• Tem destreza na utilização da *applet*. • Consegue fazer uma avaliação da *applet* quanto às funcionalidades da mesma indicando potencialidades e limitações. • Consegue resolver problemas de *software*.
PK – Conhecimento Pedagógico	• Consegue propor uma organização de sala de aula adequada. • Consegue planificar uma aula.
PCK – Conhecimento Pedagógico de Conteúdo Matemático	• Consegue enquadrar os conceitos no Programa de Matemática do Ensino Básico • Consegue encontrar uma estratégia que seja adequada para ensinar o tópico específico.
TPK – Conhecimento Pedagógico e Tecnológico	• Compreende como utiliza a *applet* para ajudar no ensino do tópico específico. • Consegue compreender a *applet* como uma estratégia pedagógica para o ensino do tópico específico. • Compreende as limitações e potencialidades da *applet* para o ensino do tópico específico.
TCK – Conhecimento Tecnológico de Conteúdo Matemático	• Identifica conceitos matemáticos envolvidos na *applet*. • Identifica conceitos matemáticos que a *applet* permite trabalhar. • Consegue fazer uma avaliação da *applet* relativamente às potencialidades e limitações sobre os conceitos matemáticos que esta permite trabalhar.
TPACK – Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo Matemático	• Consegue estruturar uma aula em que faz uma adequada integração do conteúdo, da tecnologia e da pedagogia para uma aprendizagem centrada no aluno. • Consegue estruturar uma aula que combina de forma apropriada o currículo, tecnologia e o ensino.

Apresentação e Discussão de Resultados

Nesta secção descrevemos, apresentamos e discutimos o modo como o grupo escolhido resolveu as tarefas, bem como as reações, constrangimentos e diálogos surgidos.

Parte I

No início, as alunas configuraram a *applet* de forma a permitir a criação de situações aleatórias.

Passaram depois à leitura do enunciado e de seguida à representação das adições indicadas não apresentando qualquer tipo de hesitação. A aluna A introduziu as quantidades relativas ao adicionando ordem maior para a menor, procedendo de forma semelhante para o adicionador (Figura 3), arrastando depois, os objetos gerados pela *applet* colocados no adicionando, para o adicionador (Figura 3), concluindo assim a representação de ambas as parcelas. "E agora *begin problem*!", disse a aluna A. A facilidade com que alcançaram a representação pretendida evidencia destreza na manipulação da *applet* (TK).

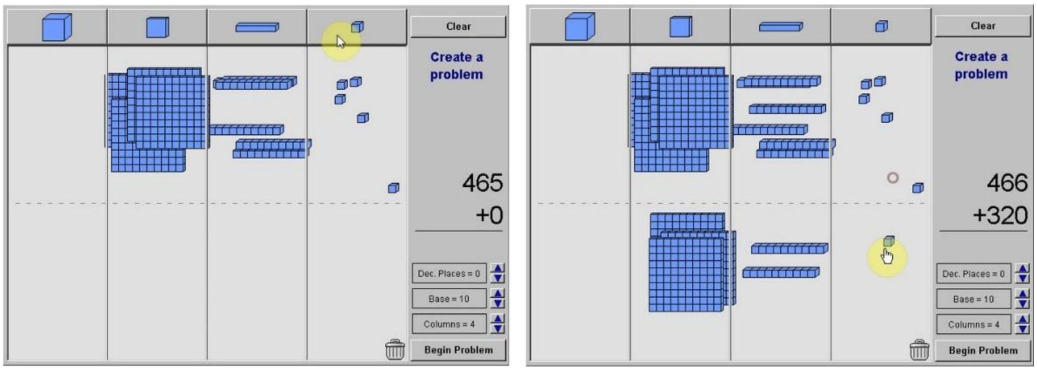


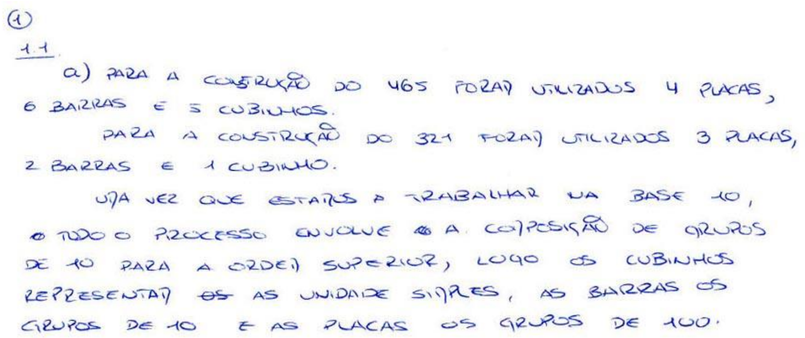
Figura 3 – Representação na applet da tarefa 1.1.

Antes de iniciarem a resolução, decidem registar o que já fizeram até ao momento para a tarefa 1.1. Debatem a forma de construir o registo:

Aluna A: Foram utilizadas quatro unidades de ordem 3.

Aluna B: Não, 4 placas. Placas são placas.

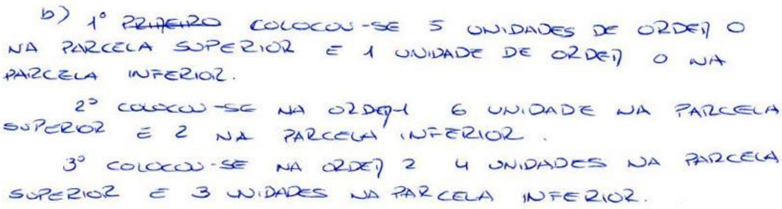
A aluna B não valoriza o contributo da aluna A e acaba por registar apenas a sua opinião (Figura 4). Caso tivesse optado por incluir o contributo do par, a resposta do grupo ficaria mais completa, estabelecendo uma relação entre os objetos e o significado matemático da sua representação.



1
1.1
a) PARA A CONSTRUÇÃO DO 465 FORAM UTILIZADOS 4 PLACAS, 6 BARRAS E 5 CUBINHOS.
PARA A CONSTRUÇÃO DO 321 FORAM UTILIZADOS 3 PLACAS, 2 BARRAS E 1 CUBINHO.
UMA VEZ QUE ESTAMOS A TRABALHAR NA BASE 10, ~~O~~ TODO O PROCESSO ENVOLVE ~~&~~ A COMPOSIÇÃO DE GRUPOS DE 10 PARA A ORDEM SUPERIOR, LOGO OS CUBINHOS REPRESENTAM ~~OS~~ AS UNIDADES SIMPLES, AS BARRAS OS GRUPOS DE 10 E AS PLACAS OS GRUPOS DE 100.

Figura 4 – Registo escrito da tarefa 1.1. a)

Na resposta à alínea b) o par trabalhou de forma mais produtiva, escutando-se mutuamente, obtendo um registo em que procuram usar terminologia matemática adequada, ainda que nem sempre o tenham feito (CK), de forma a manter uma relação entre a manipulação da *applet* e o significado matemático das representações obtidas (Figura 5), apesar de não existir coerência entre o que escrevem e o que fizeram, já que, primeiro representaram uma parcela e depois a outra e não simultaneamente, como o registo dá a entender.



b) 1° ~~PRIMEIRO~~ COLOCOU-SE 5 UNIDADES DE ORDEM 0 NA PARCELA SUPERIOR E 1 UNIDADE DE ORDEM 0 NA PARCELA INFERIOR.

2° COLOCOU-SE NA ORDEM 1 6 UNIDADE NA PARCELA SUPERIOR E 2 NA PARCELA INFERIOR.

3° COLOCOU-SE NA ORDEM 2 4 UNIDADES NA PARCELA SUPERIOR E 3 UNIDADES NA PARCELA INFERIOR.

Figura 5 – Registo escrito da tarefa 1.1. b)

A aluna B sugere que a colega faça a resolução da adição enquanto termina de escrever a resposta:

Aluna B: Podes ir resolvendo enquanto eu acabo de escrever.

Aluna A: Já está.

Aluna B: Como é que fizeste?

Aluna A: Arrastei este cubinho que estava mais perto para aqui e apareceu-me o resultado (Figura 6).

Aluna B: Não interessa, tem que se criar aqui. Não podes dizer que está, só porque apareceu o resultado. Tens de explicar como é que acontece. Tens de arrastar para aqui. Se tu só continuas a mexer na parcela superior não estás a explicar o raciocínio.

Aluna A: Estavas a dizer que, na parcela superior, devíamos colocar todos, era isso?

Aluna B: Sim. Se só arrastaste e apareceu o resultado tu não sabes como é que isto foi possível.

Aluna A: O.K. E se eu colocasse – arrastando os objetos da segunda parcela para a primeira, começando na ordem 0 (Figura 7)?

Aluna B: Sim, porque vais ver se precisas de fazer agrupamentos.

Aluna A: Aqui não.

Aluna B: Neste caso não, mas tens sempre de resolver o processo.

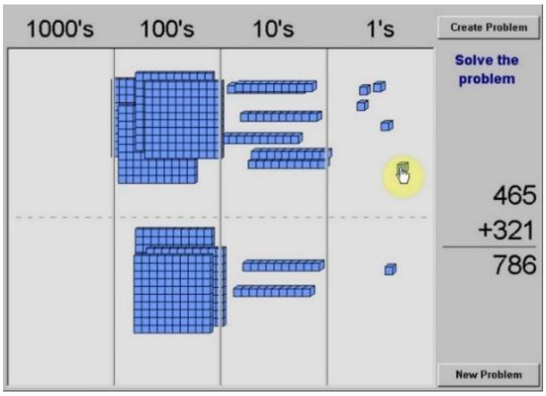


Figura 6 – Representação da explicação do procedimento da aluna A à aluna B

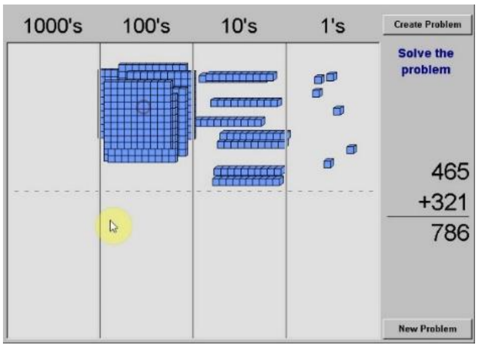


Figura 7 – Representação do outro procedimento que a aluna A sugere à aluna B

Este excerto de diálogo é exemplificativo da vantagem do trabalho a pares. Neste caso, levou a que a Aluna A melhorasse a sua compreensão dos procedimentos envolvidos no algoritmo da adição (CK) e na destreza na utilização da *applet* (TK). Concluída a resolução da adição na *applet*, escrevem o que faltava para a resposta à tarefa 1.1. (Figura 8).

4º ADICIONÁMOS ~~TODOS~~ TODAS AS UNIDADES DA PARCELA INFERIOR DE CADA ORDEM ~~NA PAI~~ NA RESPETIVA PARCELA SUPERIOR.
UMA VEZ QUE NÃO FORAM REALIZADOS AGRUPAMENTOS, O RESULTADO É APRESENTADO.

c) $(5\times10^0 + 6\times10^1 + 4\times10^2) + (1\times10^0 + 2\times10^1 + 3\times10^2) =$

$= 465 + 321 = 786$

Figura 8 – Conclusão do registo escrito, da tarefa 1.1.

Da análise dos registos surgem evidências de que nem toda a linguagem matemática é adequada (CK) e que não existe compreensão total da estrutura da adição, pois na sua explicação para o significado do resultado obtido, as alunas limitam-se a apresentar uma expressão matemática, não relacionando a expressão com o significado matemático nem referindo termos específicos pertencentes à adição, nomeadamente o termo soma.

Na tarefa 1.2. as alunas representam, sem dificuldade, as duas parcelas, desta vez começando pela ordem zero (Figura 9), evidenciando destreza na utilização da *applet* (TK) e reconhecendo, de imediato, que "neste caso vão ser precisos agrupamentos" – Aluna A.

Figura 9 – Representação na applet da tarefa 1.2.

Terminada a representação, identificam os objetos usados e o seu significado matemático (Figura 10), mas nem sempre recorrendo a terminologia matemática adequada (CK).

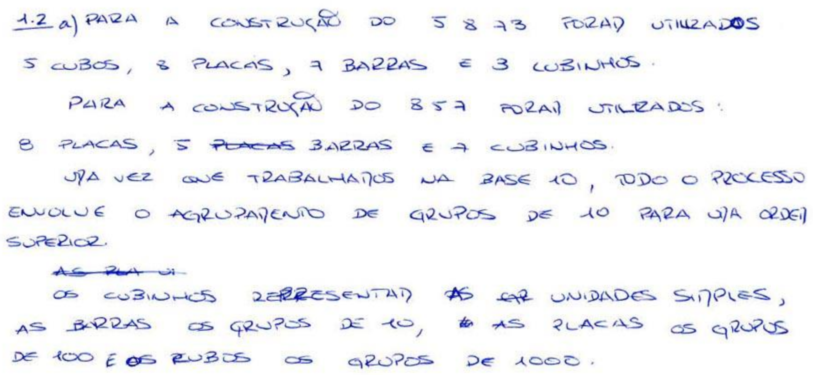


Figura 10 – Registo escrito da tarefa 1.2. a)

Ao descreverem a representação das parcelas, optam novamente por não o fazer de acordo com a manipulação realizada, indicando os objetos introduzidos ordem a ordem (Figura 11), nem sempre recorrendo a terminologia matemática adequada (CK).

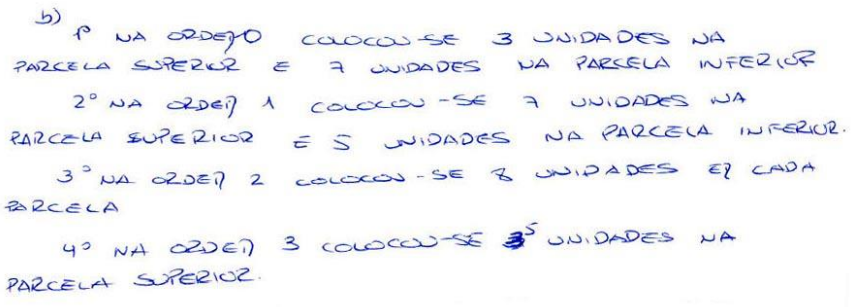
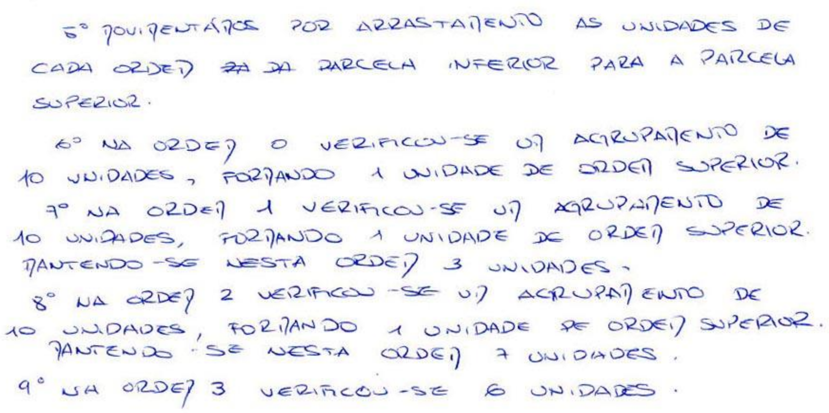


Figura 11 – Registo escrito da tarefa 1.2. b)

Não há concordância na descrição escrita da resolução da adição com a manipulação realizada. Ao contrário do que escrevem (Figura 12), apenas na ordem 0 juntaram à primeira parcela os objetos que representam a quantidade da segunda parcela, realizando o agrupamento necessário, arrastando a unidade de ordem superior criada para a ordem seguinte (Figura 13). Nas restantes ordens apenas compuseram unidades de ordem superior, que movimentaram por arrastamento para a ordem seguinte, até obterem a representação da soma (Figura 14), evidenciando não compreender, por completo, os procedimentos envolvidos no algoritmo da adição (CK).



5° MOVIMENTÁMOS POR ARRASTAMENTO AS UNIDADES DE CADA ORDEM ~~2A~~ DA PARCELA INFERIOR PARA A PARCELA SUPERIOR.

6° NA ORDEM 0 VERIFICOU-SE UM AGRUPAMENTO DE 10 UNIDADES, FORMANDO 1 UNIDADE DE ORDEM SUPERIOR.

7° NA ORDEM 1 VERIFICOU-SE UM AGRUPAMENTO DE 10 UNIDADES, FORMANDO 1 UNIDADE DE ORDEM SUPERIOR. MANTENDO-SE NESTA ORDEM 3 UNIDADES.

8° NA ORDEM 2 VERIFICOU-SE UM AGRUPAMENTO DE 10 UNIDADES, FORMANDO 1 UNIDADE DE ORDEM SUPERIOR. MANTENDO-SE NESTA ORDEM 7 UNIDADES.

9° NA ORDEM 3 VERIFICOU-SE 6 UNIDADES.

Figura 12 – Registo escrito da tarefa 1.2. b) (continuação)

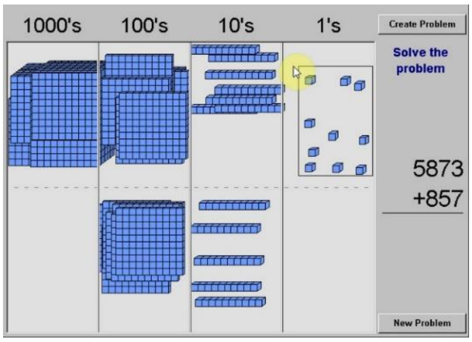


Figura 13 – Resolução na applet da tarefa 1.2. b)

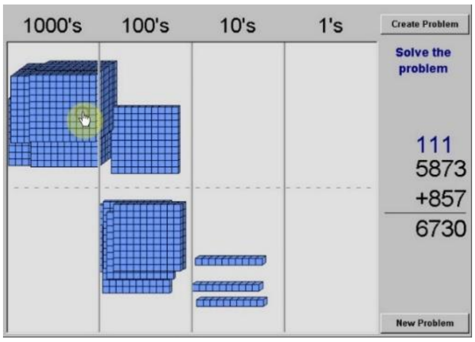
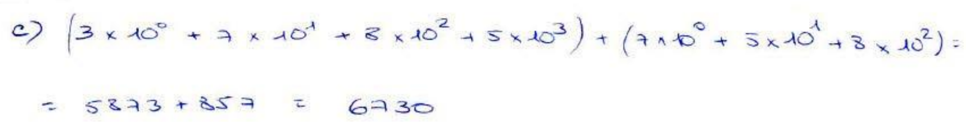


Figura 14 – Resolução na applet da tarefa 1.2. b) (continuação)

Tal como para a alínea 1.1., também na alínea 1.2. as alunas não apresentam uma explicação para o significado do resultado obtido, limitando-se a apresentar uma expressão matemática (Figura 15), não relacionando a expressão com o significado matemático, continuando a não fazer referências a termos específicos pertencentes à operação adição.

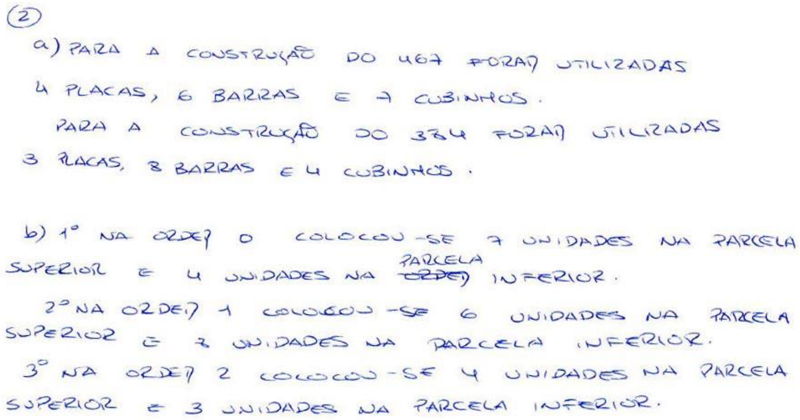


c) $(3 \times 10^0 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10^3) + (7 \times 10^0 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^2) =$

$= 5873 + 857 = 6730$

Figura 15 – Registo escrito da tarefa 1.2. c)

Após lerem o enunciado da tarefa 2, não têm qualquer dificuldade em representar a situação na *applet*, mas, desta vez, fazem a representação simultânea de ambas as parcelas, ordem a ordem, evidenciando alguma displicência. Identificam os objetos usados e o significado matemático da sua representação (Figura 16), nem sempre recorrendo a terminologia matemática adequada (CK).

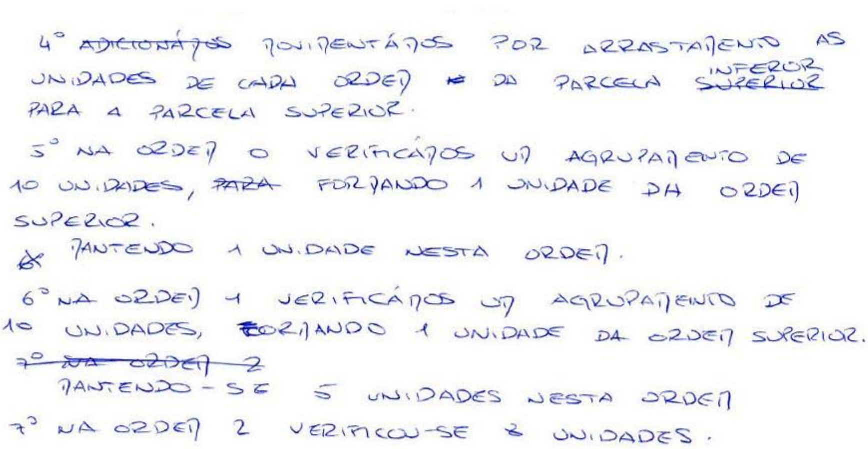


(2)
a) PARA A CONSTRUÇÃO DO 467 FORAM UTILIZADAS 4 PLACAS, 6 BARRAS E 7 CUBINHOS.
PARA A CONSTRUÇÃO DO 384 FORAM UTILIZADAS 3 PLACAS, 8 BARRAS E 4 CUBINHOS.

b) 1º NA ORDEM 0 COLOCOU-SE 7 UNIDADES NA PARCELA SUPERIOR E 4 UNIDADES NA ~~ORDEM~~ PARCELA INFERIOR.
2º NA ORDEM 1 COLOCOU-SE 6 UNIDADES NA PARCELA SUPERIOR E 8 UNIDADES NA PARCELA INFERIOR.
3º NA ORDEM 2 COLOCOU-SE 4 UNIDADES NA PARCELA SUPERIOR E 3 UNIDADES NA PARCELA INFERIOR.

Figura 16 – Registo escrito da tarefa 2 alíneas a) e b)

À semelhança do que fizeram antes, também na tarefa 2, a descrição da resolução da adição (Figura 17) não corresponde à manipulação realizada, uma vez que apenas compuseram unidades de ordem superior para, de seguida, as movimentarem por arrastamento para a ordem seguinte até obterem a soma (Figura 18).



4º ~~ADICIONÁMOS~~ MOVIMENTÁMOS POR ARRASTAMENTO AS UNIDADES DE CADA ORDEM ~~E~~ DA PARCELA ~~SUPERIOR~~ INFERIOR PARA A PARCELA SUPERIOR.
5º NA ORDEM 0 VERIFICÁMOS UM AGRUPAMENTO DE 10 UNIDADES, ~~PARA~~ FORMANDO 1 UNIDADE DA ORDEM SUPERIOR.
~~&~~ MANTENDO 1 UNIDADE NESTA ORDEM.
6º NA ORDEM 1 VERIFICÁMOS UM AGRUPAMENTO DE 10 UNIDADES, FORMANDO 1 UNIDADE DA ORDEM SUPERIOR.
~~7º NA ORDEM 2~~
MANTENDO-SE 5 UNIDADES NESTA ORDEM
7º NA ORDEM 2 VERIFICOU-SE 8 UNIDADES.

Figura 17 – Registo escrito da tarefa 2 alíneas b) (continuação)

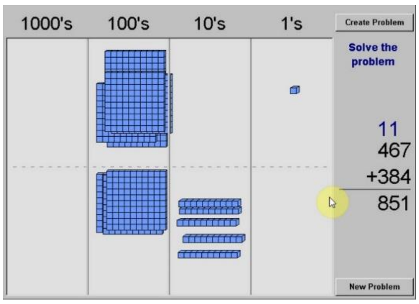


Figura 18 – Resolução na applet da tarefa 2

Na tarefa 2, não explicam o significado do resultado obtido e a sua relação com a situação problemática, apresentando apenas uma expressão matemática (Figura 19).

$$c)\ (7\times10^0 + 6\times10^1 + 4\times10^2) + (4\times10^0 + 8\times10^1 + 3\times10^2) =$$
$$= 467 + 384\ \cancel{=}\ = 851.$$

Figura 19 – Registo escrito da tarefa 2 c)

Enquanto a aluna B vai finalizando a escrita da tarefa 2, sugere à aluna A que vá pensando na tarefa 3, ao que esta responde: "O problema é, numa adição, nós temos de juntar e noutra temos de acrescentar, e eu não estou a ver qual é a diferença", evidenciando não compreender os sentidos juntar e acrescentar associados à adição (CK). Concluída a tarefa 2, a aluna B diz à colega que precisa de reorganizar a representação, juntando todos os objetos na primeira parcela (Figura 20).

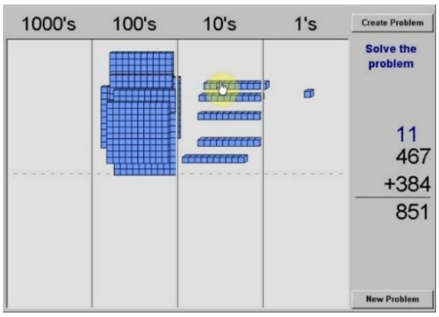


Figura 20 – Resolução na applet da tarefa 2 (continuação)

A ausência de evidências, além do mencionado anteriormente, sugere ao investigador que não são capazes de identificar o sentido acrescentar associado à operação adição (CK).

Com o aproximar do final da sessão, as alunas discutem como fazer a tarefa 3:

Aluna A: Nós é que vamos criar o problema, só que um problema tem de ser de juntar e o outro a acrescentar. E eu não estou a ver agora, não me lembro qual é a diferença de um para o outro.

Aluna B: Basicamente, vou tentar criar aqui um problema – inicia um novo problema na *applet*, decidindo continuar oralmente. No problema de juntar, vamos assim, imagina, o João tem quatro berlindes. O Manel tem cinco. Quantos berlindes é que têm em conjunto? Isso é juntar. Um de acrescentar é por exemplo, o Manel tem 5 berlindes. O pai deu-lhe mais dois. Com quantos berlindes é que ele fica?

Aluna A: O.K... Juntar é…

Aluna B: É a diferença. Acrescentar é como se tivesses duas pessoas, acrescentar é como se tivessem oferecido.

Neste excerto fica evidente a não compreensão dos sentidos da adição pela aluna A (CK). Apesar de não usar terminologia matemática adequada (CK), a aluna B tenta explicar à colega o significado dos sentidos, juntar e acrescentar, demonstrando a vantagem do trabalho a pares formados de acordo com a ZDP.

O grupo não chega a concretizar a redação de uma tarefa para qualquer um dos sentidos da adição, no entanto, verbalizam uma situação problemática para o sentido juntar, que resolvem na *applet*:

Aluna A: O João tinha 12 berlindes.

Aluna B: Tem. E o Francisco…

Aluna A: Sim, tem 7. Quantos têm (impercetível).

Aluna B: Quantos berlindes têm no total?

Apesar de ser uma troca de palavras muito curta, pode dizer-se que com o contributo da aluna B a aluna A começa a compreender o significado do sentido juntar associado à adição (CK). Com o tempo a esgotar-se, ainda representam cada uma das parcelas e resolvem de seguida a adição (Figura 21).

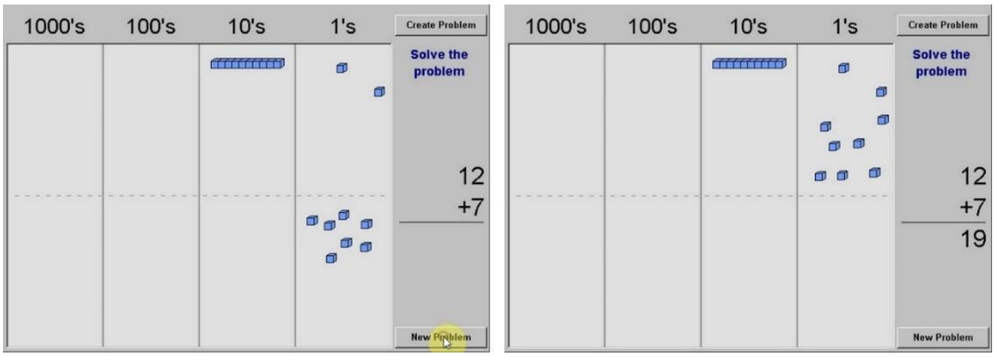


Figura 21 – Resolução na applet da tarefa 3

Parte II

Na resolução da tarefa 1, o grupo consegue identificar conceitos matemáticos envolvidos na *applet* (Figura 22). Foi também possível, através da análise do registo vídeo, perceber que discutiram outras possibilidades para a resposta, acabando por não as incluir, por as considerarem estar englobadas em conceitos já identificados, como por exemplo, a interpretação do significado matemático dos objetos manipulados que remetem para o sistema de numeração decimal ou a comparação de números, tirando partido do valor posicional. As evidências permitem ao investigador afirmar que o grupo conseguiu identificar conceitos matemáticos envolvidos na *applet* (TCK), recorrendo a terminologia matemática adequada (CK) para a construção do registo escrito.

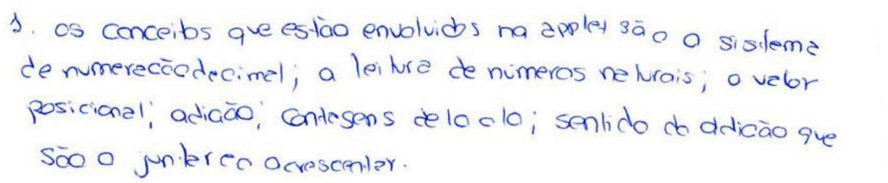

1. os conceitos que estão envolvidos na applet são o sistema de numeração decimal; a leitura de números naturais; o valor posicional; adição; contagens de 10 a 10; sentido da adição que são o juntar e o acrescentar.

Figura 22 – Registo escrito da tarefa 1, parte II

Na proposta de enquadramento curricular para os conceitos identificados pelo grupo (Figuras 23 e 24) apresentam um enquadramento para todos os conceitos identificados, ainda que com algumas falhas:

- respeitam quase sempre a estrutura do Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB), excetuando alguns conteúdos como “leitura por classes e ordens” ou “contagens de 2 em 2, 5 em 5 e 10 em 10”, onde decidem excluir parte dos conteúdos indicados no documento normativo;
- não incluem subdomínios e conteúdos relevantes, como por exemplo os subdomínios “Sistema de numeração decimal” (MEC, 2013, p. 7) para o 1.º ano e o subdomínio “Representação decimal de números racionais não negativos” (MEC, 2013, p. 11) para o 3.º ano, ou o conteúdo pertencente ao subdomínio “Adições cuja soma seja inferior a 100 por cálculo mental, métodos informais e tirando partido do sistema decimal de posição” (MEC, 2013, p. 7);
- existe alguma confusão entre os conceitos que a *applet* permite trabalhar (TCK) e a sua relação com o enquadramento curricular e significado, como foi percetível na exclusão das contagens de cem em cem – “E aqui as contagens de dez em dez, mas acho que podemos trabalhar nas outras ordens. Esta *applet* permite trabalhar nas diferentes bases”, Aluna B – estabelecendo uma relação exclusiva entre as contagens e as regras de agrupamento para as diferentes bases, esquecendo o valor de posição.

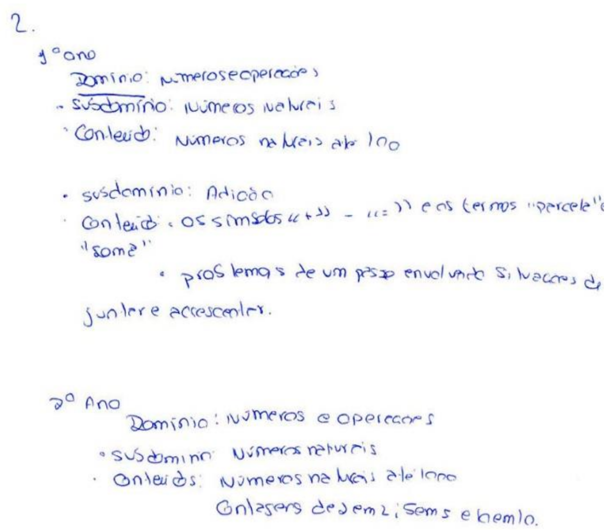

2.
1.º ano
Domínio: Números e operações
- subdomínio: Números naturais
· Conteúdo: Números naturais até 100
· subdomínio: Adição
· Conteúdo: os símbolos "+" "=" e os termos "parcela" "soma"
· problemas de um passo envolvendo situações de juntar e acrescentar.
2.º Ano
Domínio: Números e operações
· subdomínio: Números naturais
· Conteúdos: Números naturais até 1000
Contagens de 2 em 2; 5 em 5 e 10 em 10.

Figura 23 – Registo escrito da tarefa 2, parte II

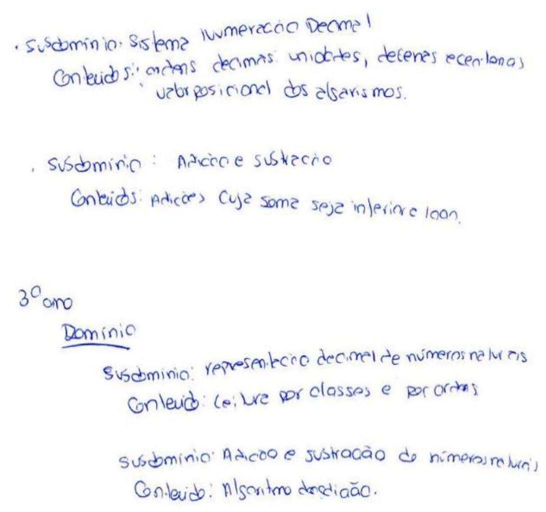

· subdomínio: Sistema numeração Decimal
Conteúdos: ordens decimais: unidades, dezenas e centenas
· valor posicional dos algarismos.
· subdomínio: Adição e subtração
Conteúdos: Adições cuja soma seja inferior a 1000.
3.º ano
Domínio
subdomínio: representação decimal de números naturais
Conteúdo: Leitura por classes e por ordens
subdomínio: Adição e subtração de números naturais
Conteúdo: Algoritmo da adição.

Figura 24 – Continuação do registo escrito da tarefa 2, parte II

As evidências permitem afirmar que conseguem enquadrar parcialmente os conceitos no PMEB (PCK).

A construção da resposta para a tarefa 3 foi discutida pelo grupo, demonstrando que as alunas começam a valorizar o contributo do par e do trabalho colaborativo para a resolução das tarefas. Identificam algumas potencialidades e limitações relativas às funcionalidades da *applet* (TK), evidenciando uma melhoria na compreensão da distinção entre funcionalidades da *applet* e conceitos que esta permite trabalhar, apesar de cometerem uma falha neste aspeto.

Para as potencialidades identificadas relativamente às funcionalidades da *applet* (Figura 25), ao escreverem “a representação da nova unidade formada”, referem-se à manipulação para a formação de agrupamentos e à representação desta composição no algoritmo, possível de perceber na análise do vídeo. Na última potencialidade apontada, não conseguem decidir se a representação da soma alcançada através da manipulação diz respeito às funcionalidades ou conceitos que permite trabalhar, motivo pelo qual rasuram esta hipótese.

Também nas limitações apontadas (Figura 26) é possível encontrar detalhes adicionais na análise conjunta do registo escrito e vídeo:

- ao contrário do que apontam, a *applet* também apresenta problemas pré-definidos em bases diferentes da decimal, no entanto, necessita de configurações pouco intuitivas e algo desajustadas. Esta avaliação, por parte das alunas, revela fragilidades na utilização da *applet* (TK);
- não identificam corretamente a impossibilidade de trabalhar com ordens superiores à ordem 3 (TK), por outro lado, reconhecem que esta caraterística pode ser considerada uma vantagem ou limitação – “depende do ano de escolaridade em que estás a aplicar”, Aluna A –, evidenciando compreender as limitações e potencialidades da *applet* para o ensino do tópico específico (TPK), em função das indicações curriculares;

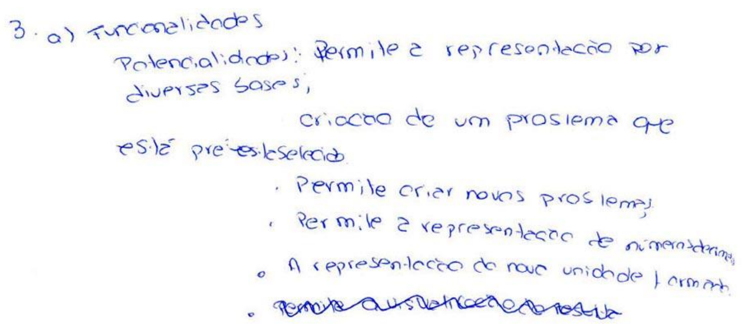

3. a) Funcionalidades
Potencialidades: Permite a representação por diversas bases;
criação de um problema que está pré-estabelecido
. Permite criar novos problemas;
. Permite a representação de números decimais;
. A representação da nova unidade formada.

Figura 25 – Registo escrito da tarefa 3, parte II

- a referência ao facto de a *applet* permitir fazer agrupamentos (sem ter em conta os conceitos) de forma mecânica – demonstrada pela Aluna B durante o debate com a colega (Figura 27) – deveria ser incluída nas “limitações relativas aos conceitos que a *applet* permite trabalhar”. No entanto, ao fazerem referência a este facto, evidenciam destreza na utilização da *applet* (TK) e que conseguem fazer uma avaliação desta, quanto às potencialidades e limitações sobre os conceitos matemáticos que esta permite trabalhar (TCK).

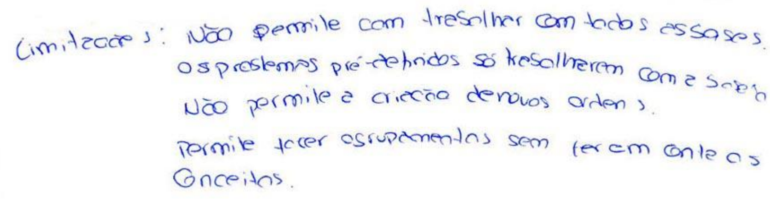

Limitações: Não permite com resolver com todos os casos.
os problemas pré-definidos só resolverem com a soma
Não permite a criação de novos ordens.
Permite fazer agrupamentos sem terem conta os conceitos.

Figura 26 – Registo escrito da tarefa 3, a) parte II – limitações da applet

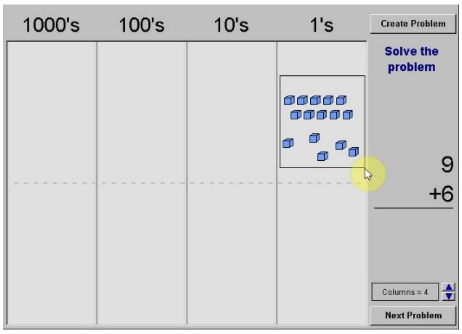


Figura 27 – A aluna B mostra uma limitação da applet

No que diz respeito a potencialidades e limitações, quanto aos conceitos que a *applet* permite trabalhar (TCK), as alunas identificam algumas potencialidades (Figura 28), já a limitação indicada tem origem no desconhecimento do algoritmo usado pela *applet*, presente no caderno de apoio às metas curriculares. Para a construção do registo escrito, nem toda a terminologia matemática escolhida é adequada (CK).

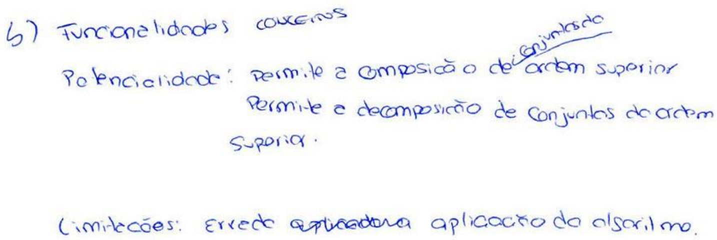

b) Funcionalidades conceitos
Potencialidade: Permite a composição de conjuntos de ordem superior
Permite a decomposição de conjuntos de ordem superior.
Limitações: errada ~~aplicadora~~ aplicação do algoritmo.

Figura 28 – Registo escrito da tarefa 3 b), parte II – limitações da applet

A última tarefa oferece algumas dificuldades às alunas. Apresentam-na um pouco vaga sem compreenderem o que se pretende com uma tarefa concreta. Optam por formular um enunciado com um conteúdo do subdomínio “Adição e Subtração” (MEC, 2013, p. 10), a que acrescentam um exemplo: “Adicionar dois números cuja soma seja inferior a mil, por exemplo, 251+150”.

Apresentam um enquadramento curricular adequado à tarefa proposta (Figura 29) (PCK), respeitando quase na totalidade a estrutura dos documentos normativos, consultando, inclusive, as metas curriculares para estabelecerem os conhecimentos prévios dos alunos.

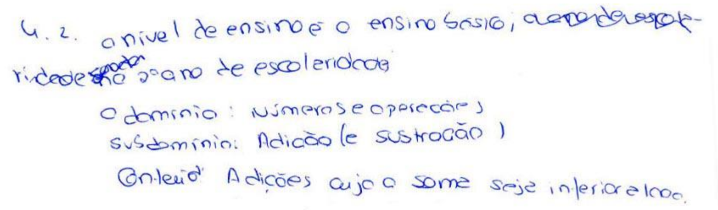


Figura 29 – Registo escrito da tarefa 4.2., parte II

É precisamente na identificação dos conhecimentos prévios dos alunos (Figura 30) que começam a surgir falhas, fragilidades de certo modo expetáveis nas dimensões pedagógicas do conhecimento das alunas.

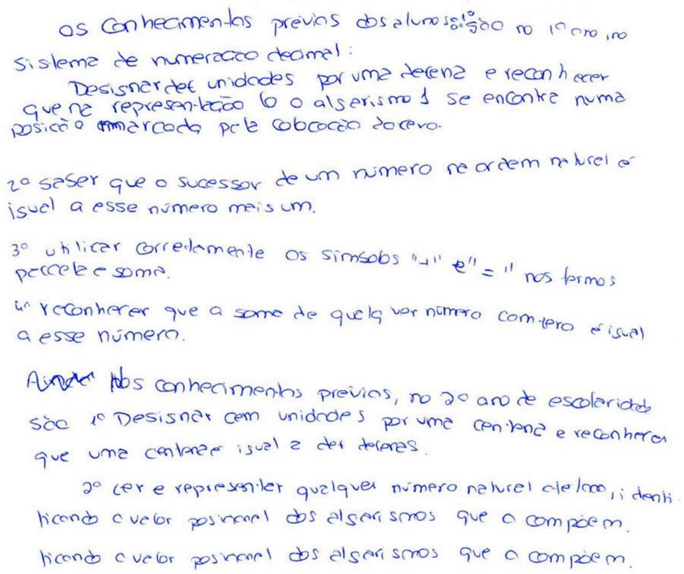


Figura 30 – Registo escrito da tarefa 4.2. (continuação)

A consulta das metas curriculares é feita de forma pouco cuidada, o que aliada a uma insuficiente compreensão da terminologia matemática, leva a que assumam noções erradas, como por exemplo, a Aluna B, afirmar que “Se não me engano, só no 4.º ano é que eles falam em algoritmo, aqui só falam em representação vertical do cálculo” ou a não mencionar que já no 1.º ano é trabalhada a representação vertical da adição.

Uma vez estabelecido o enquadramento curricular para a tarefa criada, as alunas discutem as estratégias e o desenvolvimento do plano de aula.

O professor, ao aperceber-se da previsível dificuldade da turma nesta tarefa, faz algumas sugestões em relação ao que devem incluir no plano de aula: “Como é que o professor organiza os alunos, como circula na sala? Como é que coloca os alunos a resolver as tarefas, como faz a avaliação dos alunos? Isso é a parte da gestão da aula. (…) Agora, é importante eu dizer como é que os alunos vão realizar as tarefas. O que espero que os alunos façam? Por exemplo, os alunos ao realizarem certo aspeto da tarefa, pretendo que eles cheguem à ideia de valor de posição. Tudo depende do enunciado, ou seja, o que estão a resolver com base nos objetivos específicos da tarefa”. Explicando também que deve existir uma relação entre os objetivos previstos e a utilização da *applet* ou outras estratégias que escolham.

Com o tempo disponível para a concretização da tarefa a esgotar-se, as alunas registam as suas ideias para o plano de aula (Figura 31).

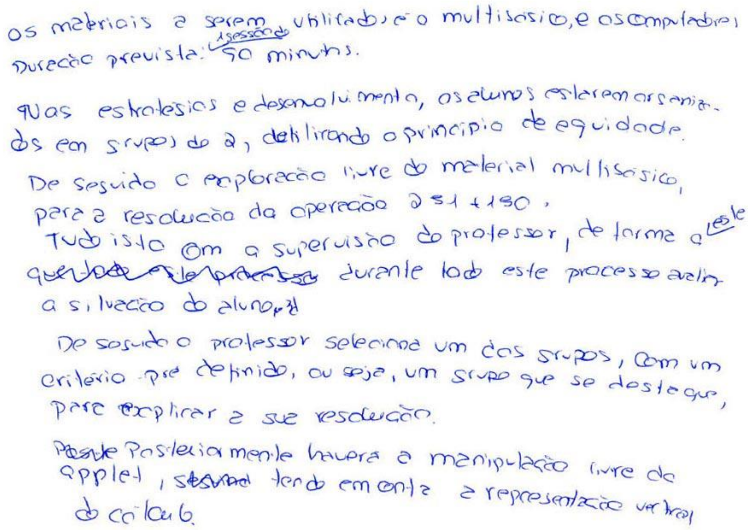

os materiais a serem utilizados, o multibásico, e os computadores
Duração prevista: 1 sessão 50 minutos.
Nas estratégias e desenvolvimento, os alunos estarem organizados em grupos de 2, delimitando o princípio de equidade.
De seguido a exploração livre do material multibásico, para a resolução da operação 251 + 130.
Tudo isto com a supervisão do professor, de forma a que este durante todo este processo avalie a situação do aluno/a
De seguido o professor seleciona um dos grupos, com um critério pré definido, ou seja, um grupo que se destaque, para explicar a sua resolução.
Posteriormente haverá a manipulação livre da applet, tendo em conta a representação verbal do cálculo.

Figura 31 – Registo escrito da tarefa 4.2. (continuação)

A análise da descrição das estratégias e desenvolvimento da aula, em conjunto com o registo vídeo, permite afirmar que as alunas:

- denotam alguma noção na organização de sala de aula (PK);
- a descrição do processo de ensino e de aprendizagem é vaga, mas surgem apontamentos de atribuírem um papel ativo ao aluno na construção do seu conhecimento matemático, evidenciando começarem a ser capazes de procurar uma estratégia que seja adequada para ensinar o tópico específico (PCK);
- não percecionam a *applet* como uma estratégia pedagógica para o ensino do tópico específico (TPK), uma vez que é apenas um complemento ao recurso principal, o material multibásico, motivo pelo qual se pode inferir que têm dificuldade em compreender como utilizar a *applet* para ajudar no ensino do tópico específico (TPK);
- surge, nas alunas, alguma capacidade de planificar uma aula, revelando intencionalidade pedagógica, ainda que com pouco detalhe (PK).

Quanto à inclusão da *applet* na descrição da aula, sendo esta pouco detalhada e surgindo apenas como complemento à tarefa com o manipulável concreto, as evidências permitem afirmar que as alunas ainda não conseguem estruturar uma aula em que fazem uma adequada integração do conteúdo, da tecnologia e da pedagogia para uma aprendizagem centrada no aluno, nem estruturar uma aula que combina de forma apropriada o currículo, tecnologia e o ensino (TPACK).

Considerações Finais

Este estudo revelou evidências de aquisição, por parte do grupo, de algumas das dimensões do conhecimento constantes no modelo TPACK. Verificou-se que o trabalho a pares também foi profícuo na colmatação de lacunas no conhecimento, nomeadamente na dimensão CK. Por exemplo, a aluna A revelou ter grandes dificuldades na compreensão dos sentidos associados à operação adição, lacunas colmatadas com o contributo da aluna B. Este trabalho colaborativo dos pares e do *feedback* imediato proporcionado pelas *applets*, contribuíram para a autorregulação das aprendizagens matemáticas dos alunos. Respondendo à questão de investigação (i), pôde-se observar que relativamente à dimensão CK, embora a terminologia matemática nem sempre tenha sido a mais adequada, o grupo mostrou compreender parcialmente os procedimentos envolvidos no algoritmo da adição. No que respeita à dimensão TK, o grupo evidenciou ter destreza na utilização da *applet* conseguindo fazer uma avaliação desta quanto às funcionalidades, indicando algumas potencialidades e limitações. Em relação à dimensão PK, o grupo apresentou pouco detalhe na planificação de uma aula, propondo, apesar de tudo, uma organização da sala de aula. No que respeita aos conhecimentos resultantes da articulação destas três dimensões, questão de investigação (ii), o grupo conseguiu enquadrar parcialmente os conceitos no PMEB, mostrando indícios de ser capaz de procurar uma estratégia que seja adequada para ensinar o tópico específico (PCK). Para a dimensão TPK, mostrou dificuldade em compreender como utilizar a *applet* para ajudar no ensino do tópico específico, assim como em reconhecer a *applet* como uma estratégia pedagógica para o ensino do tópico específico. No que respeita à dimensão TCK, conseguiu identificar alguns conceitos matemáticos envolvidos na *applet* que esta permite trabalhar, embora tenha feito uma avaliação reduzida quanto às potencialidades e limitações no que respeita a este último aspeto. O conhecimento relativo ao TPACK, revelou-se bastante deficitário, pois as alunas não conseguiram apresentar evidências de estruturação de uma aula em que fazem uma adequada integração da tecnologia e da pedagogia para uma aprendizagem centrada no aluno, bem como uma aula que combine de forma apropriada o currículo, tecnologia e ensino. Sendo estudantes da formação inicial da formação de professores, é crucial que estes participem em experiências de ensino, por forma a consciencializarem-se da importância do uso da tecnologia, experienciarem formas adequadas de integração desta, bem como sentirem-se confiantes e preparados para fazer uma boa articulação entre as três dimensões do conhecimento (tecnologia, pedagogia e conteúdo) em tópicos fundamentais da matemática dos primeiros anos da aprendizagem.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela FCT/MEC através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado pelo FEDER, no âmbito do Acordo de Parceria PT2020 no âmbito do projeto UID/EEA/50008/2013 e, também, por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto UID/CED/00194/2013.

Referências

Abbitt, J. (2011). An investigation of the relationship between self-efficacy beliefs about technology integration and technological pedagogical content knowledge (TPACK) among preservice teachers. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, *27*(4), 134-143.

Aharoni, R. (2008). *Aritmética para pais: Um livro para adultos sobre a matemática*. Lisboa: Gradiva.

Akkan, Y., Çakir, Z. (2012). Pre-Service Classroom Teachers' Opinions on Using Different Manipulatives in Mathematics Teaching. *The Journal of Instructional Technologies &Teacher Education*, *1*(1), 68–83.

Brenner, A. M., Brill, J. M. (2016). Investigating practices in teacher education that promote and inhibit technology integration transfer in early career teachers. *TechTrends*, *60*(2), 136-144.

Can Ş, Doğru S, Bayir G. (2017). Determination of Pre-service Classroom Teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge. *Journal of Education and Training Studies*, *5*(2), 160-166.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Cope, L. (2015). Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible. *Delta Journal of Education*, *5*(1), 10–19.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Los Angeles: Sage.

Daher, W. (2009). Preservice teachers' perceptions of applets for solving mathematical problems: Need, difficulties and functions. *Educational Technology and Society*, *12*(4), 383–395.

Davies, R. S., Dean, D. L., & Ball, N. (2013). Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research and Development*, *61*(4), 563-580.

Gill L, Dalgarno B. (2017). A qualitative analysis of pre-service primary school teachers' TPACK development over the four years of their teacher preparation programme. *Technology, Pedagogy and Education*, *26*(4), 439-456.

Herold, B. (2015). Why ed tech is not transforming how teachers teach. *Education Week*. *34*(35): 8-14.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)?. *Contemporary issues in technology and teacher education*, *9*(1), 60-70.

Ma, L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva.

Martins, N., Sampaio, P., Costa, C. & Martins, F. (2017). A perceção do M-TPACK de futuros professores: um estudo exploratório, *Livro de atas do II Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE)*. Bragança: Instituto Politécnico (pp. 74-86). http://hdl.handle.net/10198/4960.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática: Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Pratas, R. J., Martins, F., Rato, V. (2016). Modelação Matemática como Prática de Sala de Aula: o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição, Proc Encontro em Investigação em Educação Matemática EIEM 2016, Évora, Portugal, Vol. 1, pp. 35 - 48, novembro, 2016.

Sintema, E. (2018). Evolution of pre-service primary teachers' TPACK-Math Profiles. *Journal of Global Research in Education and Social Science*, *11*(4), 166-175.

Silva, R. (2018). Modelação Matemática Como Ambiente de Aprendizagem: O Uso De Manipulativos Virtuais No Desenvolvimento Dos Sentidos Da Adição E Da Subtração (Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação).

Sintema, S, Phiri, A. (2018). An investigation of Zambian Student Teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK). *Journal of Basic and Applied Research International*, *24*(2), 70-77.

Tondeur, J., Scherer, R., Siddiq, F., Baran, E., (2017). A comprehensive investigation of TPACK within pre-service teachers' ICT profiles: Mind the gap! *Australasian Journal of Educational Technology*, *33*(3), 46-60.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. *Full-Text. (N.D.).* https://doi.org/10.1007/978-3-540-92784-6.

ANÁLISE DE RECURSOS DIGITAIS PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM PROFESSORES

Ana Paula Jahn

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

anajahn@ime.usp.br

Resumo: Esta comunicação discute a forma como professores entendem o papel de recursos digitais nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e, mais particularmente, a forma como avaliam a qualidade desse tipo de recurso com vistas à sua utilização em sala de aula. Este estudo, inserido numa investigação mais ampla, refere-se apenas à análise de uma atividade de formação, envolvendo um grupo de professores participantes do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP. Buscou-se conduzir a atividade de formação de modo a possibilitar a realização posterior de um estudo qualitativo; assim, foi colocado o foco da análise dos dados na identificação de situações capazes de esclarecer como os sujeitos se apropriam da tecnologia digital, a partir de uma grelha de critérios previamente concebida. Os dados foram coletados em uma sequência de quatro encontros presenciais com o referido grupo e as análises basearam-se, essencialmente, em notas de observação e nas produções escritas dos professores. Os resultados mostram que os professores deram grande relevo aos aspectos motivacionais de seus alunos propiciados pelo uso de tecnologia digital e, em termos da avaliação dos recursos, a análise do conteúdo matemático, subordinada a eventuais erros ou inadequações conceituais foi por eles destacada. Entretanto, os tipos de recursos digitais escolhidos pelos professores bem como as análises limitadas de seu potencial didático-pedagógico e de condições para sua implementação em sala de aula revelam que esses aspectos detiveram pouca atenção dos sujeitos.

Palavras-chave: Recursos digitais; Avaliação; Grelha de análise; Formação de Professores.

Introdução

Este trabalho insere-se na problemática de integração de recursos digitais nas aulas de Matemática e, mais precisamente, na questão da formação de professores para tal integração. A experimentação que será aqui relatada visa principalmente buscar elementos para apoiar práticas de professores para uso de tecnologias digitais, tornando-os criteriosos na seleção e análise de recursos dessa natureza.

No campo da Educação Matemática, pesquisas colocam em evidência que a referida integração necessita não somente de um domínio técnico das ferramentas informáticas, mas, sobretudo, de uma renovação de práticas profissionais, uma vez que o papel do professor é fortemente alterado em um processo de ensino com a presença de tecnologias digitais (Artigue, 2010).

Guin & Trouche (2008) entendem que é essencial acompanhar os professores de Matemática em seus esforços de integração de recursos tecnológicos e que esse acompanhamento passa pelo desenvolvimento de ferramentas (e de práticas) que possam assisti-los. Ressaltam, entretanto, que não é suficiente colocar à disposição de professores recursos pedagógicos possibilitando a implementação na sala de aula de "novas" atividades para os alunos. Isso porque, por um lado, a profusão atual de recursos, em geral disponíveis na *Internet*, torna difícil a identificação, pelo professor, de recursos pertinentes, de qualidade e adaptáveis às necessidades de seu contexto particular. E, por outro lado, a oferta não resolve o problema da apropriação que necessita de uma evolução nas competências dos professores e em suas representações do papel da tecnologia na aprendizagem da Matemática.

É nesse contexto e com forte influência das atividades desenvolvidas pela autora no âmbito do projeto *InterGeo* – que tratou da análise de recursos de geometria dinâmica (GD) e o estudo de sua apropriação por professores de Matemática (Trgalová, Jahn & Soury-Lavergne, 2009; Trgalová & Jahn, 2013) – que nos interessamos por melhor compreender o potencial de situações de avaliação[1] de recursos digitais por professores de Matemática.

Assim, este estudo tem como principal objetivo analisar a forma como professores entendem o papel de recursos digitais nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e, mais especificamente, de que maneira avaliam a qualidade desse tipo de recurso com vistas à sua utilização em sala de aula. Para tal, foi organizada uma atividade de formação na qual professores foram confrontados a situações de elaboração conjunta de critérios para avaliação, seleção e análise (prévia e após uso) de recursos digitais. Com base nos dados de observação de um grupo de professores, propomo-nos identificar a pertinência (ou não) das referidas situações e o modo como podem impactar as ações desses professores para o uso de tecnologias digitais em suas salas de aula.

Perspectiva teórica

Pesquisas recentes destacam a necessidade de se criar ferramentas teóricas para compreender como os aprendizes apropriam-se gradualmente dos recursos tecnológicos disponíveis nos ambientes de aprendizagem com os quais eles interagem ou, em termos da teoria de Rabardel (1995), entender o processo de *gênese instrumental* pelo qual artefatos são transformados em instrumentos[2]. De fato, um artefato não tem valor instrumental, tornando-se instrumento somente quando o sujeito é capaz de se apropriar dele a ponto de integrá-lo em sua atividade. Assim, os instrumentos atuam como mediadores nas relações dos sujeitos com os objetos, caracterizando um modelo de *ação instrumentada*. Esta mediação instrumental é vista como uma componente essencial da aprendizagem.

A apropriação dos instrumentos pelo sujeito não ocorre de forma espontânea, mas através de um processo de *gênese instrumental*. Este pode ser descrito como um duplo processo de apropriação:

---

[1] Avaliação entendida como análise de um recurso a partir de uma grelha de critérios previamente concebida com a participação dos professores.

[2] Para Rabardel (1995), um *artefato* material ou simbólico produzido pelo usuário ou por outros sujeitos torna-se *instrumento* para um indivíduo à medida que ele desenvolve um conjunto de esquemas associados com seu uso, permitindo que o artefato seja integrado em suas práticas.

- um processo de *instrumentação*, relativo ao sujeito, no qual este cria, produz, reproduz, modifica, atualiza seus esquemas de utilização de artefatos e de ações instrumentadas; ao realizar uma tarefa, o usuário coordena, assimila e transforma seus esquemas de utilização, associando-os a novos artefatos, ou seja, o sujeito "enriquece" seus esquemas mentais de uso (Ibid., p. 137);
- um processo de *instrumentalização*, relativo ao artefato, no qual o sujeito seleciona, reagrupa, modifica e produz funções, atribuindo propriedades aos artefatos, transformando suas estruturas e seu funcionamento. Em outras palavras, podemos dizer que o sujeito "enriquece" o artefato.

Tal abordagem permite, assim, focar os artefatos, estudando cuidadosamente suas características (possibilidades e limitações) para compreender de que forma podem estruturar a ação do usuário e participar de processos de conceptualização, com a identificação de esquemas e invariantes operatórios. Ela ainda considera o caráter produtivo da atividade, por meio de processos de *intrumentalização*, vistos como uma contribuição do sujeito para a construção de instrumentos, uma vez que os artefatos são moldados pelo usuário.

A partir dessas considerações, não se pode esperar que o potencial das ferramentas digitais seja transparente – nem para o aluno, nem para o professor – e, para serem integradas de forma efetiva nas aulas de Matemática, é crucial que se tenha um entendimento de como gerar esses processos de *gênese instrumental*.

No caso da formação de professores, é previsto que este processo seja ainda mais complexo: artefatos precisam tornar-se instrumentos não apenas nas práticas matemáticas dos professores, mas também em suas práticas didáticas, ou seja, em suas atividades docentes. Essa complexidade do papel do professor sugere a necessidade de conceber artefatos que assistam o professor nesse processo.

Dentro dessa perspectiva, interessamo-nos pelo estudo dos processos de apropriação, por professores de Matemática, de fontes integrando ferramentas informáticas, o que estamos designando por *recursos digitais*.

Apropriação é aqui entendida na *abordagem documental* desenvolvida por Gueudet e Trouche (2009) – uma extensão da abordagem instrumental de Rabardel (1995) – colocando o foco no professor e no seu desenvolvimento profissional. Os autores consideram que o professor transforma um recurso (ou um conjunto deles) em um *documento* num processo de *gênese documental* que dá origem a um esquema de utilização desse recurso. Esse esquema de utilização comporta regras de ação e invariantes operatórios que os autores associam aos conhecimentos profissionais dos professores. O processo de apropriação de um recurso aparece então estreitamente relacionado às *gêneses documentais* e ao desenvolvimento de esquemas de utilização do referido recurso para o ensino. É esta relação que pretendemos explorar e analisar com a atividade de formação que passamos a descrever na sequência.

Metodologia de Investigação

O contexto da experimentação foi o de uma disciplina do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP, em seus dois últimos oferecimentos (1.º semestre de 2017 e 1.º semestre de 2018).

As duas turmas perfizeram um total de 19 participantes na atividade de formação. Todos os sujeitos haviam concluído a Licenciatura em Matemática e, em sua maioria, eram professores atuantes na Educação Básica[3]. Como estudantes de Mestrado, estavam em diferentes momentos do curso, sendo alguns ingressantes (iniciando o 1.º semestre) e outros já na segunda metade do curso, tendo concluído diversas unidades curriculares. Em termos de experiência profissional, também havia diferenças, alguns com menos de cinco anos de docência e outros com mais de 10 anos.

Buscamos conduzir a atividade de formação de uma forma alinhada com a realização de um estudo qualitativo posterior. Assim, na proposta de formação foi sugerido o seguinte percurso:

- Atividade 1: produção coletiva de uma grelha de análise;
- Atividade 2: seleção de um recurso na *Internet* e sua avaliação com base na grelha concebida;
- Atividade 3: uso do recurso em sala de aula;
- Atividade 4: apresentação, na forma de seminário, de um relato da experiência e discussão dos resultados (com elementos de reanálise).

Em cada uma destas atividades, procuramos identificar de forma detalhada as ideias desenvolvidas pelos professores quando discutem o uso de recursos digitais no ensino da Matemática.

As atividades foram realizadas em grupo, perfazendo um total de cinco grupos (três da primeira turma e dois da segunda) que, na sequência do texto, serão identificados por *Gi* ($i = 1, 2, \dots, 5$).

De forma a subsidiar o trabalho da primeira atividade, foram propostas algumas leitura de artigos[4] sobre o tema e foi apresentado o questionário de avaliação de recursos de GD desenvolvido no âmbito do projeto *InterGeo* (Trgalova et al., 2009), convidando os professores a conhecerem o instrumento e adequá-lo por meio de eventual generalização de critérios pertinentes a outros tipos de recursos. Além disso, esclarecemos que os professores estariam livres para formular outros critérios ou acrescentar elementos que julgassem pertinentes para a referida avaliação. Desta forma, pretendeu-se dar suporte às reflexões dos professores sobre os principais aspectos e/ou características a serem analisados.

Para a Atividade 2, orientamos os professores a fazerem uma busca e pré-seleção individual, e depois, definir o recurso a ser analisado a partir de consenso dos integrantes dos respectivos grupos.

A terceira atividade foi proposta também em grupo, e facultativa, destinada prioritariamente àqueles professores que pudessem dispor de aulas e condições materiais em suas turmas para a realização de uma atividade com o recurso digital selecionado.

Os dados foram recolhidos ao longo de quatro encontros presenciais (aulas da disciplina do Mestrado), com duração de 1h40min cada um, pela autora desta comunicação, recorrendo essencialmente a protocolos de observação e coleta de produções escritas

[3] No Brasil, a Educação Básica compreende o Ensino Fundamental (1º ao 9º ano) e o Ensino Médio (3 anos).
[4] Leacock & Nesbit (2007); Santos (2015) e Santos & Amaral (2012).

dos grupos, em particular, os registros sobre a elaboração/adaptação da grelha, a análise do recurso e o material produzido para a apresentação dos seminários.

Apresentamos, em seguida, alguns resultados gerais considerando a totalidade dos grupos. Já a análise mais fina referente à elaboração da grelha e sua utilização, faremos com base em alguns episódios envolvendo os dois grupos da segunda turma, escolhidos por permitirem melhor explicitar os elementos que atendem aos objetivos do estudo.

Apresentação dos Dados

A Atividade 1 foi desenvolvida em dois encontros, sendo: o primeiro destinado à problematização da questão da escolha de recursos digitais de qualidade para a sala de aula e à apresentação da plataforma do projeto *InterGeo* e de seu processo de avaliação[5]; o segundo dedicado à elaboração da grelha de análise. Em síntese, esses dois encontros foram organizados em três momentos, a saber:

- Momento 1: em grupo, elaboração de lista de critérios para analisar/avaliar um recurso digital, com base nas experiências didáticas dos mestrandos, nas leituras realizadas e nas considerações sobre o questionário de avaliação do projeto *InterGeo*;
- Momento 2: apresentação da lista de critérios de cada grupo e discussão coletiva;
- Momento 3: elaboração conjunta de uma grelha de análise, pensada para ser usada por professores de Matemática.

Num primeiro momento, a partir da apresentação e discussão do questionário de avaliação do Projeto *InterGeo*, os grupos dividiram-se em duas reações relativamente antagônicas: uma ferramenta bastante completa, com inúmeros e detalhados critérios, o que foi visto como um aspecto positivo por três grupos; uma ferramenta muito extensa, com muitos itens, considerada uma característica negativa por dois grupos. As declarações dos membros dos grupos G1, G3 e G4 no Quadro 1 ilustram tais reações.

Consideramos que no primeiro caso, os professores apreenderam o questionário de avaliação sob um ponto de vista mais conceitual e atentaram para o caráter formativo da atividade. Já no segundo, os docentes tiveram um olhar mais pragmático, voltado às condições de uso desse tipo de ferramenta pelo professor em sua prática quotidiana.

Quadro 1 – Comentários sobre o questionário de avaliação do InterGeo

Vale ressaltar que uma avaliação mais simples e com poucos itens, busca direcionar o olhar do avaliador. (G1)
O que queremos é uma ferramenta de avaliação mais simples e direta, que tem por objetivo facilitar e não dificultar ainda mais o trabalho do docente. (G5)
Consideramos o questionário bastante completo, com itens bem detalhados nas três partes. Percebemos com isso que avaliar um recurso de GD não é tão simples, e muitos elementos devem ser observados. (G4)

[5] O questionário de avaliação, traduzido por nós, foi disponibilizado para os professores.

Quando indagados sobre quais critérios eram por eles considerados como os mais relevantes na análise, tivemos praticamente unanimidade dos grupos, apontando:

- o recurso deve motivar o aluno, estimulando seu interesse: nesse aspecto, a maioria dos professores mencionou claramente o problema da falta de interesse de seus alunos pelas atividades propostas em sala de aula e, com isso, julgam essencial que a tecnologia os auxilie nesse sentido;
- o conteúdo matemático deve ser apresentado com correção e de forma clara, não contendo erros conceituais, nem induzindo a erros**.**

Além disso, três grupos indicaram ainda que o recurso deve ser de fácil acesso em termos técnicos, não somente no sentido de ser facilmente encontrado na *Web*, como também não exigindo aplicativos ou procedimentos específicos para seu acesso e uso.

Notamos que os dois primeiros critérios destacados pelos professores não se referem exclusivamente aos recursos digitais. No Brasil, é muito comum serem enfatizados na análise de livros didáticos, por exemplo, com o que os professores têm certa familiaridade.

No segundo momento, relativo à elaboração da grelha, nem todos os grupos separaram explicitamente os critérios nas três dimensões apresentadas como ressaltou o G4 (conforme registro abaixo), mas na discussão com ambas as turmas, ficou claro que houve consenso de que elas estavam presentes no conjunto dos critérios elencados pelos professores.

> Achamos importante que a avaliação seja pautada em três aspectos: o conteúdo matemático, as características didático-pedagógicas e a análise técnica do recurso. (G4)

Com exceção desse grupo G4, inicialmente, os demais apresentaram um conjunto relativamente restrito de critérios, no qual os itens referentes à dimensão didático-pedagógica da grelha do projeto *InterGeo* foram pouco discutidos ou "aproveitados" pelos professores.

Por fim, após as discussões e ponderações acerca dos critérios de cada grupo, os professores decidiram aprimorar – notadamente em termos de formulação – o elenco de critérios elaborados pelo grupo G4. Pudemos identificar nas interações entre os participantes que isso se deu principalmente por dois motivos: primeiro, por considerarem que, de fato, omitiram alguns critérios importantes e a lista do referido grupo revelava-se mais completa; segundo, por influência do perfil do G4, em que dois de seus membros eram mais experientes no uso de recursos computacionais e ministravam aulas de Informática, sempre exercendo certa liderança no grupo.

A lista atualizada de critérios do G4, em sua versão final, encontra-se na Figura 1. Esse levantamento deu origem à grelha de análise utilizada pelos dois grupos nas atividades subsequentes.

LEVANTAMENTO DE CRITÉRIOS PARA AVALIAÇÃO DE RECURSOS DIGITAIS

1. Conteúdo matemático
1.1. Os conceitos matemáticos apresentados no recurso digital não possuem quaisquer tipos de erros.
1.2. Os conteúdos e conceitos são apresentados de acordo com o ano/série da turma na qual o recurso será utilizado.
1.3. O recurso digital apresenta todo o conteúdo e conceitos de modo claro, sem induzir os alunos a cometerem erros de interpretação ou de cálculos.
1.4. Os conceitos são apresentados de modo objetivo e coeso.
1.5. Representações (se houver) que ilustrem claramente o conceito, evitando ambiguidades ou conclusões errôneas.
1.6. O conhecimento prévio necessário para a utilização do recurso digital deve ser condizente com o público-alvo e estar explícito para alunos e professores.

2. Dimensão didático-pedagógica
2.1. O uso do recurso digital tem a capacidade de motivar os alunos, mantendo-os interessados no seu uso e/ou nas atividades apresentadas dentro e fora do ambiente computacional.
2.2. O recurso digital possibilita que alunos com diferentes ritmos de aprendizagem possam utilizá-lo.
2.3. O uso do recurso digital possibilita o alcance das competências e habilidades que são esperadas dos alunos.
2.4. O recurso digital possibilita a aprendizagem a alunos com necessidade especiais.
2.5. O recurso digital promove a interdisciplinaridade.
2.6. Existência da possibilidade de repetição de etapas, e da repetição como um todo.

3. Dimensão tecnológica
3.1. A interface do recurso digital é de fácil manuseio, permitindo que todos os níveis de usuários possam utilizá-lo.
3.2. O recurso digital é facilmente encontrado na *Internet* ou em repositórios.
3.3. O uso do recurso digital é fluido, sem falhas de execução.
3.4. Apresentação atrativa e explicativa, capaz de despertar o interesse do aluno/usuário.
3.5. O recurso digital possui elementos visuais agradáveis para seu o público-alvo, capazes de mantê-los interessados.
3.6. Existência de um guia de uso/tutorial tanto para o aluno/usuário, quanto para o professor/tutor; que seja claro e explique todas as funções do recurso digital.
3.7. O recurso digital apresenta *feedbacks* imediatos referentes às ações dos usuários.

Figura 1 – Critérios de avaliação para da grelha de análise

Algumas constatações que podem ser feitas ao final dessa atividade:

- o critério referente ao *feedback* foi indicado na dimensão tecnológica, de caráter mais técnico ou instrumental, e aparece com o adjetivo "imediato" na formulação dos professores;
- os grupos excluíram o critério relativo à coerência de objetivos, isto é, ao grau de coerência entre os objetivo(s) de aprendizagem e a(s) atividade(s) proposta(s) com o uso do recurso;
- não fizeram menção explícita aos aspectos relativos à integração do recurso no projeto de ensino do professor, ou seja, à possibilidade de inserção adequada em uma progressão didática prevista pelo professor e/ou articulação com o que faz habitualmente em sala de aula.

Esses itens constavam do questionário de avaliação *InterGeo* e também estiveram presentes nas discussões de leituras e atividades que precederam essa ação formativa. Devido ao caráter genérico intrínseco e por representarem elementos importantes para pensar a integração de recursos digitais na sala de aula e seu impacto nas ações dos alunos, era suposto – ou desejável – que tivessem sido considerados pelos professores, o que não ocorreu de maneira explícita. Com isso, é possível prever que a análise baseada na grelha não necessariamente propiciará aos professores uma atenção sobre os aspectos do recurso tecnológico que apoiam seu ensino, no sentido da modificação e enriquecimento da atividade matemática do aluno.

Para a realização da Atividade 2, os recursos selecionados pelos dois grupos em foco para esta análise foram:

- *Kahoot!*[6], descrita pelo G4 como sendo "*uma plataforma digital na qual os professores formulam questões de múltipla escolha, que serão compartilhadas com seus alunos a partir de um jogo de perguntas e respostas*".
- *Arithmetic Quizz*[7], apresentada pelo G5 como "*um aplicativo que permite ao aluno praticar operações aritméticas com números naturais e inteiros, escolhendo o nível de dificuldade e o tempo disponível para resolver cada operação*".

É importante salientar que os dois grupos, de forma independente, selecionaram recursos do tipo "jogo/*quizz*", um deles mais geral, no qual o conjunto de questões deve ser inserido pelo professor e, consequentemente, mais aberto em termos do conteúdo matemático e das variáveis didáticas que se deseja testar; e outro mais específico, com presença de um tipo de conteúdo matemático e de questões/itens previamente concebidos.

As principais razões apontadas pelos grupos para justificar a escolha dos referidos recursos podem ser resumidas no Quadro 2.

Quadro 2 – Justificativas para seleção dos recursos

Uma forma de unir os jogos e a tecnologia de fácil acesso é por meio do aplicativo Kahoot!. Através de aparelhos smartphones que a grande maioria dos alunos possui acesso, é possível criar um ambiente de jogos de forma flexível e modificável pelos professores que pretendem usá-los, de acordo com as necessidades de cada turma. (G4) *O Arithmetic Quizz é de fácil acesso e supre eventual falta de material para o professor. Os desafios nas questões – tempo para responder e escala de dificuldades – melhora o desempenho dos alunos através do cálculo mental.* (G5)

Ambos os grupos também destacaram o potencial dos jogos para *motivar e empolgar* os alunos.

Com isso, observa-se que as duas escolhas foram coerentes com os critérios colocados em primeiro plano pelos grupos: a seleção foi sobretudo pautada na facilidade de acesso (podem inclusive ser usados em tecnologia móvel) e na característica lúdica para motivar os alunos.

O G4 ainda salientou que *o feedback emitido pelo aplicativo* [para o professor] *ajuda a identificar pontos onde os alunos possuem algum tipo de defasagem conceitual*. Assim, numa primeira apreensão, a perspectiva recaiu mais sobre a ação do professor do que a do aluno, revelando um aspecto da visão dos professores sobre a contribuição do

[6] Disponível em: https://kahoot.com/ Acesso em: 20 set 2018.
[7] Disponível em: http://www.shodor.org/interactivate/activities/ArithmeticQuiz/ Acesso em: 20 set 2018.

recurso no processo de ensino (professor), e não no processo de aprendizagem (aluno).

Os membros do G5, por sua vez, apenas referiram-se à questão do *feedback* quando indagados pelo formador e, assim como o G4, destacaram a funcionalidade *Show score* que pode ser usada pelo professor para acompanhar o desempenho dos estudantes em cada nível (Figura 2). Ainda valorizaram a disponibilidade no ambiente das *Questões de exploração*, que pode auxiliar o professor na discussão e sistematização do conteúdo após o uso do recurso.

> O jogo em si é para treinar as operações e melhorar o cálculo mental, e essas questões complementam o trabalho, servindo de base ao professor para verificar o que os alunos entenderam e no que ainda estão com dúvidas. (G5)

Com relação à qualidade do *feedback* para os alunos, observaram que se reduzia a fornecer a resposta ao aluno em duas situações: após uma resposta incorreta ou após esgotar o tempo limite, e que esse aspecto poderia ser melhorado.

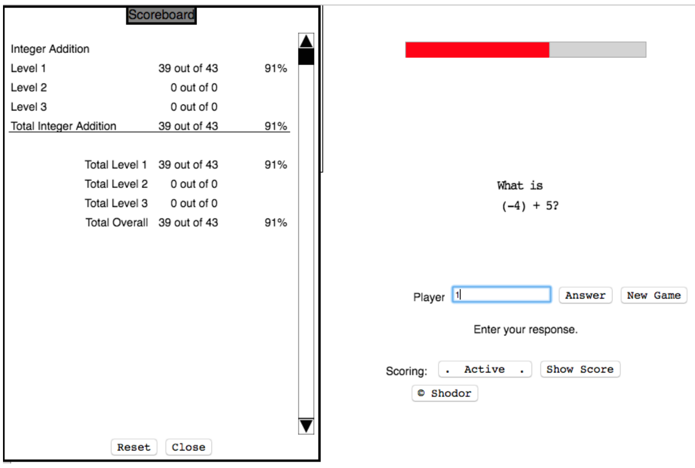


Figura 2 – Janela do Arithmetic Quizz! com o Score

A partir de tais escolhas, os grupos passaram às análises dos recursos com base na grelha elaborada. Cabe observar que, talvez por influência do formato do questionário *InterGeo* apresentado, houve a adoção de uma escala de valores que exerceu forte influência na perspectiva da análise. De fato, enquanto durante todo o processo a natureza qualitativa desse tipo de atividade foi evidenciada, os grupos acabaram, com essa opção, por reduzir as análises, atribuindo-lhes um caráter quantitativo bastante limitado (conforme Figuras 3 e 4). Poucos comentários foram acrescidos no momento da apresentação das análises dos grupos, descritos mais adiante.

2. Dimensão didático-pedagógica	Conceito
2.1. O uso do recurso digital tem a capacidade de motivar os alunos, mantendo-os interessados no seu uso e/ou nas atividades apresentadas dentro e fora do ambiente computacional.	5
2.2. O recurso digital possibilita que alunos com diferentes ritmos de aprendizagem possam utilizá-lo.	5
2.3. O uso do recurso digital possibilita o alcance das competências e habilidades que são esperadas dos alunos.	4
2.4. O recurso digital possibilita a aprendizagem a alunos com necessidade especiais.	4
2.5. O recurso digital promove a interdisciplinaridade.	5
2.6. Existência da possibilidade de repetição de etapas, e da repetição como um todo.	3
Conceito Médio da dimensão didático-pedagógica	4,33

Figura 3 – Avaliação do item 2 da grelha pelo G48

	3. Dimensão tecnológica	nota
3.1.	A interface do recurso digital é de fácil manuseio, permitindo que todos os níveis de usuários possam utilizá-lo.	1
3.2	O recurso digital é facilmente encontrado na internet ou nos repositórios.	1
3.3	O uso do recurso digital é fluido, sem falhas de execução.	1
3.4	Apresentação/Introdução (se houver) atrativa e explicativa, capaz de despertar o interesse do aluno/usuário.	0
3.5	O recurso digital possui elementos visuais agradáveis para seu o público-alvo, capazes de mantê-los interessados.	0
3.6	Existência de um guia de uso/tutorial tanto para o aluno/usuário, quanto para o professor/tutor; que seja claro e explique todas as funções do recurso digital.	1
3.7	O recurso digital apresenta feedbacks imediatos referentes às ações dos usuários.	1
	Total de Pontos Dimensão didático-pedagógica	**5**

Figura 4 – Avaliação do item 3 da grelha pelo G59

Cabe ainda observar que o grupo G4, ao escolher o *Kahoot!*, apresentou uma análise geral dessa plataforma, antes da elaboração das atividades a serem propostas aos alunos. Com isso, em termos dos critérios da dimensão do conteúdo matemático, o grupo explica:

> [...] o Kahoot! é uma ferramenta que possibilita a professores de diversas disciplinas aplicarem quizzes, que deverão ser respondidos pelos seus alunos de acordo com o conteúdo proposto nas suas aulas, assim entendemos que podemos excluir a análise de conteúdo, uma vez que o professor deve produzir e incluir o próprio conteúdo. (G4)

A Atividade 3 – uso do recurso em sala de aula – foi efetivada apenas pelo G4. O grupo realizou uma atividade com alunos de uma escola privada da cidade de São Paulo, onde dois dos professores do grupo lecionavam. Esses professores elaboraram dois "quizzes" que foram aplicados a quatro turmas, duas do Ensino Fundamental (8.º e 9.º ano, 46 alunos no total) e duas do 2.º ano do Ensino Médio (totalizando 21 alunos), sobre os temas *Potências e suas propriedades* e *Funções Quadráticas*, respectivamente.

Para esta comunicação, nossa atenção está voltada para o duplo processo de apropriação dos professores no que concerne à elaboração de uma grelha de análise como ferramenta para melhor apreender a qualidade de um recurso digital e adaptá-lo para seu

---

[8] Na avaliação de cada item (cf. a coluna "Conceito"), o G4 considerou uma escala *Likert* de cinco pontos, sendo o 1 discordância total, o 5 concordância total e o 3 neutro. A adoção dessa escala foi fortemente influenciada pelo questionário do *InterGeo*.

[9] A escala adotada pelo G5, referente à coluna "Nota", foi de três pontos, sendo: 1 – sim, atende ao critério; 0 – razoável, atende com ressalvas; -1 – não atende ao critério.

uso na sala de aula de Matemática. Nesse sentido, não empreenderemos descrições acerca do aproveitamento dos alunos nas referidas atividades, em termos dos objetivos de aprendizagem. Nos limitaremos a identificar os aspectos reveladores das concepções dos professores em relação ao uso de tecnologias digitais em suas práticas docentes. Dito isso, passamos a descrever brevemente os principais resultados oriundos do relato de experiência apresentado pelo G4 no seminário da Atividade 4.

Na síntese do grupo, os professores teceram comentários complementares sobre a análise prévia do recurso que, na visão deles, justificavam seu uso:

- a plataforma se destina essencialmente ao *método diagnóstico ou avaliativo*, e não a atividades de caráter mais exploratório ou investigativo. Ainda assim, exibem como justificativa da escolha, a possibilidade de *mudar o tradicional*;
- é identificado como um ambiente de tipo *exercício e prática*, podendo ser usado como uma plataforma de *fixação de conceitos* ou atuando como uma *alternativa divertida a uma avaliação*;
- alunos se sentem *motivados e empolgados* com jogos;
- na literatura encontram-se relatos sobre a *efetividade no uso do aplicativo*, *facilitando as avaliações* e o *uso na tendência BYOD* (*Bring Your Own Device*), podendo os alunos usarem as tecnologias com que já estão familiarizados.

O Quadro 3 sintetiza os principais elementos de reanálise considerados pelo G4 após o uso do aplicativo com as turmas – em sala de informática ou com os celulares dos alunos – e denominados pelos professores como “pontos de atenção”[10]:

Quadro 3 – Reanálise de itens da grelha após o uso do aplicativo

... entendemos que pelo modelo ser de exercício e prática, seu uso deva ser pontual e não constante. *Falta de apoio à interdisciplinaridade.* *Não existe mais de um registro de representação e o uso de muitos gifs pode atrapalhar o desempenho do aluno.* *Seria interessante que fosse possível escolher as músicas executadas.* *É preciso que sejam feitas atividades que acompanhem cada ritmo de aprendizagem.* *O fato de possuir um limite de 95 caracteres para textos pode prejudicar uma melhor elaboração das questões.* (G4)

Foi possível observar que os professores do G4, com esses comentários, retomaram a maioria dos itens da grelha que não haviam sido avaliados com a pontuação máxima, numa perspectiva de reforçar e validar suas percepções iniciais.

O grupo solicitou ainda a avaliação do recurso com os dois quizzes formulados a um outro professor de Matemática da Escola e, de maneira geral, esse professor destacou os mesmos aspectos já mencionados pelo G4, mas indicou como comentário geral que: *não*

[10] Fonte: apresentação usada pelo grupo no seminário.

existe nada adicional no recurso digital, que possibilite o ensino de matemática de forma diferente do que é ensinado na escola. O G4 não se ateve a esse comentário no momento de sua apresentação.

Com relação aos alunos, o grupo reproduziu as principais reações deles ao longo das atividades e recolheu um registro escrito com respostas a um breve questionário proposto (Figura 5).

1) Qual a vantagem de usar a tecnologia em sala?
2) O que você achou do Kahoot?
3) Há vantagens em usar o Kahoot na aula de Matemática? E desvantagens?
4) Você gostaria de mais aulas com o Kahoot?
5) Já usou algum outro *software* em aula de Matemática?

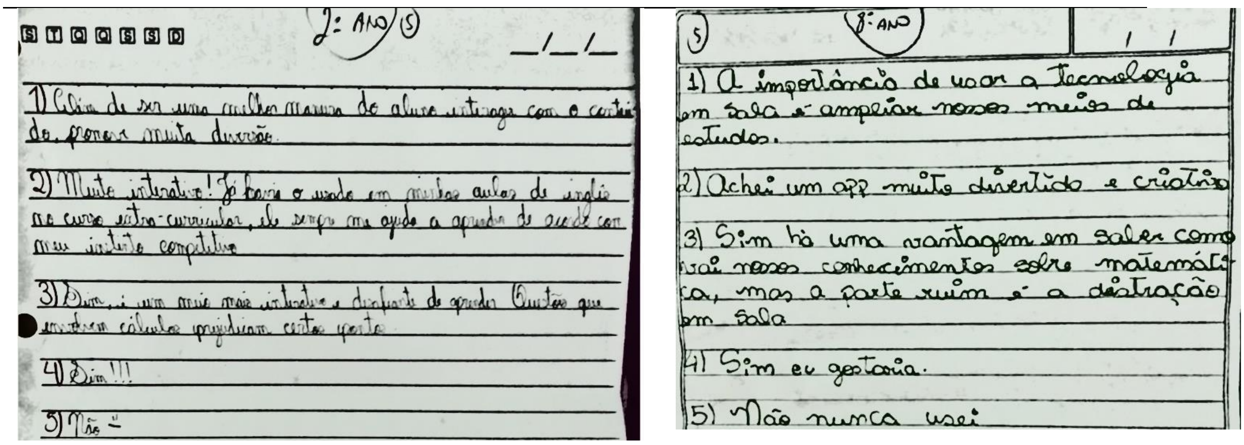


Figura 5 – Questionário e respostas de alunos

Em síntese, a maioria das manifestações recaiu sobre a natureza lúdica e divertida das atividades propostas. A título de ilustração, reproduzimos, no Quadro 4, as conclusões do G4 referentes às respostas dos alunos da turma do 9.º ano e do 2.º ano do Ensino Médio. Segundo o grupo, elas são representativas das reações e respostas dos alunos das demais turmas.

Quadro 4 – Síntese dos relatos dos alunos

Avaliaram este recurso tecnológico como vantajoso pois torna a informação mais rápida, é competitivo e promove muita diversão. A desvantagem por exemplo é trabalhar sob pressão, ter de pensar muito rápido. Todos também mencionaram que se tornam favoráveis ao uso desta plataforma. (G4, ref. 9º ano) *A vantagem de se usar esta plataforma é pelo aumento do dinamismo e melhor estímulo dos alunos a apresentarem um bom desempenho, promovendo a competitividade, incentiva a fazer os exercícios, amplia o aprendizado. Mencionaram como desvantagem é que a competição pode gerar confusão entre eles, dada a afobação na hora de responder. Favoráveis ao uso desta plataforma.* (G4, ref. 2º ano do EM)

A partir do conjunto de dados apresentados, podemos encontrar várias evidências dos processos de apropriação dos professores tanto em relação à grelha de análise, quanto aos recursos tecnológicos selecionados, avaliados, e no caso do G4, utilizados por eles. Com isso, podemos identificar elementos de gêneses instrumentais e documentais desses professores, o que procuramos resumir na sequência, em caráter de conclusão.

Conclusões

Iniciamos esse estudo interessados em investigar em que medida atividades de avaliação de recursos digitais, orientadas por uma grelha concebida coletivamente, poderiam auxiliar os professores na apropriação e melhoria de tais recursos, com vistas à sua utilização na sala de aula de Matemática.

Nesse contexto, podemos identificar a confluência de dois processos na gênese documental dos professores participantes: apropriação de uma grelha com origem na investigação, visando adaptá-la e utilizá-la com outros recursos digitais, para além da Geometria Dinâmica, por um lado; e apropriação de recursos digitais analisados finamente com base na grelha, por outro lado.

Ainda assim, o foco estaria nas tecnologias, particularmente em atividades integrando recursos digitais que pudessem renovar as práticas docentes e enriquecer as atividades matemáticas dos alunos, sendo a grelha de análise uma ferramenta para escolhas mais criteriosas e visão mais crítica desses recursos por parte dos professores.

Nossos dados mostram, entretanto, que na perspectiva dos sujeitos que desenvolveram as atividades da ação formativa, a grelha não funcionou realmente como um motor de reflexão sobre o papel da tecnologia na atividade matemática dos alunos.

Podemos dizer que os recursos digitais perderam relevância, uma vez que a grelha foi interpretada como um instrumento para analisar qualquer tipo de recurso digital, independentemente da sua maior ou menor afinidade com a aula de Matemática e com o conhecimento matemático. Assim, houve uma tendência para desligar a avaliação do recurso da atividade matemática do aluno – haja vista a opção do G4 de excluir a análise de conteúdo na avaliação do *Kahoot!* – e para contemplar aspectos mais pragmáticos da ação do professor – expresso nas demandas por uma grelha com poucos itens, “mais simples e direta” como afirmou uma professora do G5.

O trabalho com a grelha fez com que os professores fossem revelando suas visões sobre tecnologia na aula de Matemática. As características como atratividade visual, retorno imediato, competitividade e ser divertida foram as mais valorizadas pelos docentes – as justificativas para as escolhas e usos dos recursos confirmam isso. As funcionalidades ofertadas pelos recursos selecionados, por sua vez, levaram a enfatizar atividades de reforço, treino ou fixação, com algum entretenimento, vistas como produtivas por professores e alunos – observado em registros e depoimentos escritos.

A grelha acabou por constituir um veículo de confirmação de práticas "usuais" dos professores e a interpretação de seu papel conduziu a escolhas e a atividades pobres do ponto de vista da aprendizagem, especialmente no que se refere à ativação de processos matemáticos de nível mais elevado, como raciocínio, compreensão, relação, representação, construção de conceitos.

Por fim, associamo-nos à Amado (2007) para interpretar o olhar dos professores envolvidos no estudo em relação à tecnologia na sala de aula e entendemos que cabe destacar, essencialmente, dois aspectos: a continuada ilusão da tecnologia como motivação e a opção pelo seu enxerto nas práticas docentes, sem alteração dessas práticas, tornando-a um mero acessório. Tais constatações podem sugerir a hipótese de que os *documentos* que estão sendo constituídos por esses sujeitos a partir dos recursos disponibilizados, se prestam a manter as práticas de ensino habituais e pouco acrescentam à aprendizagem dos alunos.

Agradecimento

Um agradecimento especial às Doutoras Nélia Amado e Susana Carreira, da Universidade do Algarve (UAlg), pela oportunidade de estar em Portugal e pelo valioso apoio na elaboração deste artigo, além de sua revisão.

Referências

Amado, N. (2007) *O professor estagiário de matemática e a integração das tecnologias na sala de aula*. *Relações de mentoring numa constelação de práticas*. Tese de doutoramento. Lisboa: APM. Disponível em: http://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/722/1/TESE_NELIA_AMADO.pdf. Acesso em 25 set. 2018.

Artigue, M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain, The 17th ICMI Study* (pp. 463-476). New York: Springer.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199-218.

Guin D. & Trouche, L. (2008) Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs: le cédérom SFoDEM 2006. *Repères-IREM*, v. 72, 5-24.

Leacock, T. L., & Nesbit, J. C. (2007). A Framework for Evaluating the Quality of Multimedia Learning Resources. *Educational Technology & Society,* 10 (2), 44-59.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Santos, R. de J. (2015). Uma Taxionomia para o uso de Vídeos Didáticos no Ensino de Matemática. In *Anais do XIX EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática*. Universidade Federal de Juiz de Fora – MG, Brasil. Disponível em: http://www.ufjf.br/ebrapem2015/anais/sessao-d-0111-tarde/ Acesso em: 20 set. 2018.

Santos, M. E. K. L. dos & Amaral, L. H. (2012). Avaliação de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Matemática. *REnCiMa – Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *3*(2), 83-93.

Trgalová, J., & Jahn, A.P. (2013). Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 973-986, doi: 10.1007/s11858-013-0525-3.

Trgalová, J., Jahn, A.P. & Soury-Lavergne, S. (2009). Quality process for dynamic geometry resources: The InterGeo project. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 6* (pp. 1161–1170). Lyon: INRP and ERME.

PLANOS DE AULA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES À LUZ DA REFORMA DE 1936

Ana Santiago

Escola Superior de Educação de Coimbra - Instituto Politécnico de Coimbra, UIED[1]

elisa_santiago@hotmail.com

Resumo: A formação de professores de matemática do ensino liceal passou por diversas reformulações ao longo do século XX. Os estágios tinham uma duração maior ou menor, com mais ou menos articulação entre as diferentes componentes.
Nesta comunicação iniciar-se-á caracterizando o modo como a formação de professores de Matemática dos liceus era efetuada, à luz da reforma de 1936. Depois o foco será perceber o papel do Liceu D. João III, em Coimbra, na formação inicial de professores. Por fim far-se-á uma caraterização dos planos de aula dos professores estagiários, em particular no período entre 1936 e 1937.
Através da pesquisa documental, nomeadamente legislação, atas, revistas científicas e arquivos do liceu foi possível caracterizar o trabalho desenvolvido pelos professores estagiários, nomeadamente os planos de aula, contidos nos Ensaios Críticos, no liceu D. João III, em Coimbra, à luz da reforma de 1936.

Palavras-chave: Estágio, Liceu, Matemática, Formação de Professores, Planos de aula.

Introdução

A criação dos liceus data do século XIX, mais especificamente de 1834, com a subida ao trono de D. Maria II, sendo então Paços Manuel o Ministro da Instrução Pública. Posteriormente, na segunda metade do século XIX começam a surgir as primeiras preocupações com a formação de professores, nomeadamente a formação dos professores do ensino liceal. No início do século XX é lançado o Curso de Habilitação para o Magistério Secundário e em 1911 são fundadas as Escolas Normais Superiores. Estas foram encerradas em 1930 pelo governo da altura, com o argumento de não funcionarem bem. Nesta data é criado o curso de Ciências Pedagógicas, constituído pela componente de *cultura pedagógica* e *estágio*, cujo modelo se mantém até cerca de 1974, sofrendo apenas algumas alterações entre 1969 e 1974 (Pintassilgo, Mogarro e Henriques, 2010).

Um dos liceus que teve um papel fundamental no que diz respeito à formação de professores foi o Liceu D. João III, em Coimbra, atual Escola Secundária José Falcão. No Arquivo deste liceu foi possível localizar, entre outros, os trabalhos produzidos pelos estagiários, em particular os planos de aula. Documentos que nos permitem perceber quem foram os estagiários, a partir de 1936, quais as preocupações e as

[1] *Este trabalho é apoiado por fundos públicos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/CED/02861/2016.*

questões que iam surgindo e sendo discutidas e estudadas, temas que serão abordados noutros trabalhos. Esta comunicação tem como objetivo caracterizar os planos de aula, presentes nos Ensaios Críticos, efetuados pelos estagiários do Liceu D. João III, nos primeiros anos após a reforma de 1936.

Neste texto apresentar-se-á pois parte de um estudo mais amplo que se debruça sobre a formação de professores de matemática, em Portugal, percorrendo os vários níveis de ensino, desde o início da formação de professores.

Iniciar-se-á caracterizando o modelo de formação de professores de Matemática dos Liceus em 1936, analisando inicialmente a legislação em vigor na época que permite sustentar, interpretar e construir uma síntese explicativa. Aborda-se ainda o Liceu D. João III e a sua importância na formação de professores. Por fim o foco serão os planos de aula elaborados pelos professores estagiários, durante o seu estágio, em particular em 1936-1937.

Metodologia

Nesta comunicação iremos seguir uma metodologia de investigação qualitativa, de investigação histórica, através da análise documental. Valente (2007), refere que os factos históricos são constituídos a partir de traços do passado, questionados pelo historiador no presente, de acordo com as suas hipóteses iniciais.

O método histórico articula a construção do campo documental, a análise crítica das fontes, a construção da explicação, a síntese e, por fim, a escrita (Certeau, 1993; Chartier, 2007; Mattoso, 1997).

Numa primeira fase foram analisados todos os trabalhos feitos pelos estagiários, localizados no arquivo da Escola Secundária José Falcão. Foram selecionados para analisar os que diziam respeito aos professores que tinham feito estágio no 8º grupo, de matemática. Estes trabalhos foram organizados cronologicamente e, em cada ano, por estagiário. De seguida foi analisada a legislação em vigor na época, o que permitiu perceber e caracterizar a forma como era efetuada a formação de professores na época. Foi dado especial destaque às unidades curriculares contempladas na parte relativa à Cultura Pedagógica, à estrutura do estágio, duração, acesso, trabalho que se pretendia ser desenvolvido pelos estagiários e Exame de Estado.

Passou-se depois à análise, por ordem cronológica, dos trabalhos dos estagiários, explorando os diversos tipos de documentos escritos produzidos por cada grupo de estagiários de Matemática, tendo-se optado para esta comunicação por explorar os planos de aula, contidos nos Ensaios Críticos, dos estagiários que realizaram o estágio pedagógico em 1936-1937. Foram selecionados os planos de aula por se enquadrarem no tema deste encontro e selecionou-se o grupo de 1936-1937 por ser o primeiro grupo do qual se identificaram trabalhos.

A formação de professores à luz da reforma de 1936

Com a ascensão ao poder de António de Oliveira Salazar, em julho de 1932, inicia-se o período do "Estado Novo" que sucede o regime ditatorial instalado em 1926. Este regime prevaleceu em Portugal até à Revolução dos Cravos a 25 de Abril de 1974. Nesta época, o professor era considerado um instrumento imprescindível à construção do novo estado, funcionando como um agente de difusão e de consolidação dos seus ideais. Por este motivo, a formação de professores era uma das preocupações do regime (Pintassilgo, Mogarro & Henriques, 2010; Pardal, 1992).

Neste novo modelo[2], do qual se apresenta aqui uma breve caraterização, baseada na legislação, o curso de Formação de Professores do Ensino Secundário tinha a seguinte estrutura: Uma parte, designada *cultura pedagógica*, que era ministrada nas Faculdades de Letras de Lisboa e de Coimbra e contemplava seis disciplinas: *Pedagogia e didática*; *História da Educação*; *Organização e administração escolares*; *Psicologia geral*; *Psicologia escolar e medidas mentais* e; *Higiene escolar*. Normalmente os alunos faziam esta parte ao longo do curso superior.

A segunda parte da formação de professores, o *estágio*, com a duração de dois anos contemplava, no primeiro ano *assistência a lições-modelo* e no segundo ano *leccionação, sob direção do metodólogo*. O estágio era inicialmente feito apenas em dois liceus: um em Lisboa e o outro em Coimbra.

Para frequentar o primeiro ano do estágio os alunos teriam de possuir já a licenciatura. Ao longo do primeiro ano, após a assistência a lições-modelo era feita a sua discussão em conferência, pelo professor metodólogo, e por todos os estagiários.

Para frequentar o segundo ano era exigida a aprovação às disciplinas da cultura pedagógica e classificação não inferior a 10 valores nos exercícios do primeiro ano. Durante este ano os estagiários leccionavam, sob orientação do professor metodólogo.

No final do 2º ano do estágio, com classificação não inferior a 10 valores, os estagiários eram submetidos ao *exame de estado*. Esse exame era constituído por provas de cultura e provas pedagógicas e eram feitas no Liceu.

O Liceu D. João III e o seu papel na formação de professores

O Liceu de Coimbra foi criado por decreto de Passos Manuel, publicado no Diário do Governo de 19 de Novembro de 1836. Nesse decreto são criados em simultâneo mais dois liceus: o Liceu de Lisboa e o Liceu do Porto. Este veio substituir o Colégio das Artes, fundado por D. João III em 1548 e que se extingue em 1836, passando os professores e as instalações do Colégio das Artes (Fig. 1) para o Liceu de Coimbra.

Figura 1 – Colégio das Artes

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Real_Colégio_das_Artes_e_Humanidades, Manuel Botelho, 2017)

[2] Decreto n. º 18.973 (1930). *Diário do Governo, 273*(22/11/1930), 2333-7.

No entanto, tal como refere António Rodrigues, "O Liceu de Coimbra, como todas as instituições de ensino, sofreu com as vicissitudes de uma época de contradições, de instabilidade política e social, de rutura ideológica, de desmoronamento progressivo da estrutura do Antigo Regime. Mas, para além da conjuntura, sentiu como nenhuma outra o enfrentar das tendências da universidade, que não queria perder privilégios e o controlo da instrução." (Rodrigues, 2003, p. 225)

A partir de 1870, o Liceu muda de instalações, para o Colégio de S. Bento, adjacente ao Jardim Botânico. No entanto, após a implantação da República, o Liceu toma o nome de Liceu José Falcão (1914) e, dado o grande aumento da população escolar, foi criado, em 1928, o Liceu Dr. Júlio Henriques, funcionando ambos no Colégio de S. Bento (Fig. 2), até 1936.

Figura 2 – Colégio de São Bento

(Fonte: http://www.uc.pt/ruas/inventory/mainbuildings/bento)

Os dois liceus fundem-se em 1936 e originam o Liceu D. João III, para o qual foi construído de raiz o edifício na Avenida Afonso Henriques (Fig. 3), esta designação mantém-se até 25 de Abril de 1974.

Figura 3 – Imagem do Liceu D. João III, atual Escola Secundária José Falcão

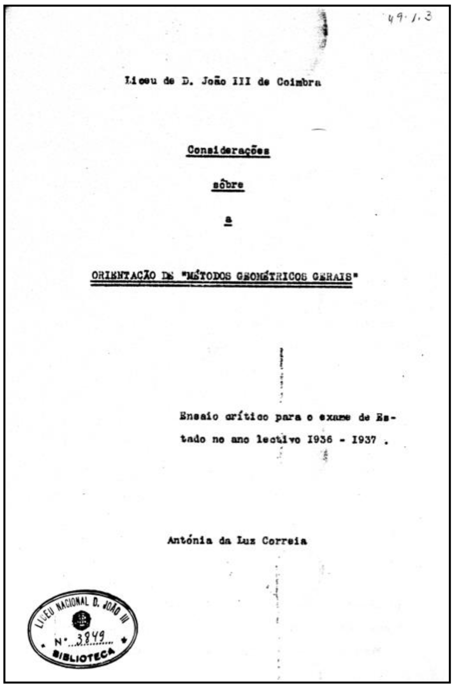
(Fonte: Parque Escolar (2010). Liceus, Escolas Técnicas e Secundárias. 1ª ed. Lisboa: Parque Escolar)

Este liceu possui nos seus arquivos um acervo de milhares de tomos dos séculos XV a XIX, bem como grande parte dos materiais produzidos e utilizados pelos professores metodólogos e respetivos estagiários.

É ainda de salientar que desde a sua entrada em funcionamento até 1947 foi um dos dois liceus de formação de professores em Portugal, sendo o outro o Liceu Pedro Nunes, em Lisboa. Entre 1947 e 1956, era o único liceu no país a fazer formação de professores e de 1956 a 1974, o estágio apenas se podia realizar em três liceus: no de Coimbra, no de Lisboa e no Liceu D. Manuel II, do Porto (Santiago, 2016).

Foram localizados no arquivo da biblioteca da Escola Secundária José Falcão os trabalhos desenvolvidos pelos professores estagiários, de matemática, durante os 2 anos que durava o estágio no liceu. Trabalhos de 67 estagiários, compreendidos entre 1937-1973. Esses trabalhos designam-se Planos de Lição, Relatórios, Palestras Pedagógicas, Ensaio Crítico para o Exame de Estado do Magistério Liceal e Trabalhos Temáticos (Santiago, 2016).

De seguida far-se-á uma análise dos planos de aula, contidos no *Ensaio Crítico*, designados "Planos de Lição", tentando elaborar uma caraterização dos que foram elaborados pelo primeiro grupo de estágio que foi possível localizar, relativo a 1936-1937.



49.1.3

Liceu de D. João III de Coimbra

Considerações

sôbre

a

ORIENTAÇÃO DE "MÉTODOS GEOMÉTRICOS GERAIS"

Ensaio crítico para o exame de Estado no ano lectivo 1936 - 1937 .

Antónia da Luz Correia

Figura 4 – Imagem do Capa do Ensaio Crítico de Antónia Correia

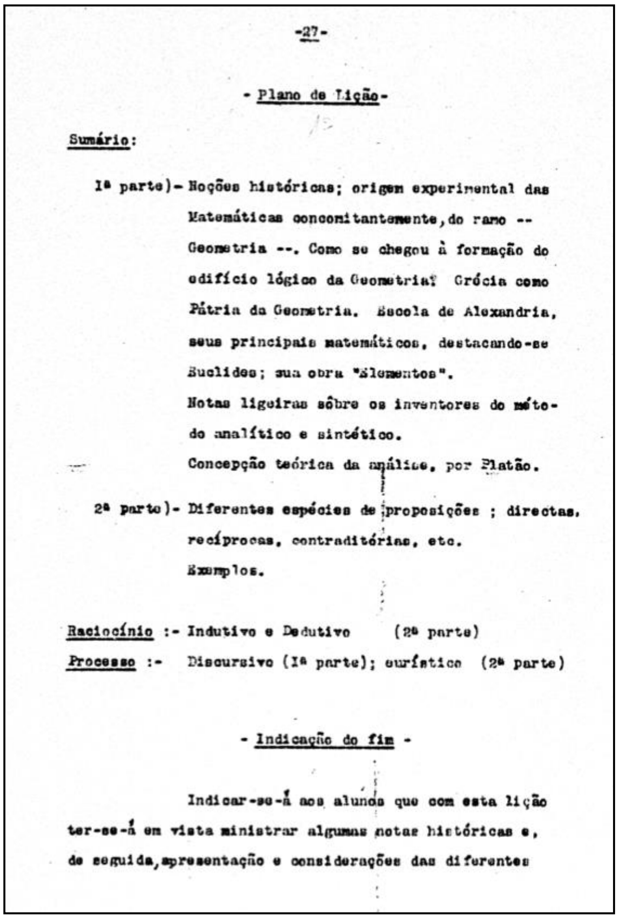
Os Planos de Lição

Um dos documentos de maior importância produzidos pelos estagiários era *o Ensaio Crítico*. Este documento fazia parte do exame de estado, feito no final do Estágio Pedagógico e, no que diz respeito à estrutura, apresentava uma primeira parte teórica acerca do ensino do tema, habitualmente por sugestão do metodólogo ou por ser um assunto que o estagiário considerava merecer ser discutido, com algumas reflexões e, de seguida, inclui os planos das lições relativas ao tema. Na introdução surge, habitualmente, o motivo da escolha do tema do trabalho. A maioria dos trabalhos são datilografados, alguns esboços gráficos são feitos em papel milimétrico e colados ao longo do trabalho e apresentam, no final, as respetivas referências bibliográficas (Santiago, 2017).

Analisam-se agora os planos de lição deste grupo de estagiários contidos nos primeiros ensaios críticos localizados que datam de 1936/1937, ano em que o Liceu D. João III se mudou para as novas instalações. Inicialmente apresenta-se a estrutura dos planos e depois uma apreciação do conteúdo de cada uma das secções do plano.

Relativamente a este grupo de estágio, encontram-se dois Ensaios Críticos: um da autoria de Antónia da Luz Correia e outro de autoria de José Carneiro da Silva. Ambos versavam sobre geometria: o de Antónia da Luz Correia, “Considerações sobre a orientação de Métodos Geométricos Gerais” e o de José Carneiro da Silva, “Considerações sobre o ensino da geometria na primeira classe dos liceus”. Estes dois estagiários foram aprovados no Exame de Estado em junho de 1937.

Ambos construíram os planos para três lições. No que diz respeito à estrutura, o plano de Antónia Correia (fig. 5) começa por indicar o *Sumário* ou o *Assunto da Lição*, de seguida refere o *Método*, o *Raciocínio*, o *Processo a usar* e a *Indicação do fim*. Depois passa para a *Apresentação* ou *Preparação*, novamente a *Apresentação*, se pertinente a *Lei Geral*, *Aplicação* e por fim indica, por vezes, o *Trabalho de Casa* e alguma *Nota*.


-27-

- Plano de Lição -

Sumário:

1ª parte)- Noções históricas; origem experimental das Matemáticas concomitantemente, do ramo -- Geometria --. Como se chegou à formação do edifício lógico da Geometria? Grécia como Pátria da Geometria. Escola de Alexandria, seus principais matemáticos, destacando-se Euclides; sua obra "Elementos". Notas ligeiras sôbre os inventores do método analítico e sintético. Concepção teórica da análise, por Platão.

2ª parte)- Diferentes espécies de proposições ; directas, recíprocas, contraditórias, etc. Exemplos.

Raciocínio :- Indutivo e Dedutivo (2ª parte)

Processo :- Discursivo (1ª parte); eurístico (2ª parte)

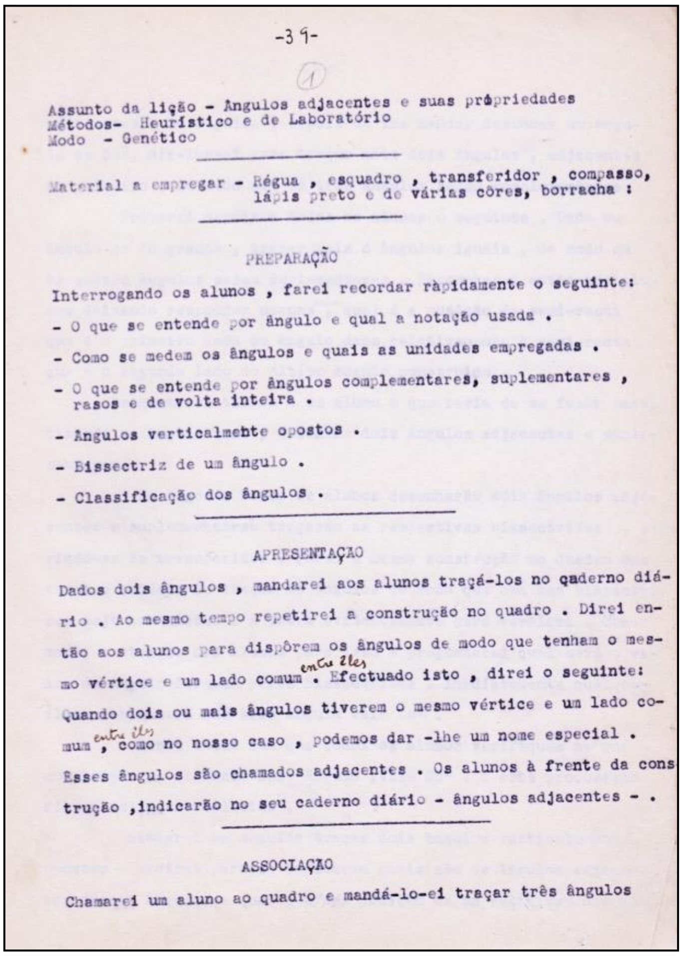
- Indicação do fim -

Indicar-se-á aos alunos que com esta lição ter-se-á em vista ministrar algumas notas históricas e, de seguida, apresentação e considerações das diferentes

Figura 5 – Imagem da primeira página dos planos de lição de Antónia Correia

Os planos de lição de José Carneiro da Silva (fig. 6) são semelhantes aos de Antónia Correia, no entanto é de salientar que os de Antónia Correia nem sempre possuem os mesmos itens, enquanto que os de José Carneiro da Silva contemplam todos os mesmos pontos. Começam indicando o *Assunto*, depois os *Métodos* e *Modo*. Referem também o *Material a empregar*, a *Preparação*, *Apresentação*, *Associação* e terminam com a *Recapitulação* e *Aplicação*.

Assim sendo, os estagiários não tinham um modelo de plano de lição rígido, tendo margem para o adaptar da forma que achavam mais conveniente, em função do que seria mais pertinente para os conteúdos a abordar, inclusivamente dentro conjunto dos 3 planos do mesmo estagiário. No entanto, existem linhas gerais que que faziam parte de ambos, tais como, o assunto, o método, a apresentação, a preparação, a recapitulação ou lei geral, e a aplicação.



-39-

1

Assunto da lição - Angulos adjacentes e suas própriedades
Métodos- Heurístico e de Laboratório
Modo - Genético

Material a empregar - Régua , esquadro , transferidor , compasso, lápis preto e de várias côres, borracha :

PREPARAÇÃO

Interrogando os alunos , farei recordar ràpidamente o seguinte:

- O que se entende por ângulo e qual a notação usada .
- Como se medem os ângulos e quais as unidades empregadas .
- O que se entende por ângulos complementares, suplementares , rasos e de volta inteira .
- Angulos verticalmebte opostos .
- Bissectriz de um ângulo .
- Classificação dos ângulos .

APRESENTAÇAO

Dados dois ângulos , mandarei aos alunos traçá-los no qaderno diário . Ao mesmo tempo repetirei a construção no quadro . Direi então aos alunos para dispôrem os ângulos de modo que tenham o mesmo vértice e um lado comum entre êles . Efectuado isto , direi o seguinte: Quando dois ou mais ângulos tiverem o mesmo vértice e um lado comum entre êles , como no nosso caso , podemos dar -lhe um nome especial . Êsses ângulos são chamados adjacentes . Os alunos à frente da construção ,indicarão no seu caderno diário - ângulos adjacentes - .

ASSOCIAÇAO

Chamarei um aluno ao quadro e mandá-lo-ei traçar três ângulos

Figura 6 – Imagem da primeira página dos planos de lição de José Carneiro da Silva

Fazendo agora uma análise mais aprofundada dos planos de lição, começando pelos de Antónia Correia, o sumário apenas está na primeira lição e tem duas partes:

> “1ª parte) - Noções históricas; origem experimental das Matemáticas concomitantemente, do ramo – Geometria – Como se chegou à formação do edifício lógico da Geometria. Escola de Alexandria, seus principais matemáticos, destacando-se Euclides; sua obra Elemento.
> Notas ligeiras sobre os inventores do método analítico e sintético.

> Concepção teórica da análise, por Platão.
> 2ªparte)-Diferentes espécies de proposições; directas, reciprocas, contraditórias, etc. Exemplos”

Este sumário é bastante extenso, justificado pelo facto de ser a aula de introdução ao tema. Entende-se que a aula terá uma primeira parte, de índole mais histórica, contextualizando o tema, e uma segunda parte de caris mais teórico prático.

O raciocínio que indica que será usado é o Indutivo e Dedutivo (para a 2ª parte) e o processo discursivo (1ª parte) e heurístico (2ª parte).

Segue-se a *Indicação do fim* “Indicar-se-á aos alunos que com esta lição ter-se-á em vista ministrar algumas notas históricas e, de seguida apresentação e considerações das diferentes proposições que podem aparecer em geometria no decorrer das demonstrações”, parte dedicada aos objetivos da aula.

Continua com a *Apresentação*, “Far-se-á aos alunos, logo no início, uma palestra ligeira, obedecendo aos tópicos apresentados no sumário, imprimindo-lhes um cunho sugestivo, de modo a despertar-lhes a curiosidade, interesse, tendo em vista intensificar o amor ao estudo”, onde se explicita como se fará a preparação, neste caso, uma introdução histórica, para o tema a trabalhar depois.

Depois, na *Preparação* (2ª parte), refere que “Levar-se-ão os alunos por um breve interrogatório a apresentar a ideia que possuem de teorema, partes principais, corolários, tendo o professor o cuidado de lhe imprimir o rigor lógico próprio destes assuntos e necessário já a esta classe”.

Surge de novo a *Apresentação*, agora para a 2ª parte, onde a estagiária descreve todo o processo que irá usar para explicar as diferentes espécies de proposições; diretas, reciprocas, contraditórias,

> “Começar-se-á por apresentar as seguintes proposições: (...) Levar-se-ão os alunos a analisar e comparar as partes que constituem cada uma das proposições, verificando que (...). Nesta altura o professor vincar-lhes-á bem que a proposição em tais condições, se denominam reciprocas”.

Procede da mesma forma para as outras proposições e termina com a *Lei Geral*.

No item relativo à *Aplicação*, refere “Com o fim de os alunos aplicarem a teoria exposta serão distribuídas, para casa, as proposições: (...)”

Termina com uma *Nota*: “O professor facilmente, anunciará aos alunos que na próxima lição apresentará os complementos necessários à conclusão do assunto”.

Seguem-se os planos das outras duas lições, seguindo a linha da primeira. A estagiária não refere em nenhum momento do plano a que ano do ensino liceal se destina. No entanto, ao olhar de novo para a parte inicial do Ensaio Crítico, faz sentido salientar alguns aspetos referidos pela autora que mereceram a nossa atenção, uma vez que, de certa forma, justificam o interesse da estagiária pelo tema e os objetivos:

> “O meu trabalho tenderá visar uma orientação a dar-se ao ensino de alguns “Métodos Geométricos Gerais” sob forma sucinta, metódica e racional, de molde a tirar o maior rendimento possível, na parte que isso possa concorrer à formação dos educandos, que na

> aquisição de uma forte ginástica intelectual, quer na vantagem que lhes possa resultar no seguimento de estudos superiores”.

Mais a diante, relativamente à importância das demonstrações, acrescenta que:

> “As suas demonstrações dedutivas, bem orientadas, criam hábitos de raciocínio recto, preciso, fortificando a atenção e reflexão, trazendo como consequências a espíritos desordenados uma submissão a normas metódicas e lógicas, despertando o sentimento de realidade, levando a possuir hábitos de independência, enfim, numa palavra, criar virtudes que em várias circunstâncias terão reflexo na integridade de carácter. “

Termina esta parte referindo que, no que diz respeito aos métodos:

> “Dentro dos métodos geométricos, é o capítulo de transformação de figuras um dos mais importantes não só pelo proveito educativo que dele resulta, como ainda porque a descoberta de determinadas relações entre as figuras geométricas, veio a ser ponto de origem da Geometria Moderna”.

O discurso da professora estagiária vai muito na linha da matemática pura e da preparação dos alunos para os estudos superiores e para a vida futura.

O outro professor estagiário, José Carneiro da Silva, dedica os seus planos de lição aos ângulos adjacentes e suas propriedades e propriedades do paralelogramo, referindo que é para o 1º ano dos liceus.

Cada uma das três aulas começa com o *Assunto da lição*, que corresponde ao sumário. Depois refere o *Método* que vai usar: Heurístico e de laboratório, de seguida o *Modo*: Genético e por fim o *Material a empregar*. Uma vez que são aulas dedicadas à construção e exploração de ângulos refere o uso de régua, esquadro, transferidor, compasso, lápis preto e de várias cores e borracha.

A secção seguinte intitula-se *Preparação* e é dedicada à listagem de um conjunto de questões preliminares à apresentação do tema. As questões colocadas são: O que entende por ângulo e qual a notação usada; Como se medem os ângulos e quais as unidades empregadas; O que se entende por ângulos complementares, suplementares, rasos e de volta inteira.

Depois vem a *Apresentação* onde o estagiário descreve como vai apresentar o conteúdo aos alunos, explicitando o que irá representar no quadro e o que irá solicitar aos alunos para representar no caderno:

> “Dados dois ângulos, mandarei aos alunos traça-los no caderno diário. Ao mesmo tempo repetirei a construção no quadro. Direi então aos alunos para disporem os ângulos de modo que tenham o mesmo vértice e um lado comum entre eles. Efectuado isto, direi o seguinte: Quando dois ou mais ângulos tiverem o mesmo vértice e um lado comum entre eles, como no nosso caso, podemos dar-lhe um nome especial. Esses ângulos são chamados adjacentes. Os alunos à frente da construção, indicarão no seu caderno diário – ângulos adjacentes-.”

Segue-se a *Associação* onde o professor estagiário continua descrevendo como irá proceder para chegar à definição de ângulos complementares, suplementares, entre outros (fig. 7). Ao longo das planificações surgem, por vezes, anotações manuscritas, como por exemplo a que se observa na imagem a seguir, em que aparece, entre parêntesis, a nota “*Intuição e verificação”*.

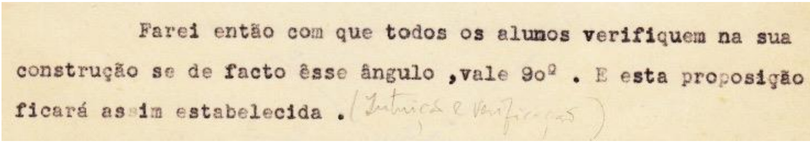

Farei então com que todos os alunos verifiquem na sua construção se de facto êsse ângulo ,vale 90º . E esta proposição ficará assim estabelecida . (Intuição e verificação)

Figura 7 – Imagem de parte do texto da Associação

Os dois itens finais são a *Recapitulação*, onde o professor indica três propriedades que os alunos deverão escrever no caderno diário e a *Aplicação*, onde o professor coloca três exercícios.

As duas aulas posteriores seguem exatamente a mesma estrutura, sendo uma dedicada à relação entre os ângulos formados num sistema de duas retas paralelas cortadas por uma secante e a outra ao estudo de algumas propriedades do paralelogramo.

Considerações finais

Através deste estudo, foi possível dar a conhecer a forma como decorria a formação de professores entre a década de 30 e de 60 do século XX, mais especificamente, a forma como decorria o estágio, a sua duração, os pré-requisitos, exigidos para aceder ao estágio, para passar para o 2º ano e para concluir o estágio.

Conheceu-se também o tipo de trabalhos desenvolvidos pelos estagiários, nesse período, nomeadamente o Ensaio Crítico, que fazia parte do Exame de Estado, exame realizado no final do estágio para aceder à profissão docente. Este trabalho contemplava duas partes: a primeira que continha uma exposição acerca de um determinado tema, escolhido pelo estagiário ou pelo professor metodólogo, indo ao encontro das preocupações da época no que dizia respeito ao ensino da matemática e; a segunda onde o estagiário elaborava planos de lição no âmbito do tema narrado na primeira parte.

A análise feita aos planos de lição do grupo de estagiários de 1936-1937 indica, por um lado, o tipo de estrutura que estes seguiam. Começavam por apresentar o sumário, depois indicavam o método/processo a usar, bem como o tipo de raciocínio e material a usar. De seguida descreviam o processo, a forma como iriam apresentar o tema, e como fariam a preparação para apresentar o tema. Era também vulgar apresentarem depois a lei geral ou uma recapitulação, bem como exercícios de aplicação ou trabalho de casa.

No que diz respeito ao método/processo, referem a utilização do heurístico, de laboratório, discursivo, analítico, expositivo.

Quanto ao modo, surge o genético, no trabalho de José Carneiro da Silva e Antónia Correia refere o raciocínio indutivo e dedutivo.

Os planos de ambos os estagiários são bastante completos, satisfazendo a uma descrição muito detalhada da forma como iria decorrer a aula, percebendo-se a articulação entre as intervenções do docente e do aluno, as questões colocadas, o que seria registado no quadro e no caderno, os recursos usados em cada momento, nomeadamente o material de geometria, o quadro e o caderno.

Em jeito de conclusão poderemos afirmar que a análise destes planos de lição permite perceber a configuração pensada para aula, pelo professor estagiário, bem como os conteúdos abordados e a forma de os abordar.

Fontes

Decreto n. º 18.973 (1930). *Diário do Governo*, *273*(22/11/1930), 2333-7.

Correia, A. L. (1937). *Considerações sobre a orientação de "Métodos Geométricos Gerais"*. Ensaio crítico para o Exame de Estado do magistério secundário no Liceu de D. João III de Coimbra

Silva, J. C. (1936). *Considerações sobre o ensino da geometria na primeira classe dos liceus*. Ensaio crítico para o Exame de Estado do magistério secundário no Liceu de D. João III de Coimbra.

Referências

Certeau, M. d. (1975/1993). La escritura de la historia. México: Universidad Iberoamericana.

Chartier, R. (2007). La historia o la lectura del tempo. Barcelona: Editorial Gedisa, S.A.

Mattoso, J. (1997). A escrita da história - teoria e métodos. Lisboa: Editorial Estampa.

Pardal, L. A. (1992). *Formação de Professores do Ensino Secundário (1901 – 1988).* Aveiro: Universidade de Aveiro.

Pintassilgo, J; Mogarro, M. J.; Henriques, R. P. (2010). *A formação de professores em Portugal.* Lisboa: Edições Colibri.

Rodrigues, A. S. (2003), Liceu José Falcão, em Coimbra, in Nóvoa, A. e Santa-Clara, A.T., *Liceus de Portugal: Histórias, Arquivos, Memórias*. Lisboa: Asa.

Rodriguez, M. V. (2010). Pesquisa histórica. O trabalho com fontes documentais. Em C. J. Costa, J. J. P. Melo e L. H. Fabiano (Org.), *Fontes e Métodos em História da Educação* (pp. 35-48). Dourados, MS: Ed. UFGD.

Santiago, A. (2016). Os Estágios no Liceu D. João III e o Papel do Metodólogo José Augusto Cardoso. In *Anais III Congresso Ibero-Americano História da Educação Matemática.* p. 219 - 228. Belém: SBHMat, 2016.

Santiago, A., (2017). A Formação de Professores de Matemática no Liceu D. João III, em Coimbra (1930-1970). Em J. M. Matos (Ed.). *A formação de professores no ensino não superior, o caso da matemática (1776-1974).* Caparica: UIED.

Valente, W. (2007). História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. In: *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática*. V.2.2, 28-49, UFSC.

A (RE)CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO ESTATÍSTICO: UM ESTUDO COM FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIRO ANOS

Ana Caseiro

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

anac@eselx.ipl.pt

Ricardo Machado

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

rmachado@eselx.ipl.pt

Tiago Tempera

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

tiagot@eselx.ipl.pt

Resumo: Todos os dias lidamos com todo tipo de informação representada de maneiras diferentes. Deste modo, precisamos ser capazes de interpretar e analisar essas informações. Esta investigação tem como objetivos identificar e conhecer os conhecimentos estatísticos que os estudantes da Licenciatura em Educação Básica revelam, bem como compreender de que forma as tarefas matemáticas propostas, a partir das dificuldades detetadas, facilitam a apropriação do conhecimento estatístico e o desenvolvimento de capacidades e competências matemáticas. Assumimos um paradigma interpretativo e desenvolvemos uma investigação-ação. Os participantes foram os estudantes do 2.º ano do curso da Licenciatura em Educação Básica (N=95, 4 turmas) que frequentavam a unidade curricular Análise de Dados e os quatro professores/investigadores que lecionavam cada uma das turmas. Os dados foram recolhidos através da observação participante, registada no diário de bordo de cada professor/investigador e dos trabalhos desenvolvidos pelos estudantes. Os resultados demonstram a importância das tarefas matemáticas no acesso a erros estatísticos para (re)construir conhecimento estatístico com significado para os estudantes, bem como para desenvolver práticas de sala de aula adequadas às características, interesses e necessidades dos mesmos.

Palavras-chave: literacia estatística, formação inicial de professores, conhecimento estatístico.

Introdução

Ser cidadão tornou-se uma tarefa complexa e multifacetada. A literacia matemática, em especial, a literacia estatística, é essencial para atuar como um cidadão crítico e participativo (Callingham & Watson, 2017; Lajoie, Jacobs, & Lavigne, 1993). Segundo Wallman (1993), a literacia estatística é "a capacidade de compreender e avaliar criticamente os resultados estatísticos que permeiam o nosso quotidiano - juntamente com a capacidade de analisar as contribuições que o pensamento estatístico pode fazer em decisões públicas e privadas, profissionais e pessoais" (p. 1). Por outras palavras, a literacia estatística inclui a tomada de decisão, a análise crítica da informação, a seleção dos melhores critérios para o estudo de um fenómeno e a compreensão dos padrões estatísticos para explicar os dados estatísticos. Assim, este argumento reforça a ideia de que a literacia estatística lida com dados em contexto, o que também é afirmado por Watson (2006). Por isso, é importante que os estudantes tenham uma boa preparação estatística, podendo colocar em prática o conhecimento (estatístico) apropriado (Caseiro, Ponte, & Monteiro, 2015; Rodrigues, 2016). Desta forma, é necessário que as práticas de sala de aula promovam espaços/tempos (Perret-Clermont, 2004), nos quais os estudantes se sintam capazes de expressar os seus pontos de vistas, argumentações e estratégias de resolução diversificadas, atribuindo significados ao conhecimento (estatístico), contribuindo para formas de pensamento diversificadas e com elevados graus de complexidade, como é sustentado por Cobb, Stephan, McClain e Gravemeijer (2001) e Machado (2014).

Esta investigação surge pela necessidade de identificar e conhecer os conhecimentos estatísticos que os estudantes que ingressam na Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Lisboa revelam. Este facto assume especial importância, na medida em que a Estatística permite o desenvolvimento de capacidades e competências essenciais numa sociedade cada vez mais tecnológica e, atendendo à especificidade deste curso do ensino superior, por formar futuros professores dos primeiros anos, o que configura uma oportunidade única para a mudança. Desta forma, o problema que originou esta investigação está relacionado com o pouco conhecimento estatístico que os estudantes do curso da Licenciatura em Educação Básica revelam no início do ensino superior. As questões de investigação que emergem desse problema e que abordámos neste artigo são: (1) Quais os conhecimentos estatísticos que os estudantes do curso da Licenciatura em Educação Básica revelam no início na unidade curricular Análise de Dados?; e (2) De que forma as tarefas matemáticas propostas, a partir das dificuldades detetadas, contribuem para a apropriação de conhecimentos (estatísticos) e para o desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas)?

As tarefas matemáticas

De acordo com NCTM (2007), os estudantes devem ser construtores ativos do conhecimento matemático e os professores devem ser facilitadores da aprendizagem dos estudantes, proporcionando experiências de aprendizagem nas quais os estudantes podem envolver-se em tarefas matemáticas conferindo significado ao conhecimento (matemático) e desenvolvendo capacidades e competências (por exemplo, raciocínio matemático, comunicação matemática, sentido crítico, entre outros). Mas, para isso, a natureza das tarefas matemáticas deve ser diferente da tradicional (exercícios), assim como as propostas de trabalho e a forma como estas mesmas tarefas são exploradas na aula (Smith, Bill, & Hughes, 2008; Stein, Grover, & Henningsen, 1996; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Stein e os seus colaboradores (1996) categorizaram a natureza das tarefas de acordo com o nível de exigência cognitiva: baixo e elevado nível. Uma tarefa com baixo nível de exigência cognitiva está associada à memorização e/ou aplicação de procedimentos sem atribuição de significado. Assim, este tipo de tarefas está relacionado com o que Skemp (1978) denominou por tarefas que promovem o conhecimento instrumental, uma vez que os estudantes só conseguem aplicar regras, fórmulas ou algoritmos e não conseguem mobilizar esse conhecimento quando estão noutros contextos ou situações. Uma tarefa com alto nível de exigência cognitiva é caracterizada pela criação de oportunidades para os estudantes estabelecerem conexões entre conceitos (matemáticos) e as suas diferentes representações, por permitir diferentes abordagens para a mesma tarefa, de acordo com o conhecimento (matemático) anterior apropriado por cada aluno, e criando oportunidades para a comunicação matemática (Boston & Wolf, 2006; Stein et al., 1996). Assim, segundo Skemp (1978), corresponde às tarefas que promovem o conhecimento relacional. Desta forma, cabe ao professor selecionar, adaptar e/ou elaborar tarefas de natureza diferente com base nas características, interesses e necessidades dos estudantes (Machado, 2014). No entanto, para promover aprendizagens significativas para os estudantes, não chega que as tarefas propostas sejam de elevado nível de exigência cognitiva. É de extrema importância que esse nível de exigência cognitiva se mantenha no decurso da atividade matemática (Stein et al., 1996). Assim, é preciso construir espaços/tempos dialógicos (César, 2014) favoráveis ao desenvolvimento dessa atividade, por forma a atingir uma aprendizagem de elevada qualidade a Matemática (Cobb & Jackson, 2011).

O erro e a forma como este é encarado pelos estudantes e professores assumem também um elemento importante no processo de ensino e de aprendizagem. Como afirmam Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), "quando pensamos em termos de aprendizagem, cometer erros ou dizer coisas imperfeitas ou incompletas não é um mal a evitar, é algo inerente ao processo de aprendizagem" (p. 27). A forma como os estudantes encaram o erro depende de como os professores atuam em relação a ele. Assim, é imprescindível tornar o erro um aspeto positivo, pois, como argumenta Cury (2007), "através de situações didáticas motivacionais, é possível usar o erro como trampolim para a aprendizagem" (p. 37). Cabe ao professor estar atento aos erros dos estudantes, para consciencializá-los, atendendo às suas características e necessidades, e promovendo uma educação matemática com qualidade. Deste modo, é importante criar oportunidades nas quais os estudantes se envolvam em tarefas matemáticas que lançam dúvidas sobre o que eles deram como certo. Desta forma, a rutura entre o certo e o errado pode moldar o interesse e a predisposição dos estudantes em aprender matemática.

Dimensões do trabalho estatístico

Graham (1987) e Franklin, et al. (2007) afirmam que uma investigação estatística é caracterizada por quatro etapas: (1) colocar uma questão; (2) recolher de dados; (3) analisar dados; e (4) interpretar os resultados. Kader e Perry (1994) sugerem um passo adicional que está relacionado com a disseminação dos resultados. Wild e Pfannkuch (1999) vão além e sugerem quatro dimensões nas quais o pensamento estatístico é dividido: o ciclo investigativo, os tipos de pensamento, o ciclo interrogativo e as disposições. Na Figura 1 é apresentado o ciclo investigativo elaborado por Wild e Pfannkuch (1999):

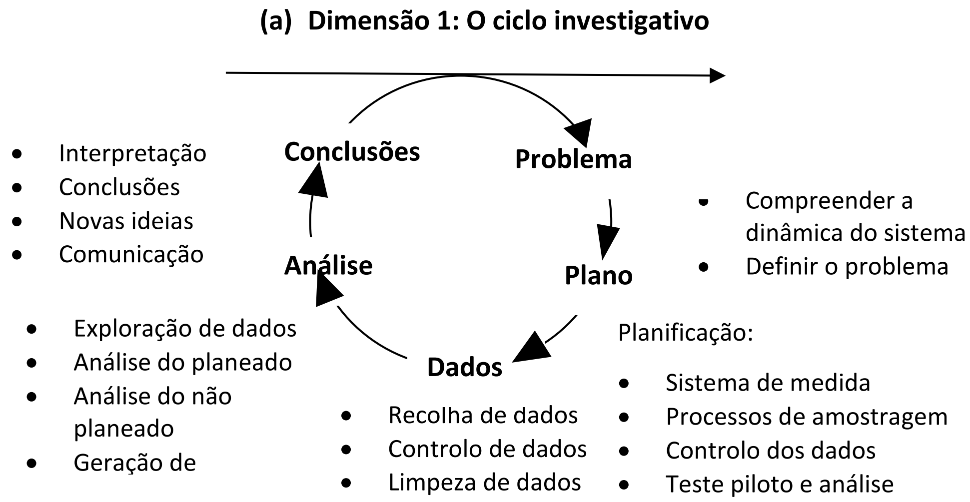


Figura 1 – O ciclo investigativo estatístico (Wild & Pfannkuch, 1999)

De acordo com Shaugnessy (2007), todas as estapas do ciclo investigativo são essenciais no trabalho estatístico e reforçam as quatro fases de resolução de problemas matemáticos apresentados por Pólya (1945/1973): compreender, planear, executar e rever. Este autor também afirma que os professores dão pouco tempo ao problema e às etapas do planeamento. A maioria dos estudantes é ensinada apenas por tópicos "pré-estatísticos", nos quais a difícil decisão acerca da formulação do problema, conceção e produção de dados já se encontram feita para eles. Esta situação torna o ciclo investigativo mais pobre (Shaugnessy, 2007). Portanto, torna-se mais difícil para os estudantes conferirem sentido à investigação estatística e reconhecerem o papel da estatística nas situações da vida diária.

O (des)conhecimento em Estatística dos futuros professores

A realização de investigações estatísticas dá a oportunidade aos estudantes de refletir sobre a informação que os rodeia, desenvolvendo a literacia estatística e apropriando conhecimento estatístico e conhecimento sobre as fases do processo (Martins & Ponte, 2010). A representação da informação recolhida através de gráficos permite a visão global do fenómeno estudado (Gal, 2002), sendo essencial trabalhar com diversos tipos de representação desde cedo (Santos, 2015). As orientações do NCTM (2007) apontam para o desenvolvimento da capacidade dos alunos de criar e analisar as suas representações de dados, pelo que os futuros professores deverão dominar essa competência, de modo a trabalhá-la com os seus alunos.

Vários estudos apontam para a dificuldade dos futuros professores em realizar investigações estatísticas. Stohl (2005) refere mesmo que os futuros professores dos primeiros anos cometem erros elementares em conceitos estatísticos, semelhantes aos dos próprios alunos desses níveis de ensino. Ao nível do trabalho estatístico, Heaton e Mickelson (2002) revelam a dificuldade dos futuros professores em concretizar o processo de recolha de dados, não reconhecendo a necessidade de criar uma unidade de medida padrão para uniformizar os dados.

Na representação de dados e interpretação de gráficos, Espinel, Bruno e Plasencia (2008) concluem que os futuros professores envolvidos no seu estudo demonstram dificuldades na interpretação de gráficos e na seleção de gráficos adequados para a representação da informação. A um nível mais específico, demonstram dificuldade em diferenciar variáveis quantitativas de qualitativas, o que se traduz na dificuldade de distinção entre um gráfico de barras e um histograma. González e Pinto (2008) reforçam esta questão da representação gráfica ao afirmar que os futuros professores desconheciam por completo os diagramas de caule-e-folhas, aquando do seu estudo. Já Arteaga (2008, citado em Santos, 2015) expõe a dificuldade da construção de representações gráficas corretas, no sentido em que são omitidos elementos, tais como a legenda, a identificação dos eixos e das variáveis.

Na dimensão das medidas de tendência central, Burrill (2008) refere que os futuros professores demonstram dificuldades em adequar as representações gráficas às diferentes medidas existentes, optando por uma representação incorreta, quase sempre através de gráficos de barras.

Também Santos (2015) refere que as futuras professoras envolvidas no seu estudo descuram a importância do planeamento numa investigação científica, e demonstram dificuldades na elaboração de questões para recolha de dados, na escolha de representações e medidas estatísticas apropriadas para diferentes variáveis em estudo e na generalização ou elaboração de conclusões após a construção de um gráfico. Conclui, assim, que estas futuras professoras revelam uma noção limitada de investigação estatística e não atribuem importância significativa a todas as fases do processo, por falta de compreensão das mesmas.

Metodologia

Este estudo faz parte de um projeto mais amplo designado por "O conhecimento estatístico dos/as estudantes do ensino básico, secundário e da Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Lisboa", cujos principais objetivos são: (1) aceder ao conhecimento estatístico dos estudantes ao longo da sua formação e aqueles que integram, pela primeira vez, a Licenciatura em Educação Básica; e (2) analisar o percurso realizado pelos futuros professores, em termos do desenvolvimento do conhecimento estatístico, durante a realização do referido grau académico.

Os estudantes quando ingressam na Licenciatura em Educação Básica, na Escola Superior de Educação de Lisboa, a Análise de Dados é a primeira e única unidade curricular que estes têm do domínio da Estatística e surge no 1.º semestre do 2.º ano do referido ciclo de estudos. Assim, quando os estudantes frequentam essa unidade curricular revelam, principalmente no início da mesma, dificuldades em trabalhar com determinados conhecimentos estatísticos. Desta forma, o problema que originou esta investigação está relacionado com o pouco conhecimento estatístico que os estudantes do curso da Licenciatura em Educação Básica revelam no início do ensino superior. As questões de investigação que emergem desse problema e que abordámos neste artigo são: (1) Quais os conhecimentos estatísticos que os estudantes do curso da Licenciatura em Educação Básica revelam no início na unidade curricular Análise de Dados?; e (2) De que forma as tarefas matemáticas propostas, a partir das dificuldades detetadas, contribuem para a apropriação de conhecimentos (estatísticos) e para o desenvolvimento de capacidades e competências matemáticas? Nesta investigação assumimos um paradigma interpretativo (Denzin, 2002) e desenvolvemos uma investigação-ação (Mason, 2002), na medida em que procurámos identificar e compreender as dificuldades dos estudantes quanto ao conhecimento estatístico, estabelecendo um processo de intervenção para a melhoria das suas aprendizagens. Assim, esta investigação implicou planear, atuar, observar e refletir para se poder compreender, melhorar e inovar, o que se coaduna com este tipo de *design* de investigação.

Os participantes deste estudo foram todos os estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica (N= 95, ano letivo 2017/2018), que frequentavam a unidade curricular Análise de Dados, num total de quatro turmas. As idades variam entre 18 e 37 anos. Atendendo a que desenvolvemos uma investigação-ação, consideramos também como participantes os quatro professores/investigadores que lecionaram as aulas e que eram responsáveis por uma turma cada um.

Os dados foram recolhidos através de observação participante, realizada por cada professor/investigador e registada no seu respetivo diário de bordo e pelos trabalhos elaborados pelos estudantes (desempenhos escritos das várias tarefas matemáticas propostas), produzidos ao longo da unidade curricular.

Durante as aulas desta unidade curricular, os estudantes trabalharam em grupo, por forma a promover o trabalho colaborativo e a partilha de argumentações, configurando oportunidades para a (re)construção do conhecimento estatístico e o desenvolvimento de capacidades e competências, tais como, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, o sentido crítico, entre outras. Após esse momento de trabalho em grupo, era realizada uma discussão geral, na qual os estudantes mostravam e explicavam as estratégias de resolução adotadas e, posteriormente, era realizada, por parte do professor, uma síntese dos conhecimentos trabalhados nessa aula. Os dados foram tratados e analisados através de uma análise narrativa de conteúdo (Clandinin & Connelly, 1998), realizada de forma sucessiva e aprofundada.

Resultados

A situação de partida

A tarefa apresentada aos estudantes (Figura 2) pretendia, juntamente com outros instrumentos aplicados, fazer uma avaliação diagnóstica do conhecimento estatístico com o qual os estudantes da Licenciatura em Educação Básica integram o ensino superior. A fim de permitir que os estudantes revelassem o máximo de seus conhecimentos, as variáveis escolhidas para a proposta foram pensadas para contemplar os diferentes tipos de variáveis estatísticas.

1. Recolha de cinco colegas que não tenham ficado no seu grupo de trabalho os seguintes dados:

Género	Idade (em anos)	Data de nascimento	Altura
Cor dos olhos	Número do sapato	Palmo da mão (em cm)	Nome de uma figura de destaque público (artista/político/escritor/…)
Número de copos de água que bebe por dia	Local de nascimento (aldeia/cidade e país)	Se faz reciclagem Papel/vidro/plástico	Transporte utilizado na vinda para a ESELX
Tempo aproximado nos transportes	Programa /série televisiva que habitualmente vê	Tempo médio diário que dedica a ver TV	Nome de um dos apresentadores preferidos de telejornal
Ter carta de condução	Tempo médio diário que dedica a ler jornais /revistas	Tempo médio que leva a arranjar-se ao levantar	Numa escala de 1 a 5 (1 mau ambiente) dê a sua opinião relativamente ao ambiente entre os estudantes

2. Agora que tem os seus dados, junte-os aos do seu grupo e organize-os de modo a transmitir à turma uma ideia próxima dos resultados obtidos.

Figura 2 – A tarefa inicial de matemática

O desempenho dos estudantes

Ao longo da nossa observação ao trabalho dos grupos, foi possível notar a inexistência de qualquer tipo de planeamento ou organização do trabalho. Assim que receberam a tarefa, praticamente todos os membros dos grupos se levantaram e começaram a recolher dados com os seus colegas, demonstrando que não atribuíam importância a esta fase da investigação estatística, conforme apontado por Shaugnessy (2007). No entanto, esta situação é comum se os estudantes não foram confrontados com este tipo de experiência durante o seu percurso escolar. O erro cometido foi apercebido por alguns estudantes ao organizar os dados e depois, por outros, durante a discussão em grande grupo. Um exemplo da falta de planeamento dos grupos diz respeito à forma como recolheram dados sobre o tamanho do palmo da mão dos seus colegas. Ficou evidente que diferentes elementos do mesmo grupo estavam a recolher esses dados de maneiras diferentes: enquanto uns mediam o palmo dos colegas quando estes se encontravam com a mão o mais esticado possível, outros não tiverem esse aspeto em consideração e outros, ainda, mediram a palma da mão em vez do palmo, como era pedido. Outro aspeto em que a falta de planeamento foi evidente relaciona-se com o facto de elementos do mesmo grupo terem recolhido dados com os mesmos colegas, evidenciando dificuldades na apropriação dos conhecimentos associados ao estudo estatístico. Esta situação evidencia que os estudantes nunca experienciaram tarefas matemáticas que apelassem à investigação estatística, uma vez que esse trabalho foi previamente pensado e definido para eles, o que faz com que apenas aprendam "pré-estatísticas", o que se coaduna com Shaugnessy (2007).

Por outro lado, a forma como os estudantes decidiram representar os dados recolhidos também revelou algumas dificuldades na construção de representações estatísticas, assim como a não atribuição de significado ao valor de medidas estatísticas por eles determinadas.

No que se refere a variáveis quantitativas contínuas, um erro comum diz respeito à utilização de um gráfico de barras em detrimento da utilização de um histograma. Tal como se pode observar no exemplo da Figura 3, os estudantes decidiram construir um gráfico de barras para representar os dados das alturas dos colegas. Para além dessa situação, também a questão da representação dos intervalos, em que os estudantes decidiram representar os dados, demonstra uma dificuldade por parte dos mesmos, já que, como é visível no exemplo apresentado (Ver Figura 3), os estudantes colocam o mesmo valor dos dados em dois intervalos distintos, não sendo possível perceber em qual realmente foi contabilizado.

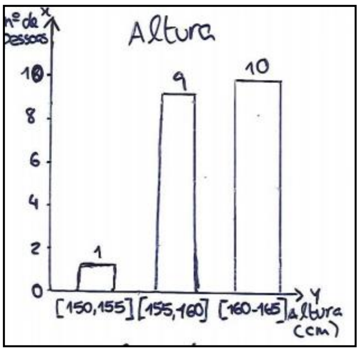


Figura 3 – Desempenho do Grupo A1

Porém, o contrário também acontece, ou seja, os estudantes constroem histogramas com dados de variáveis qualitativas nominais como é o caso do local de nascimento (ver Figura 4).

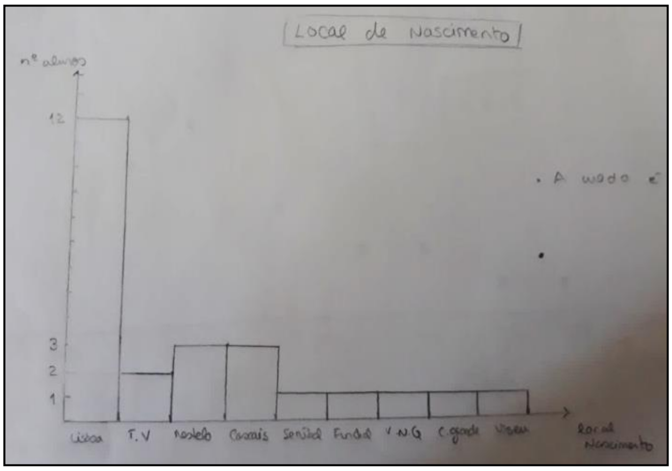


Figura 4 – Desempenho do Grupo C1

Este erro (construção de histogramas e gráficos de barras de forma indiferenciada, independente do tipo de variável) foi demonstrado por vários estudantes, o que parece estar relacionado com o facto de eles assumirem que qualquer representação gráfica com barras se trata de um gráfico de barras.

Outra situação detetada, diz respeito à construção de pictogramas com dados de variáveis quantitativas discretas. Tal como se pode observar no exemplo da Figura 5, os estudantes revelam dificuldade em perceber que valores devem aparecer no eixo do pictograma e que valores devem aparecer representados através do símbolo escolhido. Assim, no exemplo apresentado, o grupo decidiu colocar no eixo as frequências com que os dados apareceram e representar com o símbolo as opções referidas relativas ao número de copos de água bebidos diariamente pelos colegas. Em suma, os estudantes mostraram algumas dificuldades na escolha da representação gráfica adequada, o que está de acordo com o que é referido por Batanero, Godino, Vallecillos, Green e Holmes (1994).

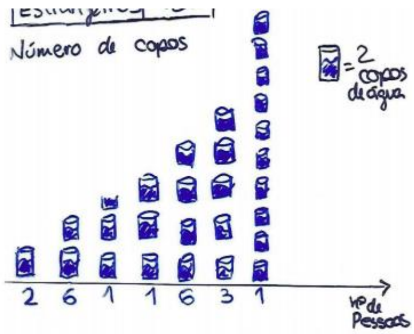


Figura 5 – Desempenho do Grupo A2

Por outro lado, através do exemplo apresentado na Figura 6 torna-se possível observar a não atribuição, pelos estudantes, de significado ao valor de medidas estatísticas. No exemplo apresentado, o grupo decidiu, após construção de um gráfico circular, determinar a Moda, a Média e o Desvio Padrão dos dados da variável cor dos olhos. Tratando-se de uma variável qualitativa nominal, seria de esperar que os estudantes, mesmo que realizassem os cálculos inerentes à determinação destas duas últimas medidas estatísticas, constatassem que os valores obtidos não fariam qualquer sentido para a variável em estudo. Desta forma, os estudantes revelaram conhecimento da fórmula de cálculo da Média e do Desvio Padrão de variáveis estatísticas, mas revelam não atribuir significado aos valores obtidos, ou seja, apenas conseguem mobilizar o conhecimento instrumental e não relacional (Skemp, 1978), como seria desejado.

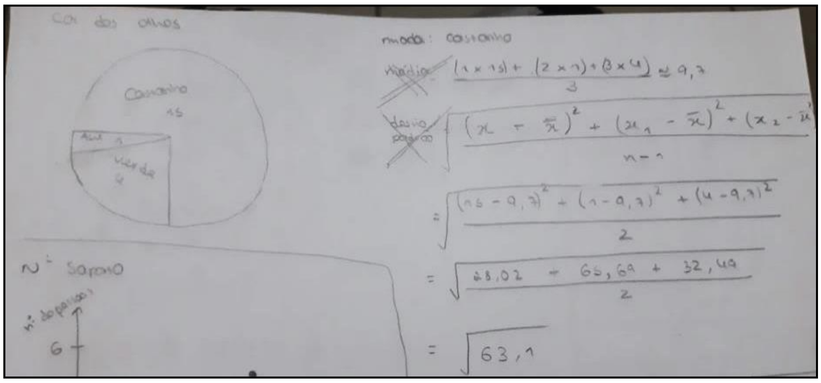


Figura 6 – Desempenho do Grupo B2

Exemplos de tarefas utilizadas

Após uma análise aprofundada de todos os dados recolhidos, algumas das tarefas pensadas para a Unidade Curricular de Análise de Dados tiveram como base os erros e as dificuldades detetadas. Por exemplo, devido a demonstrarem não adequar o tipo de representação ao tipo de variável em estudo, em todas as tarefas foi pedido aos estudantes que começassem por referir a variável e o tipo de variável em estudo. Por outro lado, sempre que era abordada uma nova representação ou medida estatística, era feita uma reflexão sobre a sua pertinência para cada um dos tipos de variáveis estatísticas. Assim, na Figura 7, é apresentado um exemplo de tarefa que envolveu a compreensão da adequação/inadequação de diferentes tipos de representações gráficas aos dados de uma variável quantitativa discreta:

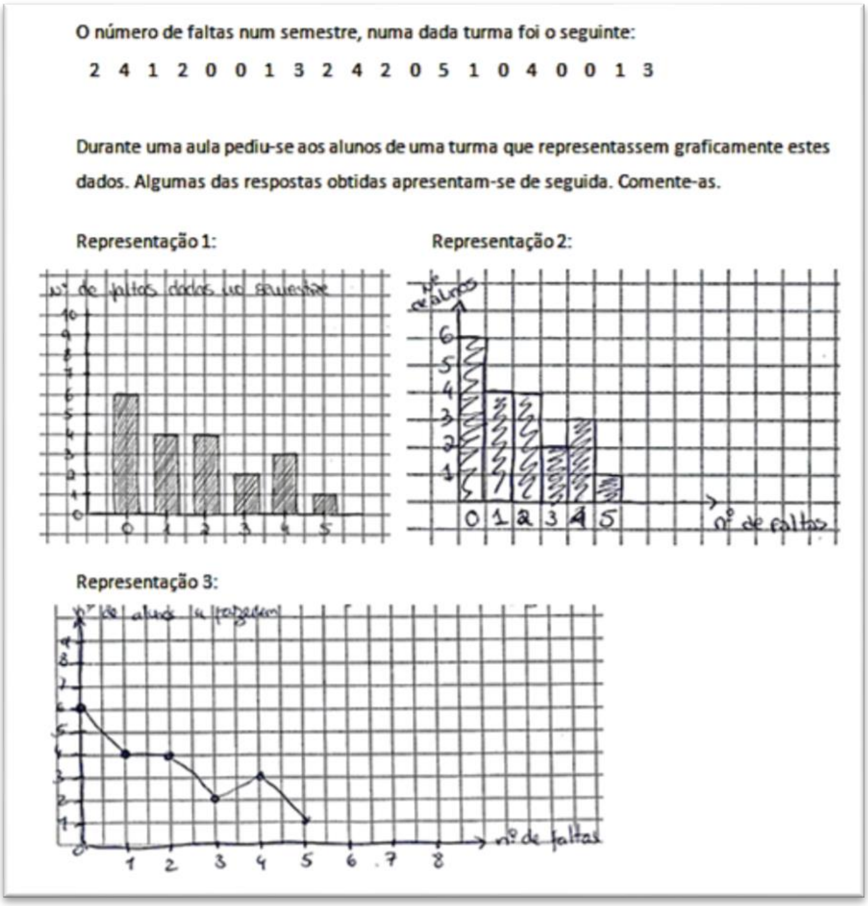


Figura 7 – Exemplo 1 de uma tarefa utilizada no decorrer das aulas

Por outro lado, e tal como referido anteriormente, sempre que era abordada uma nova representação ou medida estatística em sala de aula, era feita uma reflexão sobre a sua pertinência para cada um dos tipos de variáveis. Assim, na Figura 8, é apresentada, como exemplo, uma das tarefas utilizadas na primeira aula em que foram abordadas as medidas de tendência central:

Num estudo de mercado sobre a audiência de jornais diários foram inquiridos 680 leitores no sentido de apurar se os vários jornais detêm idênticas quotas de mercado. Obtiveram-se os seguintes resultados:

Jornal diário	***Nº de leitores na amostra***
Público	190
Correio da Manhã	140
Diário Popular	70
Diário de Lisboa	90
Diário de Notícias	130
A Capital	60

1.1. Qual a variável em estudo?

1.2. Qual a medida de tendência central que lhe parece mais adequada utilizar para representar os dados? Justifique.

Figura 8 – Exemplo 2 de uma tarefa utilizada no decorrer das aulas

Através do acompanhamento ao trabalho dos estudantes, tornou-se possível constatar que estes determinaram a média, moda e mediana dos dados apresentados, revelando, novamente, não atribuir significado aos valores obtidos. No caso da média, os estudantes adicionaram os valores das frequências absolutas, dividindo o valor obtido por 6 (que para eles representava o número total de dados). Por outro lado, para a determinação da mediana, os estudantes verificaram qual o jornal que estaria na posição 340 tendo como referência a ordem pela qual os dados foram apresentados.

Por fim, e de modo a que tivessem a possibilidade de passar por todas as fases do ciclo investigativo (Wild & Pfannkuch, 1999), que anteriormente demonstraram não valorizar, e de forma a que pudessem mostrar como os seus conhecimentos estatísticos foram evoluindo, foi pedido aos estudantes que desenvolvessem um projeto de investigação cujo tema deveria ser algo do seu interesse. É de realçar o envolvimento dos estudantes no decorrer deste trabalho que teve a duração de todo o semestre em que a UC decorreu. Após uma grande dificuldade em decidirem um tema e em formularem questões de investigação, os estudantes construíram questionários adequados ao seu tema e ao público com quem iriam recolher os dados. Por outro lado, no tratamento dos dados recolhidos, os estudantes puderam revelar os seus conhecimentos na forma de construção e análise de representações gráficas e de medidas estatísticas, selecionando as mais adequadas perante cada tipo de variável estatística e retirando conclusões importantes sobre os seus temas.

Resultados obtidos após as tarefas realizadas em aula

Neste ponto iremos apresentar uma análise da evolução do conhecimento dos estudantes após a intervenção realizada em sala de aula. As evidências aqui apresentadas são resultantes dos trabalhos de projeto desenvolvidos pelos estudantes ao longo de todo o semestre e que, como tal, revelam a influência de todo o trabalho desenvolvido ao longo das aulas.

Tendo como ponto de partida a desvalorização evidenciada pelos estudantes relativamente à realização de planos de trabalho, através do exemplo da Figura 9 torna-se possível constatar que os estudantes começaram a evidenciar preocupações de organização e planificação antes de recolherem dados para realizar investigações estatísticas:

> Para a realização deste projeto, e visto que existia a possibilidade de trabalhar com uma amostra entre 30 a 60 elementos, o grupo optou por uma população com 47 elementos, sendo que a recolha dos dados estatísticos foi feita a alunos que frequentam a Escola Superior de Educação de Lisboa. Posto isto, selecionámos uma turma do curso de Educação Básica e a turma de Mediação Artística e Cultural. Neste caso, a primeira turma foi escolhida de forma aleatória simples sendo que aquela que saiu no sorteio foi o 2º E.
>
> Os motivos para a seleção destas duas turmas relacionam-se com o facto de Educação Básica ser o curso que o grupo frequenta, existindo assim uma proximidade com o mesmo e, por Mediação Artística e Cultural ser um curso relativamente recente na escola procurando assim integra-lo um pouco mais no meio escolar.

Figura 9 – Forma de seleção da amostra definida por um dos grupos de trabalho

Apesar de evidenciarem algumas preocupações de carácter organizativo, o grupo não referiu como iria aplicar o questionário aos estudantes das duas turmas selecionadas. Apesar do trabalho desenvolvido ao longo da UC, este aspeto foi uma constante nos projetos de vários grupos, o que se encontra de acordo com o referido por Shaugnessy (2007) e que se coaduna com o facto de os estudantes nunca terem passado pela experiência de realizar planos de trabalho.

Relativamente à construção de pictogramas com dados de variáveis quantitativas discretas, também foi possível constatar uma evolução nos trabalhos realizados pelos estudantes, já que todos os pictogramas foram construídos de forma correta, não sendo evidenciada a dificuldade analisada inicialmente em distinguir quais os valores dos dados da variável e quais as frequências absolutas de cada um desses valores (ver Figura 10):

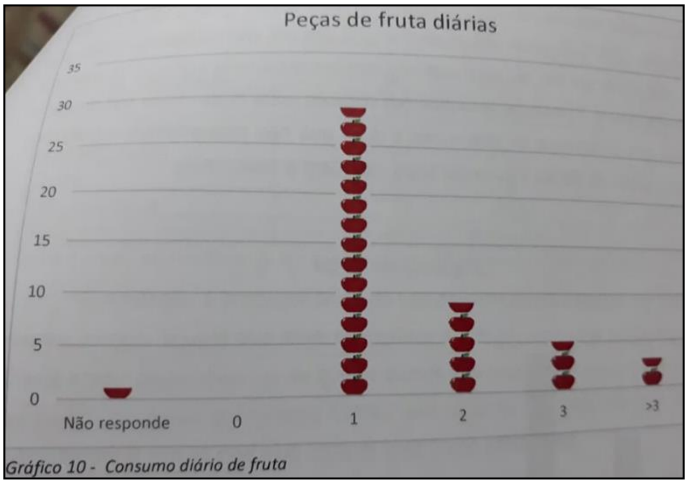


Figura 10 – Pictograma elaborado por um dos grupos de trabalho

Por outro lado, outro dos aspetos trabalhados ao longo do semestre prendeu-se com a reflexão sobre a adequação de diferentes representações estatísticas a cada tipo de variável em estudo. Inicialmente, estes estudantes revelaram dificuldades na distinção da utilização de gráficos de barras e histogramas, aspeto que, para a maioria dos estudantes, parece ter sido ultrapassado, tal como se pode observar nos exemplos da Figura 11:

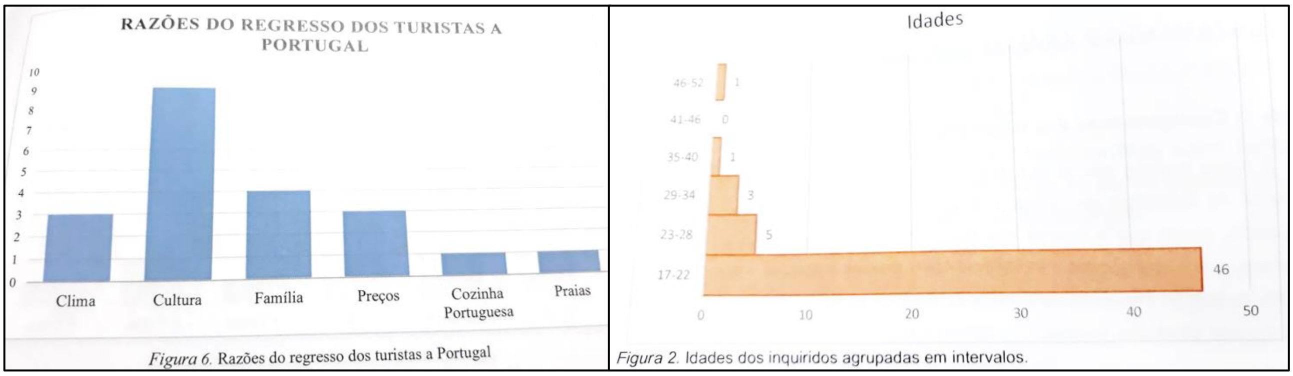


Figura 11 – Gráfico de barras e histograma elaborados por dois dos grupos de trabalho

Porém, a distinção entre a utilização destes dois tipos de representação gráfica, não ficou completamente esclarecida para todos os estudantes, na medida em que alguns continuaram a cometer os mesmos erros, utilizando os dois tipos de representação de forma indiferenciada (ver Figura 12), o que se coaduna com o sustentado por Espinel e seus colaboradores (2008).

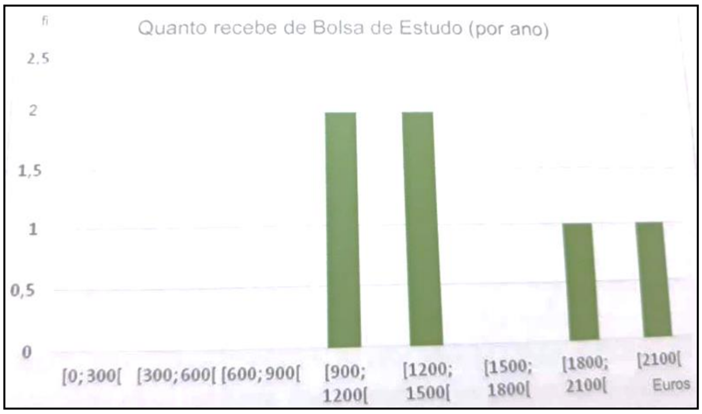


Figura 12 – Gráfico de barras elaborado por um dos grupos de trabalho

Esta dificuldade revelada pelos estudantes também se pode associar à dificuldade que os mesmos revelam na classificação de variáveis. Na Figura 13 é possível observar a classificação realizada por um grupo da variável "razões do regresso dos turistas a Portugal" (ilustrada no gráfico de barras da Figura 11):

Através da observação do gráfico de barras (variáveis qualificativas ordinais), pode-se verificar que a principal razão do regresso dos turistas a Portugal é a Cultura, pois do total dos 21 inquiridos (que responderam que não é a sua primeira vez em Portugal), 9 assinalaram essa opção (42,86%). Por outro lado, as razões que atraem menos os turistas novamente para Portugal são: Cozinha Portuguesa e Praias (em 21 inquiridos, 1 pessoa assinalou cada uma destas opções, ou seja, cerca de 4,76% cada). As escolhas intermédias dos turistas foram: Família (19,04%), Clima (14,29%) e Preços (14,29%).

- Medidas de Tendência central:

- Moda = Cultura
- Mediana = Cultura

Figura 13 – Análise de dados elaborada por um dos grupos de trabalho

Segundo a classificação realizada pelos estudantes, a variável em estudo trata-se de uma das "variáveis qualificativas ordinais". Para além de usarem uma nomenclatura que nunca foi referida em aula, estes estudantes revelam não perceber do que se trata uma variável ordinal, aspeto que pode influenciar a escolha das representações adequadas. Esse aspeto também foi visível, por exemplo no trabalho do mesmo grupo, quando determinaram a mediana dos dados da variável em estudo. Deste modo, é possível constatar que, mesmo após todo o trabalho realizado com os estudantes, estes continuaram a revelar não compreender o conceito de mediana já que a determinaram para uma variável qualitativa nominal, revelando não perceber qual o seu sentido.

A falta de sentido atribuído aos valores determinados para as medidas estatísticas foi uma constante no trabalho dos grupos (ver Figura 14), na medida em que estes revelaram conhecimento procedimental na determinação de medidas estatísticas sem revelarem conhecimento conceptual das mesmas, uma vez que não analisaram os valores obtidos, restringindo-se à sua determinação.

> Através do diagrama referente à variável quantitativa discreta "Idade", conclui-se que, relativamente ao 1º ano, a idade mínima é de 17 anos e a máxima de 22. A média destas idades é de 18.65 anos, sendo a moda e a mediana 18 anos. No que diz respeito às medidas de dispersão, o valor do desvio-padrão é de 1.23, a variância é de 1.5, o coeficiente de variação é de 6.6% e, por fim, a amplitude interquartis é de 1 (Valor do Q1 =18 e valor do Q3 = 19). Quanto ao 3º ano, a idade mínima é de 19 anos e a máxima de 23. A média destas idades é de 20.55, sendo a moda e a mediana 20. Em relação às medidas de dispersão, o valor do desvio-padrão é de 0.94, a variância é de 0.89, o coeficiente de variação é de 4.6% e, por último, a amplitude interquartis é de 1 (Valor do Q1 = 20 e valor do Q3 = 21).

Figura 14 – Determinação de medidas estatísticas realizada por um dos grupos de trabalho

Considerações finais

A análise dos dados mostra que os estudantes que ingressaram no ensino superior, neste caso específico num curso para professores dos primeiros anos, revelam falta de conhecimento e demonstram dificuldades em termos de procedimentos, representações e atribuição de significados a medidas estatísticas.

Relativamente aos procedimentos estatísticos, evidencia-se a falta de conhecimento dos estudantes quando estes não atribuíram importância à realização de um plano de trabalho antes de recolher os dados. Este aspeto parece estar de acordo com o que é mencionado por Shaugnessy (2007) quando refere que em estatística é dedicado pouco tempo à definição do problema de investigação e ao plano de trabalho, sendo que à maioria dos estudantes apenas são ensinadas "pré-estatísticas" em que as decisões difíceis foram previamente feitas para eles, o que torna o trabalho investigativo bastante empobrecido. Por outro lado, a dificuldade dos estudantes na seleção da representação estatística mais adequada relativamente a um tipo particular de variável também pode estar associada a esse aspeto. Mas, ao mesmo tempo, a maioria das tarefas pede aos estudantes que construam uma representação específica, o que não lhes permite pensar qual seria a mais apropriada e vantajosa para usar em cada situação. Também relativamente às dificuldades apresentadas na construção de pictogramas com dados de variáveis quantitativas discretas, é possível perceber que o facto de a maior parte das tarefas já disponibilizarem parte das representações construídas, como, por exemplo, os eixos assinalados, faz com que os estudantes não passem pela experiência de construir uma representação de raiz. Por fim, o facto de os estudantes calcularem medidas estatísticas sem analisarem a sua pertinência perante o tipo de variável em estudo, parece estar associado a um ensino mecanizado de fórmulas, as quais os estudantes sabem referir sem qualquer hesitação, mas às quais não sabem atribuir qualquer significado.

Nota

Este artigo é parte do projeto *O conhecimento estatístico dos/as estudantes do ensino básico, secundário e da Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Lisboa* financiado pelo CIED (ESELX/IPL-CIED/2018/A27).

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999*). A matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério de Educação/Departamento da Educação Básica (ME/DEB).

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts.*International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnhology*, *25*(4), 527-547.

Boston, M., & Wolf, M. K. (2006). *Assessing academic rigor in mathematics instruction: The development of the instructional quality assessment toolkit.CSE Technical Report 672* (No. 672). Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).

Burrill, G. (2008). Fundamental ideias in teaching statistics and how they affect the training of teachers. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Callingham, R., & Watson, J. (2017).The development of statistical literacy in school. *Statistical Education Research Journal*, *16*(1), 181-201.

Caseiro, A., Ponte, J. P., & Monteiro, C. (2015). Elementary teacher practice in project work involving statistics.In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2995-3001). Prague: Charles University, Faculty of Education & ERME.

César, M. (2014). Inter- and intra-empowerment mechanisms: Contributions to mathematical thinking and achievement. In T. Zittoun, & A. Iannaccone (Eds.), *Activities of thinking in social spaces* (pp. 167-186). Hauppauge, NY: Nova Science Publishers, Inc.

Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (1998). Personal experience methods. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 150-178). Thousand Oaks: Sage Publications.

Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(1), 6-33.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences, 10*(1&2), 113-163.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: O que podemos aprender com as respostas dos estudantes*. Belo Horizonte: Autêntica.

Denzin, N. K. (2002). The interpretative process. In A. Haberman, & M. Miles (Eds.), *The qualitative researchers companion* (pp. 349-366). Thousand Oaks: Sage Publications.

Espinel, M. C., Bruno, A., & Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., &Scheaffer, R. (2007).*Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

González, T., & Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 35-59.

Kader, G., & Perry, M. (1994). Learning statistics with technology. *Mathematics Teaching in the Middle School, 1*(2), 130-136.

Lajoie, S., Jacobs, V., & Lavigne, N. (1993). Empowering children in the use of statistics. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 401-425.

Machado, R. (2014). *Trabalho colaborativo e matemática: Um estudo de caso sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências do projecto Interacção e Conhecimento.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM). [Tese de doutoramento, apresentada na FCT-UNL]

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME/DGIDC.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Rand Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trans.). Lisboa: APM.

Perret-Clermont, A.-N. (2004). Thinking spaces of the young. In A.-N. Perret-Clermont, C. Pontecorvo, L. Resnick, T. Zittoun, & B. Burge (Eds.), *Joining* *society: Social interaction and learning in adolescence and youth* (pp. 3-10). Cambridge: Cambridge University Press.

Pólya, G. (1945/1973).*How to solve it* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press. [Original published in English, in 1945]

Rodrigues, A. (2016). *Conhecimento e práticas de professores em educação estatística: Três estudos de caso no 1.º ciclo num contexto de trabalho colaborativo* (Tese de doutoramento, documento policopiado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Santos, R. (2015). *O conhecimento de estatística e da sua didática de futuros professores* (Tese de doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Shaugnessy, J. M. (2007). *Research on students' understanding of some big concepts.Thinking and reasoning with data and chance* (68th Yearbook). Reston: VA: NCTM.

Smith, M. S., Bill, V., & Hughes, E. K. (2008). Thinking through a lesson: Sucessfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School,14*(3), 132-138.

Stein, M. K., Grover, B. W., &Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.

Skemp, R. R. (1978). *Relational understanding and instrumental understanding.Arithmetic teacher*, Novembre, 9-15.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 1-8.

Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

TAREFAS DESAFIANTES EM MATEMÁTCA E O TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS: PRÁTICAS E DESAFIOS DO PROFESSOR

Leonor Santos

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

mlsantos@ie.ulisboa.pt

Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Ana Henriques

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

achenriques@ie.ulisboa.pt

Resumo: O objetivo do presente estudo é compreender a prática de ensino com tarefas desafiantes, na sua elaboração, introdução e trabalho autónomo. Seguindo uma metodologia de natureza interpretativa e qualitativa, participaram no estudo dois professores com experiência profissional, familiarizados com o ensino exploratório, a lecionar o 10.º ano e que foram selecionados pela disponibilidade que revelaram. A recolha de dados envolveu a observação de duas aulas, com vídeo gravação, uma reflexão pré-aula para cada uma das tarefas, respondidas por escrito, uma reflexão pós-aula para cada tarefa, com áudio gravação, e as tarefas e as resoluções dos alunos das turmas. A análise de dados foi desenvolvida através de uma análise de conteúdo. Os resultados evidenciam que os professores exploraram com os alunos tarefas desafiantes sem baixarem o seu nível de exigência cognitivo. Durante o trabalho autónomo dos alunos, surgiram situações não previstas, por as estratégias seguidas por estes serem condicionadas por limitações do seu conhecimento de um tópico matemático particular, ou por se tratar de uma tarefa matemática contextualizada numa situação do quotidiano. Tais situações levantaram desafios aos professores não só quanto à forma de dar apoio aos alunos, mas também de gestão do tempo de aula, acabando por inviabilizar a discussão com toda a turma naquela aula. A prática de propor e realizar tarefas desafiantes e de manter o seu nível de exigência apresenta ela própria um elevado nível de exigência para os professores, caracterizando-se por ser complexa, dinâmica e específica.

Palavras-chave: Tarefas desafiantes, aprendizagem matemática, ensino exploratório, trabalho autónomo dos alunos, desafios para o professor.

Introdução

Com o evoluir da sociedade, os objetivos para a aprendizagem matemática têm vindo a ser mudados e complexificados de modo a acompanhar os desenvolvimentos sociais. Ter como principal finalidade para o ensino da Matemática o desenvolvimento da proficiência matemática (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) requer proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem diversificadas e adequadas às diferentes componentes dessa mesma proficiência, incluindo o desenvolvimento da compreensão conceptual (NCTM, 2014).

Mudar objetivos de aprendizagem exige mudança de práticas de ensino, em particular a natureza das tarefas que se propõem aos alunos. Não basta propor aos alunos tarefas rotineiras, é necessário que estes trabalhem com tarefas desafiantes, isto é, tarefas que promovam uma aprendizagem matemática com compreensão. Tais tarefas requerem que os alunos sejam capazes de estabelecer e desenvolver as suas próprias estratégias de resolução e estabeleçam relações entre diferentes conceitos matemáticos (Sullivan et al., 2015). O ensino exploratório (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Ponte, 2005) é uma modalidade de ensino que se adequa à realização de tarefas desafiantes.

Existem diversos estudos sobre os desafios que se levantam aos professores com estas mudanças de prática (por exemplo, Foster & Inglis, 2017; Sullivan & Mornane, 2014), mas o enfoque tem recaído sobretudo nas discussões com toda a turma (Ponte & Quaresma, 2016). Estes estudos têm dado pouca atenção ao momento de trabalho autónomo dos alunos na aula. Assim, o presente estudo tem por objetivo compreender a prática de ensino com tarefas desafiantes, em particular procurando responder às seguintes questões de investigação: (i) Como encaram os professores a elaboração/adaptação de tarefas desafiantes?; (ii) Como realizam a introdução destas tarefas na sala de aula?; (iii) Como exploram com os seus alunos as tarefas desafiantes durante o trabalho autónomo?; e (iv) Quais os principais desafios que os professores enfrentam durante o trabalho autónomo dos alunos com tarefas desafiantes?

Fundamentação teórica

É hoje reconhecido por numerosos autores que as tarefas que o professor propõe para realização na sala de aula de Matemática constituem um dos aspetos determinantes da prática profissional do professor (Christiansen, & Walther, 1986; Ponte, 2005), com importantes implicações na aprendizagem dos alunos (Shimizu et al., 2010; Sullivan et al., 2015). Vários documentos curriculares recomendam a inclusão de tarefas desafiantes em Matemática a fim de promover o desenvolvimento de capacidades transversais dos alunos como a resolução de problemas e o raciocínio (NCTM, 2014). No entanto, diferentes conceptualizações sobre a natureza de tais tarefas têm sido propostas, falando-se, por exemplo, em tarefas matemáticas “ricas”, “autênticas”, “complexas”, “desafiantes”, de “elevado nível cognitivo”, entre outras. (Ponte, 2005; Shimizu et al., 2010). Esta profusão de terminologia entre os investigadores vai a par com uma profusão de significados por parte dos professores. Na verdade, como indica um estudo de Foster e Inglis (2017), os professores expressam perspetivas muito contrastantes sobre a natureza das tarefas, sendo que uma mesma tarefa pode ser classificada por diferentes professores como de nível cognitivo elevado ou baixo e natureza motivante ou não motivante para os alunos.

Uma das taxonomias mais conhecidas para tarefas matemáticas foi proposta por Stein e Smith (1998) e inclui quatro níveis de exigência cognitiva: dois níveis de baixa exigência cognitiva e dois níveis de elevada exigência cognitiva. De acordo com as autoras, as tarefas que apresentam menor nível de exigência cognitiva são as de memorização ou que requerem o uso de procedimentos sem conexões, sem que seja necessária uma atenção explícita a conceitos e a sua compreensão; as tarefas classificadas como de nível de exigência cognitiva elevado envolvem pensamento complexo e processos de raciocínio e são denominadas como "procedimentos com conexões" e "fazer Matemática". Assumimos este quadro quando falamos de tarefas ricas ou desafiantes, como sendo as de maior nível de exigência cognitiva, como é o caso dos problemas que exigem que os alunos delineiem uma estratégia de resolução, uma vez que o processo de resolução não é imediato (Ponte, 2005).

A prática de propor e realizar tarefas desafiantes e manter o nível de exigência cognitiva durante a sua realização pelos alunos tem-se mostrado problemática para muitos professores (Stein & Smith, 1998). Deste modo, esta questão tem sido objeto de grande atenção em programas de formação de professores que visam o desenvolvimento de novas práticas (Ponte et al., 2017). Uma das principais questões que se coloca ao professor é a necessidade de passar a trabalhar de acordo de acordo com novas estruturas de aula, que apoiam uma abordagem centrada nos alunos e que incluem estilos de comunicação que valorizam a participação destes, incluindo a realização de discussões coletivas (Russo & Hopkins, 2017; Sullivan & Mornane, 2014). Esta estrutura de sala de aula corresponde ao que no Japão se designa por "*structured problem solving*" (Fujii, 2018), nos Estados Unidos por "*launch-explore-discuss*" (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008) e em Portugal como a "aula em três fases" (Ponte, 2005).

A fase de introdução da tarefa reveste-se de grande importância, pois dela depende o êxito das fases seguintes. Num estudo sobre este momento da aula, Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons e Shahan (2013) concluíram que nesta fase é muito importante que os alunos desenvolvam uma linguagem comum para descrever os aspetos do contexto que surgem na tarefa e as relações matemáticas importantes para a sua resolução. Os autores concluíram, ainda, que se o nível cognitivo for mantido durante a fase de introdução, o momento de final de discussão coletiva, proporcionará melhores oportunidades de aprendizagem para os alunos.

Já no que diz respeito ao trabalho autónomo com tarefas desafiantes, o papel do professor revela-se fundamental na medida em que os alunos podem manifestar resistência a se envolver numa situação que não lhes é familiar, sentindo que não têm conhecimentos para a resolver, bem como mostrarem falta de persistência quando não sabem como prosseguir na resolução (Sullivan & Mornane, 2014). Assim, um aspeto importante da prática docente é o questionamento que o professor desenvolve através de perguntas escrutinadoras e da sua adequada sequenciação (Mata-Pereira & Ponte, 2017). Outro aspeto igualmente importante é proporcionar apoios, que Sullivan et al. (2015) designam como *enabling prompts*, que permitam que os alunos que experimentam dificuldades na tarefa possam avançar na sua resolução, sem, no entanto, lhe retirar a exigência cognitiva. Esses apoios podem consistir, por exemplo, em "reduzir o número de passos, simplificar a complexidade dos números ou variar as formas de representação" (Sullivan et al., 2015, p. 126) mas que ainda assim permitem que o aluno enfrente por ele próprio os desafios centrais da tarefa.

Metodologia de Investigação

Tendo em consideração o problema do estudo, optou-se por um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa (Creswell, 2012). A investigação envolveu dois professores familiarizados com o ensino exploratório a lecionar o 10.º ano, Luísa e Ricardo, selecionados pela disponibilidade e interesse que revelaram por este estudo. Ambos têm 40 anos de idade e são professores há 18 anos. Fizeram juntos a licenciatura em Matemática (Ramo Educacional) e frequentavam, no momento, o mestrado em Educação (especialização em Didática da Matemática).

A turma de Luísa tem 28 alunos, e destaca-se pela sua homogeneidade, existindo um grupo considerável de alunos que tem um desempenho ao nível de Bom e onde apenas dois alunos tiveram classificação negativa no final do 1.º período. A professora considera que é muito fácil trabalhar com esta turma dado que os alunos são interessados, empenhados, cumpridores dos seus deveres e bastante participativos nas aulas.

A turma de Ricardo tem 25 alunos. Trata-se de uma turma heterogénea com um nível de insucesso elevado (cerca de 50% de classificações negativas no final do 1.º período). Ainda assim, o professor considera que os alunos trabalham bem em sala de aula, manifestando interesse na disciplina, e que existe um bom ambiente na turma. Do seu ponto de vista, os resultados que os alunos têm obtido nas avaliações sumativas não correspondem ao empenho que revelam nas aulas.

Foi pedido, pela equipa de investigadores, a ambos os professores que preparassem duas tarefas desafiantes para os seus alunos, no 1.º período do ano letivo 2017/18. Posteriormente, essas aulas, com a duração de 50 minutos cada, foram observadas por um dos investigadores, com vídeo gravação com câmara móvel, acompanhando o(a) professor(a). Os dois professores aplicaram as mesmas tarefas que ocuparam a totalidade da aula. A aula com a tarefa 1 de Luísa foi assistida por Ricardo que lecionou logo em seguida a aula, com essa mesma tarefa, na sua turma.

A recolha de dados também envolveu, uma reflexão pré-aula para cada uma das tarefas (RPréA), respondidas por escrito por cada um dos professores; uma reflexão pós-aula para cada tarefa (RPósA), realizada individualmente com base num mesmo guião, com áudio gravação, realizada alguns dias após as aulas, e as tarefas e as suas resoluções por todos os alunos das duas turmas.

Na análise de dados foi desenvolvida uma análise de conteúdo seguindo-se categorias pré-definidas na *natureza das tarefas*, sua classificação quanto ao nível de exigência cognitiva (Smith & Stein, 1998 – Anexo I). No caso da *exploração das tarefas na aula* e *desafios enfrentados* não houve categorias pré-definidas, mas foi tida em conta a revisão de literatura apresentada no enquadramento teórico.

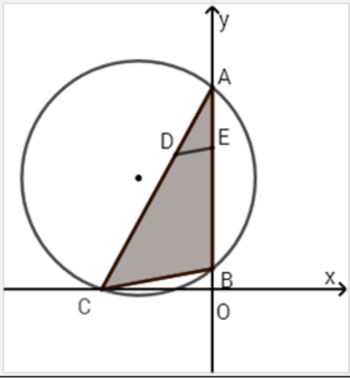
Resultados

A natureza das tarefas

Luísa e Ricardo decidiram fazer a mesma tarefa uma vez que habitualmente trabalham em conjunto. A tarefa 1 (figura 1) foi inspirada numa figura que já existia mas depois foi trabalhada em termos das questões propostas. Trata-se de um problema que envolve conexões entre a álgebra e a geometria. Enquadra-se no tema que estava a ser tratado, no momento, nas duas turmas – condições no plano – mas que exige que os alunos mobilizem conhecimentos relativos à área e semelhança de triângulos, tópicos trabalhados no 3.º ciclo. A tarefa tem duas questões. A primeira obriga à interpretação da situação e requer a mobilização de mais conhecimentos. Na segunda questão, os alunos podem usar alguns elementos da questão anterior, o que a torna mais acessível e de mais rápida resolução. A segunda questão não será considerada por apenas um número muito reduzido de alunos ter tido tempo para a realizar.

Tendo em conta o quadro teórico de classificação de tarefas (Smith & Stein, 1998) pode afirmar-se que se trata de uma tarefa com nível alto de exigência cognitiva, nomeadamente do tipo de "Procedimentos com conexões" uma vez que requer "um certo grau de esforço cognitivo". Dado que os alunos precisavam de articular os seus conhecimentos de geometria euclidiana com os tópicos de geometria analítica que tinham trabalhado recentemente (equação da circunferência e distância entre dois pontos no plano), a tarefa contribuiria para aprofundarem a sua compreensão dos procedimentos analíticos, e assim está enquadrada no descritor: "Os alunos devem ocupar-se com ideias conceptuais subjacentes para que a tarefa seja concluída com sucesso, o que desenvolve compreensão".

Considera, num plano munido de um referencial cartesiano, a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-3)^2=10$ e os triângulos [ABC] e [AED], conforme a figura.



1. Sabe-se que:
- Os pontos A e B pertencem ao eixo *Oy* e à circunferência;
- O ponto C pertence ao eixo *Ox* e à circunferência;
- $[DE]$ e $[CB]$ são segmentos de reta paralelos e $\overline{DE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$

1.1. Calcula a área do triângulo [ADE].
Mostra como chegaste à tua resposta: deves explicar o teu raciocínio e apresentar todos os cálculos que efetuares.

1.2. Define analiticamente o triângulo [ADE].
Mostra como chegaste à tua resposta: deves explicar o teu raciocínio e apresentar todos os cálculos que efetuares.

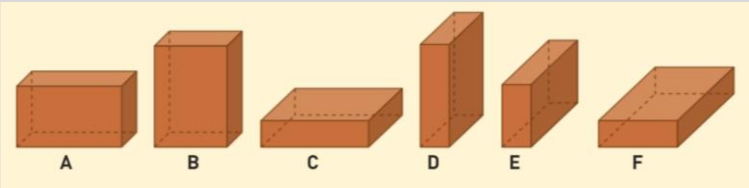
Figura 1 – Tarefa 1 proposta por Luísa e Ricardo

A segunda tarefa, tarefa 2 (figura 2), foi retirada de um manual de Matemática B. É um problema de empacotamento, com contexto de semi-realidade que não tinha relação com os conteúdos trabalhados pelos alunos no presente ano letivo. Os alunos teriam de relacionar as dimensões das caixas e do contentor e ter em conta a forma como estas poderiam ser arrumadas, o que remete para a capacidade de visualização dos objetos em causa. Apresenta duas questões, sendo a primeira crucial para a compreensão da situação e definição de uma estratégia de resolução que pode ser aplicada à questão seguinte.

À semelhança da tarefa 1, esta tarefa enquadra-se no grupo das tarefas com nível alto de exigência cognitiva, nomeadamente do tipo de "Procedimentos com conexões", uma vez que requer "um certo grau de esforço cognitivo". Embora procedimentos gerais possam ser seguidos, a sua aplicação requer uma boa compreensão da situação, por parte dos alunos e o delineamento de uma estratégia de resolução, o que lhe confere o seu caráter problemático.

Considera um contentor de 2 m de largura, 4 m de comprimento e 2,5 m de altura, para transporte de mercadorias embaladas em caixas com a forma de paralelepípedos, com 70 cm de comprimento, 50 cm de largura e 30 cm de altura.

a) Admite que as caixas podem ser colocadas em qualquer posição, como é exemplificado a seguir:



Investiga qual o maior número de caixas que é possível inserir no contentor, se estas forem todas colocadas na posição C. Mostra como chegaste à tua resposta.

Fonte: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015) *Novo Espaço – Matemática B.* Porto: Porto Editora.

Figura 2 – Tarefa 2 proposta por Luísa e Ricardo

A perspetiva dos professores sobre a natureza das tarefas é muito semelhante à nossa. No caso da tarefa 1 enfatizam o facto de esta envolver conexões com outros conteúdos, em particular, que não tinham sido trabalhados no presente ano letivo. Como referiu Ricardo, "não são exercícios do tipo "Calcule", "Determine"…" (Ricardo, RPréA1) mas trata-se de uma tarefa desafiante "no sentido de criar alguns embaraços ou dúvidas aos alunos" (RPósA1). Luísa referiu que os alunos exploram os tópicos trabalhados de "uma forma diferente" articulando-os com um outro tópico (semelhança de triângulos) que "ainda não foi abordado este ano letivo" (Luísa, RPréA1).
A tarefa 2, que os professores consideraram tratar-se de um problema, foi escolhida por quererem fazer "algo completamente diferente que não estivesse relacionado com os conteúdos que estávamos a lecionar" e que, não tendo grandes pré-requisitos, "fosse acessível a um maior leque de alunos (…) ou seja, mais facilmente envolve mais alunos" (Ricardo, RPósA1). Luísa também associou o caráter desafiante da tarefa ao facto de esta envolver a "interpretação da situação e a definição de uma estratégia de resolução que não é imediata" (Luísa, RPréA1).

A exploração das tarefas na aula

Luísa e Ricardo decidiram seguir um ensino exploratório, prevendo três momentos no trabalho da aula com estas tarefas: (i) introdução; (ii) trabalho autónomo dos alunos; e (iii) discussão em grupo turma e síntese de ideias principais.

Na introdução da tarefa 1, Luísa apenas referiu que esta se relacionava com os conteúdos que tinham estado a trabalhar e que iria ocupar a totalidade da aula. Já Ricardo, ao ter observado que alguns alunos da turma de Luísa seguiram uma estratégia mais trabalhosa para determinar a área do triângulo, pelo facto da altura do triângulo que lhes seria mais favorável calcular estar fora da figura, optou por iniciar a aula recordando como calcular a área de um triângulo. Pediu a um aluno para ir ao quadro indicar a base e a altura do triângulo que tinha desenhado, o qual curiosamente representou a altura do triângulo fora da figura. O professor enfatizou que a altura de um triângulo pode estar fora da figura mas um dos alunos referiu que o colega não poderia ter desenhado daquela forma porque apenas quando os triângulos são equiláteros pode a base ser qualquer um dos lados. O professor recordou que já teriam trabalhado essas noções no 5.º ano e que efetivamente "qualquer triângulo possui 3 bases e que com essas 3 bases, 3 alturas". Não indicou contudo a relação desse aspeto com a tarefa que iriam resolver.

Na tarefa 2, Luísa também não fez qualquer apresentação, referindo apenas que esta não tinha relação com os conteúdos que estavam a abordar. Ricardo fez uma apresentação sucinta da tarefa, exprimindo tratar-se de um problema de otimização de espaço, uma das aplicações da matemática e indicou aos alunos: "Teremos que pensar que conteúdos podemos usar na resolução desta tarefa".

Os dois professores dedicaram partes substanciais das aulas ao trabalho autónomo dos alunos, procurando acompanhar equilibradamente todos os grupos. No acompanhamento aos grupos, os professores procuraram *compreender o raciocínio dos alunos* para lhes fornecer um feedback adequado. Habitualmente *não respondiam diretamente* para validar as questões que os alunos lhes colocavam, mas sim colocavam-lhes questões, tais como: "Então o que têm, o que é acham que é preciso terem?"; "Como podemos fazer?"; "Como pensaste?".

Luísa procurou que os alunos interpretassem com cuidado a informação que poderiam retirar da figura e aquilo que era pretendido. Em algumas situações direcionou mais os alunos, continuando, no entanto, sobretudo a *questioná-los pedindo-lhes nomeadamente justificações,* tal como sucedeu com duas alunas que muito cedo perceberam que a semelhança de triângulos estava envolvida nesta situação mas que afirmaram que poderiam calcular a área do triângulo pequeno ([ADE]) a partir dos dados sobre a circunferência, antes de conhecerem a área do triângulo maior ([ACB]) (figura 1). Neste episódio pode verificar-se que a professora não compromete o nível de desafio cognitivo da tarefa, uma vez que apoia as alunas na identificação de um caminho não frutífero e procura assegurar-se, através do questionamento, de que compreendem por onde devem seguir nesta primeira etapa da resolução.

> Professora: É mais fácil com os dados da circunferência ir buscar dados do triângulo pequenino ou do triângulo grande?
>
> Aluna 2: Do grande.
>
> Professora: E porquê?
>
> Aluna 2: Porque o triângulo tem... Tipo estes pontos [faz o gesto da circunferência e aponta os vértices do triângulo maior sobre a circunferência]

> Professora: Exato, os vértices do triângulo grande são pontos da circunferência!
>
> Aluna 1: Então temos que ver quais são estes pontos [os vértices do. triângulo maior].
>
> Professora: Exato, é por aí que devem começar.

Houve outras ocasiões, face a maiores dificuldades dos alunos, em que os professores foram mais *diretivos, ajudando os alunos a avaliarem as suas escolhas*. Por exemplo, Ricardo, num grupo em que os alunos se mostraram incapazes de prosseguir na estratégia delineada por não conseguirem determinar a altura do triângulo, recordou a introdução que fez relativamente a este assunto. Num outro caso em que observou que as alunas enfrentavam grandes dificuldades em determinar o comprimento da base, devido à escolha que fizeram, o professor chamou a atenção para as implicações dessa opção: "A escolha da base e da altura tem que ser facilitadora (…) Se vocês escolherem como base o segmento de reta CB, acho que não vos vai ajudar à [determinação] da altura" (Ricardo, Aula). Note-se que o professor, embora tenha informado os alunos sobre a escolha pouco adequada que tinham feito, *não avançou com a indicação de qual seria mais indicada*, levando os alunos a pensarem em alternativas.
Uma outra estratégia seguida para apoiar os alunos foi a da *antecipação das dificuldades ou erros dos alunos*. Por exemplo, na tarefa 1, no caso em que os alunos estabeleceram uma relação errada entre as áreas dos dois triângulos semelhantes, Luísa usou uma estratégia previamente pensada:

> Eu já vinha preparada para aquela situação da semelhança que (…) poderia ser um desafio, que era pensar "OK, e agora sem lhes dar a resposta, como é que os vou fazerem lembrarem-se disto?". Mas, como eu já tinha antevisto isso, pronto, foi exatamente dar-lhes um exemplo com quadrados. Lembrei-me daquela situação, já tinha pensado nela antes porque já sabia que isso iria causar… Normalmente, já tenho assim algumas coisas na manga porque já sei que são as dificuldades deles. (Luísa, RPósA1)

Assim, Luísa desenhou dois quadrados, com as respetivas dimensões, e procurou que os alunos recordassem a razão de semelhança entre as suas áreas, a partir da razão entre os respetivos lados, para assim observarem que não estavam a raciocinar corretamente no caso dos triângulos. Na tarefa 2, usou *material previamente preparado*, levando algumas caixas de medicamentos pequenas para apoiar a visualização dos diversos cenários possíveis.
A discussão em grande grupo, embora prevista, apenas aconteceu na aula de Luísa na aula seguinte. O trabalho autónomo demorou mais tempo do que o previsto inicialmente, dadas as dificuldades apresentadas pelos alunos que foram superiores às esperadas pelos professores. Por exemplo, na tarefa 2, a interpretação das condições particulares da situação de semi-realidade acabou por se revelar mais difícil para diversos alunos nas duas turmas, tomando-lhe muito tempo os cálculos que fizeram em detrimento da compreensão da situação apresentada na tarefa, tal como Ricardo nos explica:

> Os raciocínios que eles fizeram em termos matemáticos estão corretos: calcularam os volumes, fizeram os cálculos como deve ser, fizeram as interpretações que aqueles volumes lhes permitiam fazer, como deve ser, só que em termos práticos aquela atividade não funciona daquela forma. E eles demoraram muito tempo a perceber isso. (Ricardo, RPósA2).

Desafios enfrentados

Estes professores não sentiram uma dificuldade particular na seleção das duas tarefas mas reconhecem que esta não é uma atividade trivial. Ricardo referiu que esta é *uma atividade bastante exigente* que requer bons conhecimentos matemáticos por parte do professor: “Pensar em tarefas é das coisas mais complicadas que existe” (Ricardo, RPósA1). Ainda assim, não consideram que tenha sido algo diferente de outras situações em que criaram ou adaptaram tarefas, como referiu Luísa: “Relativamente à planificação da aula, não senti nenhum desafio diferente do habitual (…) As questões propostas foram pensadas e discutidas com um colega de grupo que também leciona 10.º ano e a elaboração da tarefa foi relativamente simples” (Luísa, RPréA1).

Em ambas as turmas e nas duas tarefas, alguns grupos de alunos fizeram interpretações das tarefas e adotaram estratégias que os professores não tinham antecipado e que, em alguns casos, lhes levantaram desafios. Na tarefa 1, a situação que se mostrou mais inesperada para os professores foi o facto de os alunos não terem conseguido perceber que o cálculo da área do triângulo seria muito facilitado pela escolha da base do lado do triângulo cuja respetiva altura era exterior a este. Na turma de Luísa, os alunos fizeram uma opção que, embora mais trabalhosa, lhes permitiu prosseguir na resolução da tarefa. Tal situação, não representou um desafio para a professora porque, apesar de inesperado, esta considera ter conseguido interpretar o raciocínio dos alunos através da sua explicação e ir acompanhando naturalmente o seu trabalho. Na turma de Ricardo, diversos grupos não fizeram uma boa escolha da base do triângulo para o cálculo da sua área, o que os levou a gastar muito tempo e, consequentemente, a não completarem a questão. Emergiu assim, como um desafio desta aula, a *antecipação de que as estratégias dos alunos poderiam ser condicionadas por limitações no seu conhecimento de um tópico elementar*.

As dificuldades dos alunos na interpretação da situação da tarefa 2 revelaram-se superiores ao que os professores tinham antecipado. Como referimos, Luísa tinha levado algumas caixas para apoiar a visualização da posição em que as caixas seriam arrumadas no contentor. No entanto, em ambas as turmas alguns grupos interpretaram a situação como se tratando apenas de relacionar o volume do contentor e o volume de um conjunto de caixas sem terem em conta a sua arrumação naquele espaço. Portanto, Luísa e Ricardo *não anteciparam que os alunos poderiam não conseguir apreender as condições do problema tratando-se de uma situação do quotidiano*.

Perante a dificuldade de alguns grupos em criar uma representação mental da situação, *o apoio aos alunos tornou-se um desafio para ambos os professores*. No caso da aula de Luísa, houve dois grupos que não valorizaram a questão da arrumação dos contentores e a quem a professora procurou ajudar sugerindo que desenhassem o fundo do contentor, para perceberem se o valor que tinham encontrado faria sentido:

> Houve dois grupos nesta situação e que diziam que cabiam 22 caixas arrumadas no fundo do contentor e perderam muito tempo, não conseguiram realizar o resto da atividade. Porque eu disse: “Então façam uma planificação… No verso da folha, em que eu disse, “exatamente com estas medidas fazem um retângulo que planifique o contentor e mostrem como é que cabem lá 22 caixinhas”. (Luísa, RPósA1)

Ainda assim, Luísa observou que um dos grupos continuou a não interpretar bem a situação, aplicando o raciocínio inicial sobre os volumes às áreas e consequentemente apresentou uma resposta errada.

A turma de Ricardo mostrou muito mais dificuldades na interpretação da situação e em delinear uma estratégia, o que levou a que o professor fosse muito solicitado pelos grupos. Assim, constituiu um desafio *conseguir dar apoio a todos os grupos*, perante as múltiplas solicitações e tendo em conta o número de grupos formados. Refletindo sobre essa situação, o professor considerou que poderia ter optado por esclarecer em grande grupo as questões de interpretação da tarefa, a partir do momento em que observou ser uma dificuldade generalizada:

> As dúvidas que surgiram na segunda atividade prenderam-se com a interpretação do enunciado e ajudá-los a interpretar o enunciado em pequenos grupos não trouxe grande vantagem. Se fosse em grande grupo seria mais rápido e não perdíamos tanto tempo. (Ricardo, RPósA2)

Acresce que a opção por estratégias que se tornam mais demoradas levou a que, em nenhuma das duas turmas, os alunos conseguissem resolver a segunda questão. E portanto, *a previsão do tempo necessário à resolução da tarefa* também acabou por se revelar problemático, o que Luísa reconheceu como erro de apreciação: "Acho que era de prever que eles não iam conseguir fazer isto tudo. O problema foi nosso na previsão do tempo. Porque esta turma não tem um ritmo lento de trabalho" (Luísa, RPósA1). Assim, embora os professores reconheçam a importância de discutir coletivamente na turma o trabalho realizado, devido ao facto de a resolução das duas tarefas ter sido mais demorada do que o previsto, a discussão foi remetida para outra aula ou não foi sequer realizada.

Face à inesperada dificuldade dos alunos em atenderem às condições reais da situação real, na tarefa 2, os professores refletiram sobre o desafio que representa a aplicação dos conhecimentos do dia-a-dia na aula de Matemática, o que consideraram ser consequência de um programa de matemática que não valoriza as conexões com a realidade e que coloca grande ênfase na abstração:

> … Quando tentamos dar algum sentido prático à disciplina, parece que afinal ainda é mais difícil que fazer os exercícios teóricos. (Ricardo, RPósA2)
>
> Eu acho que (…) cada vez menos trabalhamos os problemas da vida real. Até porque este programa não tem quase nada que se ajuste à realidade, não é? Toda a parte da geometria que se dava antes [no programa anterior] deixou de se fazer. Eles começam agora com a Lógica que é super abstrata. E portanto eles começam a fazer isto [a resolução da tarefa] do ponto de vista matemático, ponto! E nem sequer pensam muito na realidade do que é estar a arrumar caixas num camião. (Luísa, RPósA2)

Discussão e conclusões

É notório que estes professores apreciam o desafio de pensar em tarefas desafiantes para propor aos seus alunos, valorizando o trabalho colaborativo na criação ou adaptação de tais tarefas. Não deixam contudo de reconhecer que é uma atividade bastante exigente, mas recorrer ao que já existe ou criar novas tarefas são estratégias que usam quando sentem necessidade e que fazem parte da prática de ensino de ambos.

No trabalho com os alunos na sala de aula, nas introduções das tarefas, ambos os professores reconhecem-lhe importância (Jackson et al., 2013). As introduções foram sempre sucintas, mas diferenciadas: umas vezes recordaram conhecimentos anteriores, outras informaram quanto à sua relação com os tópicos matemáticos tratados no momento, de acordo com a situação de cada turma. Contudo, estas diferenças não parecem ter trazido implicações distintas para o trabalho dos alunos. Mesmo no caso da tarefa 1, em que Ricardo recordou os conceitos de altura e área do triângulo face à constatação das dúvidas tidas pelos alunos de Luísa, foi possível observar o mesmo tipo de dificuldades na sua turma. Nesta fase da aula, os professores não baixaram o nível de desafio cognitivo da tarefa uma vez que as informações que deram não apontaram para nenhum aspeto essencial dos processos de resolução (Stein & Smith, 1998).

Também ao longo do trabalho autónomo dos alunos, em geral, os professores não diminuíram o nível de desafio cognitivo da tarefa, dado que ao acompanhar o trabalho dos alunos procuraram perceber o seu raciocínio e não responder de imediato às questões de validação que estes lhes colocavam. Os alunos explicavam o que tinham feito e através do questionamento os professores procuravam que eles percebessem se estavam a pensar corretamente ou se tinham cometido algum erro. Por outras palavras, foi sendo proporcionado aos alunos apoio adequado, através do questionamento (Mata-Pereira & Ponte, 2017). De forma a desenvolverem um questionamento informado, anteciparam dúvidas dos alunos e prepararam estratégias e materiais para as minimizar (*enabling prompts*), ações apontadas na literatura como cruciais para apoiar os alunos, perante dificuldades, mas através das quais o professor "não pensa pelo aluno" (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Contudo, embora sendo professores experientes e conhecedores, surgiram dificuldades não previstas, durante o trabalho autónomo dos alunos, por as estratégias dos alunos serem condicionadas por limitações do seu conhecimento de um tópico matemático particular, ou por se tratar de uma tarefa matemática contextualizada numa situação do quotidiano. Estas situações levantaram desafios aos professores não só quanto à forma de dar apoio aos alunos, mas também de gestão do tempo de aula, acabando mesmo por inviabilizar, a discussão com toda a turma.

Em síntese, pudemos constatar que os dois professores participantes neste estudo, ambos com significativa experiência profissional, estavam familiarizados com um ensino exploratório (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Ponte, 2005), e com tarefas desafiantes, explorando-as sem baixar o seu nível de exigência cognitivo e recorrendo a diferentes estratégias para apoiar os alunos nas suas dificuldades. No entanto, não deixaram de ser desafiados em certos momentos do trabalho autónomo dos alunos, face a dificuldades não previstas, o que nos permite afirmar que a prática de propor e realizar tarefas desafiantes e de manter o seu nível de exigência apresenta ela própria um elevado nível de exigência. As propostas apresentadas em anteriores estudos para reduzir essa complexidade (Russo & Hopkins, 2017; Sullivan & Mornane, 2014) revelaram-se insuficientes. A natureza desta prática é complexa, dinâmica e específica, passando pelo uso de nova estrutura de sala de aula, de uma abordagem centrada no aluno, de estilos de comunicação adequados, mas não se reduz a estas componentes. Há que atender ao que não se prevê e o que há de específico tanto em cada grupo de alunos como no professor.

Agradecimentos

Este estudo foi desenvolvido no âmbito do Projeto EDUCATE - *Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning*, financiado pela Comissão Europeia. Esta comunicação reflete apenas o ponto de vista dos seus autores e a Comissão não é responsável pelo uso que pode ser dado à informação aqui presente.

Referências

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Creswell, J. W. (2012). *Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Boston: Pearson.

Foster, C., & Inglis, M. (2017). Teachers' appraisals of adjectives relating to mathematics tasks. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 283-301. doi:10.1007/s10649-017-9750-y

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, N. Shuilleabhain & A. Takahashi (Eds.), *Lesson study around the world: Theoretical and methodological issues*. New York, NY: Springer.

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. C. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(4), 646-682.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.), (2001*). Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*:169. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., & Menezes, L., & Canavarro A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, XXII*(2), 29-54.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de Matemática. *RELIME, 13*(1), 71-94.

Russo, J. & Hopkins, S. (2017). Student reflections on learning with challenging tasks: 'I think the worksheets were just for practice, and the challenges were for maths'. *Mathematics Education Research Journal, 29*, 283-311.

Shimizu, Y. (2010). A task-specific analysis of explicit linking in the lesson sequences in three Japanese mathematics classrooms. In Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang, & D. Clarke (Eds.), *Mathematical tasks in classrooms around the world* (pp. 87-102). Rotterdam: Sense Publishers.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 123–140. doi:10.1007/s10857-014-9279-2

Sullivan, P. & Mornane, A. (2014). Exploring teachers' use of, and students' reactions to, challenging mathematics tasks. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 193-213.

ANEXO I

Características das tarefas quanto ao nível de desafio, segundo Stein & Smith (1998)

Níveis de Desafio das Tarefas

Desafio Reduzido ***(memorização)***

- Envolvem, quer a reprodução de factos, regras, fórmulas ou definições previamente aprendidas, quer a memorização de factos, regras, fórmulas ou definições.
- Não podem ser resolvidas utilizando procedimentos, porque não existe nenhum ou porque o intervalo de tempo de realização da tarefa é demasiado curto para aplicar o procedimento.
- Não são ambíguas. Estas tarefas envolvem a reprodução exata de material anteriormente estudado e o que deve ser reproduzido é pedido clara e diretamente.
- Não têm qualquer conexão com conceitos ou significados subjacentes aos factos, regras, fórmulas ou definições que estão a ser aprendidas ou reproduzidas.

Desafio Reduzido ***(procedimentos sem conexões)***

- São algorítmicas. A utilização do procedimento é explicitamente pedida, ou é evidente a partir do que foi ensinado previamente e da experiência anterior, ou pela colocação da tarefa numa série repetitiva.
- A exigência cognitiva, para se completar com sucesso a tarefa, é limitada. Praticamente não há ambiguidade sobre o que tem de ser feito e como deve ser feito.
- Não existem conexões com os conceitos e o significado subjacentes ao procedimento utilizado.
- O foco está na produção de respostas corretas e não no desenvolvimento da compreensão matemática.
- Não são requeridas explicações a não ser, eventualmente, a descrição do procedimento utilizado.

Desafio Elevado ***(procedimentos com conexões)***

- Chamam a atenção dos alunos para, quando utilizarem procedimentos, desenvolverem níveis mais profundos na compreensão de conceitos e ideias matemáticas.
- Sugerem, implícita ou explicitamente, que se sigam procedimentos gerais e amplos que têm conexões estreitas com ideias conceptuais subjacentes, em contraste com algoritmos fechados e opacos no que respeita aos conceitos que estão na sua base.
- Geralmente fazem uso de múltiplas representações, como sejam diagramas, materiais manipulativos, símbolos e situações problemáticas. Desenvolve-se o sentido estabelecendo conexões entre as diversas representações.
- Exigem um certo grau de esforço cognitivo. Apesar de poderem ser seguidos procedimentos gerais, isso não é feito descuidadamente. Os alunos devem ocupar-se com as ideias conceptuais subjacentes para que a tarefa seja concluída com sucesso, o que desenvolve a compreensão.

Desafio Elevado ***(fazer matemática)***

- Requerem um pensamento complexo e não algorítmico – não é sugerido explicitamente um caminho ou uma abordagem, na tarefa, nas instruções ou a partir de um exemplo já trabalhado.
- Exigem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos, relações e processos matemáticos.
- Exigem uma automonitorização ou autorregulação dos processos cognitivos de cada um.
- Requerem que os alunos acedam a conhecimentos e experiências relevantes, utilizando-os de forma apropriada no trabalho realizado durante a tarefa.
- Requerem que os alunos analisem a tarefa e examinem de perto constrangimentos que podem limitar possíveis estratégias de resolução e soluções.
- Requerem um esforço cognitivo considerável e podem provocar algum nível de ansiedade nos alunos, devido ao caráter imprevisível do processo de resolução necessário.

Estas características foram retiradas do trabalho de Doyle sobre tarefas académicas (1988) e de Resnick sobre capacidades de pensamento de nível elevado a seguir a (1987) das Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM,1991) e da análise e categorização de centenas de tarefas utilizadas em salas de aula do projeto QUASAR (Stein, Grover e Henningsen 1996; Stein, Lane e Silver 1996).

Adaptado de NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar o sucesso em Matemática* (p. 18). Lisboa: APM. (trabalho original em inglês, publicado em 2014)

A SALA DE AULA DE MATEMÁTICA COMO ESPAÇO DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL: INVESTIGANDO NA E A PARTIR DA PRÁTICA LETIVA DE DUAS PROFESSORAS

André Luis Trevisan

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil

andrelt@utfpr.edu.br

Alessandro Jacques Ribeiro

Universidade Federal do ABC, Brasil

alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo: Assumindo que o conhecimento profissional do professor reveste-se de importância e relevância no âmbito das pesquisas em Educação Matemática nas últimas décadas, mas que pouco ainda tem sido feito para entender como esses profissionais aprendem, objetivamos nesta comunicação identificar e compreender as possibilidades e limitações nas aprendizagens de duas professoras, em decorrência do desenvolvimento de uma aula planejada coletivamente abordando o conceito de função na perspectiva covariacional. Para tal, analisamos dados de um processo formativo na qual foi proposto o trabalho com um ciclo (denominado PDR) que incorpora três segmentos da prática dos professores: o planejamento, o desenvolvimento e a reflexão sobre uma aula de Matemática para o Ensino Médio, conduzida na perspectiva do ensino-exploratório. A partir de três dimensões de análise relativas às aprendizagens dos professores, a saber, (a) aspectos operacionais, (b) aspectos conceituais e (c) aspectos didáticos, os resultados apontam possibilidades de aprendizagens das professoras envolvidas, seja pelas potencialidades como pelas limitações que emergiram do trabalho com o ciclo PDR, no que se refere ao uso da sala de aula como um espaço de aprendizagem profissional docente.

Palavras-chave: Formação de professores de Matemática. Aprendizagem profissional do professor. Tarefas de aprendizagem profissional. Conceito de função na perspectiva covariacional.

Introdução

O conhecimento profissional do professor tem assumido importância e relevância no âmbito das pesquisas em Educação Matemática nas últimas décadas (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Porém, pouco ainda tem sido feito para entender como esses profissionais aprendem, bem como quais são os contextos e como estes permitem que essa aprendizagem ocorra (Webster-Wright, 2009).

Abordagens de *aprendizagem profissional do professor (APP)* devem contemplar e articular diferentes facetas do conhecimento do professor e os contextos nos quais esses conhecimentos são mobilizados (Silver, Clark, Ghousseini, Charalambous & Sealy, 2007). A aprendizagem é interpretada em nossa pesquisa, de forma abrangente incluindo mudanças no conhecimento, nas crenças e/ou nas práticas, e a mesma se desenvolve em contextos relacionados, como o planejamento e a reflexão (Goldsmith, Doerr & Lewis, 2014).

Assumindo como problemática a questão da formação de professores de Matemática e a sua relação com a aprendizagem profissional desses professores, o objetivo desta comunicação é identificar e compreender as possibilidades e limitações nas aprendizagens de duas professoras em decorrência do desenvolvimento de uma aula planejada coletivamente abordando aspectos do conceito de função na perspectiva covariacional. No intuito de operacionalizar o objetivo geral, elencamos as seguintes questões de pesquisa:

- Que aprendizagens podem ser promovidas considerando potencialidades emergentes do desenvolvimento de uma aula planejada coletivamente sobre o conceito de função na perspectiva covariacional?
- Que aprendizagens são decorrentes de limitações no desenvolvimento de uma aula planejada coletivamente?

Enquadramento teórico

A aprendizagem e o conhecimento profissional do professor

Embora se reconheça o papel crucial dos professores na aprendizagem dos estudantes, as abordagens para sua própria formação, tanto inicial como continuada, muitas vezes não os ajudam a desenvolver conhecimentos necessários para a prática (Ball & Even, 2009). Para essas autoras, um elemento central da APP centra-se em atividades críticas da profissão (nas práticas de ensino e aprendizagem). Goldsmith, Doerr & Lewis (2014, p.7) propõe uma definição de aprendizagem do professor que "inclui mudanças no conhecimento, mudanças na prática e mudanças nas disposições ou crenças que poderiam influenciar de forma plausível a prática". Para estes autores, tais mudanças podem ser inferidas, dentre outras formas, a partir de dados transversais sobre os professores, ou a partir de mudanças na sua prática de ensino (em que a definição de "prática" inclui o planejamento e o desenvolvimento das aulas e a reflexão posterior).

Webster-Wright (2009) assume que o conhecimento profissional é imerso, contextual e incorporado na prática; que a APP ocorre a partir da experiência prática e da ação reflexiva sobre essa prática, a partir de contextos que possam representar dilemas, sendo portanto situada, social e construída. A autora destaca ainda a necessidade de focar a APP (assim como a de outros profissionais) em problemas e casos da prática profissional (*aprendizagem profissional baseada na prática*), estruturando contextos que reúnam "artefatos" de seu trabalho diário.

No que se refere ao conhecimento profissional do professor, toma-se a perspectiva de Ponte (1999), que defende uma perspectiva de conhecimento profissional fortemente ancorado na prática letiva, argumentando que o conhecimento dos professores é orientado para a ação. Em sua perspectiva, este conhecimento desdobra-se em quatro domínios: conhecimento dos conteúdos de ensino, conhecimento do currículo, conhecimento do aluno, conhecimento do processo de ensino. Para o autor este conhecimento "relaciona-se de um modo muito estreito com diversos aspectos do conhecimento pessoal e informal do professor da vida quotidiana como o conhecimento do contexto (da escola, da comunidade, da sociedade) e o conhecimento que ele tem de si mesmo (Ponte, 1999, p. 3).Um elemento promissor nesse processo é a constituição das chamadas *tarefas de aprendizagem profissional* – TAP (Ball & Cohen, 1999), as quais, geralmente, são construídas a partir de artefatos da prática, tais como registros do trabalho dos alunos, documentação das aulas (imagens, áudios), materiais curriculares e notas dos professores.

O trabalho com as TAP pode ser desenvolvido de maneira análoga à uma proposta de aula de Matemática na qual os alunos trabalham com tarefas, a qual é organizada em três momentos: introdução, trabalho autônomo dos alunos e discussões coletivas. Para Ponte (2005, p. 15), "os momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma actividade prática assumem um papel fundamental", pois a "aprendizagem decorre assim, sobretudo, não de ouvir directamente o professor ou de fazer esta ou aquela actividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da actividade que realizou".

Para apoiar o professor na promoção ("orquestração") dessas discussões, Stein, Engle, Smith and Hughes (2008) sugerem um modelo pedagógico com cinco práticas (antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos). Na utilização desse modelo, o planejamento da atividade letiva do professor, ao antecipar a atividade do aluno, assume papel fundamental no promoção de discussões matemáticas, uma vez que o professor decide o que ensinará, como ensinará, como organizará a sala de aula, as rotinas a serem utilizadas e como adaptará o ensino aos seus estudantes (Serrazina, 2017).

O conceito de função na perspectiva covariacional

Pensar que grandezas estão envolvidas no estudo de um fenômeno, como elas se alteram e como se comportam em relação às outras variáveis é o cerne do raciocínio covariacional e, consequentemente, da elaboração do conceito de função (Thompson, 1994). O autor destaca que a "imagem estática de função" que conhecemos esconde muitas das realizações intelectuais que nos trouxeram às nossas concepções atuais.

Para Thompson e Carlson (2017, p. 422), "ideias de variação e covariação em valores de variáveis não se encaixam na definição matemática de função atual de hoje", embora sejam epistemologicamente necessárias para que estudantes e professores desenvolvam uma conceitualização util e robusta de função, possibilitando refletir a respeito do "como" as quantidades envolvidas em uma determinada situação estão relacionadas. Para Smith (2008), a gênese do pensamento funcional implica prestar atenção às quantidades que variam e começar a focar-se na relação entre essas quantidades.

Embora a abordagem de função por correspondência seja, tradicionalmente, mais presente nos processos de ensino e de aprendizagem, uma perspectiva de covariação na construção de relações quantitativas pode subsidiar uma concepção de função mais flexível (Smith & Confrey, 1994), baseada em ideias como variação, aproximação e proporcionalidade, fundamentais nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

O processo de formação

O ciclo de trabalho com as TAP adotado em nossa pesquisa incorpora três segmentos de atividades da prática do professor, aqui denominando ciclo PDR (Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão):

(i) planejamento, em pequenos grupos, de propostas de aula envolvendo um conteúdo matemático específico, apresentadas e discutidas, em plenária.

(ii) professor(es) seleciona(m) e desenvolve(m) o(s) plano(s) de aula em uma sala de aula, e outros professores observam e tomam notas.

(iii) formador prepara episódios a partir dos registros gerados na(s) aula(s) desenvolvida(s) para que os professores façam uma análise mais detalhada e discutam em plenária.

Tomando como pressuposto que o contexto de trabalho com o ciclo PDR oferecerá aos participantes da pesquisa vivenciar experiências de APP, propusemos sua utilização como parte de um processo de formação continuada envolvendo estudantes de um Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática em uma universidade brasileira. Esse processo contou com participação de 12 professores e foi realizado em 15 encontros de 3 horas cada. A dinâmica de trabalho foi organizada de modo similar àquela descrita por Ponte, Mata-Pereira, Quaresma & Velez (2017), em um processo de formação conduzido na perspectiva do ensino exploratório, valorizando a orientação para a prática e a reflexão coletiva entre os participantes.

Para essa comunicação, focamos a recolha de dados nos encontros 10 a 14 do processo de formação, nos quais foram desenvolvidos o ciclo PDR. Nos encontros 10 e 11 realizou-se o planejamento (segmento P do ciclo PDR), a apresentação e discussão de três planos de aula (elaborados com base no roteiro apresentado na Figura 1). Após essa etapa, duas professoras desenvolveram dois dos planos de aula, elaborados e escolhos da fase anterior, em suas próprias salas de aula do 2º ano do Ensino Médio (segmento D). Cada professora pôde optar por desenvolver o plano de aula com o qual mais se identificativa e que julgasse mais adequado à sua turma. Ao longo do desenvolvimento das duas aulas, foram produzidos artefatos de prática (por meio de registros em aúdio, vídeo, recolha de documentos), os quais foram utilizados pelo formador para selecionar e elaborar episódios que se mostraram relevantes para os professores refletirem (segmento R).

Roteiro para planejamento da aula

(Adaptado de Serrazina (2017, p. 24))

Orientações gerais: Os pequenos grupos deverão organizar um planejamento de aula para EM, que aborde o conceito de função na perspectiva covariacional, considerando que deverá ser desenvolvida em 100 minutos. Esta aula deverá tomar como princípio a proposta de Stein e colaboradores (2008), ou seja, é importante que a tarefa promova discussões. Os alunos deverão estar organizados em pequenos grupos, mas é fundamental que se tenha um espaço para a discussão em plenária. Além dessas orientações gerais, o roteiro abaixo traz uma organização que deve ser tomada como base para vocês planejarem a aula. Leiam o roteiro antes de iniciarem a preparação.

1° Passo - Escolham uma boa tarefa e, ao mesmo tempo, tracem as aprendizagens que desejam promover nos estudantes.
2° Passo - A partir da tarefa escolhida e, considerando as aprendizagens que desejam promover, estabeleçam os objetivos que pretendam alcançar com a aula planejada.
3° Passo – Busquem antecipar as dificuldades dos estudantes e suas possíveis estratégias de resolução para a tarefa.
4° Passo - Antecipem possíveis perguntas do professor e respostas dos estudantes.
5° Passo - Definam quais recursos (materiais e didáticos) serão necessários para a realização da aula; utilizem o questionamento como apoio à aprendizagem dos estudantes; estabeleçam que os estudantes trabalhem em grupo.
6° Passo – Preparem, além da antecipação já realizada no 3° e 4° passos, as demais práticas propostas por Stein e colaboradores (2008), orientações para o professor que irá ministrar a aula realizar discussões em sala de aula (estratégias para monitoramento, seleção, sequenciamento e conexões entre respostas dos estudantes).
7° Passo - Preparem a tarefa dos estudantes.

Figura 1 – Roteiro para planejamento de aula

Fonte: autores

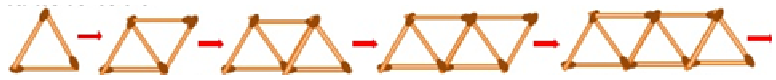
Procedimentos metodológicos

Professores participantes da pesquisa e analisados nessa comunicação

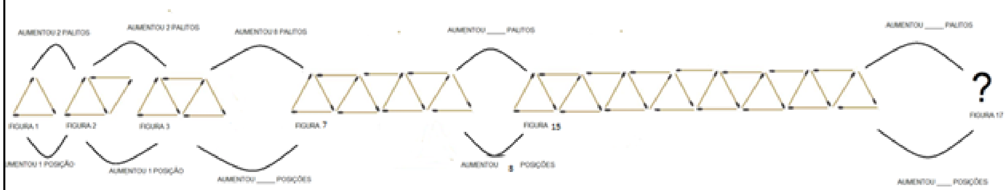
Tomando-se a natureza do objetivo deste estudo, adotou-se uma abordagem de pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994, Esteban, 2010), sob o enfoque teórico interpretativo (Crotty, 1998). Dentre os participantes no processo formativo, selecionamos duas professoras que desenvolveram os planos de aula coletivamente preparados. Além de sua predisposição, outros critérios utilizados na escolha das duas professoras foram: estar atuando no Ensino Médio, poder desenvolver o plano de aula em suas própias turmas e haver compabilidade de horários para que outros professores participantes do processo de formação pudessem acompanhá-las. Tais professoras já atuavam há pelo menos 8 anos na Educação Básica, e relataram, ao longo do processo de formação, estar habituadas a desenvolver suas aulas numa perspectiva tradicional.

Uma delas, Simone (nome fictício), desenvolveu o plano de aula (A) que organizado a partir de uma tarefa (Figura 2) envolvendo uma sequência de figuras. A segunda professora, Cássia (nome fictício) desenvolveu um plano de aula (B) que propunha uma situação envolvendo a mudança nas dimensões de uma embalagem de sabão em pó (Figura 3).

Darlini construiu uma sequência de figuras utilizando palitos de fósforo, dispostos da seguinte maneira:



a) Represente a 6ª e a 7ª figura desta sequência.
b) Quanto palito, no total, tem a 12ª figura?
c) Construa uma tabela que relacione a quantidade de palitos em cada figura, da 1ª até a 7ª figuras.
d) Observe o esquema a seguir e complete as sentenças incompletas.



e) Descreva como o esquema anterior foi completado.
f) Qual a quantidade de palitos da 29ª figura?
g) Uma figura tem 101 palitos qual é sua posição na sequência?
h) Qual dos gráficos abaixo melhor representa a relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos? Justifique.

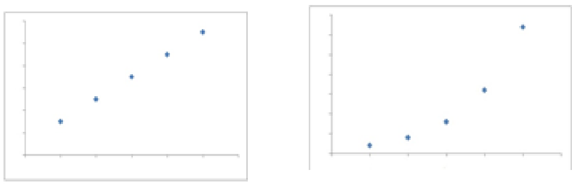


Figura 2 – Tarefa do Plano de aula A

Fonte: autores

Essas caixas são usadas para embalar 1 kg de sabão em pó. A caixa 01 foi o modelo usado por muito tempo e suas dimensões são 4,8cm x 16,8cm de base e 24 cm de altura. A caixa 02 é o modelo atual com as seguintes dimensões: 19cm x 7cm de base e 14,5cm de altura.

[imagens omitidas]

1. A partir das caixas expostas, calcule a área total de cada uma delas.
2. Agora calcule o volume das caixas.
3. Com base nesses cálculos, houve alguma vantagem para a empresa? Qual?
4. E para o consumidor? Qual?
5. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a relação entre o número de caixas produzidas pela empresa e a economia gerada pela mudança no modelo das caixas? Justifique.

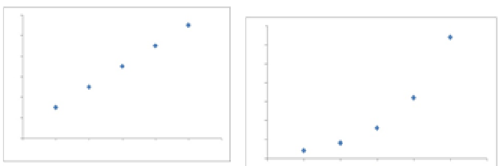


Figura 3 – Tarefa do Plano de aula B

Fonte: autores

Recolha e organização dos dados

Os dados analisados nesta comunicação foram recolhidos em diferentes momentos da implementação do ciclo PDR por meio de:

(i) áudio e protocolos escritos dos grupos de professores em formação na etapa de planejamento de aulas (Plan);
(ii) filmagem da sala de aula durante todo o desenvolvimento da aula por meio de duas câmeras, sendo uma delas voltada para a professora e outra para os estudantes (Des);
(iii) relatórios escritos elaborados pelos professores em formação, que acompanharam a aula na condição de observadores (RelOb), com base em um roteiro (Figura 4);
(iv) filmagem dos relatos de cada uma das professoras ao final da aula, na qual elas registraram suas próprias percepções a respeito desse processo (RelProf).
(v) diário de campo do formador.

Para análise, procuramos identificar, no conjunto de dados recolhidos, elementos que possibilitassem levantar e compreender aprendizagens decorrentes do desenvolvimento do ciclo PDR, considerando-se nas análises, tanto as potencialidades quanto as limitações advindas do desenvolvimento das aulas planejadas coletivamente. Para tal, tomando-se as ideias de Ponte (1999) no que diz respeito ao conhecimento matemático e didático do professor, construimos categorias que emergiram dos dados em relação a três dimensões de análise referentes às aprendizagens decorrentes de: (a) aspectos operacionais; (b) aspectos conceituais e (c) aspectos didáticos.

Na sessão seguinte, apresentamos evidências e interpretações que emergiram dos dados levantados em cada uma das etapas de desenvolvimento do ciclo PDR. Para cada uma das dimensões de análise, destacamos em negrito, ao longo da apresentação dos dados, aspectos que nos possibilitaram compreender as aprendizagens decorrentes desse processo. Trazemos transcrições de diálogos dos professores e registros escritos dos observadores e formador, em *itálico*, de modo a apontar evidências que subsidiaram nossas análises. Entre parênteses indicamos o nome do professor que produziu tal evidência, seguido pelo tipo de procedimento/instrumento que originou tal dado analisado.

Roteiro para observação da aula

(Adaptado de O'Donnell e Taylor (2007))

Orientações gerais:

Leia o roteiro completo antes do início da aula. Durante o desenvolvimento da aula, faça as anotações que julgar necessário de modo que, ao final, possa elaborar um relato da sua observação focando (i) no papel e nas ações do professor e (ii) na participação e envolvimento dos alunos ao longo da aula.

1º) Quanto à gestão do tempo da aula:

a) A aula desenvolvida permitiu a participação e a manifestação dos alunos ou priorizou a fala do professor?
b) A aula desenvolvida permitiu aos alunos compreenderem e se envolverem ao longo da atividade?
c) A aula desenvolvida permitiu discussões nos pequenos grupos e na plenária?

2º) Quanto às ações do professor:

a) O professor explicitou as orientações necessárias e suficientes para que os alunos se envolvessem na aula?
b) O professor utilizou-se de perguntas e afirmações para ajudar os alunos a compreenderem os conceitos envolvidos na aula?
c) O professor utilizou-se de terminologia apropriada (de acordo com a Matemática e com a idade dos estudantes) e uma linguagem adequada para ajudar os alunos a fazer as conexões necessárias?
d) O professor, ao final da plenária, possibilitou sistematização dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa?

3º) Quanto às discussões dos alunos durante a plenária:

a) O professor possibilitou que os alunos apresentassem maneiras diferentes de realização da tarefa (incluindo possíveis estratégias incorretas)?
b) O professor considerou as dificuldades apresentadas pelos alunos e fez intervenções de modo a saná-las?
c) O professor promoveu debate entre as diferentes estratégias apresentadas pelos alunos e em relação às suas dificuldades?

Figura 4 – Roteiro para observação de aula

Fonte: autores

Apresentação e análise dos dados

Aprendizagens relativas aos aspectos operacionais

Na dimensão aspectos operacionais, identificamos elementos relacionados à execução da aula planejada.

A predisposição de ambas em desenvolver uma aula, mesmo em uma contexto aparentemente "intimidador", por contar com a presença de observadores, foi identificada como uma condição favorável para sua aprendizagem. Simone e Cássia relataram, após o desenvolvimento da aula, que estavam bastante apreeensivas com a presença do formador, de outros professores, de câmeras e gravadores. Porém, elas reconheceram a experiência como positiva.

> Nunca me senti tão na berlinda dessa forma. É uma situação ruim. Os alunos estavam um pouco nervosos, apreensivos. É um momento difícil. Agora fico imaginando: poderia ser diferente, mais natural (Cássia, RelProf).
>
> Estava muito nervosa, não sabia o que fazer ou como fazer (Simone, RelProf).

No caso da turma de Simone, os alunos mostraram-se bastante tímidos no início do desenvolvimento da aula, aspecto ressaltado pela própria professora e presente também em relatos dos observadores.

> Quanto à plenária, os alunos se sentiram intimidados, penso que pela presença das câmeras e dos pesquisadores que eram pessoas estranhas a eles (Sobre a aula de Simone, RelOb2).

Essa limitação, porém, fez com que a professora (apesar de também estar apreensiva), procurasse acompanhar a discussão nos grupos, e **procurasse meios de instigar os estudantes a participar** da discussão no momento da plenária. Tal aspecto é presente nos relatos dos observadores da aula.

> [..] a aula permitiu a participação efetiva dos alunos, oportunizando que se manifestassem havendo uma interação entre alunos e professor, estimulando-os a raciocinarem e chegarem a suas conclusões quanto a atividade proposta (Sobre a aula de Simone, RelOb2).

No desenvolvimento de ambas as aulas, as professoras mostram dificuldades em articular o tempo destinado à resolução das tarefas e o tempo para a realização da plenária. Trata-se de um aspecto que, apesar das orientações do formador, não foi levado em conta, de modo sistemático, na etapa de planejamento da aula, possivelmente por conta de não ser uma prática usual no trabalho diário dos professores. Decorrente dessa limitação no desenvolvimento da aula, as professoras **reconhecem a importância de organizar o tempo** dedicado à realização de discussões coletivas.

> Por conta das discussões, o tempo de plenária acabou sendo afetado e a atividade não pôde ser contemplada em sua plenitude (Sobre a aula de Cássia, RelOb3).
>
> Acho que poderia ter sido melhor. Foi uma atividade que eu não programei o tempo direito, né (Cássia, RelProf).

Aprendizagens relativas aos aspectos conceituais

Na proposta de planejamento, a aula deveria contemplar aspectos do conceito de função na perspectiva covariacional, uma vez que essa foi a temática central de todo o processo formativo. Aspectos conceituais relativos ao pensamento de uma função como covariação haviam sido discutidos em diversos encontros anteriores ao ciclo PDR.

Embora Simone não tenha participado da elaboração do plano A (que foi desenvolvido por ela), ela **reconheceu, durante a apresentação dos planos de aula, que o mesmo tinha potencial** para a exploração do pensamento covariacional.

Entretanto, ao realizar intervenções junto às equipes, Simone parece abordá-lo de forma limitada, restrigindo-se a explorar que, quando "aumenta uma posição, aumentam dois palitos". Em alguns momentos, tanto nas intervenções quanto na realização da plenária, parece que ela enfatizava mais a questão da correspondência entre a posição e número de palitos, do que o aspecto variacional da sequência.

Por outro lado, parece que ela **reconhece que uma abordagem covaracional não tem como foco a utilização explicita de fórmulas**, mas a análise coordenada das variações de duas grandezas interdependentes. Assim sendo, ela **reconhece sua limitação** na compreensão dos conceitos matemáticos, e apresenta **predisposição** em aperfeiçoá-los.

> Sei que ainda preciso melhorar muito, aprofundar meus conhecimentos matemáticos e aperfeiçoar novas práticas de ensino, e isso só será possível com muito estudo (Simone, Plen).

O plano de aula B, escolhido por Cássia para ser desenvolvido em sua turma, inicialmente não evidenciava uma relação explícita com a abordagem covariacional do conceito de função. A professora **reconhece** isso no momento da escolha

> Eu fiquei um pouco preocupada com isso. Em princípio quando peguei o plano ele não tinha essa característica [referindo-se à abordagem covariacional].

O formador sugeriu então, antes do seu desenvolvimento, a inserção de um item na tarefa que possibilitaria contornar essa situação (escolher, dentre dois gráficos apresentados, qual melhor representaria a relação entre o número de caixas produzidas pela empresa e a economia gerada pela mudança no modelo das caixas). Embora Cássia **reconheça nesse item potencial para a abordagem variacional**, nas intervenções que realizou junto aos grupos de estudantes, e mesmo durante a condução da plenária, pareceu que ela não estava muito segura em realizar essa abordagem.

Após a aula, Cássia reconhece que as confusões dos estudantes (quanto à escolha do gráfico) só vieram à tona durante a plenária, e que na fase de monitoramento nos grupos ela não identificou que os alunos estavam tendo dúvidas quanto a qual gráfico escolher. Observou-se que, durante a plenária, Cássia opta por não aprofundar a discussão sobre esse item da tarefa e retomá-lo em um próximo momento, possivelmente para que **possa se preparar melhor para sua condução**. A professora evidencia também a necessidade de reformulação do enunciado da questão, que não se mostrou muita clara aos alunos, e algum **ajuste em sua formulação** no intuito de evidenciar, de forma mais significativa, o aspecto covariacional da situação.

> Acredito que a forma como a situação foi apresentada também não permitiu que os alunos contemplassem uma grande variedade de formas de solucionar o problema. Além disso, o pensamento covariacional acabou sendo deixado em segundo plano em alguns momentos (Sobre a aula de Cássia, RelOb3).
>
> Penso que essa atividade como foi planejada não permitiu o desenvolvimento do pensamento covariacional (RelOb4).

Questionada pelo formador sobre qual estratégia utilizar nesse novo momento de discussão acerca da escolha dos gráficos, ela relatou que “pretende simular valores e marcar pontos no plano para realizar a construção do gráfico”. Tal fato evidencia que sua aprendizagem **acerca de aspectos conceituais da abordagem covariacional não estava plenamente consolidada naquele momento**.

Aprendizagens relativas aos aspectos didáticos

Nessa dimensão, identificamos elementos diretamente relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem, com foco na dinâmica de condução da aula realizada pelas professsoras.

Um aspecto limitador, e comum às duas aulas desenvolvidas, foi a não realização de um monitoramento sistemático das resoluções dos estudantes enquanto estes trabalhavam com a tarefas, em grupos. Cássia relata, após a realização da aula, que convidou inicialmente para plenária equipes nas quais os integrantes mostram-se "mais questionadores" enquanto trabalhavam com as tarefas. Porém, teve dificuldade em conduzir a discussão:

> Eu perdi o controle sobre quem queria falar (Cássia, RelProf).

Simone, por sua vez, relatou que observou como cada grupo resolveu a tarefa, e escolheu para iniciar a plenária aquelas equipes que apresentaram soluções diferentes daquelas que ela havia imaginado, **demonstrando não ter realizado uma antecipação dessa dinâmica**. "Eu jamais pensaria daquela forma", disse ela, referindo-se a um grupo que utilizou uma estratégia diferente daquelas previstas.

Em reflexões posteriores ao desenvolvimento da aula, as professoras **evidenciaram sua própria limitação** em conduzir uma aula na perspectiva do ensino exploratório (no intuito de propiciar discussões), **reconhecendo a importância da organização de tais práticas** para a aprendizagem dos estudantes, e **predispondo-se a melhor se preparar para isso**, como evidenciado no trecho a seguir.

> Eu acho que não estava tão preparada na maneira de conduzir. Eu acho que fiquei meio perdida. A gente fica meio perdido quanto ao que fazer, a conduzir a discussão (Simone, RelProf).

Apesar de uma visão negativa quanto ao seu próprio desempenho na condução da aula, na visão dos observadores, **as professoras promoveram discussões** que, embora não sistematizadas, possibilitaram o **envolvimento e a participação dos alunos**.

> A dinâmica proposta por essa aula oportunizou a participação e manifestação dos alunos no desenvolvimento dessa atividade, permitindo as discussões nos grupos e na plenária (Sobre a aula de Cássia, RelOb4).

O reconhecimento das **potencialidades de uma aula desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório** foi um aspecto importante da aprendizagem profissional de ambas as professoras. Assim, Simone destaca que

> Eu penso fazer isso nas outras aulas. Optei por fazer o mestrado por estar insatisfeita com a metodologia tradicional (Simone, RelProf).

Discussão dos resultados

Nossos dados e suas respectivas análises sugerem que, tanto as potencialidades quanto limitações no desenvolvimento de uma aula planejada coletivamente, possibilitaram promover aprendizagens profissionais para as professoras envolvidas. Um aspecto central desse processo foi o fato de estar imerso e incorporado na prática do professor (Ball & Even, 2009; Webster-Wright, 2009), englobando três das suas dimensões, especificamente seus aspectos operacionais, conceituais e didáticos.

Organizamos os elementos destacados em negrito na seção anterior, no intuito de responder às nossas questões de pesquisa, procurando reconhecer, a partir deles, que aprendizagens profissionais foram proporcionadas aos professores envolvidos a partir de potencialidades e limitações identificadas no desenvolvimento da aula.

No que diz respeito às aprendizagens relativas aos aspectos operacionais, foram evidenciados, na fase de planejamento do ciclo PDR, aspectos relativos à possibilidade em escolher o plano de aula e a predisposição em desenvolver a aula mesmo na presença de observadores, estando em consonância com a realidade de seu local de trabalho e com as responsabilidades profissionais (Webster-Wright, 2009). Tais aspectos corrobaram a perspectiva de que professores podem ser estimulados a continuar a aprender de uma maneira autêntica ao pensar propostas articuladas com expectativas que emergem de seus contextos de trabalho.

No desenvolvimento da aula, apesar de estarem apreensivas, as professoras buscaram envolver os estudantes no desenvolvendo da tarefa, instigando-os a expressar-se e participar das discussões.. Os desafios enfrentandos ao se colocar em prática um modelo de aula que intenta "dar voz" aos estudantes e promover discussões matemáticas diferente da prática expositiva ao qual as professoras estavam habituadas, mostraram-se como potencializadores para sua aprendizagem. Esse "desequilíbrio produtivo" (Ball & Cohen, 1999) estimulou a reconsideração sobre o modo como atuavam.

A dificuldade em articular a questão da gestão do tempo levou as professoras a explicitar, em momento de reflexão, o reconhecimento da importância da prática de antecipação (Stein et al, 2008) para a orquestração de discussões matemáticas. Inferimos, por meio de suas ações e reflexões, uma reconceitualização acerca dos processos de aprendizagem matemática, com mudança de ênfase do desenvolvimento passivo para uma aprendizagem ativa. O reconhecimento da importância do planejamento, atrelado à escolha adequada de tarefas e à antecipação das soluções dos estudantes como meio para melhor gerir a aula (Serrazina, 2017), ainda que tenha se manisfestado em nossas análises como limitações da própria prática das professoras, evidenciam-se como aprendizagens profissionais decorrentes da experiência com o ciclo PDR.

Na dimensão dos aspectos conceituais, levantamos como um dos indícios da aprendizagem profissional das professoras, a identificação de potencialidades (ou não) dos planos de aula quanto a mobilização do conceito de função na perspectiva covariacional.

Uma das limitações identificadas na prática de Simone durante o desenvolvimento da aula foi a ênfase dada por ela, em suas intervenções nos grupos, no que se referia à questão da correspondência entre a posição e número de palitos, ao invés do aspecto variacional da sequência. Tais ações são decorrentes, possivelmente, do fato que essa abordagem é tradicionalmente a única presente nos processos de ensino e aprendizagem (Smith & Confrey, 1994).

Destacamos, como consequência dessas limitações no desenvolvimento da aula, o reconhecimento, por parte das professoras, da necessidade de ampliar suas compreensões e aprofundar o estudo a respeito do raciocínio covariacional, bem como em preparar-se melhor para conduzir uma discussão matemática. Essa “auto-identificação” de uma dificuldade ou impasse que precisa ser resolvido mostrou-se como promissora para a aprendizagem dessas professoras (Silver et al., 2007).

Na direção do que aponta Webster-Wright (2009), a investigação dessas experiências vividas de continuar a aprender como profissionais são fundamentais para avançar na compreensão de práticas promissoras para a aprendizagem profissional autêntica. Assim, acerca das aprendizagens relativas aos aspectos conceituais, reconhecemos que a participação no ciclo PDR ofereceu a essas professoras possibilidades para desenvolver e (re)significar conhecimentos matemáticos relativos ao conceito de função sob a perspectiva covariacional, necessários à prática pedagógica (Silver et al, 2007). Tal fato é evidenciado por suas ações no desenvolvimento da aula ao explorar aspectos relacionados ao “como” as quantidades envolvidas na situação estavam relacionadas (Thompson & Carlson, 2017), sem priorizar (mas levando em conta também) uma abordagem meramente algébrica.

Por fim, na dimensão dos aspectos didáticos, destacamos como indícios de aprendizagem profissional acerca da importância da organização de práticas de antecipação, monitoramento, sequenciamento e estabelecimento de conexões entre as respostas dos alunos (Stein et al., 2008). Apesar de suas limitações na aplicação sistemática de tais práticas (por se tratar de algo que, para elas, era novo), as professoras souberam utilizar o trabalho desenvolvido nos grupos de estudantes para a condução da plenária.

Reconhecemos nas ações das professoras durante suas aulas, a mobilização de elementos presentes na dinâmica de trabalho utilizada pelo formador durante o processo de formação, conduzido na perspectiva do ensino exploratório. Assim, tanto nos momentos de acompanhamento do trabalho nos grupos, quanto na condução da plenária, as professoras procuravam valorizar o trabalho dos alunos (Ponte et al., 2017), apesar do reconhecimento das próprias limitações, naquele momento, em conduzir uma aula que propicie discussões matemáticas.

Além disso, os dados evidenciam a valorização por parte das professoras, tanto em suas ações durante as aulas quanto nos momentos de reflexão após as aulas, no que se refere à importância de práticas de condução de discussões coletivas (Stein et al, 2008) para a compreensão e aprendizagem dos estudantes (Ponte, 2005, 2017). Isso corroba o ciclo PDR como oportunidade para conhecer novas abordagens para o ensino e a aprendizagem da Matemática, construindo novas perspectivas sobre a sua atuação enquanto professor (Ball & Cohen, 1999).

Conclusões e Considerações finais

Conforme aponta Webster-Wright (2009), ainda há poucos estudos sistemáticos, com base em dados empíricos, que examinem como os profissionais aprendem na e a partir de sua própria experiência. Uma das contribuições que entendemos emergir dos dados e análoses neste trabalho segue justamente nessa direção.

O ciclo PDR, enquanto proposta de trabalho com tarefas de aprendizagem (TAP) (Ball & Cohen, 1999) que incorporam esses três segmentos de atividades profissionais dos professores, mostrou-se como uma proposta promissora para aprendizagem profisssional situada e imersa na prática profissional. Entede-se que tais aprendizagens ocorreram tanto ao se considerar as potencialidades como as limitações decorrentes do processo formativo realizado.

Em termos das aprendizagens promovidas que foram originadas em potencialidades emergentes do desenvolvimento da aula planejada coletivamente, identificamos: a procura de meios para instigar os estudantes a participar das discussões; o reconhecimento do potencial do plano de aula escolhido para a abordagem covariacional; o reconhecimento da importância da organização de práticas de discussões matemáticas para a aprendizagem dos estudantes.

Por outro lado, há de se consderar também, as aprendizagens profissionais decorrentes de limitações que ocorreram ao longo do desenvolvimento da aula, como: o reconhecimento da importância de se organizar o tempo dedicado à realização de discussões coletivas e de se preparar melhor para sua condução; a predisposição em aperfeiçoar a compreensão sobre os conteúdos matemáticos envolvidos; o reconhecimento de potencialidades de uma aula desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório.

Finalizamos indicando que, a partir de nosso estudo, pudemos ilustrar algumas possibilidades para que os professores tomem consciencia do quanto se pode aprender ao tomar a sala de aula de matemática como espaço de aprendizagem profissional. Isso nos pareceu potencializado pela abordagem adotado no processo formativo, quer seja, tarefas que favoreçam aprendizagens incorporadas e construídas na prática e partir dela.

Referências

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing Practice, Developing Practitioners: Toward a Practice-Based Theory of Professional Education. In: Sykes, G. & Darling-Hammond, L. (Eds.). *Teaching as the learning profession*: Handbook of policy and practice. San Francisco, CA: Jossey Bass, pp. 3-32.

Ball, D. L., & Even, R. (2009). Strengthening Practice in and Research on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: Next Steps. In: EVEN, R.; BALL, D. L. (Eds.). The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: the 15th. ICMI study. Springer, pp. 255-257.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Charalambous, Y. C., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathematics Education: Unpacking and Understanding a Complex Relationship Linking Teacher Knowledge, Teaching, and Learning. In: English, L. D. and Kirshner, D. Handbook of international research in mathematics education, 3rd Edition, New York, pp. 19-59.

Crotty, M. (1998). The foundations of social research: meaning and perspective in the research process. London: Sage.

Esteban, M. P. S. (2010). Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições. Porto Alegre: Artmed.

Goldsmith, L. T; Doerr, H. M. & Lewis, C. C. (2014) Mathematics teachers' learning: a conceptual framework and synthesis of research. Journal of Mathematics Teacher Education, 17, pp. 5–36.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: TAVARES, J. et al. (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE*. Porto: SPCE, p. 59-72.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, pp. 11-34.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem em Matemática. In: GTI (Ed.). A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, pp. 33-56.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. Quadrante, 25 (2), pp.77-98.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. Relime, 20 (1), pp. 71-94.

Serrazina, L.(2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In: GTI (Ed.). A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, pp. 9-32.

Silver., E. A., Clark, L. M., Ghousseini, H. N., Charalambous, Y. C., & Sealy, J. T. (2007) Where is the mathematics? Examining teachers'mathematical learning opportunities in practice-basedprofessional learning tasks. Journal of Mathematics Teacher Education, 10 (4-6), pp. 261–277.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), Algebra in the early years. Reston, VA: NCTM, pp. 133-160.

Smith, E., & Confrey, J. (1994). Multiplicative structures and the development of logarithms:

What was lost by the invention of function. In: Harel, G., & Confrey, J. (Eds.). The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, p. 333-360, 1994.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. Mathematical Thinking and Learning, 10 (4), pp. 313-340.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H., & Kaput, J. J. (Eds.). Research in Collegiate Mathematics Education I. Providence: American Mathematical Society, pp.21–44.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In: Cai, J. (Ed.). Compendium for research in mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 421-456.

Webster-Wright, A. (2009) Reframing Professional Development Through Understanding Authentic Professional Learning. Review of Educational Research, 79, pp. 702-739.

CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS E DIDÁTICOS DE PROFESSORES ACERCA DE PADRÕES E REGULARIDADES: REFLEXÕES DE UMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA A PARTIR DA PRÁTICA DA SALA DE AULA

Marcia Aguiar

Universidade Federal do ABC, Brasil

marcia.aguiar@ufabc.edu.br

Alessandro Jacques Ribeiro

Universidade Federal do ABC, Brasil

alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Esta comunicação busca *investigar os conhecimentos matemáticos e didáticos mobilizados por professores de matemática ao preparar, desenvolver e analisar coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades em uma turma do ensino médio no Brasil (alunos de 15 a 18 anos).* Para isso, apresentamos o contexto no qual a pesquisa se desenvolveu, um processo de formação de professores de matemática que teve por objetivo mobilizar e (re)construir conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores acerca de padrões e regularidades. O processo formativo ocorreu por meio de tarefas de aprendizagem profissional preparadas de modo que propiciasse discussões coletivas sobre a temática em questão. A pesquisa é qualitativa-interpretativa e os dados foram recolhidos por gravação em áudio e vídeo, e por meio de documentos escritos produzidos pelos participantes. Os resultados mostram que as tarefas de aprendizagem profissional elaboradas em torno de registros de prática de uma aula ministrada para o ensino médio, assim como as discussões coletivas vivenciadas pelos participantes, possibilitaram o desenvolvimento de novos conhecimentos profissionais nos professores no que se refere, por exemplo, ao trabalho coletivo de planificação de aulas e a condução de discussões coletivas com seus estudantes.

Palavras-chave: Ensino de Álgebra, Formação de professores, Tarefas de Aprendizagem Profissional, Conhecimento matemático, Conhecimento didático.

Introdução

Desvelar e compreender os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores (Ponte, 1999) constitui um importante campo de pesquisa na formação de professores e, em especial, quando se considera a prática como ponto de partida (Lampert, 2010) para a construção do conhecimento profissional docente. Pesquisas apontam a relevância de investigar o papel que tarefas de aprendizagem profissional (TAP) (Ball & Cohen, 1999; Smith, 2001) podem assumir como mediadoras na construção de conhecimentos dos professores a partir de suas experiências em sala de aula.

No que tange ao conhecimento específico matemático, situamos nossa investigação no campo do ensino de Álgebra, o qual carece de pesquisas que expliquem e busquem apresentar caminhos para se superar dificuldades encontradas pelos professores nesta temática (Doerr, 2004; Ribeiro, 2012; Yilmaz & Erbas, 2015). Em especial, na presente comunicação, tematizamos o trabalho com padrões e regularidades por entender ser este um caminho promissor para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Mason, 1996; Twohill, 2015; Vale & Pimentel, 2015).

Com isso, o objetivo é *investigar os conhecimentos matemáticos e didáticos mobilizados por professores de matemática ao preparar, desenvolver e analisar coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades em uma turma do ensino médio no Brasil (alunos de 15 a 18 anos)*. Para tal, desenvolvemos uma pesquisa a partir de um processo de formação contínua para professores de matemática que fora constituído por TAP que tinham a intensionalidade de propiciar discussões coletivas acerca dos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores a respeito da noção de padrões e regularidades no ensino da álgebra, com vistas a responder às seguintes questões de pesquisa: (i) De que maneira as TAP permitem e favorecem o grupo de professores a investigar o papel e as ações de uma professora ao desenvolver uma aula, elaborada coletivamente pelo grupo sobre padrões e regularidades, em uma turma do ensino médio? (ii) Qual o papel das discussões coletivas na compreensão e (re)construção de conhecimentos matemáticos e didáticos de um grupo de professores ao preparar, desenvolver e refletir sobre padrões e regularidades em uma aula de matemática no ensino médio?

Enquadramento teórico

Aprendizagem docente e Tarefas de aprendizagem profissional

A aprendizagem profissional dos professores ancorada na prática (Ball & Cohen, 1999; Lampert, 2010; Smith, 2001) e facilitadora de uma “aprendizagem profissional autêntica” (Webster-Wright, 2009). No que tange as formas de aprendizagem profissional em uma perspectiva coletiva, as pesquisas de Ball e Cohen (1999), e White, Jaworski, Agudelo-Valderrama e Gooya, (2013), ressaltam a criação de oportunidades para que os professores possam aprender uns com os outros, de modo a romper com um tipo de isolamento muito presente e usual quando se considera o trabalho do professor, ampliando assim, oportunidades para que eles possam passar a aprender de forma coletiva (Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014).

Assim, a aprendizagem profissional docente contempla em seu núcleo as TAP como mediadoras da construção de conhecimentos profissionais docentes. As TAP, entendidas aqui como “tarefas que envolvem professores no trabalho do ensino, podem ser desenvolvidas a fim de encontrar um objetivo específico para a aprendizagem do professor e levam em consideração o conhecimento prévio e a experiência que os professores trazem de sua atividade” (Ball & Cohen, 1999, p. 27).

Nesse sentido, o processo formativo tende a propiciar oportunidades de aprendizagem profissional quando propõe o “uso de ciclos interativos de planejamento, desenvolvimento e reflexão [de aulas]" (Bruce, Esmonde, Ross, Dookie, & Beatty, 2010). Assim, essas oportunidades de aprendizagem profissional serão compostas: (i) pelas TAP elaboradas com a finalidade de propiciar aprendizagens aos professores em uma situação específica (Ball & Cohen, 1999), (ii) pelas discussões matemáticas e didáticas entre os professores (Ponte, 2017) e (iii) pelo uso de registros de prática (Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014), tais como, registros das resoluções dos alunos e transcrições das discussões em sala de aula. Tais recursos propiciam trazer para o contexto de processos formativos, aspectos da prática da sala de aula como um importante componente das TAP (Smith, 2001).

Conhecimentos matemáticos e didáticos do professor

Na perspectiva do conhecimento profissional docente, diferentes modelos teóricos foram desenvolvidos no campo da Educação Matemática tomando por base o conceito de *"Pedagogical Content Knowledge" (PCK)* (Shulman, 1986). Esta noção tem constituído uma importante referência para pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento, que a aprofundaram e/ou a adaptaram em suas investigações.

Em específico, na presente pesquisa interessa-nos a perspectiva de Ponte (1999), a qual discute uma perspectiva de conhecimento profissional docente fortemente ancorado na prática letiva, argumentando que o conhecimento dos professores é orientado para a ação. Para o autor, este conhecimento

> relaciona-se de um modo muito estreito com diversos aspectos do conhecimento pessoal e informal do professor da vida quotidiana como o conhecimento do contexto (da escola, da comunidade, da sociedade) e o conhecimento que ele tem de si mesmo (Ponte, 1999, p. 3).

Em sua perspectiva, o conhecimento profissional docente desdobra-se em diversos domínios, no qual se inclui: (1) o conhecimento da Matemática , incluindo os processos de raciocínio; (2) o conhecimento do aluno; e (3) o conhecimento do processo instrucional, incluindo preparação, condução e avaliação da prática lectiva.

No que se refere aos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores sobre o tema padrões e regularidades e suas conexões com o ensino de matemática, há de se considerar a relevância dos professores mobilizarem conhecimentos que possibilitem compreender o pensamento algébrico dos estudantes e subsidiar a superação de dificuldades que estes normalmente possuem no que tange à generalização de padrões numéricos e geométricos (Mason, 1996; Branco, 2008; Orton & Orton, 2005). De modo a mobilizarem conhecimentos matemáticos e didáticos acerca da temática em questão, há de se considerar em processos formativos, TAP que contemplem situações matemáticas envolvendo diferentes tipos de padrões nos quais sejam demandadas expressões algébricas que os generalizem (Zazkis & Liljedahl, 2002). Branco e Ponte (2014) discutem tarefas que podem ser desenvolvidas com professores, as quais favoreçam a articulação entre o conteúdo e a pedagogia, utilizando-se de sequências pictóricas como um território fértil para se construir generalizações e, consequentemente, promover o pensamento algébrico. Dessa maneira, as TAP foram elaboradas com o intuito de propiciar aos professores discussões matemáticas e didáticas acerca da noção de padrões e regularidades dentro do ensino básico.

Metodologia da pesquisa

Contexto do estudo. O processo formativo no qual os dados foram recolhidos foi desenvolvido ao longo de 15 encontros semanais de 4 horas, e tinha por objetivo geral desenvolver e ampliar conhecimentos matemáticos e didáticos acerca das noções de padrões e regularidades na matemática escolar. Os encontros foram dinamizados pelo primeiro e segundo autores dessa comunicação e conjugavam momentos de trabalhos (i) individuais, (ii) em pequenos grupos e (iii) em discussões coletivas em plenária. Os participantes eram professores de matemática (formados e em formação inicial), tendo sido a maior parte das atividades realizada na universidade, com 3 encontros realizados em escolas de educação básica. As sessões de trabalho contemplavam momentos de estudo teórico (totalizando 8 horas) e momentos de trabalho *hands on*, os quais eram mediados por TAP elaboradas pelos dinamizadores dos encontros. O processo formativo continha 5 TAP, das quais 3 são tratadas nesta comunicação. Participaram desse processo 3 formadores.

As 3 TAP foram escolhidas para esta comunicação porque elas formaram o ciclo interativo de planejamento, desenvolvimento e reflexão de aulas elaboradas coletivamente pelo grupo de professores, doravante, *Ciclo PDR*. As 3 TAP tinham a intenção de promover discussões matemáticas e didáticas a respeito do tema escolhido. Cada TAP possui o seguinte formato:

3ª TAP: Preparação coletiva de dois planos de aulas para o ensino médio a respeito das noções de padrões e regularidades e a seleção de um destes planos de aula para ser ministrado posteriormente.

4ª TAP: Desenvolvimento da aula selecionada em uma turma do ensino médio, por um dos professores participantes.

5ª TAP: Reflexão coletiva, mediada por registros de prática produzidos na aula desenvolvida, focando o papel e as ações do professor.

Participantes e desenvolvimento das TAP. Os participantes do estudo eram professores que ensinam matemática na escola básica brasileira na região metropolitana de São Paulo. Durante o desenvolvimento das 3 TAP discutidas nessa comunicação, contamos com a participação de 33 professores, sendo 7 em formação inicial e 26 formados (5 destes sem experiência em sala de aula). A professora que ministrou a aula tinha 8 anos de formada e, na altura, atuava no ensino médio em uma escola da rede pública. Para a realização das TAP os professores foram divididos em 6 grupos (4 a 6 participantes), organização feita pelos formadores de modo que, em todos os grupos, houvesse (i) professores com e sem experiência em sala de aula e (ii) professores formados e em formação inicial.

Método de pesquisa e recolha de dados. O presente estudo segue uma abordagem de pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), sob o paradigma interpretativo (Crotty, 1998). Para as análises foram considerados: (i) protocolos que são registros escritos das discussões dos pequenos grupos de professores; (ii) os áudios das discussões nos pequenos grupos; e (iii) o vídeo da discussão coletiva. As gravações em áudio e vídeo foram analisadas na íntegra, em articulação com os protocolos produzidos, e propiciaram a organização e a análise dos dados de modo a identificar os conhecimentos matemáticos e didáticos acerca das noções de padrões e regularidades contempladas nas TAP.

As produções de protocolos e de áudios das discussões em pequenos grupos, assim como os vídeos das discussões em plenárias serão analisados segundo o trabalho de Ball e Cohen (1999) a respeito das potencialidades das TAP, as pesquisas de Ponte (2017) e Stein *et al* (2008) para investigar as discussões matemáticas e didáticas que foram propiciadas e com as ideias de Mason (1996) em relação a noção de padrões e regularidades.

Resultados

Apresentamos o caminho desenvolvido pelos professores ao longo das 3 TAP. Iniciamos contextualizando a preparação das aulas (3ª TAP), em seguida, mostramos de que modo os registros de prática do desenvolvimento da aula (4ª TAP) subsidiaram a construção da 5ª TAP e, consequentemente, as discussões e reflexões que emergiram na plenária. Iniciamos com os apontamentos da 3ª TAP.

3ª TAP – Planejamento da aula. Iniciou-se a 3ª TAP com os formadores apresentando o roteiro que fora elaborado para o planejamento das aulas (Serrazina, 2017). O roteiro para o planejamento das aulas baseava-se em elaborar a tarefa matemática, preparar a gestão de aula, antecipar as possíveis estratégias de resoluções e dificuldades dos alunos e elaborar possíveis questionamentos do professor para com os alunos.

De acordo com a experiência profissional de cada grupo, foi indicado que dois grupos elaborassem aulas para o ensino médio e, os demais grupos, para os anos finais do ensino fundamental (alunos de 11 a 15 anos). Nessa comunicação, discutimos e analisamos os dados do *Ciclo PDR* referente ao plano de aula do ensino médio.

O plano de aula elaborado deveria contemplar três momentos para o trabalho dos estudantes: individual, discussão em pequenos grupos e discussão coletiva. Estes momentos deveriam ser acompanhados e dinamizados pelo professor, o qual, para favorecer as discussões coletivas, deveria se utilizar das cinco práticas para conduzir discussões coletivas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). As 5 práticas descritas por Stein *et al* (2008) são: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e conectar. Sendo que o antecipar deve ocorrer no planejamento da aula, no qual o professor deve antecipar as possíveis estratégias de resolução e dificuldades dos alunos. Em sala de aula, quando os alunos estiverem reunidos em pequenos grupos, o professor vai monitorar as discussões para selecionar e sequenciar os grupos que deveram apresentar as suas resoluções para a sala inteira. No momento das apresentações, o professor deve conectar as resoluções para sintetizar as discussões ocorridas.

Os planos elaborados foram apresentados, discutidos e selecionados. Por fim, o plano de aula escolhido foi *“Investigando padrões por meio do jogo Torre de Hanói”* (Apêndice I). No planejamento deste plano de aula, destacamos dois objetivos que são representativos no processo de análise do *Ciclo PDR* que são:

> Associar expressões algébricas;
> Promover solução correta dos desafios (objetivos escritos no plano de aula).

Assim, o grupo espera que os alunos encontrem mais de uma generalização a partir da percepção do padrão e, ao mesmo tempo, que existe a solução correta. Por outro lado, ao escreverem as possíveis estratégias de resolução e dificuldades dos alunos, eles declararam nas estratégias:

> Associação de adição e multiplicação entre o número de discos e número de movimentos;

O que não fica claro qual é o tipo de resolução esperada, mas essa estratégia parece se relacionar com o primeiro objetivo enquanto que a única dificuldade é:

> Em um primeiro momento, perceber e relacionar o número mínimo de movimentos com as potências de base 2.

Aqui a única dificuldade seria encontrar as potências de 2, o que remete em escrever a generalização como a função exponencial tão conhecida para este jogo.

Neste planejamento, os professores não mencionam as possíveis dificuldades dos alunos em perceber o padrão do jogo e escrever uma generalização, fato mencionado em várias pesquisas sobre o tema (Orton & Orton, 2005; Branco, 2008). Vamos observar os registros da aula e perceber como essas ideias se desenvolveram na aula.

4ª TAP - O Desenvolvimento da aula e os seus registros. A 4ª TAP foi desenvolvida pela professora pertencente ao próprio grupo que elaborou o plano de aula. A professora desenvolveu a aula em sua turma do 3º ano do ensino médio. Durante a aula, estiveram presentes dois formadores filmando e observando a aula. Participaram da aula 33 alunos que foram divididos em 3 grupos de 5 alunos (grupos 3A, 3B e 3C) e 3 grupos de 6 alunos (grupos 3D, 3E e 3F). A aula aconteceu na própria sala dos alunos e teve duração de 150 minutos.

Para essa comunicação, apresentamos dois episódios (2, 5) desta aula e a entrevista com a professora após o término da aula. O episódio 2 (Figura 1) corresponde ao grupo 3F explicando a expressão algébrica encontrada por eles. A escolha do episódio 2 é devido ao fato dessa expressão algébrica não ter sido antecipada pela professora. O episódio 5 (Figura 3) refere-se à professora finalizando a discussão acerca das resoluções dos alunos. Esses episódios e a entrevista tinham por finalidade subsidiar a construção da 5ª TAP (Apêndice II), a qual (i) utiliza tais registros de prática e (ii) tem como objetivo subsidiar a reflexão coletiva sobre o papel e as ações da professora durante a aula.

Na sala de aula, durante a discussão coletiva, a professora conversava com a turma e perguntou ao grupo 3F como eles encontraram a expressão algébrica. Na Figura 1 temos a transcrição da conversa da professora com os alunos do grupo 3F:

E13F (Estudante 1 do grupo 3F): Professora coloca assim *n* igual a n_a vezes 2 mais 1. [a professora escreve na lousa $n = n_a \times 2 + 1$].
PA (Professora): E o gráfico de vocês ficou como? Oho! Acho que deu alguma coisa errada aqui e não deu certo. Vocês testaram? Deu certo?
E23F: Deu certo! Quer fazer? Pode fazer.
PA: Eu quero. Então vamos lá. A gente vai fazer como? Discos e movimentos. [A professora constrói uma tabela (Figura 2) na lousa com duas colunas: discos e movimentos.].
PA: Vamos fazer só para 3, 4 e 5 [discos]. O que é esse n_a de vocês?
E23F: Número de movimentos anterior.
PA: O que eu tenho que escrever aqui [aponta pra primeira linha da tabela na coluna movimentos]
E23F: 3 vezes 2 + 1.
PA: Esse 3 é o quê ?
E33F: Número de movimentos.
E23F: Não, número de discos. 7 é o número de movimentos.
PA: Aqui [na linha abaixo] 4 vezes 2 + 1.
E33F: Não professora. Aí é 7 [no lugar do 4 é 7].
PA: Ué! Mas vocês não falaram que era o número de discos?
E23F: Não. Aí é 7!
PA: E porque aqui é 3? [aponta na linha acima para o número 3]
E23F: Porque pra mover 2 [discos] a gente faz 3 movimentos.
PA: Então esse 7 é o 7 daqui. Então 7 x 2 + 1 = 15. Aqui coloca 15 e faz 15 x 2 + 1 = 31.
E23F: É!
PA: Caramba! Deu certo! Então poderia ser essa não?

Figura 1 – Transcrição do Episódio 2

Eis a tabela que a professora construiu na lousa.

Discos	Movimentos
3	3 x 2 + 1 = 7
4	7 x 2 + 1 = 15
5	15 x 2 + 1 = 31

Figura 2 – A tabela que a professora construiu na lousa

Embora, no planejamento da aula, estava escrito como possível estratégia de resolução dos alunos: Associação de adição e multiplicação entre o número de discos e número de movimentos, o que poderia indicar a resolução apresentada pelo grupo 3F (Figura 1), não era. A professora foi surpreendida pelos alunos, não esperava essa resposta. No momento, a sua atitude foi usar a representação tabular para discutir com os alunos a validação da expressão algébrica para generalizar o padrão, isso mostra o seu conhecimento didático sobre o tema.

Logo após essa conversa, a professora perguntou ao grupo 3A como eles haviam resolvido a questão. Eles explicaram que encontraram a expressão $f(x) = 2^n - 1$. Essas foram as duas respostas que apareceram na sala. Após as apresentações, a professora finaliza essa discussão (Figura 3).

PA: Basicamente, acho que vocês chegaram numa expressão algébrica parecida com isso aí [na lousa está projetado a expressão: $2^n - 1$]. Mas se a pessoa tivesse usado outra que desse certo... Essa aqui não vale? [aponta para a expressão $n = n_a \times 2 + 1$ que está escrita na lousa]. Existem outras respostas?
E23F: Professora são quantas respostas?
PA: Depende. Você pode fazer quantas você quiser, desde que todas sejam válidas. Não importa o caminho que você vai chegar desde que todos cheguem no mesmo caminho.

Figura 3 – Transcrição do Episódio 5

Nesta finalização da discussão, a professora não relacionou as duas generalizações encontradas. Por outro lado, ao explicar para o aluno que podem existir várias respostas, na verdade, ela estava dizendo que você pode encontrar várias generalizações para o mesmo padrão. Ao dizer que "não importa o caminho que você vai chegar desde que todos cheguem no mesmo caminho" temos duas interpretações: a primeira, está subentendido que os caminhos para observar o padrão podem ser distintos mas todos os caminhos devem chegar em uma generalização. Por outro lado, no processo pedagógico descobrir cada caminho e discutí-los com a sala faz parte de como ensinar a perceber os padrões e como desenvolver esse raciocínio.

Ao final da aula, a professora foi entrevistada pelo formador e declarou que foi marcante para ela ter sido surpreendida com a resposta do grupo 3F (Figura 1).

> **PA:** É! E eu não tinha percebido. Na plenária, eu não sei se chega a sistematizar [falando sobre a sua atuação na aula]. Eu não acho que tenha sistematização. Eu acho que ficou o certo e o errado. [...]. [falando sobre o que faltou na aula] A parte de explorar outras soluções. Eu joguei várias vezes antes, mas em nenhum momento eu cheguei em outra solução, e pode ser que exista outra.

Com tais questionamentos, o formador F2 teve a intenção de que a professora refletisse sobre a sua aula antes da análise que seria realizada coletivamente pelo grupo de professores, na 5ª TAP. A professora percebeu que pode-se encontrar outras generalizações devido a outras maneiras de olhar, no caso, o padrão do jogo.

5ª TAP – A Reflexão da aula. A 5ª TAP foi construída a partir de registros da aula desenvolvida na 4ª TAP. A 5ª TAP (Apêndice II) continha um roteiro com os registros da aula (protocolos e episódios) e questões para nortear as discussões entre os professores. A 5ª TAP foi desenvolvida em dois momentos: (i) discussão em pequenos grupos e (ii) discussão coletiva. Na discussão em pequenos grupos, cada grupo tinha um roteiro e um computador com os episódios da aula à disposição. No momento da discussão em plenária, os formadores dinamizaram as discussões utilizando-se do mesmo roteiro que fora trabalhado nos pequenos grupos e assistiram coletivamente os episódios.

Apresentamos nas análises, protocolo do trabalho nos pequenos grupos, as transcrições das discussões referentes aos episódios assistidos e a entrevista realizada com a professora após o desenvolvimento da 5ª TAP.

(i) Discussões coletivas nos pequenos grupos

Todos os grupos, exceto um, declararam que a atuação da professora foi muito boa e que ela soube relacionar as diferentes estratégias dos alunos. Um grupo, no entanto, expressou que a professora não estabeleceu relações entre as estratégias apresentadas pelos alunos (Figura 4):

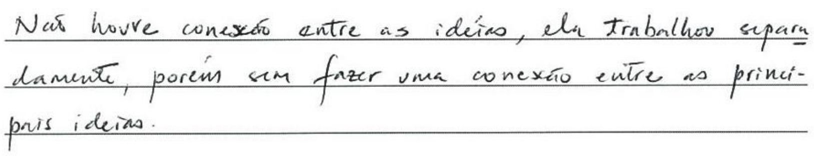

Não houve conexão entre as idéias, ela trabalhou separadamente, porém sem fazer uma conexão entre as principais idéias.

Figura 4 – Protocolo do grupo

Como isso, embora tenha sido a opinião de um único grupo, essa questão acaba por não aparecer na discussão coletiva, o que entendemos como uma perda. Teria sido muito importante discutir com os professores a relação entre as duas expressões algébricas que surgiram nas resoluções dos alunos e o significado de cada uma delas. Percebemos que os professores não aprofundavam as discussões “propriamente” matemáticas, talvez por incompreensão ou por insegurança sobre seus conhecimentos. Os formadores sempre tentavam fazer com que os professores falassem da matemática que eles iriam ensinar, mas nem sempre isso surtia efeito.

(ii) Discussões coletivas em plenária

Na discussão coletiva, os formadores foram recuperando cada item discutido nos pequenos grupos, dando a oportunidade para que todos se manifestassem. O objetivo com isso era perceber quais conhecimentos matemáticos e didáticos estavam sendo mobilizados com essa tarefa. Os professores, ao assistirem os episódios foram instigados pelos formadores a refletirem e debaterem sobre a atuação da professora. Apresentamos trechos dessas reflexões.

Discussão dos professores após assistirem ao episódio 2 (Figura 1)

> **P2 (Professor 2):** Eu acho que ficou clara a explicação da estratégia que eles [os alunos] utilizaram porque ela [a professora] foi escrevendo na lousa. Se tivesse sido só uma explicação verbal acho que não teria conseguido entender o raciocínio deles.

> **P1:** É que ela conduz! Eles explicam, mas ela conduz! Essa condução organiza o raciocínio.
>
> **P4:** Eu achei até que na hora que ela deixou eles errarem foi importante também. Porque eles colocaram 3, e eles falaram que era número de discos, e eles mesmos perceberam e corrigiram. Eu achei aquela postura dela importante para eles perceberem o erro que eles estavam cometendo.

Observa-se que os professores não discutem a matemática envolvida na conversa entre a professora e os alunos. Por outro lado, o grupo acaba validando a ação didática da professora, de buscar a representação tabular para verificar, com os alunos, se a generalização encontrada era válida.

Em outro momento da discussão a respeito da ação da professora, o professor P3 salienta:

> **P3:** Eu acho interessante que ela sempre explicou colocando coisas que os alunos trouxeram. Dificilmente, ela colocou coisa dela. Ela colocou o pensamento do aluno.

Assim, o professor P3 percebe uma atuação didática da professor que faz com que a discussão matemática aconteça na sala e sempre valorizando os conhecimentos dos alunos.

Após o encontro, a professora, reflete sobre o que significou a experiência em sua vida profissional:

> **PA:** Eu achei que a plenária apontou coisas boas, mas pra mim valeu mais as críticas porque foram críticas construtivas e direcionadas à melhoria da aula. E eu tô tentando mudar algumas práticas em sala de aula depois que eu assisti a minha aula.

Refletindo sobre a sua experiência de ter a tua aula gravada, declarou:

> **PA:** Eu aprendi que a preparação da aula é fundamental, mas tão necessária quanto a preparação, é estar pronto para adequar as atividades ao momento. Por vezes eu deixei escapar algumas oportunidades de ensino e de aprendizagem que surgiram no meio das perguntas dos alunos, e isso eu só percebi porque a aula foi gravada e depois eu pude assisti-la. Talvez eu fiquei pensando, talvez deveria ter dado mais oportunidade para algumas perguntas em detrimento de outras. Mas isso eu só vi depois.

Nota-se que tal experiência foi muito significativa, pois a sala de aula cria momentos imprevisíveis. A gravação em vídeo da aula e sua análise coletiva, proporcionou uma discussão que certamente não seria possível de outra forma, haja vista a própria análise da professora. Entende-se isso como uma oportunidade de aprendizagem gerada na prática para esse grupo.

Discussão dos resultados

O fato de esses professores terem vivido todo o *Ciclo PDR* coletivamente, proporcionou-lhes muitos momentos reflexivos, tanto de maneira individual como coletiva.

A escolha da tarefa matemática foi adequada. O padrão observado no jogo possibilitou mais do que uma generalização e isso proporcionou discussões matemáticas na sala de aula (Ponte, 2017).

Relacionando o plano e a execução da aula com as 5 práticas de Stein *et al.* (2008) percebemos que o *antecipar* foi feito no planejamento, mas que faltou prever outras estratégias de resolução. Durante a aula, enquanto os alunos estavam discutindo em pequenos grupos, a professora tentou realizar as práticas do *monitorar*, *selecionar* e *sequenciar* (Stein *et al.*, 2008). Mas ela não conseguiu perceber a outra generalização que surgiu entre os alunos. No momento da plenária, ela foi surpreendida por essa nova expressão algébrica. No final da discussão, a professora não conseguiu fazer o *conectar* (Stein *et al.*, 2008) que seria relacionar as duas resoluções encontradas. Com isso, percebemos o quanto a orquestração das 5 práticas (Stein *et al.*, 2008) poderia ter proporcionado discussões matemáticas mais aprofundadas na sala de aula.

Com a elaboração da 5ª TAP a partir de registros de prática foi possível dinamizar discussões matemáticas e didáticas que de outra maneira não seria tão natural ocorrer. Como perceberem o quanto é importante conhecer os conhecimentos prévios dos alunos (Ponte, 1999) e buscar antecipar possíveis estratégias de resoluções e as dificuldades dos alunos (Serrazina, 2017).

Por outro lado, percebemos que os professores evitaram discussões matemáticas, talvez pela sua insegurança em tratar desses conhecimentos. Parece-nos então, que a discussão acerca da percepção do padrão e da compreensão da generalização não era necessária, como se todos alí já soubessem tudo sobre aquele tema. No entanto, a literatura nos mostra exatamente o contrário, uma vez que tais discussões são importantes para a (re)construção dos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores sobre o tema (Branco & Ponte, 2014). Acreditamos que essa postura dos professores seja reflexo de uma insegurança em seus conhecimentos matemáticos que a literatura nos aponta que os professores apresentam dificuldades para encontrar a generalização de um padrão e, ao mesmo tempo, dizem que se sentem inseguros em ensinar álgebra (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Da mesma maneira, temos o momento da aula em que a professora respondeu ao aluno E23F (Figura 3): *"Não importa o caminho que você vai chegar desde que todos cheguem no mesmo caminho"*, identificamos aí uma lacuna na discussão em plenária (5ª TAP), por parte do grupo, o qual não se atentou ao fato de que, para a percepção de padrões e regularidades e a consequente generalização, o caminho percorrido pelo aluno é, justamente, a compreensão do padrão (Zazkis & Liljedahl, 2002), conhecimentos essenciais quando dos processos de ensino e a aprendizagem de matemática (Ponte, 1999).

Os professores conseguiram pensar e refletir sobre a atuação da professora, sobre o quanto ela conduziu e foi protagonista na aula, por outro lado, notou-se lacunas sobre o quanto ela (não) valorizou o pensamento dos alunos. Essas discussões foram possíveis porque o professor saiu de seu isolamento e teve oportunidade de vivenciar práticas geradas dentro do grupo, próximas de sua realidade, em especial quando das discussões coletivas que favoreceram interação e aprendizagem, uns com os outros (Ball & Cohen,1999; White *et al*., 2013).

Conclusão

Durante o desenvolvimento do *Ciclo PDR*, percebeu-se oportunidades de aprendizagem geradas (Bruce *et al*., 2010), as quais emergiram por meio da abordagem de trabalho assumida no processo formativo, que favoreceu a construção de um ambiente respeitoso pelo trabalho do outro e, consequentemente, promoveu oportunidades de aprendizagens para cada um e para todos (Ball & Cohen, 1999; White *et al*., 2013).

Por meio da estrutura adotada nas TAP (Ball & Cohen, 1999; Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014), possibilitou-se perceber o quanto os professores subestimam e desconhecem os seus alunos (Ponte, 1999), muitas vezes justamente, por não ter clareza dos conhecimentos prévios deles sobre um certo tema matemático. Por outro lado, pode-se inferir que a dificuldade na antecipação das estratégias e dificuldades dos alunos, deve-se a dificuldade dos próprios professores acerca da percepção dos padrões e regularidades (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Percebeu-se que as TAP utilizadas proporcionaram aos professores olharem e refletirem sobre seus conhecimentos matemáticos e didáticos (Ponte, 1999) acerca das noções de padrões e regularidades. Notou-se ainda, o quanto cada professor se envolveu com a aula desenvolvida por uma colega e com as discussões que emergiram dos registros dessa aula. Isso reforça o quanto se torna relevante em processo formativo levar momentos da prática desses professores para a discussão, seja vivenciando os momentos ou discutindo sobre registros de uma prática que foi construída pelo grupo assim, como apontam Ball e Cohen (1999), Lampert (2010) e Smith (2001).

Referências

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, *62*(3), 317–335.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade de Lisboa).

Branco, N., & Ponte, J. P. (2014). Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. In Ponte, J. P. (Ed.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 379-408). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Bruce, C. D., Esmonde, I., Ross, J., Dookie, L., & Beatty, R. (2010). The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. *Teaching and Teacher Education*, *26*, 1598-

1608.

Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process*. London: Sage.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Ed.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). Boston, MA: Kluwer.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education, 61*(1-2) 21–34.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Orton, A., & Orton, J. (2005). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.) *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* London: Continuum.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72), Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem em Matemática. In: GTI (Ed.). *A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33-56). Lisboa: APM.

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*, *26*(42), 535-557.

Serrazina, L. (2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In: GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 9-32). Lisboa: APM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008) Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313–340.

Twohill, A. (2015). Shape patterning tasks: An exploration of how children build upon their observations when asked to construct general terms. *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Dublin, Ireland.

Vale, I., & Pimentel, T. (2015). Padrões visuais, generalização e raciocínio. In S. D. A. Machado, B. L. Bianchini, & C. S. A. Maranhão (Eds.), *Teoria elementar dos números: Da educação básica à formação dos professores que ensinam matemática* (pp. 167-198). São Paulo: Iglu.

Webster-Wright, A. (2009). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research, 79*, 702-739.

White, A. L., Jaworski, B., Agudelo-Valderrama, C., & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. K. S. Leung (Eds), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 393-430). New York, NY: Springer Nature. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2.

Yilmaz, N., & Erbas, A. K. (2015). An investigation of middle school mathematics teachers' knowledge for teaching algebra. *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Dublin, Ireland.

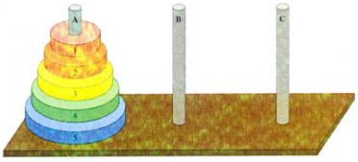
Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

APÊNDICES

Apêndice I- Tarefa matemática entregue aso estudantes

Título da Aula: **"Investigando padrões por meio do jogo Torre de Hanói"**

1) Explicação sobre a lenda do jogo
2) Explanação sobre o objetivo do jogo, qual seja: *Transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.*



3) Ao longo do desenvolvimento da tarefa, façam o registro manuscrito sobre os conhecimentos matemáticos que foram mobilizados e as possíveis estratégias de resolução.

Desafio I: Descobrir o <u>número mínimo</u> de movimentos que pode ser realizado para mover a totalidade de discos de uma torre a outra, respeitando-se as regras.

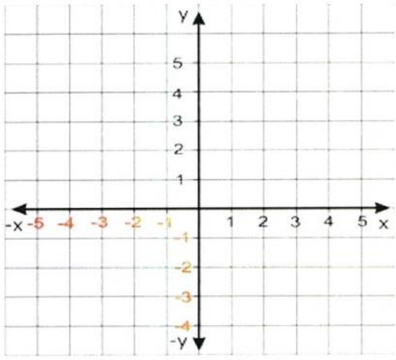
4) Preencher a tabela

Número de discos	Número mínimo de movimentos	Par ordenado

5) Você notou algum padrão entre o número de discos e o número de movimentos? Justifique.

6) A partir dos dados obtidos na tabela do item 4, marcar os pontos obtidos em um plano cartesiano (use a folha impressa, papel quadriculado, Excel ou Geogebra)
a) Para vocês este gráfico representa alguma função já estudada ao longo da vida escolar? Cite qual.

b) Qual o domínio desta função?
c) Existe alguma restrição neste gráfico?



Desafio II:
Estabeleça uma expressão algébrica relacionando o nº de discos e o nº de movimentos

8) Descreva quais foram as dificuldades encontradas pelo grupo para responder às questões desta tarefa?

Apêndice II – 5ª TAP – Roteiro de análise da aula do EM

5ª Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP_5): "*Analisando registros de prática de aulas sobre padrões e regularidades na Matemática Escolar*"

3ª PARTE: *"Analisando registros de prática de uma aula do 3º Ano do Ensino Médio"*
Roteiro para análise dos registros de prática
(Adaptado de O'Donnell e Taylor (2007))

O plano de aula **"Investigando padrões por meio do jogo Torre de Hanói"** foi ministrado em uma sala de 3º ano do Ensino Médio, com 33 alunos, divididos em 3 grupos de 5 alunos (grupos: 3A, 3B e 3C), 3 grupos de 6 alunos (grupos: 3D, 3E e 3F). A aula aconteceu na própria sala dos estudantes e teve duração de 150 minutos. Para auxiliar na análise, cada grupo receberá a tarefa matemática que foi distribuída para os estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Para a análise dividimos a aula em 3 momentos: (I) a apresentação da tarefa pelo professor; (II) as discussões em pequenos grupos; (III) a discussão em plenária.

(I) A apresentação da tarefa pelo professor.

A professora inicia a apresentação, contando que naquela aula eles iriam "brincar" com a Torre de Hanói e pergunta quem conhece a Torre de Hanói. Alguns alunos dizem que ela aparece em um determinado jogo de computador. Após essa conversa, a professora apresenta a lenda da Torre de Hanói e, em seguida, ela continua dando as orientações para a tarefa que os alunos iriam realizar. Isso está apresentado no episódio a seguir.

Vamos assistir o episódio_1 e, em seguida responda:

A professora explicitou as orientações necessárias e suficientes para que os alunos se envolvessem na aula? Comente.

(II) As discussões em pequenos grupos.

Relacionando o padrão existente com a expressão algébrica.

Neste momento, apresentaremos protocolos de três grupos de estudantes 3A, 3D e 3E, mostrando a relação entre o padrão descrito na tarefa e a expressão algébrica encontrada.

Para acompanharmos as resoluções dos estudantes nos grupos, apresentamos a tabela a seguir, a qual foi construída pelo grupo 3D e que é semelhante a dos demais grupos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos	Par ordenado
1	1	(1 ; 1)
2	3	(2 ; 3)
3	7	(3 ; 7)
4	15	(4 ; 15)
5	31	(5 ; 31)
6	63	(6 ; 63)

Os protocolos dos grupos 3A, 3D e 3E apresentados a seguir, mostram as respostas dos estudantes para a questão 5 e para o Desafio II.

PROTOCOLO DO GRUPO 3A:

Neste caso, apresentamos o protocolo da tabela elaborada pelo grupo 3A, a qual contém registros que auxiliem você a perceber como o grupo discutiu sobre a pergunta 5.

(3, 4, 5, 6)

8^2 2^8

4) Preencher a tabela abaixo

$(\underbrace{7, 15}_{8}, \underbrace{31}_{16}, \underbrace{55}_{24})$

$4 + 4 = 8$

$2 \cdot 4 = 8$

Número de discos	Número mínimo de movimentos	Par ordenado
3	$7 = 2^3 - 1$	(3, 7)
4	$15 = 2^4 - 1$	(4, 15)
5	$31 = 2^5 - 1$	(5, 31)
6	$63 = 2^6 - 1$	(6, 63)
7	$127 = 2^7 - 1$	(7, 127)
⋮	⋮	⋮

$\boxed{F(x) = 2^x - 1}$ $2^3, 2^4, 2^5, 2^6$

5) Você notou algum padrão entre o número de discos e o número de movimentos? Justifique

O padrão é uma função onde $F(x) = 2^x - 1$

Desafio II: Estabeleça uma expressão algébrica relacionando o número de discos e o número de movimentos.

$f(x) = 2^x - 1$

PROTOCOLO DO GRUPO 3D:

5) Você notou algum padrão entre o número de discos e o número de movimentos? Justifique.

Sim, o nº de movimentos dos discos é o dobro do nº de movimentos do anterior, adicionando 1.

Desafio II: Estabeleça uma expressão algébrica relacionando o número de discos e o número de movimentos.

$f(x) = 2^x - 1$

PROTOCOLO DO GRUPO 3E:

5) Você notou algum padrão entre o número de discos e o número de movimentos? Justifique.

Conforme o número de discos aumenta, o número de movimentos é o dobro do valor anterior, mais 1.

Desafio II: Estabeleça uma expressão algébrica relacionando o número de discos e o número de movimentos.

Outra fórmula encontrada é multiplicar o nº anterior de movimentos + 1

$x \cdot 2 + 1$

nº de movimentos

x é o número de discos.

$\boxed{2^x - 1}$

rica

º de movimentos

Agora, baseando-se nos protocolos apresentados acima, responda:

1) Identifique se o raciocínio utilizado pelos estudantes dos três grupos para encontrar o padrão foi o mesmo? Comente. E para a expressão algébrica? Comente.

2) Você percebeu alguma relação entre o padrão descrito na pergunta 5 e a expressão algébrica encontrada no Desafio II? Comente.

(III) A discussão em plenária

Na plenária, a professora foi conversando com a sala e perguntando a cada grupo como cada um tinha resolvido tal questão. Iremos assistir os grupos: 3F e 3A explicando as suas expressões algébricas. Assistiremos a seguir, a apresentação destes dois grupos.

1ª PARTE: Episódio_2: Grupo-3F

Agora, responda:

1) Você acha que os estudantes conseguiram explicar a maneira como eles pensaram? Comente.

2) De que forma a professora tentou ajuda-los? Comente.

2ª PARTE: Episódio_3: Grupo-3A
Episódio_4: Grupo-3A

Agora, responda:

1) Você acha que os estudantes conseguiram explicar a maneira como eles pensaram? Comente.

2) De que forma a professora tentou ajuda-los? Comente.

Na sequência, veremos dois momentos da professora discutindo com os estudantes como cada um encontrou o gráfico da função.

3ª PARTE: Vamos assistir o episódio_5.

Baseado nesse registro, responda:

1) O professor utilizou-se de perguntas e afirmações para ajudar os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos envolvidos? Comente.

2) O professor utilizou-se de terminologia apropriada (de acordo com a matemática e com a idade dos estudantes) e uma linguagem adequada para ajudar os alunos a fazer as conexões necessárias? Comente.

4ª PARTE: Episódio_6: A professora continua a discussão com os estudantes sobre o gráfico da função.

Vamos assistir o episódio_6.

Baseado nesses registros, responda:

1) O professor utilizou-se de perguntas e afirmações para ajudar os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos envolvidos? Comente.

2) O professor utilizou-se de terminologia apropriada (de acordo com a matemática e com a idade dos estudantes) e uma linguagem adequada para ajudar os alunos a fazer as conexões necessárias? Comente.

Comentários Finais sobre a análise da aula do 3º ano do Ensino Médio

Agora responda as perguntas:

1) O professor possibilitou que os alunos apresentassem maneiras diferentes de realização da tarefa (incluindo possíveis estratégias incorretas)? Comente.

2) O professor considerou as dificuldades apresentadas pelos alunos e fez intervenções de modo a saná-las? Comente.

3) O professor promoveu debate entre as diferentes estratégias apresentadas pelos alunos e em relação às suas dificuldades? Comente.

4) O professor, ao final da plenária, possibilitou sistematização dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa? Comente.

Referências:

O'Donnell, B.; Taylor, A. (2007). A lesson plan as professional development? You've got be kidding. *Teaching Children Mathematics*, Janeiro, 272-278.

Stein, M. K.; Engle, R. A.; Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell, *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

COLABORAÇÃO ENTRE PROFESSORES DO 1.º CICLO NUM ESTUDO DE AULA EM MATEMÁTICA

Marisa Quaresma

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

mq@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Nesta comunicação pretendemos compreender como é que o estudo de aula pode apoiar os professores a desenvolverem relações de colaboração. A investigação é de natureza qualitativa e interpretativa com *design* de estudo de caso. Os resultados mostram que o envolvimento em momentos de planeamento de tarefas e de análise do trabalho dos alunos, onde as professoras refletiram sobre a prática e para a prática, levou-as a desenvolverem relações de colaboração, passando de narrar e procurar ideias a trabalho em copropriedade. Mostram também que as adaptações do estudo de aula realizadas, com o envolvimento dos formadores em todo o processo e a realização de sessões de seguimento, contribuíram para o desenvolvimento das relações colaborativas. A realização de entrevistas individuais num momento intermédio foi decisiva para levar as professoras a assumir uma voz pessoal forte sobre a sua participação no estudo de aula, contribuindo também para o desenvolvimento da relação de grande envolvimento e reflexão aprofundada por parte das professoras que se verificou no final do estudo.

Palavras-chave: Estudo de Aula. Colaboração. Reflexão. Desenvolvimento profissional.

Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional atualmente praticado em numerosos países. Nele, os professores trabalham colaborativamente em torno de um tema relacionado com a aprendizagem dos alunos, estudam documentos curriculares e materiais de ensino, e planeiam e realizam uma aula ("aula de investigação"), que é objeto de reflexão aprofundada (Fujii, 2016; Lewis, 2016; Takahashi & McDougal, 2018). A aula é lecionada por um dos professores e observada pelos outros participantes e, no final, todos refletem sobre as aprendizagens realizadas pelos alunos. No estudo de aula, as discussões do grupo evidenciam, desafiam e questionam as conceções e práticas dos professores (Cajkler et al., 2014; Fujii, 2016). Este processo colaborativo dá oportunidade aos professores para, de uma forma estruturada e com foco nas aprendizagens dos alunos, correrem riscos na sua prática e experimentarem novas abordagens (Fujii, 2016).

A colaboração tem um papel de destaque nas discussões sobre o desenvolvimento profissional dos professores. Segundo Fullan e Hargreaves (1992), para que uma mudança fundamental ocorra na sua prática, os professores devem ser encorajados a colaborar com os seus pares em comunidades de aprendizagem. Ponte (2012) defende que os professores aprendem através da sua atividade e da reflexão que sobre ela fazem e essa aprendizagem depende tanto do seu próprio investimento como do suporte coletivo. Robutti et al. (2016) referem que, apesar da colaboração ser um tema já bastante estudado, voltou a ter uma nova atenção dos investigadores desde que começaram a surgir relatos de experiências com estudos de aula. No entanto, como também referem, são poucos os trabalhos que investigam explicitamente a forma como as relações de colaboração se desenvolvem de forma a apoiar a aprendizagem dos professores no estudo de aula. Deste modo, o objetivo desta comunicação é compreender como é que o estudo de aula pode apoiar os professores a desenvolverem relações de colaboração.

Colaboração

Quando se constituem grupos que trabalham colaborativamente, os professores trabalham em conjunto com vista a atingir um certo objetivo, num sistema de relações pautado pela tomada de decisões em conjunto (Boavida & Ponte, 2002; Menezes & Ponte, 2009; Robutti et al., 2016). A investigação tem salientando os benefícios de juntar professores e investigadores em relações de colaboração em processos formativos (Boavida & Ponte, 2002; Hollingsworth & Clarke, 2017). Nestes processos, os papéis dos participantes podem ser distintos, sendo essencial que todos trabalhem em conjunto, numa base de igualdade e com entreajuda para se atingirem os objetivos do grupo (Boavida & Ponte, 2002). Quando envolvidos em processos de colaboração, os professores criam novo conhecimento com o suporte de colegas mais experientes ou de investigadores, nomeadamente em aspetos que se encontram na sua zona de desenvolvimento proximal (Blanton, Westbrook & Carter, 2005).

Little (1990) distingue quatro formas de interação entre professores, com diferente natureza e também com diferente alcance: (i) narrar e procurar ideias; (ii) ajuda e apoio; (iii) partilha; e (iv) trabalho em copropriedade. Segundo Menezes e Ponte (2009), narrar e procurar ideias corresponde a uma interação entre professores que pode ser ocasional ou fruto da oportunidade, onde os professores procuram obter ideias específicas, soluções ou confirmações em breves trocas de experiências em ambientes informais. Em relações de ajuda e apoio, os professores procuram ajuda dos seus colegas na resolução de situações problemáticas difíceis. Esta relação é desigual e unidirecional e preserva a liberdade de decisão do professor. A partilha acontece pela troca de recursos, métodos, ideias e opiniões, envolvendo necessariamente alguma exposição do professor perante os colegas (Menezes & Ponte, 2009). Por fim, o trabalho em copropriedade acontece "em encontros entre professores que se baseiam na responsabilidade partilhada para o trabalho de ensinar (interdependência), em conceções coletivas de autonomia, no apoio às iniciativas e liderança dos professores no que respeita à prática profissional e na afiliação ao grupo, tendo como base o trabalho profissional" (Little, 1990, p. 519). Esta forma de interação, que se pode designar por colaboração, exige muita responsabilidade, empenho e tempo aos professores mas também é a que tem maior potencialidade para a resolução de problemas e para o desenvolvimento de conhecimento no seio de um grupo de professores que analisa e reflete sobre a sua prática profissional (Menezes & Ponte, 2009).

Metodologia de investigação

Esta investigação é de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986). O *design* é de estudo de caso de um grupo de professoras que participaram num estudo de aula realizado em 2013-14, num agrupamento de escolas de Lisboa. Esta atividade decorreu de um projeto do agrupamento para a melhoria dos resultados escolares dos alunos em Matemática. Dado o pedido de apoio da direção do agrupamento, propusemos a realização de diversos estudos de aula, um dos quais com professores do 1.º ciclo das duas escolas do agrupamento, sendo os participantes convidados pela direção (podendo voluntariamente aceitar participar ou não). Numa reunião preliminar, em que estiveram presentes professores, a diretora e a subdiretora do agrupamento e a equipa do IE, decidiu-se que o estudo de aula iria incidir num tópico do 3.º ano, onde estavam a ser introduzidas novas orientações curriculares.

Inicialmente, o grupo era constituído por sete professores que lecionavam diversos anos do 1.º ciclo. Nas primeiras cinco sessões desistiram quatro professores, indicando razões pessoais e profissionais, nomeadamente a eminência de irem mudar de escola ou o facto de não lecionarem o 3.º ano, em que se tinha decidido centrar o estudo de aula. Desse modo, só três professoras (Irina, Manuela e Antónia, nomes fictícios) acabaram por participar. As professoras tinham entre 10 e 15 anos de experiência e todas tinham formação inicial como professoras do 1.º ciclo. Irina tinha formação para o 2.º ciclo em Matemática e Ciências da Natureza, sendo a professora do grupo com mais conhecimento de Matemática. Já conhecia a abordagem exploratória (Ponte & Quaresma, 2016) porque frequentou um programa de formação contínua durante um ano letivo baseado nesta perspetiva. Manuela tinha também formação para o 2.º ciclo, mas em Português/Francês, sendo a professora com o conhecimento mais frágil em Matemática. Antónia, com formação exclusivamente direcionada para o 1.º ciclo, já tinha frequentado ações de formação contínua em Matemática. As três trabalhavam na mesma escola, acompanhavam as turmas desde o 1.º ano mas não tinham hábitos de trabalho comum.

A equipa que conduziu o estudo de aula era constituída pelos formadores, Marisa que dinamizou as sessões de trabalho e João Pedro que coordenou a formação e participou em algumas sessões. Na recolha de dados participaram ainda uma investigadora e uma bolseira. Na aula de investigação, para além de professores e formadores, esteve também presente a subdiretora do agrupamento. Os formadores dirigiram as sessões de trabalho, conduzindo o planeamento e a discussão pós-aula. Foi nossa preocupação centrar o trabalho na abordagem exploratória e levantar questões para reflexão em grupo.

O estudo de aula foi composto por nove sessões iniciais e três sessões de seguimento. As sessões tiveram periodicidade aproximadamente quinzenal e duração de duas horas. Na sessão 1 foi realizada a apresentação dos participantes, estabelecida a programação geral do estudo de aula e definido o tópico a estudar; as sessões 2 a 7 foram dedicadas ao aprofundamento do conhecimento sobre o tópico e sobre a abordagem exploratória bem como ao planeamento da aula de investigação; a sessão 8 foi a aula de investigação e a sessão 9 a reflexão pós-aula. Nas sessões 10, 11, e 12, as professoras planearam, realizaram e refletiram sobre duas aulas como meio de consolidar e aprofundar o trabalho desenvolvido anteriormente. Das adaptações do estudo de aula que realizámos para o contexto português (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2016; Quaresma & Ponte, 2017) destacamos aqui duas: (i) valorização do ambiente colaborativo e reflexivo, incluindo professores e formadores, e (ii) realização de sessões de seguimento, permitindo aos professores planear aulas em conjunto sobre novos tópicos, pondo em prática o que aprenderam nas sessões anteriores, e refletirem sobre os resultados. Considerando o pedido feito pela direção do agrupamento, os interesses e necessidades dos professores e a natureza do processo formativo, o estudo de aula teve por base a abordagem exploratória. Esta abordagem serviu de base tanto ao trabalho das sessões, lançando-se desafios aos professores e valorizando-se a discussão coletiva, como ao trabalho a realizar com os alunos, usando tarefas exploratórias e que promovessem o desenvolvimento do raciocínio dos aluno e uma comunicação dialógica na sala de aula, com especial atenção para a realização de discussões coletivas.

Os dados foram recolhidos por observação participante através da realização de um diário de bordo (elaborado por um membro da equipa e completado pelos restantes), da gravação áudio das sessões de trabalho (designadas S*x*), sendo feitas as respetivas transcrições, da gravação vídeo da aula de investigação e de entrevistas individuais às professoras participantes (E). Os dados foram analisados de forma indutiva (Goetz & LeCompte, 1984), a partir do discurso das professoras em momentos de planeamento e de análise do trabalho realizado pelos alunos.

Primeira parte do estudo de aula

Estudo do tópico e abordagem exploratória. Na sessão 1, em função das dificuldades dos alunos, decidiu-se que o tópico a estudar seria a adição e subtração de números racionais no significado medida por justaposição retilínea de segmentos de reta. As sessões 2 a 5 foram dedicadas ao trabalho sobre questões matemáticas e didáticas relevantes para o ensino e aprendizagem deste tópico. Assim, na sessão 2, o grupo analisou materiais curriculares, resolveu tarefas e identificou dificuldades dos alunos. Na sessão 3, fez-se um ponto da situação sobre os conhecimentos que os alunos já tinham e elaborou-se em conjunto uma ficha de diagnóstico para as professoras realizarem nas suas turmas. Na sessão 4, analisou-se a resposta dos alunos a esse diagnóstico, tendo em conta a natureza das tarefas, procurando identificar generalizações e justificações e elementos surpreendentes nas resoluções dos alunos. Na sessão 5, identificaram-se possíveis generalizações na adição e subtração de números racionais. Ao longo destas sessões, Manuela teve uma participação sempre muito discreta e na entrevista confidenciou que não intervinha nem fazia perguntas, mesmo quando não estava a acompanhar o que se dizia, porque "podia não calhar bem" (E), indicando assim que não se sentia à vontade para expor as suas dúvidas no grupo. Por sua vez, Antónia referiu que o seu reduzido envolvimento se deveu ao trabalho pormenorizado realizado, indicando que achava exagerado o modo como se "esmiuçavam as tarefas" (E), ou seja, a análise detalhada que era feita das possíveis formulações dos enunciados e das respostas dos alunos. Pelo seu lado, Irina teve uma participação muito ativa no grupo partilhando materiais, ideias e experiências. Contudo, referiu que em alguns momentos ficava incomodada com a reduzida participação das colegas e que muitas vezes acabava por falar para ultrapassar o que designou como "silêncio constrangedor" (S12) que ficava no ar após as solicitações dos formadores. Nesta fase do trabalho, um fator perturbador da dinâmica do grupo foi a renitência de todas as professoras em assumir a responsabilidade de lecionar a aula de investigação, situação que foi só resolvida na sessão 5, quando se decidiu que seria Irina a assumir esse papel.

Planeamento da aula de investigação. O planeamento específico da aula de investigação realizou-se nas sessões 6 e 7. Na sessão 6, Irina, que assumiu a liderança, referiu que não se sentia satisfeita com os materiais que conhecia e, por isso, desafiou o grupo a elaborar uma tarefa para a aula de investigação. A tarefa apresentava o contexto de uma "estafeta de animais". Irina propôs transformar um "exercício" em exploração usando assim ideias subjacentes à abordagem exploratória muito discutida ao longo das sessões anteriores, segundo a qual os alunos aprendem melhor quando são eles próprios a descobrir os conceitos matemáticos. Antónia e Manuela mantiveram-se pouco envolvidas. O facto destas duas professoras não terem dado muitas sugestões para a aula de Irina, a quem reconheciam muito mais conhecimento sobre o ensino da Matemática, pode também resultar de não quererem interferir na preparação de uma aula que não iriam lecionar. Assim, durante a elaboração da tarefa e da preparação da aula, Irina realizou uma reflexão aprofundada para a prática tendo em conta o seu conhecimento dos processos de aprendizagem dos seus alunos, enquanto Manuela e Antónia, apenas intervinham em relação à organização e gestão do trabalho e não ao conteúdo matemático ou ao ensino e aprendizagem.

Reflexão pós-aula. A aula de investigação constituiu a sessão 8 e a reflexão pós-aula aconteceu na sessão 9. Considerou-se que a aula de investigação estava bem preparada (sobretudo pelo trabalho de Irina) e que a aula correspondeu muito bem ao que tinha sido planeado. Para suscitar a discussão foram apresentados alguns excertos do vídeo da aula, escolhidos pelos formadores como representação de diferentes estratégias e dificuldades dos alunos. Os formadores levantaram diversos desafios às professoras mas só Irina procurou encontrar respostas. Quando questionadas, Antónia e Manuela, apenas descreveram acontecimentos para corroborarem as apreciações feitas pelos formadores. Ainda que de uma forma contida, ambas narraram as observações que fizeram e tentaram ajudar e apoiar o grupo a formar uma ideia geral do que aconteceu na aula. Irina, que lecionou a aula, esteve muito exposta durante todo o processo de preparação e, sobretudo, de reflexão que, por vezes, questionou aspetos para os quais o grupo não tinha resposta fácil.

Sessões de seguimento

Uma nova relação entre os participantes. O trabalho desenvolvido na primeira parte do estudo de aula foi bastante desafiante para as professoras. Por um lado, procuravam compreender a dinâmica do processo formativo que desconheciam, bem como o que era delas esperado. Por outro lado, eram confrontadas com tarefas que também não eram habituais no seu dia-a-dia, nomeadamente, elaboração de tarefas desafiantes para os alunos, observação de aulas de aulas com foco no trabalho dos alunos e análise do trabalho, do pensamento e da compreensão dos alunos. Entre as sessões 9 e 10 foram feitas entrevistas individuais a todas as professoras tendo em vista conhecer a sua opinião sobre o estudo de aula e as aprendizagens que consideravam ter feito. Surpreendentemente, estas entrevistas constituíram momentos de reflexão aprofundada, com um discurso muito espontâneo por parte das professoras que manifestaram abertamente os seus receios em relação ao processo vivido até então. Referiram, nomeadamente, a angústia de lecionar a aula de investigação e o medo de participar nas sessões devido ao fraco conhecimento sobre os números racionais no significado medida e o seu ensino. Este momento de reflexão tornou todos os participantes do estudo de aula muito mais "soltos" e livres para expressarem a sua opinião e as suas inseguranças. As professoras deixaram de mostrar receio de se expor perante os formadores e umas perante as outras. Sem a tensão da aula observada, expostos os receios e preocupações das professoras e com algum conhecimento do processo, o ambiente em que se desenvolveram as sessões seguintes tornou-se muito mais interessante, amistoso e participado por Antónia e Manuela do que o registado anteriormente.

Planeamento. Na sessão 10, pedimos às professoras que planeassem uma aula sobre o tema que estavam a lecionar naquele momento, tendo em atenção o trabalho desenvolvido ao longo do estudo de aula. Manuela sugeriu que podiam preparar a aula em conjunto e que desta vez seriam ela e Antónia a lecioná-la, "aliviando" Irina que já tinha trabalhado muito anteriormente:

> E porque é que nós [não] fazemos o seguinte, damos um bocadinho mais de folga à Irina, planeamos as três, eu e a Antónia cumprimos de modo a que apresentemos no dia 19 e tu tens um bocadinho mais de folga e . . . E aplicavas depois. (S10)

Manuela reconheceu assim que ela e Antónia tinham tido uma participação pouco ativa na fase anterior do estudo de aula. Mostrou agora vontade de assumir um papel ativo, eventualmente, por se sentir mais confiante com as aprendizagens realizadas nas sessões anteriores. Ficou então definido que ambas aplicariam as tarefas na sua aula e Irina as ajudaria depois a refletir sobre os resultados obtidos para apresentarem na sessão seguinte. Deste modo, as professoras prepararam uma aula sobre a relação entre frações decimais e dízimas numa relação de responsabilidade partilhada a três.

Antónia e Manuela começaram o planeamento muito hesitantes. Foram buscar o manual e começaram a folheá-lo. Foi visível como se mostravam incomodadas com a perspetiva de escolher tarefas do manual, talvez por pensarem que os formadores não achariam isso muito correto. Perante a dificuldade das professoras, que pareciam não saber o que fazer, Marisa sugeriu que podiam adaptar uma tarefa em vez de a selecionar sem alterações, sugerindo que seria interessante pedir aos alunos para relacionarem as duas representações (fração e dízima). Manuela aceitou prontamente o desafio de escolher uma tarefa e fazer alterações de modo a torná-la "mais difícil":

> Sim, eu acho que sim, aumentando a dificuldade, não é, porque esse é muito básico. Mas eu acho que sim, misturando décimas, centésimas e milésimas, com denominadores diferentes. (S10)

Nessa altura Antónia e Irina também começaram a dar sugestões e a registar mais ideias para depois se elaborar a tarefa:

> Antónia: Ou A, B e C no sentido de terem dois equivalentes e um diferente.
>
> Irina: Ah, sim.
>
> Antónia: Por exemplo, ter duas frações equivalentes, eles perceberem que aquilo, começarem ali a perceber que são frações equivalentes, apesar de terem denominadores diferentes.
>
> Manuela: E porque é que aqui não dávamos uma hipótese, portanto, porque é que aqui não se dava uma em fração equivalente?
>
> Marisa: Ah, uma destas estar em fração. Sim, pode ser, em vez de estarem todos em decimal. Ser em fração equivalente.
>
> Manuela: Por exemplo, estão aqui quatro em dízimas, não é? E uma por extenso, e porque

é que não retiramos uma que está em dízima e pomos em fração?

Irina: Exato.

Marisa: Pode ser.

Irina: E depois durante a discussão até podemos pedir para eles escreverem isto em frações também. (S10)

Assim, em conjunto, foi construída a primeira questão da tarefa (Figura 1):

1. Pinta no quadriculado 0,4 de verde; 40/100 de azul e "quatro centésimas" de amarelo.

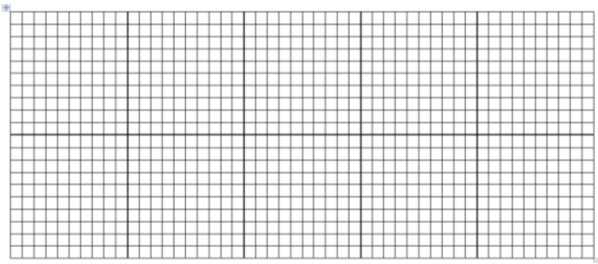


Figura 1 – Tarefa elaborada pelas professoras na sessão 10

Irina continuou a dar muitas sugestões, Manuela esteve muito mais participativa e envolvida que o habitual e Antónia, apesar de participar menos que as colegas, também se manteve envolvida, ao contrário do que aconteceu nas sessões anteriores. Neste episódio salientam-se dois aspetos importantes. O primeiro é a mudança de atitude de Manuela e Antónia, que, de uma posição de reserva, passaram para uma posição de forte participação na atividade comum. Esta mudança, como vimos, parece ter resultado sobretudo da confiança que se estabeleceu no grupo depois das entrevistas. O segundo aspeto é a dificuldade das professoras em assumir por si mesmas uma postura crítica e de autoria em relação às tarefas, dificuldade esta que foi ultrapassada com uma sugestão de Marisa. O trabalho realizado anteriormente no estudo de aula trouxe as professoras para um ponto em que já estavam preparadas para assumir algum papel na elaboração de tarefas, não de um modo totalmente autónomo, mas com um pequeno apoio de um parceiro mais experiente.

Reflexão. Na sessão 11 as três professoras refletiram sobre a sua experiência em sala de aula na realização da tarefa preparada na sessão 10. Antónia relatou que os seus alunos tiveram muitas dificuldades na resolução da primeira questão (Figura 1):

Os meus, pelo menos, só tive um que conseguiu fazer tudo certo. Um grupo, um par. Depois tive mais três que conseguiram fazer uma parte certa e outra errada, fizeram bem as quatro décimas [0,4] mas depois aqui as quarenta centésimas [40/100], que correspondia à mesma coisa, já não. E pronto. Eu acho que eles, não sei se foi o facto de estarem aqui vários quadriculados [figura 1], que os baralhou. (S11)

Antónia tentou perceber a dificuldade dos alunos e sugeriu que estes podiam ter-se confundido com o facto de terem várias folhas com quadriculado para representar os números indicados. Sugeriu ainda que isso pode ter feito com que os alunos "não percebessem o que era a unidade" (S11). No entanto, não deixou de se mostrar surpresa e frustrada com as dificuldades dos seus alunos: "E quando eles já sabem fazer, já sabem bem isto, até . . . Sabem bem transformar dízimas em fracionários e fracionários em dízimas" (S11). Manuela tentou também encontrar uma explicação para a dificuldade dos alunos da colega: "Só que eu acho que o facto de isto estar visualmente diferente, basta um estar em dízima e outro em fração, que é o suficiente para os impedir de verem algo que é equivalente" (S11).

De seguida, Manuela apresentou também a análise do trabalho da sua turma:

> Eu tinha doze grupos. Dos doze grupos, todos acertaram a pintura a verde [0,4]. [Para 40/100] Dos doze grupos três erraram, e destes três, por acaso depois um grupo disse-me quando . . . Ia começar a corrigir no quadro, que eles se tinham apercebido que a pintura azul [40/100] estava errada. Mas pronto, aperceberam-se e não disseram nada. Portanto, destes doze erraram a pintura azul três grupos. E quatro grupos erraram a pintura das quatro centésimas a amarelo. (S11)

Em resposta, Antónia salientou alguma semelhança nos resultados das duas turmas:

> Lá está. Mas, mas lá está. Há aqui alguma coisa mais ou menos parecida, é que estes meus que acertaram tudo, ou que acertaram parte, o que acertaram foi o verde [0,4], que é que aparecia em primeiro lugar. E depois a partir daí… (S11)

Irina tentou também encontrar uma razão para as dificuldades dos alunos, referindo que "a partir do momento que começámos a trabalhar a dízima, as frações ficaram um bocado atrapalhadas", considerando que o trabalho com as dízimas terá feito com que os alunos se esquecessem das frações, ficando-se ainda por uma reflexão superficial sobre a situação.

Tendo em conta que a maior parte dos alunos errou na representação da centésima parte da unidade, Manuela sugeriu que este erro estava relacionado com a dificuldade em visualizarem a centésima parte da figura que lhes foi apresentada (Figura 1): "Eles aqui visualizam muito bem as dez partes" (S11). Irina concordou, dizendo que "a centésima aí não é fácil para eles verem. Não é intuitiva" (S11). Deste modo, Manuela começou a fundamentar a sua análise das estratégias e das resoluções dos alunos detetando um constrangimento pertinente associado ao material dado aos alunos.

Uma vez identificada a dificuldade dos alunos, Irina refletiu sobre a própria prática, nomeadamente sobre o trabalho que normalmente faz relativamente à representação dos números decimais:

> Quando nós falamos na décima, nós normalmente usamos uma barra dividida em dez. Depois, de repente, começamos a falar na centésima, e a unidade em vez de ser a barra com dez, aparece um quadrado com cem. E, de repente, começamos a falar da milésima, e nós já temos isto. Portanto a unidade, que é sempre um, muda de forma. E isso, para eles, baralha-os de uma maneira impressionante. (S11)

Todos os participantes concordaram com Irina que decidiu levar a discussão mais além, desafiando o grupo a pensar numa solução para o problema: "Mas, e agora? É uma reflexão. E agora o que é que fazemos?” (S11). A professora prosseguiu, salientando que a representação exige que os alunos efetivamente compreendam o sistema de numeração decimal e o que é a unidade:

> Isto é uma transformação que se aprende quase tipo regra, olha, tem os mil por baixo, três casas decimais. Não tens que entender exatamente o que é que aquilo representa. Tu acabas por decorar aquilo. Para aqueles que não sabem tão bem, eles decoram isso. Só que aqui trata-se de compreensão, já é diferente. E a barra, o quadrado, e agora isto, quer dizer, mas a unidade... O que é isto, o que é que eles querem? . . . É a noção de unidade, como ela é representada de diferentes maneiras. (S11)

Na sequência, Antónia sugeriu que podiam fazer como ela fez na discussão da tarefa, cortando progressivamente o mesmo retângulo em dez, cem e mil partes, o que mereceu a concordância das colegas. Irina sublinhou ainda a importância de um trabalho inicial consistente com a representação retangular como unidade e a conservação dessa unidade, pode ajudar os alunos a compreenderem essa representação, fazendo com que possam entender mais tarde representações simplificadas da unidade

Esta discussão foi mediada por Marisa, que foi levantando questões, mas foram as professoras que desenvolveram uma reflexão aprofundada sobre a própria prática letiva, questionaram as resoluções e as dificuldades dos seus alunos e tentaram encontrar explicações para o que tinha acontecido, analisando com bastante detalhe a origem dessas dificuldades. Não se limitaram a tentar perceber o problema, procurando mesmo possíveis formas de o ultrapassar numa reflexão aprofundada para a prática. Irina continuou a mostrar maior capacidade de levar a reflexão mais além, propondo soluções devidamente fundamentadas, mas Manuela e Antónia mostraram forte participação, surgindo muito envolvidas na análise da aprendizagem dos seus alunos, relacionando-a com a sua prática. A mudança de atitude de Antónia e Manuela fez com que o trabalho no grupo passasse a ter características de copropriedade onde todos se envolvem e assumem responsabilidade numa atividade conjunta.

Discussão

Durante o estudo de aula, os formadores tiveram um papel ativo de desafiar e questionar as professoras. Irina, a professora que lecionou a aula de investigação e que tinha mais gosto e segurança no ensino da Matemática, mostrou-se sempre muito envolvida nas atividades do grupo. Desde cedo, trabalhou em copropriedade com Marisa na adaptação da tarefa para a aula de investigação. Nos momentos de reflexão para a prática fez sugestões fundamentadas para elaborar uma tarefa exploratória de modo a favorecer a aprendizagem e compreensão dos alunos. Nesta fase inicial, Manuela e Antónia mostraram-se pouco participativas e envolvidas nas atividades do grupo.

A reflexão pós-aula decorreu num ambiente em que Irina e Marisa trabalhavam em copropriedade mas Antónia e Manuela continuaram num registo de narrar e procurar ideias. Essa relação diferenciada entre os elementos do grupo influenciou a natureza da reflexão desenvolvida pelas professoras que era então pouco aprofundada.

Nas sessões de seguimento todas as professoras foram chamadas a planear, lecionar e refletir sobre duas aulas. Registou-se uma mudança profunda no modo como Manuela e Antónia participaram das atividades do estudo de aula. Para isso parece ter contribuído o facto de terem observado um empenhamento de todos os participantes no planeamento e reflexão sobre a aula de investigação e de as aulas a realizar serem com os seus próprios alunos e já não serem observadas. Para uma maior participação destas professoras nas atividades da fase de seguimento parece ter contribuído a realização das entrevistas, que proporcionaram voz acrescida às professoras para refletirem sobre o percurso realizado e exteriorizarem os seus receios e preocupações. É de notar que também Robutti et al. (2016) sublinham a importância da voz dos professores nos processos colaborativos. Mas para essa participação também contribuiu o conhecimento que as professoras já tinham sobre o processo e o que era esperado delas e a ausência da tensão relativa à realização da aula de investigação.

Nesta fase, com o apoio de Irina, Manuela e Antónia sentiram confiança para adaptarem tarefas do manual e torná-las mais desafiantes para os alunos desenvolvendo novo conhecimento a partir da sua zona de desenvolvimento proximal (Blanton, Westbrook & Carter, 2005). Com este envolvimento de Antónia e Manuela, todo o grupo (professoras e formadores) passou a funcionar em copropriedade, partilhando uma responsabilidade comum pelo trabalho. As professoras assumiram um papel de maior destaque nas discussões e atividades do grupo passando os formadores a assumir sobretudo um papel de gestão, organização e apoio ao desenvolvimento dos trabalhos.

Deste modo, o trabalho colaborativo no estudo de aula favoreceu a criação de um ambiente de integração de conhecimento (Lewis, 2016) onde as professoras construíram ativamente o seu próprio conhecimento através da recolha de dados dos seus alunos, estabelecendo conexões entre diferentes fontes de dados, conseguindo não só identificar problemas da sua própria prática e da aprendizagem dos alunos, mas também propor soluções para esses problemas e fundamentá-las.

Conclusão

Este estudo de aula, que valorizou o ambiente colaborativo e reflexivo, incluindo professores e formadores, e onde os professores tiveram oportunidade para se envolverem em reflexão sobre e para a prática, favoreceu o desenvolvimento de relações de copropriedade entre os participantes. Isso resultou em grande medida da possibilidade que as professoras tiveram de exprimir a sua voz e individualidade e dos desafios e responsabilidades que foram progressivamente assumindo, nomeadamente, a co-responsabilidade pelas decisões do grupo, pelos materiais produzidos, emparticular pela seleção e elaboração de tarefas desafiantes, e pela elaboração dos planos de aula que todos lecionaram. Isso apoiou os professores a envolverem-se em reflexões aprofundadas sobre a própria prática e o modo como os seus alunos aprendem, contribuindo para o seu desenvolvimento profissional, na medida em que desenvolveram conhecimento sobre estes aspetos (Ponte, 2012). Verificamos ainda que esta evolução só é possível quando as professoras se sentem confiantes e investem para questionar as suas conceções e práticas e arriscarem fazer coisas novas (Cajkler et al., 2016; Fujii, 2016; Ponte, 2012).

As sessões de seguimento foram importantes para aproximar o grupo. O facto de todas as professoras lecionarem duas aulas nessa fase fez com que se envolvessem mais e com mais responsabilidade no desenvolvimento do trabalho, o que nos leva a concluir que pode ser importante que todos os participantes lecionem uma aula e partilhem essa experiência com o grupo. Outras alterações ao formato habitual dos estudos de aula, como a lecionação de uma aula piloto pelos professores participantes durante a fase de preparação, com partilha e análise de episódios pelo grupo na sessão seguinte podem contribuir para resultados semelhantes. Estas e outras adaptações devem ser experimentadas de modo a melhorar a eficácia deste processo de desenvolvimento profissional, tendo em conta a cultura local dos professores participantes.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de uma bolsa atribuída a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013).

Referências

Blanton, M. L., Westbrook, S., & Carter, G. (2005). Using Valsiner's zone theory to Interpret teaching practices in mathematics and science classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(1), 5-33.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Cajkler, W., Wood, P., Norton, J., Pedder, D.; Xu, H. (2015). Teacher perspectives about lesson study in secondary school departments: A collaborative vehicle for professional learning and practice development. *Research Papers in Education*, *30*(2), 192-213.

Clarke, D. (2000). Time to reflect. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 201–203.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education, 48*, 411–423.

Fullan, M., & Hargreves, A. (1992). Teacher development and educational change. In M. Fullan & A. Hargreves (Eds.), *Teacher development and educational change* (pp. 1-9). London: Falmer.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego: Academic Press.

Hollingsworth, H., & Clarke, D. (2017). Video as a tool for focusing teacher self-reflection: Supporting and provoking teacher learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(5), 457-475.

Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM Mathematics Education, 48*, 571–580.

Little, J. W. (1990). The persistence of privacy: Autonomy and initiative in teachers' professional relations. *Teachers College Record, 92*(4), 509-536.

Menezes, J. L., & Ponte, J. P. (2009). Investigação colaborativa de professores e ensino da Matemática. Caminhos para o desenvolvimento profissional. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 1*(1).

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la* *educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *BOLEMA, 30*(56), 868-891.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2017). Dinâmicas de aprendizagem de professores de Matemática no diagnóstico dos conhecimentos dos alunos num estudo de aula. *Quadrante, 26*(2), 43-68.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, I., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 651-690.

Takahashi, A., & McDougal, T. (2018). Collaborative lesson research (CLR). In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, N. Shuilleabhain & A. Takahashi (Eds.), *Lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 143-152). New York, NY: Springer.

PENSAR A CULTURA DE SALA DE AULA EM MATEMÁTICA COM RECURSO A VÍDEOS ESPONTÂNEOS

Cristina Loureiro

ESE do Instituto Politécnico de Lisboa, CIED

cristina@eselx.ipl.pt

Cristina Morais

Externato da Luz; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

cristina.morais@campus.ul.pt

Helena Gil Guerreiro

Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hg@campus.ul.pt

Resumo: Esta comunicação apresenta um estudo focado na utilização do vídeo para pensar a cultura de sala de aula em Matemática. Este estudo insere-se num projeto de investigação, e desenvolvimento profissional, que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design. Nesta comunicação discutimos o primeiro ciclo de design destacando três princípios que pretendem criar condições para que os professores (i) partilhem situações autênticas da sua sala de aula, (ii) discutam com os outros, colaborativamente, episódios da sua sala de aula e (iii) adquiram progressiva confiança e predisposição para a sua aprendizagem As oportunidades e constrangimentos identificadas neste primeiro ciclo de design permitem-nos encarar a organização de um segundo ciclo, mantendo o recurso ao vídeo como meio de acesso a situações autênticas de sala de professores em situações de formação.

Palavras chave: matemática, vídeo, sala de aula, formação de professores.

Apresentação

Este trabalho está integrado num projeto de formação de professores que procura articular o estudo da cultura de sala de aula em matemática com o desenvolvimento profissional de professores, numa perspetiva de interdependência entre a teoria e a prática.

Destacam-se três aspetos chave neste projeto: a) a cultura de sala aula considerada como o sistema de relações e saberes construído em cada comunidade de aprendizagem através das ações tanto do professor como dos alunos (Goos, Galbraith & Renshaw, 1999); b) a aprendizagem através da experiência, em que se estabelece um paralelo entre o modo como se poderá processar o desenvolvimento profissional dos professores e o modo como se processa a aprendizagem dos alunos (Mason, 2010), encarando a prática de ensino como um campo de aprendizagem para o próprio professor (Doerr & Lerman, 2010; Leikin & Zazkis, 2010; Mason, 2010) e procurando formas de trazer à formação episódios de sala de aula dos professores em formação; c) o vídeo como meio de acesso à sala de aula (van Es & Sherin, 2006).

Os vídeos de sala de aula são amplamente reconhecidos pela investigação como um recurso útil para a aprendizagem dos professores, permitindo o acesso a salas de aula autênticas em toda a sua complexidade, ao mesmo tempo que oferecem condições para a reflexão (Tekkumru-Kisa & Stein, 2017). No caso particular do uso de vídeos pessoais é reconhecido o papel que estes podem ter no desenvolvimento de processos de avaliação realizados em modalidades de trabalho colaborativo, com destaque para as discussões sobre os vídeos das aulas dos participantes em ações de formação (Borko, Jacobs, Eiteljorg & Pittman, 2008), sendo a ligação entre os objetivos da utilização do vídeo e os objetivos da formação um aspeto significativo evidenciado (Cyrille & Sébastien, 2015).

Este artigo, tem como objetivo compreender o papel, identificando constrangimentos e oportunidades, do uso do vídeo, neste projeto de investigação e formação de professores, para refletir sobre a cultura da sala de aula em Matemática.

Enquadramento teórico

Pensar a cultura de sala de aula em Matemática, em termos das normas e práticas da sala de aula, implica refletir sobre o espaço social de aprendizagem. Esta perspetiva remete-nos para uma compreensão das dimensões sociais da aprendizagem da matemática baseada em dois tipos de normas, as normas sociais e as normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996), que estabelecemos como um dos eixos orientadores para pensar a cultura de sala de aula em Matemática. A par deste, estabelecemos mais quatro eixos orientadores da reflexão e que ajudam a caracterizar a cultura de sala de aula: a natureza e o papel das tarefas matemáticas (Ponte, 2005, 2017), os recursos associados às tarefas matemáticas (NCTM, 2007), o papel dos vários atores no processo de aprendizagem (Goos et al., 1999; Smith & Stein, 2011) e a avaliação que regula as aprendizagens (Santos, 2017). A cultura de sala de aula constitui-se assim como um sistema dinâmico, em permanente construção, pelo que, o seu estudo implica que analisemos a inter-relação entre estes eixos (Yackel & Cobb, 1996).

Neste projeto assumimos o ensino como um contexto de aprendizagem para o professor, em colaboração com outros professores e com a intervenção de investigadores (Doerr & Lerman, 2010; Leikin & Zazkis, 2010; Mason, 2010). Segundo estes autores, a reflexão sobre a prática pode constituir um contributo para o desenvolvimento profissional do professor na medida em que o seu conhecimento profissional se desenvolve quando "interage com outros professores e com investigadores, experimentando novas ideias de que se apropria e passa a integrar no seu reportório de conhecimento profissional" (Doerr & Lerman, p. 247).

Na maior parte dos estudos, o acesso à prática do professor é realizado com a presença de observadores em sala de aula. No entanto, alguns aspetos da complexa relação entre os eixos de análise que elegemos para pensar a cultura de sala de aula em Matemática podem ser captados em vídeo recorrendo a dispositivos móveis que, pela sua simplicidade, possibilitam guardar, a qualquer momento, um episódio significativo da prática do professor para a promoção da reflexão sobre essa prática.

O recurso a vídeos de sala de aula autênticas em ações de formação, amplamente escrutinado e analisado pela investigação internacional (Cyrille & Sébastien, 2015; Tekkumru-Kisa & Stein, 2017), contempla um conjunto de aspetos de natureza muito diversa que importa destacar como enquadramento da investigação realizada neste projeto. Como aspeto comum a todos os trabalhos sobre a utilização de vídeos, destaca-se a importância de selecionar cuidadosamente esses vídeos e de lhes associar instrumentos de reflexão (Tekkumru-Kisa & Stein, 2017) para ajudar a planear a realização de discussões produtivas com base neste recurso.

Também em investigações realizadas em Portugal, a utilização deste recurso tem sido objeto de estudo, destacando-se os trabalhos do Projeto P3M (Oliveira, Canavarro, & Menezes, 2014), neste caso numa perspetiva modelar, a partir da apresentação de casos multimédia que retratam práticas de professores experientes focadas na exploração de tarefas matemáticas desafiantes.

No que respeita à utilização de vídeos de aulas dos próprios participantes nas ações de formação, são várias as razões apontadas na literatura que apoiam esta opção (Borko, Koellner, Jacobs, & Seago 2011; Borko, Carlson, Mangram, Anderson, Fong, Million, Mozenter, & Villa, 2017), nomeadamente, uma maior motivação por parte dos professores para pensar sobre uma realidade que conhecem, a sua ou a dos seus colegas, relativamente a uma realidade de outros professores que lhes é alheia. Deste modo, é eliminada a tendência para justificar as situações em análise com argumentos do tipo "esses alunos não são como os nossos". O recurso a vídeos de aulas dos professores participantes exige uma pequena dose de confiança para encarar os alunos presentes no vídeo e uma grande dose de confiança sobre os professores envolvidos. "Para partilharem os vídeos os professores precisam de sentir que fazem parte de uma comunidade profissional de apoio que sentem como segura" (Borko et al., 2017, p. 5). Para estes autores é fundamental ter em conta estas preocupações no planeamento de sessões de formação com este tipo de recurso.

A combinação da utilização de vídeos de professores mais experientes com a utilização de vídeos de aulas dos participantes tem sido seguida em muitas formações. Roth, Bintz, Wickler, Hvidsten, Taylor, Beardsley, Caine e Wilson (2017) seguiram esta orientação num programa de formação em ensino das ciências, de duração bastante longa, com uma componente intensiva inicial e uma outra que decorreu ao longo do ano letivo. Neste caso, os vídeos de professores externos ao programa de formação, considerados como exemplares, foram usados com o objetivo de desenvolver a compreensão das estratégias e processos de resolução dos alunos. Só numa fase mais avançada do programa foram usados os vídeos dos professores participantes. Este programa de formação, integrado num amplo projeto de investigação, foi realizado em várias edições. Um dos aspetos, destacado pelos responsáveis, por este projeto são as evidências empíricas de impacto tanto nas práticas dos professores como nas aprendizagens dos alunos.

A investigação, além dos aspetos cognitivos, também tem procurado identificar os aspetos motivacionais e emocionais presentes na análise de vídeos dos próprios professores e vídeos dos seus colegas em ambientes de trabalho colaborativo (Kleinknecht & Schneider, 2013). Estes autores evidenciam a complexidade da rede de dimensões cognitiva, motivacional e emocional, envolvida na análise de vídeos de situações autênticas, bem como da ligação desta análise aos modos como é realizada e ainda ao papel dos formadores nestas análises. Estes investigadores “evidenciam os benefícios da comparação entre análises de vídeos dos próprios professores e de outros colegas” e apontam que “os resultados das diferenças entres os aspetos cognitivos, motivacionais e emocionais não são intuitivos nem facilmente observáveis em contextos de utilização colaborativa” (Kleinknecht & Schneider, 2013, p. 22).

Um dos aspetos chave contemplado no papel dos formadores é a orientação que as suas intervenções podem ter nos momentos de reflexão e a função catalisadora dessas intervenções para a mudança de perceção que se pretende proporcionar aos professores em formação (van Es & Sherin, 2006, 2017). A formação de formadores capazes de liderar a utilização produtiva de vídeos é evidenciada por Borko et al. (2017). No modelo de formação aplicado é conferido aos formadores o papel de criação de um conjunto de ferramentas para apoio à utilização dos vídeos tendo em conta os momentos da formação. A ideia desenvolvida é a de uma construção de andaimes para análise dos vídeos, identificando cada momento da aula e os seus suportes de observação e reflexão de forma interligada. Obtém-se assim referenciais para a ação que incluem orientações para a monitorização da visualização e para a dinamização da discussão. Os aspetos a observar, bem como as questões a refletir num episódio de discussão em pequeno grupo, não são os mesmos que num episódio de discussão coletiva. Momentos de aula diferentes exigem guiões de reflexão com especificidades próprias. Para Borko et al. (2011) é um planeamento cuidadoso e intencional da visualização e das discussões sobre os vídeos que pode ajudar a garantir uma análise crítica, baseada em evidências e realizada com uma linguagem adequada.

Outros investigadores, Jacobs, Seago e Koellner (2017), sugerem o recurso a uma estratégia do tipo sanduíche para a utilização dos vídeos. Nesta estratégia, os vídeos são intercalados com atividades matemáticas que poderão depois ser resolvidas pelos alunos e vídeo gravadas. Estes investigadores desenvolvem a ideia de que os professores devem resolver e discutir previamente a tarefa que será proposta aos alunos e, deste modo, fazer previsões de como os alunos a resolverão e que erros poderão aparecer. As gravações vídeo ocorrerão depois sobre o desenrolar dessa tarefa numa sala de aula. Na investigação realizada por estes autores os vídeos não são gravados nas aulas dos participantes na formação, no entanto, uma orientação desta natureza poderá ser seguida pelos participantes de uma ação de formação, no sentido da realização de vídeos nas suas salas de aula.

Em síntese, podemos afirmar que o potencial deste recurso de aprendizagem para a formação de professores é grande, porém a sua utilização é complexa, envolvendo riscos diversos e exigindo múltiplos cuidados.

Metodologia

Este estudo faz parte de um projeto de investigação, e desenvolvimento profissional, que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016), centrada no desenvolvimento profissional (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016). A interdependência entre a teoria e a prática que caracteriza este projeto, justifica a escolha desta modalidade pela forma como permite articular estas duas dimensões, na medida em que investigadores e professores colaboram no sentido de refletir sobre a cultura de sala de aula em Matemática, através da análise da sua ecologia de aprendizagem, e pretender provocar mudanças nas práticas de ensino.

Foi realizado um primeiro ciclo de design tendo em vista a construção e aperfeiçoamento de referenciais teóricos, a ser refinados em futuros ciclos de design. Pretende-se que estes referenciais ajudem a promover a reflexão conjunta, professores e investigadores, sobre a cultura de sala de aula em Matemática e contribuam para o desenvolvimento do conhecimento profissional destes professores e, consequentemente para a melhoria das suas práticas.

A intervenção remete para a realização de uma oficina de formação intitulada "Cultura de sala de aula — contributos para a aprendizagem da matemática", de 26 horas presenciais. Reportamos o primeiro ciclo de intervenção, constituído por três edições desta oficina. Estas envolveram 45 professores de 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, na zona da Grande Lisboa. Os formandos inscreveram-se voluntariamente, sem o conhecimento prévio de que o uso do vídeo ia ser privilegiado. Os formadores destas oficinas eram investigadores do projeto Cultura SAM.

Considerando o potencial do uso do vídeo para refletir sobre a cultura de sala de aula, a equipa de formação selecionou um vídeo de um momento de discussão coletiva de uma tarefa matemática, gravado por uma professora exterior ao grupo de formação. Pretendia-se que este vídeo, não sendo modelar, constituísse um exemplo para motivar a produção de vídeos de episódios pessoais de sala de aula e a sua partilha no contexto da formação, assumindo-se como vídeo âncora (Borko et al., 2008) neste processo. Tratava-se de um vídeo captado com o telemóvel da professora à medida que ia dinamizando o momento de discussão coletiva. Era um vídeo realizado sem preparação prévia e não editado, que possibilitava um olhar sobre diferentes eixos da cultura de sala de aula em Matemática.

A partir deste vídeo, foi estruturada uma tarefa de formação, na qual se pretendia focar a observação dos professores em torno de aspetos relativos ao eixo das normas sociais e sociomatemáticas e promover condições de confiança favoráveis à partilha de vídeos espontâneos, isto é, vídeos amadores produzidos pelos próprios formandos para discussão de episódios de sala de aula. Ao longo das três oficinas de formação, o mesmo vídeo âncora foi usado associado a instrumentos elaborados para orientar a sua visualização, análise e discussão. O uso de vídeos espontâneos teve subjacentes princípios de design que pretendiam criar condições para que os professores (i) partilhassem situações autênticas da sua sala de aula, (ii) discutissem com os outros professores e com os formadores, colaborativamente, episódios da sala de aula e (iii) adquirissem progressiva confiança e predisposição para a sua aprendizagem, numa perspetiva de desenvolvimento do seu conhecimento profissional.

Os dados foram recolhidos com recurso ao diário de bordo da equipa de formação (DB), a relatórios dos formadores (RF) e a questionários de avaliação, de carácter opcional, individuais e anónimos, realizados pelos professores participantes no fim de cada oficina de formação (QA). A análise de dados decorreu, numa primeira fase, ao longo da intervenção permitindo realizar alterações de sessão para sessão e entre oficinas de formação. No final da intervenção, decorreu uma análise retrospetiva que permitiu revisitar os dados procurando evidências do uso de vídeos para pensar a cultura de sala de aula em Matemática, identificando oportunidades e constrangimentos, que aqui trazemos a discussão.

A utilização do vídeo num primeiro ciclo de design

Na primeira oficina, o uso do vídeo âncora associado à tarefa de formação permitiu aos professores participantes, segundo o formador, pensar no eixo das normas sociais e sociomatemáticas, destacando que "claramente [o eixo das normas] foi algo em que nunca tinham pensado" [DB]. A tomada de consciência de aspetos relativos às normas parece ter acontecido pela visualização do vídeo, como constata uma formanda ao referir "a consciencialização de que às vezes não temos cuidado com isso [normas] e de que outras vezes já fazemos e não sabemos" [DB]. Nesta situação, o uso do vídeo constituiu-se como uma oportunidade para refletir sobre o eixo das normas. Contudo, o vídeo âncora não desencadeou a produção de vídeos por parte dos professores, como refere o formador a meio da oficina "percebi que não vão surgir vídeos, apesar da minha tentativa de motivação" [DB]. Esta resistência, que se assume como um constrangimento, foi ultrapassada apenas nas sessões finais da oficina quando surgiu o primeiro vídeo, o que "quebrou o gelo" [DB] levando ainda à produção e partilha de dois vídeos nas sessões seguintes.

A reflexão em torno do propósito de produção e partilha de vídeos produzidos pelos professores participantes conduziu a que a estrutura das oficinas seguintes fosse repensada. Para além da realização da tarefa que envolveu o uso do vídeo âncora, estas oficinas passaram a contemplar a dinamização de um momento de partilha de vídeos no início de cada sessão. Nestes momentos de partilha os professores participantes podiam trazer um vídeo de um episódio de uma aula sua, inteiramente à sua escolha. Esta decisão fez com que os professores se sentissem implicados, desde as primeiras sessões, na produção e partilha de vídeos. A oportunidade de partilhar momentos da aula de matemática à sua escolha, permitiu ganhar segurança para trazer as suas experiências através do vídeo e por em comum com as restantes colegas da formação, como descrevem as formadoras "as formandas estão verdadeiramente empenhadas em (...) recolher dados das suas experiências" [DB].

Criada a confiança necessária nos professores para a partilha de momentos da sua sala de aula, a produção e partilha de vídeos em todas as sessões tornou-se uma rotina, como refere uma das formadoras ao afirmar que "o receio inicial foi-se dissipando à medida que os primeiros formandos se aventuraram, criando-se um à vontade" [RF]. Os vídeos espontâneos partilhados pelos professores centravam-se na discussão coletiva de tarefas, também estas selecionadas pelos próprios professores. Este aspeto, no entanto, parecia restringir a discussão dos professores a pormenores relativos à própria tarefa, quando o desejável pela equipa de formação era a discussão em torno dos eixos considerados para pensar a cultura de sala de aula em Matemática. Deste modo, a dificuldade em envolver os formandos na discussão dos vídeos desencadeou na equipa de formação a necessidade de criar instrumentos para centrar a sua análise. Um dos instrumentos criados pelos formadores foi um guião de observação dos vídeos partilhados, estruturado de acordo com as diferentes fases do desenvolvimento de uma tarefa em sala de aula: apresentação da tarefa, trabalho dos alunos e ações do professor nesse momento, discussão coletiva, sistematização das aprendizagens, sendo ainda incluída a fase de planeamento/motivações/objetivo da tarefa e a avaliação das aprendizagens (Figura 1, à esquerda). Posteriormente, os formadores sentiram necessidade de criar um outro guião estruturado no sentido de focar a atenção nos eixos da cultura de sala de aula em Matemática: tarefas, papéis dos atores, normas, avaliação e recursos (Figura 1, à direita).

GUIÃO - OBSERVAÇÃO DAS PARTILHAS

PLANEAMENTO/ MOTIVAÇÕES/ OBJETIVO	
FASE 1 APRESENTAÇÃO DA TAREFA	
FASE 2 TRABALHO DOS ALUNOS AÇÕES DO PROFESSOR	
FASE 3 DISCUSSÃO COLETIVA	
FASE 4 SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS	
AVALIAÇÃO PARA AS APRENDIZAGENS	

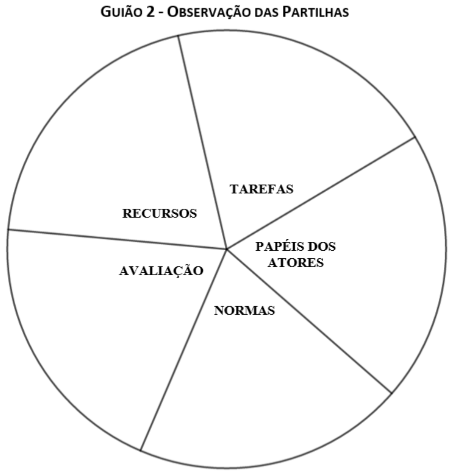


Figura 1 – Guiões de observação das partilhas

Estes guiões foram usados nas últimas sessões de apenas uma das oficinas de formação. Por este motivo, são escassos os dados que conseguimos recolher sobre a sua utilização. No entanto, a equipa de formadores considerou fundamental vir a usar estes guiões no segundo ciclo de design da oficina de formação, de forma a identificar as suas potencialidades e fazer as alterações necessárias para a discussão de vídeos espontâneos dos professores.

Relativamente aos dados dos questionários de avaliação das três edições da oficina de formação, todos os professores que responderam (29 em 45 participantes) consideraram que o uso de vídeos é adequado para discutir aspetos relativos à cultura de sala de aula em Matemática. Para além disso, todos os professores consideraram também que o uso de vídeo se constitui como uma forma de trazer a própria sala de aula à discussão, tendo em vista a sua melhoria. Neste questionário nem todos os professores indicaram condicionantes, que colocavam constrangimentos ao uso do vídeo, tendo sido identificadas, principalmente, potencialidades, consideradas como oportunidades para pensar a cultura da sala de aula.

Por um lado, os constrangimentos apontados pelos professores prendem-se, sobretudo, com dificuldades de produção de vídeos durante a dinamização da aula como "gravar ao mesmo tempo que estava a explorar a tarefa com os alunos" [QA], referido por um dos professores. Questões de anonimato dos alunos como "não ser possível utilizar imagens dos alunos..." [QA] são também motivo de preocupação.

Por outro, as oportunidades que o uso do vídeo oferece foram reconhecidas pela maioria dos professores, particularmente ao nível do eixo "Papéis dos atores". Vários professores apontaram que o vídeo permite a "reflexão e discussão do papel do professor como mediador nas aprendizagens" [QA], contribuindo para "modificar os seus métodos de ação [ao observar as suas atitudes]" [QA]. Relativamente ao papel dos alunos, os professores referiram que "o uso do vídeo permitiu observar as reações, comportamentos, dificuldades ou facilidades na explicitação de raciocínios e de que forma podemos 'influenciar/direcionar' as aprendizagens" [QA]. Para além disso foi encarado como uma importante ferramenta para a "partilha de resoluções matemáticas dos alunos" [QA]. O uso de vídeo é assim entendido como uma oportunidade para revisitar a sala de aula ao "observar-se mais que uma vez" [QA] momentos de resolução de uma tarefa, permitindo olhar e discutir com os outros, numa “análise conjunta do que aconteceu em contexto de sala de aula” [QA].

Considerações finais

Este artigo tem como objetivo compreender o papel, identificando constrangimentos e oportunidades, do uso do vídeo, num projeto de investigação e formação de professores para refletir sobre a cultura da sala de aula em Matemática.

Os professores reconheceram constrangimentos associados à produção e partilha dos vídeos, nomeadamente a autorização para a captação de imagens em sala de aula e o duplo papel de professor e realizador de vídeos. Contudo, estes constrangimentos não constituíram obstáculo à produção de vídeos espontâneos. Os professores reconheceram várias oportunidades que o seu uso proporciona, nomeadamente a nível da discussão em torno das ações do professor e dos alunos, um dos eixos considerados para pensar a cultura de sala de aula em Matemática. Os vídeos espontâneos foram encarados pelos professores como particularmente úteis para revisitar a sala de aula, juntamente com colegas professores, de modo a analisar com maior detalhe estratégias de resolução dos alunos, o que nem sempre se torna possível no momento em que ocorrem, em aula. Este aspeto evidencia que os professores, do ponto de vista motivacional, estavam predispostos para a produção e partilha de vídeos de episódios das suas salas de aula.

Destacamos como positiva esta forma de desencadear vídeos, focada nas dimensões motivacional e emocional (Kleinkrecht & Schneider, 2013) que conduziu à produção de muitos vídeos espontâneos, constituindo um meio de trazer a sala de aula à formação, muito valorizado pelos professores. Intencionalmente, os vídeos foram explorados de forma menos diretiva para favorecer o desenvolvimento de confiança. No entanto, este aspeto veio reforçar a necessidade de criar instrumentos para focar a visualização e discussão dos vídeos (Tekkumru-Kisa & Stein, 2017) nos eixos da cultura de sala de aula em Matemática. Deste modo, aos princípios de design enunciados para o uso de vídeos espontâneos surge a necessidade de acrescentar um novo princípio, que explicita a preocupação em criar condições para que os professores desenvolvam discussões produtivas apoiadas em instrumentos de reflexão. Numa perspetiva de continuidade, os princípios de design refinados serão orientadores do próximo ciclo de intervenção.

Em síntese, o equilíbrio entre promover o interesse e a confiança necessários para o aparecimento de vídeos espontâneos e a sua reflexão crítica, apoiada em instrumentos orientadores para pensar a cultura de sala de aula em Matemática, parece-nos ser um aspeto crítico evidenciado por este trabalho. A procura deste equilíbrio reflete a complexidade das relações entre as dimensões cognitiva, motivacional e emocional na utilização de vídeos (Kleinkrecht & Schneider, 2013) para a aprendizagem dos professores.

Referências

Borko, H., Carlson, J., Mangram, C., Anderson, R., Fong, A., Million, S., Mozenter, S., & Villa, A. M. (2017). The role of video-based discussion in model for preparing professional development leaders. *International Journal of STEM Education*, *4*(29), 2–18.

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M. E. (2008). Video as tool for fostering productive discussions in mathematics Professional development. *Teacher and Teacher Education, 24*, 417–436.

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J., & Seago, N. (2011). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *DM Mathematics Education, 43*, 175–187, doi: 10.1007/s11858-010-0302-5.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9–13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Cyrille, G. & Sébastien, C. (2015). Video viewing in teacher education and professional development: A literature review. *Educational Research Review, 16*, 41–67.

Doerr, H. M., & Lerman, S. (2010). Teachers learning from their teaching: The case of communicative practices. R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning through teaching mathematics* (pp. 247–262). Springer. doi: 10.1007/978-90-481-3990-3_13

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (1999). Establishing a Community of Practice. In Leone Burton (Ed.) *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (pp. 36–61). London: Falmer Press.

Jacobs, J., Seago, N. & Koellner, K. (2017). Preparing facilitators to use and adapt mathematics professional development materials productively. *International Journal of STEM Education, 4*(30), 1–14. doi: 10.1186/s40594-017-0089-9

Kleinknecht, M., & Schneider, J. (2013). What do teachers think and feel when analyzing videos of themselves and other teachers teaching? *Teaching and Teacher Education, 33*, 13–23.

Leikin, R., & Zazkis, R. (2010). Teachers' opportunities to learn mathematics through teaching. R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning through teaching mathematics* (pp. 3–21). Springer. doi: 10.1007/978-90-481-3990-3_1

Mason, J. (2010). Attention and intention in learning about teaching through teaching. R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning through teaching mathematics* (pp. 23–47). Springer. doi: 10.1007/978-90-481-3990-3_2

NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2014). Casos multimédia na formação de professores que ensinam matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 429-461). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. doi: 10.13140/ RG.2.1.1759.5361

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33-56). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, 25*(2), 77–98.

Roth, K., Bintz, J., Wickler, N., Hvidsten, C., Taylor, J., Beardsley, P. Caine, A., & Wilson, C. (2017). Design principles for effective video-based professional development. *International Journal of STEM Education, 4*(31), 1–15. doi: 10.1186/s40594-017-0091-2

Santos, L. (2017). O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: algumas notas. *Educação e Matemática, 144-145,* 53–58.

Smith, S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston: NCTM.

Tekkumru-Kisa, M., & Stein, M. K. (2017). A framework for planning and facilitating video-based professional development. *International Journal of STEM Education, 4*(28), 2–18. doi: 10.1186/s40594-017-0086-z

van Es, E. & Sherin, M. (2006). How different video club designs support teachers in “learning to notice”. *Journal of Computing in Teacher Education, 22*(4), 125–135.

van Es, E. & Sherin, M. (2017). Bringing facilitation into view. *International Journal of STEM Education, 4*(32), 2–14. doi: 10.1186/s40594-017-0088-x

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

PÓSTERS – GD3

CONHECIMENTO TECNOLÓGICO-PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO: PERSPECTIVAS DE FORMAÇÃO PARA DOCENTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Eliane Maria de Oliveira Araman

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

elianearaman@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Tecnologia. Formação Docente. Anos Iniciais.

Na era digital, o papel do professor se amplia frente às novas possibilidades e inovações, tanto nas novas maneiras de estabelecer relações e interações com os alunos, quanto nas formas de ensinar. Para que as tecnologias sejam integradas no currículo, é preciso compreender que o professor necessita de uma pluralidade de saberes necessários ao exercício de sua função.

Diversos autores tipificam a pluralidade de saberes necessários à ação docente, tais como Shulman (1986); Ball, Thames e Phelps (2008). Estes saberes necessários à docência estão relacionados com o conhecimento do conteúdo, do currículo, das formas de abordar pedagogicamente os conteúdos, entre outros.

Nessa perspectiva, a presença da tecnologia no ambiente educacional, com perspectivas de inserção na prática pedagógica do professor, requer o desenvolvimento de outros saberes, além dos já elencados pelos pesquisadores. Encontramos nas pesquisas desenvolvidas por Koehler e Mishra (2009) a definição de alguns conhecimentos necessários aos docentes para o uso da tecnologia em sala de aula, intitulados de *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK), a saber: conhecimento de conteúdo; conhecimento pedagógico; conhecimento tecnológico; conhecimento pedagógico do conteúdo; conhecimento tecnológico do conteúdo; conhecimento tecnológico-pedagógico, que juntos compõem o conhecimento tecnológico-pedagógico de conteúdo, este que se articula entre tecnologia, pedagogia e conteúdo no processo de ensino e aprendizagem.

Um dos saberes que estão em processo de constituição e reconstrução é o conhecimento tecnológico-pedagógico de conteúdo, pois, requer do professor a articulação entre o conhecimento pedagógico e de conteúdo integrados às tecnologias, ou seja, a forma como os conteúdos matemáticos podem ser ensinados a partir de metodologias que requerem o uso das lousas digitais. É esse o foco da presente pesquisa, que se debruça em investigar os conhecimentos tecnológico-pedagógico de conteúdo evidenciados por professores, se enquadrando numa perspectiva qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

Em 2016 foi desenvolvido um curso de formação continuada no município de Ibiporã, Paraná, Brasil para seis professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O curso contemplou uma carga de 30 horas e tinha como atividades a manipulação da Lousa Digital Interativa, a busca por Objetos de Aprendizagem em repositórios e a elaboração de aulas de matemática usando a Lousa Digital Interativa e Objetos de Aprendizagem.

As aulas elaboradas pelas docentes durante o curso foram desenvolvidas em suas salas de aula junto aos seus alunos. Essas aulas foram filmadas e analisadas pela pesquisadora em busca de indícios do desenvolvimento do conhecimento tecnológico-pedagógico de conteúdo.

Das seis aulas analisadas, podemos observar que as docentes, em sua maioria (cinco delas), conseguiram articular uma aula na qual o Objeto de Aprendizagem selecionado e trabalhado junto aos alunos possibilitou uma nova forma de abordar os conteúdos matemáticos normalmente trabalhados que estavam de acordo com o conteúdo previsto para o bimestre (números e operações), evidenciando uma atenção com o currículo e com as questões pedagógicas. Entretanto, duas não conseguiram explorar o potencial pedagógico do Objeto de Aprendizagem, ministrando a aula de forma muito parecida com o que estavam habituadas a fazer na lousa tradicional, não promovendo situações de interação e interatividade. Uma das docentes apresentou dificuldades técnicas para o manuseio da Lousa Digital, embora isso já tenha sido trabalhado durante o curso de formação. Tais resultados indicam que, embora o curso tenha contribuído de alguma forma para o desenvolvimento de saberes relacionados ao uso das tecnologias, são necessárias diversas ações formadoras para que os docentes realmente implementem, com qualidade, as tecnologias para o ensino de matemática em suas aulas.

Referências

Ball, D. L. & Thames M. H. & Phelps, G. C. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Portugal: Porto.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.

Shulman, L. S. (1986). Those who understands: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* Washington, 15(2), 4-14.

ESTRATÉGIAS PARA PROMOVER UMA APRENDIZAGEM ATIVA DA MATEMÁTICA

Isabel Vale

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Ana Barbosa

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

anabarbosa@ese.ipvc.pt

Palavras chave: estratégias instrucionais; aprendizagem ativa; formação de professores; ensino básico.

Com a apresentação deste poster pretende apresentar-se parte de um estudo mais abrangente que tem por finalidade identificar o potencial de estratégias e de materiais instrucionais que visem uma melhoria do ensino e aprendizagem da matemática e que sejam relevantes, quer para os (futuros) professores quer para os seus alunos. Contempla vários objetivos, que têm em comum a ideia de que aprender envolve atividade não só intelectual, mas também física, e que as interações sociais, refletidas no trabalho colaborativo e nas discussões coletivas, facilitam a partilha, o desenvolvimento de significados matemáticos e a construção de conhecimento. Pretende-se desenvolver nos alunos e (futuros) professores competências ao nível da resolução de problemas, espírito crítico, visualização, colaboração, comunicação e criatividade, consideradas, essenciais na sociedade atual, recorrendo a este tipo de estratégias/materiais.

Ensinar matemática é facilitar o desenvolvimento das ideias matemáticas a quem aprende. Este processo implica que não podemos levar todos os alunos aos mesmos objetivos, ao mesmo tempo, da mesma forma, pois são todos diferentes. Mas podemos transformar a aula de matemática, dentro ou fora da sala, num espaço que constitua um ambiente rico que leve os alunos a conjeturar, matematizar, provar, generalizar, questionar, discutir, colaborar, explicar e comunicar a sua forma de pensar, criando um sentido de comunidade (e.g. Fosnot, 2007).

Por outro lado, os nossos estudantes apresentam comportamentos mais sedentários, estando cada vez mais tempo inativos nas salas de aula, o que vai contra a sua natureza. Estudos da ciência cognitiva recomendam que as crianças se movimentem, pois um corpo sentado e imóvel é o caminho para o desenvolvimento de algumas doenças e provoca a desatenção. O movimento, a manipulação e a experimentação permitem que os alunos estejam atentos, melhorem a compreensão e a memorização. (e.g. Hannaford, 2005; Nesin, 2012).

Neste panorama, os alunos devem ser confrontados com desafios que os entusiasmem para aprender e os ponham a trabalhar uns com os outros, movimentando-se. Assim, surgem os trilhos, os congressos e a *gallery walk* como estratégias instrucionais relevantes para quem ensina e aprende matemática. Um trilho matemático é uma sequência de paragens ao longo de um percurso, no qual os alunos resolvem tarefas matemáticas no ambiente que os rodeia; um congresso consiste em apresentações de resoluções de problemas previamente trabalhados, em pares ou grupo, pelos alunos, num auditório aos seus colegas, permitindo discutir as suas ideias com a plateia; a *gallery walk* é uma estratégia que permite que os alunos trabalhem colaborativamente resolvendo tarefas, apresentando-as em pósteres, localizados à volta da sala de aula ou fora, numa perspetiva semelhante às obras artísticas expostas numa galeria, tendo ainda oportunidade de partilhar ideias e receber *feedback* (Vale & Barbosa, 2018).

Nesta apresentação, far-se-á referência a estudos de natureza qualitativa e interpretativa, numa abordagem exploratória, desenvolvidos com futuros professores dos 1.º/2.º ciclos do EB e com alunos dos 5.º/6.º anos. Abordam as estratégias instrucionais referidas, consideradas não convencionais e inovadoras, e procuram compreender em que medida constituem um contexto favorável para a aprendizagem, ao nível dos temas matemáticos, capacidades transversais e atitudes de alunos e futuros professores do Ensino Básico. Na recolha de dados foram privilegiados métodos como a observação, as produções escritas, os registos fotográficos e, em alguns casos, questionários.

A figura 1 ilustra alguns momentos das três estratégias utilizadas com diferentes alunos.

Figura 1 – Alunos na realização de um trilho, congresso e *gallery walk*

Estas estratégias foram aceites, pelos futuros professores e pelos alunos do EB, com entusiasmo e envolvimento. Ficaram com uma perspetiva diferente da matemática, sobretudo, que podem fazer matemática sem estar presos a uma cadeira, trabalhando colaborativamente e aprendendo matemática de forma significativa, dentro ou fora da sala de aula. Contribuíram, positivamente, para que alunos com diferentes capacidades e caraterísticas se sentissem confortáveis em participar, pondo em evidência os seus conhecimentos e dificuldades.

Referências

Fosnot, C. T. (2007). *Contexts for learning mathematics*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hannaford, C. (2005). *Smart Moves: Why learning is not all in your head.* Salt Lake City: Great River Books.

Nesin, G. (2012). *Active Learning. This we believe in action: Implementing successful middle level schools (pp. 17–27).* Westerville, OH: Association for Middle Level Education.

Vale, I & Barbosa, A. (2018). Estratégias dinâmicas no ensino da matemática: trilhos, congressos e *gallery walk. Resumos do INCTE III.* IP Bragança.

GRUPO DE DISCUSSÃO 4

O aluno e a aula de Matemática

GRUPO DE DISCUSSÃO 4

O ALUNO E A AULA DE MATEMÁTICA: O REPRESENTAR E A APRENDIZAGEM

Renata Carvalho

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@campus.ul.pt

Conceição Costa

UIED & Escola Superior de Educação de Coimbra

ccosta@esec.pt

As aprendizagens matemáticas são apoiadas pelo processo de representar, uma maneira de modelar a matemática e uma forma do aluno mostrar o seu pensamento sobre a matemática (Fennell & Rowan, 2001). Na aula de Matemática, durante o processo de aprendizagem os alunos aprendem a usar representações que lhe são apresentadas, criam as suas próprias representações, mas as crianças mostram notável perspicácia e imaginação quando lhes é dada oportunidade de, por si sós, revelarem as suas ideias matemáticas (Whitin & Whitin, 2001). As representações são centrais para a aprendizagem e pensamento em Matemática. Quando falamos sobre um objeto ou processo matemático, cada um de nós relaciona-o com algo que tenhamos em mente – uma representação mental do objeto ou processo em consideração (Dreyfus,1991). Na perspetiva deste autor "Representar um conceito significa gerar um espécime, exemplo, imagem dele. Mas esta curta descrição é insuficiente para nós, porque não especifica se o exemplo gerado é simbólico ou mental nem indica o que "gera" significa em termos dos processos pelos quais ganha existência e como eles se desenvolvem" (pp.31). As representações incorporam características das estruturas mentais e ações matemáticas, tais como o desenho de diagramas e o uso de palavras para mostrar e explicar o significado de um dado conceito (NCTM, 2017). Uma representação simbólica externamente escrita apoia o discurso dos alunos, uma vez que ilustra as resoluções destes, permitindo a partilha, a critica e a discussão de ideias matemáticas.

Uma representação mental, refere-se a um esquema mental ou estrutura de referência que um individuo usa para interagir com o mundo externo e pode diferir de individuo para individuo. Representações mentais, são representações internas que fazem parte das estruturas cognitivas de um individuo (Cruz, 2002) e é através destas representações que damos sentido aos fenómenos e explicamos conceitos e ideias matemáticas. A visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência. As representações mentais são criadas na mente baseadas em sistemas de representação. Um individuo pode criar uma representação mental ou várias representações competitivas para um mesmo conceito matemático (Dreyfus,1991). Várias representações mentais competitivas do mesmo conceito podem coexistir na mente de alguém podendo evocar diferentes representações para diferentes situações matemáticas. Diferentes representações matemáticas podem entrar em conflito ou várias representações do mesmo conceito podem complementar-se entre si ou eventualmente podem ser integradas numa representação única desse conceito. Este processo de integração está relacionado com a abstração e é descrito como representações múltiplas, que permite usar várias delas em simultâneo e convertê-las, em momentos exigidos pelo problema ou situação sobre a qual se está a pensar (Dreyfus,1991).

Para Cruz (2002) as representações internas (mentais) e as representações externas (usadas para comunicar ideias) estão diretamente relacionadas em Matemática, uma vez que nos movemos entre ambas para podermos explicar a forma como pensamos, embora por vezes inconscientemente. Schnotz, Baadte, Müller e Rasch (2010) dividem as representações mentais em dois tipos: representações descritivas (*description*) e representações representativas (*depiction*). As representações descritivas são símbolos, ou seja, sinais que não têm qualquer semelhança com o seu referente, mas que permitem perceber relações. A linguagem natural, falada ou escrita, expressões matemáticas ou fórmulas são representações descritivas. Os autores relacionam-nas com representações proposicionais. As representações representativas são ícones, ou seja, sinais tais como fotografias, desenhos, pinturas, mapas ou linhas de um gráfico associados ao seu referente por semelhança ou analogia e relacionam-nas com modelos mentais e imagens. Na sua perspetiva, ambas as representações servem propósitos distintos. Enquanto as representações descritivas são mais gerais, abstratas e poderosas a expressar o conhecimento abstrato, as representativas são mais concretas e específicas, mais seletivas, sendo fundamentais para fazer inferências e caracterizar objetos. Isto acontece porque, quando desenhamos um objeto não desenhamos apenas a sua forma, mas também as suas dimensões e orientação. Por vezes, uma representação representativa (modelos e imagens) permite a criação de uma representação descritiva (representação proposicional) simples facilitando o acesso rápido a um processo simbólico. Neste sentido, estes dois tipos de representações mentais complementam-se.

Uma representação matemática não pode ser compreendida de modo isolado. Uma equação ou um gráfico particular em coordenadas cartesianas, por exemplo, fazem sentido só como uma parte de um sistema de representações mais amplo dentro do qual significados e convenções têm de ser estabelecidos (Goldin, 2001), A maior parte do ensino em Matemática envolve o aluno na aprendizagem e interpretação de sistemas de representação (ligações, representações de representações, operações matemáticas, regras em linguagem natural ou de lógica, etc) e no uso destas para resolver problemas. Alguns sistemas são fundamentalmente notacionais e simbólicos, enquanto que outros revelam relações visuais ou espaciais. Embora as representações matemáticas externas sejam na maior parte das vezes estáticas, a calculadora e o computador permitem agora apresentar um mundo de novas possibilidades dinâmicas, onde representações podem ser alteradas e ligadas automática e continuamente umas às outras. Também as notações simbólicas formais da matemática, as retas numéricas visuais-espaciais, gráficos, os diagramas de Venn, os micromundos baseados em computador, os materiais manipulativos concretos, etc. são representados e processados internamente. É o nível interno que grandemente determina a utilidade de tais sistemas de representação externa de acordo com o modo como o indivíduo compreende e interage com eles (Goldin, 2008).

Os professores fazem inferências sobre as representações internas dos seus alunos, as conceções matemáticas e conceções erróneas, baseadas nas interações ou produção de representações externas desses alunos nos seus ambientes de aula. Por vezes, o aluno recorre a uma representação externa para representar uma interna (por exemplo, quando este expressa a relação que tem em mente desenhando um gráfico). Outras vezes ou mesmo em simultâneo o aluno pode considerar uma representação interna para representar uma externa (por exemplo, quando visualiza o que é descrito por um gráfico ou por uma fórmula algébrica), (Goldin, 2008).

Em aula, no processo de aprendizagem pode ser usada: uma única representação; mais que uma representação em paralelo; ligações entre representações paralelas; integração de representações e ligações flexíveis entre elas. Para se ter sucesso em matemática, é desejável ter ricas representações mentais de conceitos. Uma representação de um conceito é considerada rica, se contem muitos aspetos relacionados com o conceito que pretende representar (Dreyfus,1991).

Na literatura em educação matemática é muitas vezes clamado que a facilidade em usar Múltiplas Representações Externas (MRE), do mesmo conceito e a flexibilidade em transitar entre representações, facilita a resolução de problemas e a aprendizagem da matemática. Devido ao facto de certas representações serem muito eficientes a transmitir informação e outras não, alguns autores têm arguido que fornecer aos alunos diferentes representações do mesmo conceito pode ajudá-los a compensar as limitações das diferentes representações. Os alunos que são capazes de reconstruir o seu conhecimento de forma a ir ao encontro das exigências da tarefa, são capazes de lidar melhor com situações novas e complexas do que aqueles a quem falta flexibilidade. Assim, o uso de representações externas pode encorajar a reconstrução do conhecimento, uma vez que diferentes representações podem expressar a mesma ideia de diferentes maneiras (Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen, Verschaffel, 2009). Contudo, apesar das potenciais vantagens em usar MRE na aprendizagem da matemática, o resultado de um importante número de estudos (e.g. Nistal et al,, 2009), deveria dissuadir-nos de argumentar que "o uso de MRE é absolutamente benéfico". Para os alunos puderem beneficiar do uso de uma dada representação, eles precisam de aprender as convenções que regulam a forma como a representação é usada, como se relaciona com a realidade e como se relaciona com outras representações do mesmo conceito. Os alunos também necessitam de saber fazer escolhas entre representações. Quando é dada aos alunos a oportunidade de escolha entre representações, eles nem sempre são capazes de selecionar a representação mais apropriada para cada situação e a sua incapacidade de escolher pode esconder as suas "performances" em matemática. A pesquisa evidencia (e.g. Nistal et al,, 2009), que se estes requisitos não são preenchidos pelo aluno podem ter um efeito prejudicial na sua aprendizagem .

As dez comunicações do Grupo de Discussão "O ALUNO E A AULA DE MATEMÁTICA: o representar e a aprendizagem", e dois pósteres, apresentam estudos desenvolvidos na aula de matemática, onde o representar foi central para a aprendizagem e o pensamento matemático de alunos de diferentes níveis de ensino, desde o pré-escolar ao ensino superior. No conjunto das contribuições para este Grupo de discussão, identifica-se uma diversidade de pontos de vista relativa ao processo de representar na aula de Matemática, o uso de sistemas de representação externa (desde estáticos a dinâmicos, visuais-espaciais a proposicionais) e ao modo como o aluno compreende e interage com eles no seu percurso de aprendizagem.

No primeiro momento deste grupo de discussão, a comunicação apresentada por Rodrigues, Serrazina e Caseiro, centra-se na análise de relações numéricas realizadas por alunos do 2.º ano do 1.º Ciclo do ensino básico. Partindo de representações simbólicas de números naturais, onde estes são encarados como objetos mentais, os alunos relacionam números e operações recorrendo a processos de reparar nos números e nas relações entre estes, a cálculos exploratórios parciais, a relações numéricas e a estratégias de cálculo. Factos numéricos são considerados essenciais no estabelecimento de relações e as discussões coletivas, são encaradas pelas autoras como o momento de socialização dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

O estudo apresentado por Guerreiro, Morais, Serrazina e Ponte discute o uso de múltiplas representações no percurso de aprendizagem dos números racionais no 1.º ciclo do ensino básico ao nível do 3.º ano, considerando promissor, na fase inicial da aprendizagem dos números racionais, o uso de múltiplas representações destes números. Este estudo potencia a articulação entre as representações em percentagem, numeral decimal e fração e realça que, a compreensão destas representações simbólicas e suas relações é apoiada pelo uso, sistemático, de representações ativas e icónicas (que são encaradas como modelos que apoiam o estabelecimento de relações, entre representações e num mesmo tipo de representação. Os autores defendem que o recurso a múltiplas representações faz emergir representações simbólicas com compreensão, uma vez que os alunos têm a oportunidade de selecionar a representação que consideraram mais adequada para justificar as relações de equivalência que estabelecem. Acrescentam ainda que, um trabalho centrado na compreensão de que um mesmo número pode assumir diferentes representações (simbólicas, ativas e icónicas) contribuiu para a conceptualização de número racional.

Ainda no âmbito dos números racionais, Carvalho e Ponte, ao analisarem as estratégias de cálculo mental dos alunos com percentagens, valorizam igualmente a articulação entre representações dos números racionais, indo ao encontro do que defendem Guerreiro, Morais, Serrazina e Ponte. A mudança de representação de percentagem para fração ou numeral decimal surge como uma estratégia forte no cálculo mental envolvendo números de referência. Este é um tipo de estratégia que revela compreensão, por parte dos alunos acerca dos números racionais, uma vez que estes transitam entre representações dando-lhes significado. Este estudo refere-se ainda às representações mentais dos alunos. As estratégias dos alunos sugerem o recurso, essencialmente, a representações proposicionais e de modo residual a modelos mentais. As representações proposicionais baseiam-se em proposições verdadeiras que refletem o conhecimento matemático dos alunos, que estes usam para estabelecer relações.

A comunicação apresentada por Aguiar e Ponte, centrando-se no tópico matemático de expressões com variáveis e equações de 1.º grau, visa perceber que compreensão têm os alunos do 8.º ano sobre variáveis e equações e como utilizam a linguagem algébrica simbólica para resolver problemas e que dificuldades evidenciam. Este estudo mostra que os alunos manifestam dificuldade na manipulação algébrica e compreensão dos significados dos símbolos, na tradução em linguagem algébrica de situações problemáticas, na associação de expressões algébricas aos contextos dos problemas e em descrever algebricamente configurações geométricas/visuais. Por vezes, dificuldades em resolver equações leva os alunos a optar por resoluções aritméticas. A maioria dos alunos, mesmo evidenciando entendimento inicial do conceito de variável, apresenta uma frágil compreensão das expressões algébricas, quer no que se refere a significados e sua função na generalização, quer a conceitos que envolvam a manipulação simbólica

O trabalho apresentado por Costa, Matos, Charneca e Nascimento, examina a adequação de um modelo teórico para a compreensão do pensamento visual espacial em crianças pequenas, ou melhor, quer perceber se o modelo fornece compreensão para as respostas de crianças em idade pré-escolar quando colocadas perante atividades que envolvem a interpretação de relações espaciais. Para explorar estas compreensões foram desenvolvidos dois estudos, um com crianças de dois anos, e outro com crianças de cinco anos. Os principais resultados mostram que: os processos mentais de pensamento visual-espacial vivenciadas pelas crianças nos dois estudos fazem parte dos modos de pensamento identificados no modelo; e que o modelo teórico de pensamento visual-espacial parece conveniente e útil para crianças jovens, fornecendo compreensão específica em relação ao foco "interpretar relações espaciais" podendo apoiar o educador na orquestração das atividades com as crianças.

Conceição e Rodrigues, pretendem aprofundar o conhecimento acerca do processo de estruturação espacial de alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico através da comparação de algumas das construções bidimensionais que os alunos realizaram com quatro triângulos congruentes e os desenhos que estes fizeram dessas construções. Este estudo mostra que construções bidimensionais com materiais manipuláveis e a sua representação através de desenhos, facilitam a flexibilidade no uso de representações, podendo ser aspetos complementares, no que diz respeito à estruturação espacial. A diversidade de representações usadas pelos alunos para comunicar, permitiu igualmente aceder às conceções pessoais destes, ajudando-os, a par do questionamento do professor, a refletir sobre aspetos não coincidentes entre a construção e o desenho, e a reformular os desenhos.

A comunicação apresentada por Brunheira e Ponte enquadra-se numa experiência de formação inicial com futuros professores e educadores e pretende compreender de que forma as tarefas exploratórias podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio que promovem. A análise dos dados incidiu nos processos de construção, análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais. O estudo sugere que o tipo de tarefas propostas, os recursos e as interações na sala de aula são condições relevantes para a ativação destes processos. No que respeita às tarefas, a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, apoiando os processos de raciocínio espacial, mas a sua utilização deve ser considerada de modo a não reduzir demasiado o desafio cognitivo; e o contexto de trabalho colaborativo favorece o raciocínio e a estruturação espacial.

Subtil e Domingos centram-se na calculadora gráfica, como uma ferramenta de mediação semiótica e implementam uma experiência de ensino inovadora, que integra a calculadora gráfica, num nível de ensino onde tradicionalmente este tipo de abordagem não é privilegiado, alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade. Nesta comunicação analisam como é que se desenvolveu a transição de significados pessoais para significados matemáticos, na resolução da tarefa: "A minha mão", através da orquestração da professora. São discutidos os desempenhos de duas alunas. Os resultados mostraram que as duas alunas inseridas na comunidade de ensino e aprendizagem, compreenderam em que condições um gráfico cartesiano representa uma função.

O texto apresentado por Cruz, Gonçalves, Santiago, Martins e N. Martins é uma parte de um estudo qualitativo, e pretende analisar a possível influência do uso do *software* GeoGebra na validação e construção de múltiplas definições de um mesmo quadrilátero por estudantes da Licenciatura em Educação Básica de uma Instituição de Ensino Superior. Esta comunicação analisa tês momentos do estudo (fase inicial, uma sessão com Geogebra e fase final) para dois alunos. Os resultados desta análise parecem indicar, por partes dos dois estudantes, compreensão e construção de diferentes definições de um mesmo quadrilátero quando estes recorrem ao uso de um *software* de geometria dinâmica, nomeadamente no uso de diferentes propriedades envolvendo diagonais.

O estudo apresentado por Veloso centra-se na aprendizagem do Cálculo I à luz das teorias APOS e da Reificação de Dubinsky e Sfard, e tem como objetivos caraterizar o nível de preparação dos alunos para o Cálculo e para a aprendizagem do Cálculo e descrever o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem do Cálculo. Nesta comunicação são apresentados excertos de análise e tratamentos de dados referentes ao desempenho d e uma aluna relativo a caraterização de: conceito de função; conceito de função continua, conceito de derivada de uma função. Os resultados do estudo apontam que: de uma maneira geral os alunos têm maior compreensão operacional do que concetual, manifestada predominantemente no desempenho algébrico; a associação entre a interiorização e a reificação feita pelos alunos nem sempre é de sucesso-sucesso ou de insucesso-insucesso; a aprendizagem dos alunos é heterogénea, resultando de fatores como o seu nível de preparação, seu empenho e tipo de abordagem do Cálculo.

Martins e Domingues apresentam um poster sobre um projeto de investigação, no qual pretende estudar a introdução do *Cálculo Algébrico Simbólico* (CAS) com alunos do 12.º ano, na disciplina de Matemática A, recorrendo a calculadoras gráficas. Pretendem ainda analisar de que forma este tipo de recurso pode potenciar a aprendizagem da álgebra e do cálculo e reconhecer processos que conduzam à formação de noções matemáticas pelos alunos. Os autores pretendem constituir uma amostra, com quatro alunos, que seja representativa de três turmas, de forma a efetuar estudos de caso. Com estes alunos irão ser desenvolvidas entrevistas semiestruturadas com o objetivo de se proceder a uma análise mais fina do trabalho efetuado pelos alunos na resolução das tarefas.

O poster de Dias e Costa apresenta um estudo, envolvendo o uso de Cartões de Questões por Alunos (CQA) cujo objetivo é compreender oportunidades de aprendizagem sobre tabelas e gráficos em alunos do 5.º ano do Ensino Básico, nu ambiente de questionamento com apoio de cartões de questões e refletir sobre a orquestração da professora nas atividades matemáticas dos alunos. Na perspetiva das autoras, o uso de CQA permitiu envolver os alunos em processos de questionamento onde estes tiveram oportunidade de colocar questões do tipo significado, método, raciocínio e aplicação, de resolver e propor problemas, de recolher e organizar dados, de ler e interpretar tabelas e gráficos, e de escolher e construir e interpretar pictograma. investigadora/professora, na sua orquestração, sentiu-se apoiada pelos CQA na orientação da aula e na estruturação das questões.

A partir dos trabalhos apresentados neste Grupo de Discussão e de literatura sobre o representar, o aluno e a aula de matemática levantam-se um conjunto de questões que talvez possam constituir objeto de futura investigação em educação matemática:

Que ambiguidade e/ou obstáculos parecem emergir, quando na aula de matemática os alunos desenvolvem representações internas ou escolhem as suas representações externas para comunicar ideias matemáticas?

Como os estudantes representam internamente os conceitos? Que relações estruturais eles desenvolvem acerca de conceitos matemáticos? Como relacionam os alunos diferentes representações?

Como os professores identificam uma variedade de contextos para a aula de matemática onde todas as competências de representação possam ser desenvolvidas, aplicadas e discutidas de forma criativa pelo aluno?

Referências

Cruz, I., C., P (2002). Imágenes mentales en la actividad matemática. Reflexiones de una investigacion. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *49*, 3-34.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Londres: Kluwer.

Fennell, F., & Rowan, T. (2001). Representation: an important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics, January*, pp. 288- 292.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving. In L. English (Ed.*), Handbook of international research in mathematics education* (pp176-200). New York: Routledge.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of represenyations and the development of mathematical concepts. In A.A. Cuoco& F.R. Curcio (Eds). *The roles of representations in school mathematics. 2001Yearbook* (pp1-23). Reston: NCTM.

NCTM. (2017). Principios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática. Lisboa: APM. (Tradução Portuguesa)

Nistal, A, Van Dooren, W, Clarebout , G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM Mathematics*, *41*, 627-636.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problemsolving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. Jong, & J. Elen (Eds.), *Use of representation in reasoning and problem solving*. New York, NY: Routledge.

Whitin , P. , & Whitin, D. (2001). Using literature to invite mathematical representations. In A. A. Cuoco F. R. Curcio (Eds.). *The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook* (pp. 228-235). Reston: NCTM.

COMUNICAÇÕES – GD4

ESTABELECENDO RELAÇÕES NUMÉRICAS: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 2.º ANO

Margarida Rodrigues

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

Ana Caseiro

ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

anac@eselx.ipl.pt

Resumo: Esta comunicação insere-se no projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* e tem como objetivo identificar que relações numéricas estabelecem os alunos. Começa por discutir o que se entende por uma aula exploratória em Matemática, por flexibilidade e fluência de cálculo, bem como a importância de reparar nos números, identificando relações numéricas. Foca-se depois na análise da resolução de uma tarefa, integrada numa sequência de tarefas, realizada numa turma do 2.º ano de uma escola pública de Lisboa. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada por gravações áudio e vídeo da aula e dos registos dos alunos. Os resultados mostram que quando os alunos são capazes de estabelecer relações numéricas entre os números envolvidos, não se focando nos procedimentos, mostram flexibilidade de cálculo e facilidade em lidar com os números. Os dados realçam ainda a importância da discussão coletiva para os alunos caminharem no processo de reparar nas relações numéricas em vez de se focarem apenas nos procedimentos.

Palavras-chave: flexibilidade de cálculo, relações numéricas, fluência de cálculo, aula exploratória.

Introdução

Esta comunicação insere-se no projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* que tem como objetivo caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos entre os 6 e os 12 anos e descrever e analisar práticas dos professores que facilitem esse desenvolvimento. O objetivo deste artigo é identificar que relações numéricas estabelecem os alunos durante a resolução de uma tarefa, designada *Cartões com números*, realizada numa turma do 2.º ano e integrada numa sequência de tarefas que visou desenvolver nos alunos a flexibilidade de cálculo. Embora o objetivo do artigo se foque nas aprendizagens dos alunos, estas são desenvolvidas no contexto de um ensino exploratório, o que nos levou a estruturar o enquadramento teórico em duas secções: a primeira foca a aula de natureza exploratória, permitindo contextualizar e discutir depois os dados empíricos, nomeadamente no que se refere ao papel da fase de exploração autónoma e da discussão coletiva; a segunda incide na apresentação do quadro teórico relativo à flexibilidade de cálculo.

Enquadramento teórico

A aula exploratória

A prática de ensino exploratório da Matemática, tal como é referido por Canavarro (2011), advoga que "os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva" (p. 11). Desta forma, os alunos são envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, tornando-se construtores ativos do conhecimento matemático (NCTM, 2007), conseguindo atribuir significado à Matemática com que se estão a deparar, desenvolvendo, em paralelo, "capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p. 11).

Desta forma, o papel do professor é crucial numa prática de ensino exploratório. Inicialmente, cabe-lhe a seleção de uma tarefa potenciadora, adequada ao seu objetivo, pois, tal como Boston e Wolf (2006) afirmam, a natureza da tarefa é um dos aspetos que mais influencia a aprendizagem dos alunos. Após essa seleção, tem o papel de delinear a melhor forma de explorar as potencialidades da tarefa, preparando-se para lidar com a complexidade inerente à sua exploração em sala de aula (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008) e, também, para responder a possíveis dúvidas e questões dos alunos sem que para isso reduza o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998).

Segundo Stein et al. (2008), uma aula exploratória é geralmente estruturada em três fases: a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" da tarefa, e a fase de "discussão e sintetização". Na fase de lançamento, o professor deve garantir que todos os alunos compreendem o que lhes é pedido que façam. Na segunda fase, cabe ao professor o acompanhamento e apoio ao trabalho dos alunos, garantindo que todos se mantêm envolvidos e interessados na resolução da tarefa. Paralelamente a esse trabalho, o professor deve selecionar as produções dos alunos que considera mais adequadas e ricas para a discussão coletiva, ordenando-as (Stein et al., 2008). Por fim, na terceira fase, e após seleção ordenada das produções a serem apresentadas, o professor deve gerir o momento da discussão, orientando para a compreensão das relações existentes entre as diferentes produções e dos aspetos matemáticos nelas envolvidos. Tal como refere Canavarro (2011), cabe ao professor convidar "os alunos a analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta-análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras" (p. 16).

Por todos os desafios referidos, o ensino exploratório da Matemática é uma atividade complexa e considerada difícil por muitos professores (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Stein et al., 2008) mas com diversas potencialidades para a aprendizagem dos alunos.

Flexibilidade de cálculo

Tradicionalmente, a aritmética iniciava-se pela aprendizagem dos factos básicos, muitas vezes aprendidos isoladamente e através da repetição. Baroody (2006) afirma que uma melhor aprendizagem acontece quando ela tem como foco a estrutura, isto é, subjacentes padrões e relações. Pensando numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número (McIntosh, Reys, & Reys, 1992), os factos básicos devem ser aprendidos integrados numa rede de ideias, princípios e processos. Deste modo, a fluência nos factos básicos é alcançada através do que Baroody (2006) denomina de memorização significativa em que a aprendizagem relacional tem um papel chave. Entende-se aqui por fluência de cálculo a capacidade para usar procedimentos de modo adequado, eficiente e flexível (NRC, 2001). Nesta perspetiva, é importante que os alunos compreendam a ideia da combinação – isto é, que um número pode ser composto pelas suas partes de diferentes formas. Por exemplo, se sabem que 8+1, 7+2, 4+5 constituem diferentes formas de representar o 9, são capazes de reconhecer que 1+8, 2+7 ou 5+4 são factos relacionados pois também "dão" 9. Deste modo, estes factos passam a estar relacionados entre si constituindo uma rede de ideias interrelacionadas.

O reconhecer e saber que a adição é comutativa leva que os alunos sejam capazes de obter uma combinação desconhecida a partir de uma conhecida (por exemplo, para calcular 3+5=?, fazê-lo a partir de 5+3 que sabem que é 8). Se os alunos dominam a ideia de dobro (por exemplo, 7+7=14), podem utilizar o raciocínio do dobro mais 1 (e fazer por exemplo, 7+8=7+7+1=14+1. Deste modo, as estratégias de cálculo são automatizadas, constituindo uma base para a fluência de cálculo.

Segundo Baroody e Rosu (2004), a evolução da fluência de cálculo implica a crescente integração dos conhecimentos factual, conceptual e procedimental. Os alunos que aprendem os factos básicos deste modo são capazes de usar esse conhecimento básico correta e rapidamente, de modo eficaz, aplicando-o quer em situações familiares quer não familiares evidenciando flexibilidade.

Para Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer e Stiphout (2016), os alunos devem construir uma realidade matemática na qual os números se tornam objetos de pensamento que retiram o seu significado de uma rede de relações numéricas. Afirmam que os alunos são capazes de compreender um conjunto de relações numéricas, por exemplo, 34+28=62, 28+34=62, 62-28=34 ou 62-34=28. Generalizando este tipo de relações chegam à relação da adição e subtração como operações inversas. As somas e diferenças tornam-se assim objetos matemáticos com os quais os alunos podem agir e raciocinar. Os autores consideram esta ideia fundamental para a aprendizagem da álgebra, pois só assim são capazes de raciocinar com expressões como *x-7*. De outro modo, quererão primeiro calcular x-7=.

Assim, os professores devem ajudar os alunos a construir ideias fortes (*big ideas*), como as de composição e decomposição de números em duas parcelas, utilizando materiais, sempre que necessário, mas também a estabelecer relações entre as operações, nomeadamente a relação entre adição e subtração. Na memorização dos factos básicos, os professores devem encorajar os seus alunos a olhar para padrões e relações, usando estas descobertas para construir estratégias de cálculo. Vários autores (Heirdsfield & Cooper, 2004; Star & Newton, 2009) definem flexibilidade de cálculo como o conhecimento de estratégias diversificadas e a capacidade para escolher a mais eficiente para um dado problema. A este modelo de escolha de estratégia, Threlfall (2009) apresenta um modelo alternativo, o *zeroing-in*, processo não totalmente consciente, que envolve reparar nos números e realizar cálculos exploratórios parciais, ocorrendo em simultâneo até emergir a estratégia e a solução do problema. Este autor dá o exemplo do cálculo 64-37 para ilustrar este processo. Dependendo da sua compreensão conceptual e do seu conhecimento dos números, os alunos podem reparar nos números envolvidos no cálculo, estabelecendo relações com outros: 64 é menos um que 65; 37 é menos três que 40; 60 é o dobro de 30; 7 é metade de 14; 64 é o dobro de 32; 37 é mais dois que 35, o dobro de 37 é 74; 7 é quatro e três. O processo de reparar nos números pode conduzir a cálculos exploratórios parciais que o autor ilustra com o mesmo exemplo: 65-35; 64-40; 64-14; 37-32; 74-64; 64-34. Estes cálculos parciais não são suficientes para indicar a estratégia a usar, mas sugerem o que fazer a seguir. Por exemplo: partindo de 65-35 para chegar ao 64-37, ainda tem de subtrair 3 ao 30; usando 64-40, tem de adicionar 3 ao 24; em

64-14, subtrair 30 ao 50 e adicionar 7; em 37-32, subtrair 5 ao 32 obtido em 64-32; em 74-64, subtrair 10 ao 37 obtido em 74-37; e em 64-34, subtrair 3 ao 30. Assim, os números do problema não são considerados para decidir e escolher uma estratégia mas sim considerados para decidir o que fazer em seguida como, por exemplo, decompor o número de modo a facilitar o cálculo (nem sempre implica que seja uma decomposição pelas ordens; por exemplo, decompondo 64 em 34+30), aproximar o número à dezena ou a outros números que facilitem o cálculo (aproximando o 37 ao 40, ou aproximando o 64 ao 65 e o 37 ao 35), combinar as ordens separadamente (60-30=30; 4-4=0; 30-3=27) ou procurar dobros ou quase dobros (74=37+37).

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo, visando a descrição e a explicação interpretativa de um fenómeno educacional (Erickson, 1986). O projeto, onde se insere, utiliza uma metodologia de investigação baseada em design, visando produzir teorias locais de ensino (Cobb & Gravemeijer, 2008) que possam constituir materiais de trabalho para o professor.

Os dados aqui apresentados foram recolhidos numa turma do 2.º ano com 25 alunos de uma escola pública de um bairro de Lisboa. A professora da turma é uma professora experiente, empenhada no seu desenvolvimento profissional, com uma boa relação com a matemática, respondendo sempre de modo afirmativo a propostas que ela considere que a enriquecem profissionalmente. Assim, dispôs-se a colaborar com a equipa do projeto, discutindo as tarefas e aplicando-as na sua sala de aula ao ritmo de uma por semana.

A tarefa analisada nesta comunicação, *Cartões com números* (a terceira de uma sequência de cinco tarefas) foi apresentada e resolvida pela turma na aula de 28 de outubro de 2015. Foram distribuídos aos alunos um conjunto de cartões, onde estavam registadas as seguintes expressões:

11+ 25	50 - 25	19 + 25	25 + 21	100 - 52
25 +25	50 - 21	50 – 30	52 - 30	100 - 48
25 +9	20 +25	50 – 20	100 - 50	52- 29

Figura 1 – Tarefa *Cartões com números* - expressões representadas nos cartões

Foi-lhes pedido que começassem por separar os “cartões que sabem” dos “cartões que não sabem”. A segunda questão era: ”Consegues chegar ao valor dos que não sabes, utilizando os cartões que sabes? Como?”.

Pretendia-se que os alunos “reparassem” nos números e fossem capazes de estabelecer relações numéricas do tipo n+1 e n-1, por exemplo em 11+25, os alunos reconhecerem que 11 é 10+1, por isso podem calcular 10+25, e juntar 1. Em outras situações, pode dar jeito arredondar para a dezena mais próxima, o compreender que 19 é próximo de 20 e retirar 1. A relação dobro/metade está presente em várias situações, por exemplo 25+25 ou 50-25, mas também em 100-52 ou 100-48, lembrando que 100 é o dobro de 50. O conhecer as características dos números implica usar, de modo dinâmico, o conhecimento do número e das suas relações, vendo as expressões apresentadas como números e não como um cálculo a efetuar, daí o aparecerem sem o sinal de igual no final da expressão.

A tarefa foi apresentada à turma, resolvida em trabalho autónomo pelos alunos organizados em pares e realizada posteriormente a discussão coletiva.

Os dados foram recolhidos através da observação participante das duas primeiras autoras, apoiada pela gravação áudio e vídeo das resoluções dos alunos e da discussão coletiva. Foram também recolhidos os trabalhos dos alunos. Durante o trabalho autónomo, foram videogravados dois pares de alunos, selecionados, segundo orientação da professora da turma, por terem facilidade em estabelecer interações durante a resolução das tarefas. O presente artigo foca-se apenas num desses pares, Luís e Lúcia, no que respeita à fase de exploração da tarefa.

Para analisar os dados, foram usadas categorias analíticas do quadro teórico de Threlfall (2009), apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Categorias analíticas

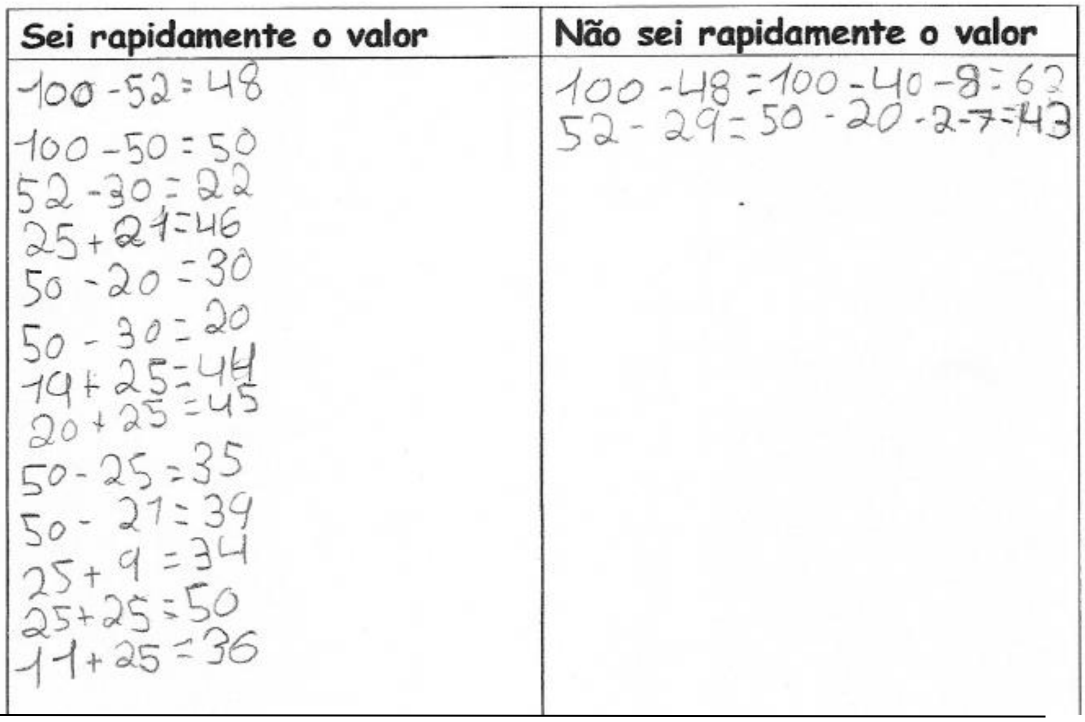
Categoria	Descrição
Processo de reparar	Reparar nos números e nas relações que se podem estabelecer entre eles.
Cálculos exploratórios parciais	Os cálculos exploratórios parciais decorrem do conhecimento pessoal dos alunos acerca dos números e das propriedades das operações quando este é usado para derivar.
Relações numéricas	O modo de relacionar os números para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Estratégias de cálculo	O modo de relacionar as operações e usar as suas propriedades para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.

Apresentação e discussão dos resultados

Explorando a tarefa

O par Luís e Lúcia, à medida que ia tirando os cartões, ia registando na folha as expressões e respetivos resultados. O Luís revelou um cálculo muito rápido, antecipando-se à Lúcia, e assim todos os resultados foram verbalizados pelo Luís, sendo que, na maior parte dos casos, Lúcia limitou-se a escrever o resultado indicado por Luís. O único cartão cujo cálculo foi efetuado por Lúcia foi 25+9, sendo que contou pelos dedos, não tendo utilizado qualquer estratégia de cálculo. A aluna, após registados todos os cálculos na coluna da esquerda, verbalizou: "Eu só sabia uma. O resto era tudo difícil para mim". No entanto, ainda contribuiu para o cálculo de 25+25, referindo com grande segurança ser 50 após Luís verbalizar inicialmente 40. Passemos a documentar o processo de resolução da tarefa por este par.

O primeiro cartão retirado foi 100-48. Após Luís dizer à colega "Não sabemos rapidamente", ambos registam a expressão na coluna da direita, passando aos cartões seguintes. Os cartões seguintes foram registados na coluna da esquerda, sendo que os resultados das operações eram registados de imediato. O cartão 52-29 foi registado na coluna da direita, após Luís reconhecer: "Não sabemos". A produção deste par encontra-se na Figura 2.



Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor
100-52=48	100-48=100-40-8=62
100-50=50	52-29=50-20-2-7=43
52-30=22	
25+21=46	
50-20=30	
50-30=20	
19+25=44	
20+25=45	
50-25=35	
50-21=39	
25+9=34	
25+25=50	
11+25=36	

Figura 2 – Produção do par Luís e Lúcia

De entre as expressões colocadas na coluna da esquerda, a maior parte foi objeto de uma resposta imediata pelo Luís, constituindo factos básicos para este aluno, mas duas delas (100-52; 19+25) requereram a utilização de estratégias, tal como se pode verificar no seguinte extrato:

> Luís (*falando para Lúcia, com o cartão 100-52 na mão*) - Já sei quanto é! É 42. Ai, é 48! 100-52 é 48.
>
> Professora (*aproxima-se do par*) - Porquê?
>
> Luís - Porque 100 menos 50 é 50, menos 2, é 48.
>
> (...)
>
> Luís (*falando para Lúcia*) - 19+25, 30... (*aponta para o 25 no cartão*), 40, dá 44. 44. Dá 44.

No cartão 100-52, infere-se que Luís começou por *reparar* no 52, realizando mentalmente, e sem verbalizar, o *cálculo exploratório parcial* 52-50=2. Seguidamente, usou o facto básico 100-50=50 (sem relacionar com a expressão do cartão seguinte, ainda não retirado), mobilizando a *relação numérica* entre 100 e 50, para então utilizar a *estratégia* da compensação, retirando 2 ao resultado 50 para obter 48, já que 50 é menos 2 do que 52. Apesar da precipitação inicial quando verbaliza 42, muito rapidamente Luís retifica para 48, e se não fosse a interpelação da professora, provavelmente nem chegaria a verbalizar o seu raciocínio. O modo como o Luís chega ao resultado 48 parece estar em consonância com a simultaneidade de processos indicada por Threlfall (2009), ao caracterizar o *zeroing-in*.

No cartão 19+25, Luís parece *reparar* no número 25, quando aponta para o mesmo. Poderemos inferir que quando diz 30, realizou mentalmente os *cálculos exploratórios parciais* 25+5=30 e 19=10+(5+4). Seguidamente, Luís parece adicionar, sucessivamente, à soma 30, obtida parcialmente, as restantes parcelas resultantes da decomposição do 19 (30+10=40; 40+4=44), por meio da *estratégia* da decomposição de uma das parcelas (19) da expressão em causa e da aproximação de uma das parcelas (25) à dezena mais próxima, envolvendo, assim, as *relações numéricas* entre 25 e 30 e entre 19 e os seus componentes. Também aqui encontramos alguma evidência da emergência desta estratégia decorrente dos processos de reparar e de fazer cálculos exploratórios parciais, ao invés de uma escolha deliberada de uma dada estratégia.

Como se pode verificar na Figura 2, duas das expressões colocadas à esquerda apresentam erros de cálculo: "50-25=35"; e "50-21=39". Nenhuma destas expressões foi objeto de reflexão por partes dos alunos do par, que revelaram grande segurança na sua correção quando as registaram. Daí que não tivesse sido estabelecida qualquer relação entre estas expressões e outras, já registadas antes ou posteriormente. Por exemplo, os alunos revelaram dominar como facto básico 25+25=50, o qual poderia ter sido usado para calcular 50-25. No caso de 50-21, os alunos não relacionaram com o cartão anterior 50-20, e assim não utilizaram um raciocínio análogo ao usado no primeiro cartão 100-52.

No que respeita às expressões colocadas à direita, para 100-48, Luís pegou no cartão 100-50 e tentou relacionar com o facto básico 100-50=50. No entanto, revelou dificuldade em fazê-lo, e após verbalizar "menos 2", acabou por cair num impasse. Assim, Luís parece *reparar* que 48 é menos dois que 50, mas não consegue lidar com a dificuldade associada à compensação, que implicaria adicionar 2 ao resultado 50. A dificuldade aqui evidenciada, que não ocorrera para o cartão 100-52, pode dever-se ao facto de, neste caso, a compensação ser aditiva, de natureza inversa ao cálculo a efetuar. Passado algum tempo de impasse, Luís decidiu usar um outro facto básico, 100-40, apesar de não estar em nenhum cartão, falando para Lúcia: "100 menos 40 é 60. Menos 8, 62". E ambos os alunos registaram este cálculo na coluna da direita. Luís usa a *estratégia* da decomposição do 48 nas suas ordens, fazendo subtrações sucessivas, mas acaba por errar o cálculo de 60-8, sem se dar conta de que estava a obter um número maior do que 60. Neste cálculo, atendeu simplesmente à decomposição do 10 em 8 e 2, esquecendo que teria de retirar uma dezena a 60.

Também a expressão 52-29 levantou dificuldades, apresentando erros de cálculo. Vejamos o respetivo extrato:

> Luís (*falando para Lúcia*) - Olha, 30. 50-20, é o que temos de fazer. Dá 30.
>
> Lúcia - Mais 2.
>
> Luís - Menos dois!
>
> Lúcia - Menos 9, menos 2.
>
> Luís - Dá 30. Agora, 32-9 dá... Olha, pensa... 52-9. Quanto é 52-9? 52-9? 52-2, dá...
>
> Lúcia - Menos 9, menos 2.
>
> Luís - Távamos [sic] no 32. Menos 2...
>
> Lúcia - Menos 2, menos 9!
>
> Luís - Menos 2 que dá...
>
> Lúcia - Um número amigo! 20!
>
> Luís - Não, dá 50. Olha, 9-2? Eu sei quanto é. É 7. Agora, menos 7, dá 43. Ou seja, igual a 50-20-2-7. É 43 (*regista na folha*).

Luís parece usar, inicialmente, a *estratégia* de decomposição dos números nas suas ordens, operando 50-20. Depois de alguma controvérsia entre Luís e Lúcia sobre o que fazer a seguir, se adicionar ou subtrair 2, atendendo ao algarismo das unidades de 52, Luís acaba por aceitar a sugestão inicial de Lúcia (imediatamente após ter negado a ideia "Menos dois!") e decide subtrair 9 a 32, o que daria um resultado correto. Face à dificuldade em calcular 32-9, Luís opta por subtrair 9 ao aditivo considerado no seu todo (52-9) e mais uma vez não consegue realizar o cálculo. Segue-se alguma confusão, com Luís a focar-se em 52-2, voltando de novo a 32 para subtrair 2 (com Lúcia a enganar-se no respetivo resultado, ao verbalizar 20 como um "número amigo", isto é, um número múltiplo de 10) até que Luís parece voltar a incidir na decomposição do número nas ordens, determinando agora a diferença entre as unidades — 2-9= -7. Embora Luís tenha invertido a ordem da operação com 9-2, fica em aberto se existiu compreensão associada à natureza dessa diferença que o levasse a subtrair 7, ou se o fez por o cálculo em causa se tratar de uma subtração. Assim, o facto de a confusão instalada ter levado Luís a reter-se em 50 como resultado de 52-2 fez com que chegasse ao resultado 43 após subtrair 7. Ou seja, se tivesse retomado o procedimento inicial de obtenção de 30 (50-20=30) e subtraído depois 7, teria obtido o resultado correto, 23. O registo efetuado revela também a confusão associada a este cálculo com o registo de "-2-7" que acabou por não ser efetuado. Este é um exemplo ilustrativo da dificuldade em obter um resultado correto neste tipo de subtrações, em que o algarismo das unidades do aditivo é menor do que o algarismo das unidades do subtrativo, quando se usa a estratégia da decomposição do número em ordens. Esta dificuldade poderia ter sido minimizada se por exemplo, os alunos tivessem relacionado esta expressão com o cartão 52-30, cujo resultado já tinha sido escrito na coluna da esquerda.

A discussão da tarefa

Todos os cartões foram afixados no quadro. Seguidamente, a professora iniciou a discussão, pedindo para os alunos indicarem quais os cartões que tinham sido mais difíceis. Pediu ao par Gil e Mónica para ir ao quadro. Apresentamos o extrato do diálogo que se seguiu.

Professora - Vamos ver se conseguimos, a partir dos outros cartões, ajudar...

Gil retira o cartão 100-48 como tendo sido difícil.

Professora - Qual é o cartão parecido com este que possa ajudar?

Gil retira o cartão 100-50 e coloca-o por baixo de 100-48 e Mónica retira 100-52, colocando-o por baixo.

Professora - Porque é que esse (*referindo-se a 100-52)* também pode ajudar?

Alexandre e Maria vão ao quadro para apresentarem as suas justificações.

Alexandre - Este (*apontando para 100-50*) ajuda mais do que este (*apontando para 100-52*).

Professora - Porquê?

Alexandre - Porque este (*apontando para 50*) é metade deste (*apontando para 100*).

Professora - Porque 50 é metade de 100. Quanto é que dá 100-50, Mónica?

Maria - Porque 50 está mais perto de 48.

Professora - Então quanto é 100-50?

Alexandre - Este (*apontando para 100*) menos 50 vai dar 50.

Professora *(regista "=50" à frente do cartão 100-50*) - Como é que este pode ajudar a fazer 100-48? Vamos pensar.

Alexandre - 100-52 é 48.

Professora - Como sabes?

Alexandre - Se 100-50 é 50, então tira-se mais 2 e vai dar 48.

Professora - Tira-se 2, aonde?

Alexandre (*apontando para o resultado de 100-50*) - Ao 50.

Renato (*apontando para 100-48*) - Aqui é 52.

Professora - Porquê?

Renato - Porque 100-50 vai dar 50. E como 48 é menos 2, vai dar 52.

Como podemos verificar pelo extrato, os alunos conseguiram descobrir novos resultados a partir do facto conhecido 100-50=50, estabelecendo relações numéricas de mais 2 e menos 2 do que 50 (resultado de 100-50), pelo processo de repararem nas relações entre o subtrativo 50 e os subtrativos dos outros dois cartões. Este facto conhecido tem por base a ideia de dobro e de metade.

Seguidamente, a professora retirou os cartões 100-52 e 100-48 e colocou-os por baixo do cartão 100-50, registando à frente os respetivos resultados (Figura 3), chamando a atenção dos alunos para a relação entre eles.

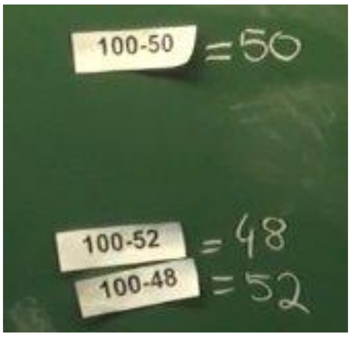


Figura 3 – Relações numéricas a partir do facto 100-50

Para conseguirem explicitar a relação entre os dois cartões de baixo, os alunos propuseram-se dar outros exemplos de números em que se verificasse o mesmo tipo de relação. Alexandre começou por escrever no quadro "100-51=47". Vejamos o diálogo que se seguiu:

Professora - Ao 100, se tirar 51, fico com 47? (*aponta para os números no quadro ao mesmo tempo que os verbaliza*) Alexandre, se ao 100, tirar 50, fico com 50. Ao 100, se eu tirar 51, fico com 47, perco logo 3, daqui (*aponta para 50*) para aqui (*aponta para 47*)?

Paulo - Não, perdes 1. Dá 49.

Alexandre - Dá 49. (*retifica*)

(...)

Professora - E agora?

Paulo - 100-49=51 (*Alexandre regista no quadro*)

Professora - Então, porque é que aparece trocado? Já perceberam que se pode trocar. Porquê? Porque é que se pode trocar?

Os alunos não respondem por um breve momento.

Professora - Se calhar, se pensarmos ao contrário, ajuda um bocadinho...

Luís (*dirige-se ao quadro e aponta para os números quando os verbaliza*) - Porque 49+51 dá 100 e 51+49 dá 100. (*aponta para os cartões de cima*) 48+52 dá 100. E 52+48 dá 100.

(...)

Luís - E acontece em tudo.

O exemplo de Alexandre (Figura 4) acabou por suscitar mais uma vez o estabelecimento da relação numérica com o facto 100-50=50, já que o aluno tinha compensado com menos 3, quando deveria ter compensado com menos 1. A professora questionou os alunos sobre o porquê de se poder trocar numa subtração o subtrativo e a diferença, e perante algum impasse, sugeriu que pensassem na operação inversa ("se pensarmos ao contrário").

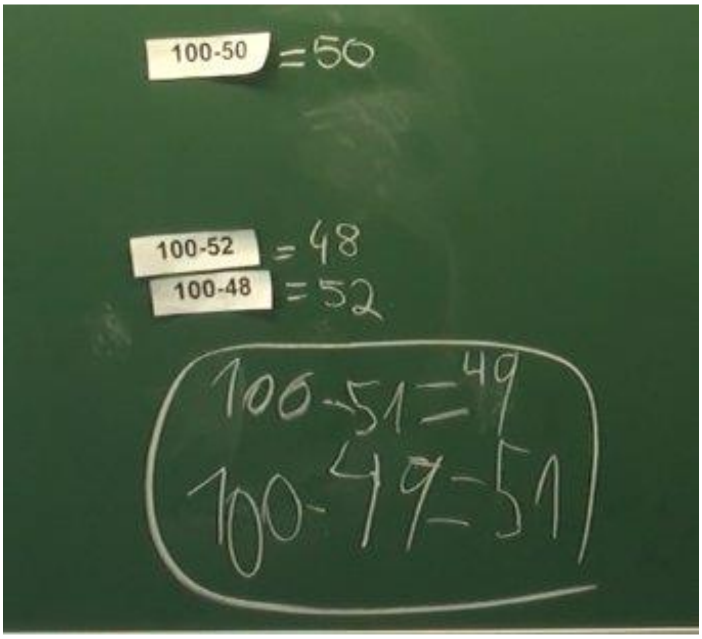


Figura 4 – Exemplo ilustrativo da relação parte-todo

Assim, Luís justifica essa troca com a explicitação da propriedade fundamental da subtração, verbalizada através do exemplo: o aditivo é igual à soma do subtrativo com a diferença. Poderemos inferir que, implicitamente, Luís compreende que se retirar uma parte *x* a um todo, obtendo *y*, então se retirar a parte *y* a esse todo, irá obter *x*, já que a união das duas partes constitui o todo. Parece verificar-se também uma compreensão implícita da propriedade comutativa da adição na explicitação da propriedade da subtração: $x+y=y+x$ ("Porque 49+51 dá 100 e 51+49 dá 100"). Apesar de Luís se apoiar em exemplos concretos, ele generaliza a todas as situações do mesmo tipo quando verbaliza "E acontece em tudo".

Esta discussão contribuiu para a construção de uma rede de relações numéricas em torno do número de referência 100, suportada pelas relações entre a parte e o todo, em que os números são decompostos e recompostos de diversas maneiras, bem como pela relação entre a subtração e a adição. Por um lado, o 100 foi visto como objeto mental expresso de múltiplos modos: 50+50, 52+48, 48+52, 51+49, e 49+51. Por outro lado, a professora conduziu a discussão de modo a que os alunos compreendessem que tanto podiam usar a adição como a subtração para expressar essas relações.

A professora deu continuidade à discussão da tarefa solicitando aos alunos mais um cartão que tivesse sido difícil. O par Paulo e João foi ao quadro, tendo colocado o cartão 52-29 como difícil. Quando a professora perguntou se existiria algum cartão que pudesse ajudar, Paulo retirou o cartão 50-30. Maria sugeriu o cartão 50-20 e Santiago retirou o cartão 50-29. Após alguma discussão em torno do cartão 50-20, os alunos acabaram por considerar que pouco ajudava por 20 estar muito distante do 29 e assim, este cartão foi colocado de novo junto dos restantes, seguindo-se o diálogo seguinte:

Professora - Quanto é 50-30?

Paulo - É 20 (*escreve no quadro à frente do cartão*).

Professora - Quanto é 50-29? (*Paulo regista 19 no quadro à frente do respetivo cartão*)

Professora - 19? (*aproxima-se do quadro*) 50 menos 30 é 20. Aqui tiras menos 1 (*aponta para 29*), tem de lá ficar.

Paulo retifica para 21.

Professora - O que é que se passa daqui (*aponta para 50 no cartão 50-29*) para aqui (*aponta para 52*)?

Paulo - É mais 2.

Professora - Numa subtração, nós já vimos que se queremos manter o resultado, o que eu faço no aditivo, tenho de fazer no subtrativo (*aponta para os respetivos números*). Se eu só estou a fazer no aditivo, o resultado vai mudar. Se eu estou a pôr mais 2, o que vai acontecer aqui (*aponta para o local à frente do sinal de igual em 52-29*)?

Paulo - É mais 2 ou menos 2?

Professora - Boa questão. Vocês já sabem que quando eu aumento 1 ao aditivo, tenho que aumentar 1 ao subtrativo. Não estou a mexer no subtrativo (*aponta para os cartões 50-29 e 52-29*), estou a mexer aqui (*aponta para os aditivos dos cartões*). Faço mais 2. Mas aqui (*aponta para os subtrativos dos cartões*) não faço mais 2. O que é que acontece na resposta? Vai mudar.

Aluno - É 23. (*Paulo regista 23*)

Professora - Se eu estou a pôr mais 2 aqui (*aponta para 52*), estou a tirar o mesmo (*aponta para 29*), fico com mais 2, é o que está a dizer (*refere-se ao aluno que disse 23 cujo nome é inaudível*).

Os cartões que auxiliaram a determinar 52-29 encontram-se na Figura 5.

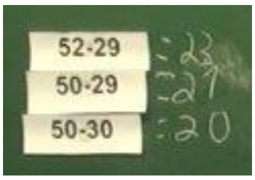


Figura 5 – Relações numéricas a partir do facto 50-30

O efeito inverso da compensação consoante a alteração seja no aditivo ou no subtrativo suscita alguma dificuldade aos alunos. Em 50-29, foi retirado 1 ao subtrativo (de 50-30), e o resultado tem de ser compensado de forma inversa com mais 1. Em 52-29, foi acrescentado 2 ao aditivo, e o resultado tem de ser compensado também acrescentando 2. A professora começou por lembrar a propriedade da invariância do resto para os alunos compreenderem que se só se alterar um dos termos da subtração, então essa alteração terá de ser compensada na diferença. A professora tentou, ainda, que os alunos entendessem o efeito da compensação simplesmente pelo significado do subtrativo ("Aqui tiras menos 1, tem de lá ficar") e do aditivo ("Se eu estou a pôr mais 2 aqui, estou a tirar o mesmo, fico com mais 2"), sem sentir necessidade de exemplificar com situações contextuais. Também aqui é de sublinhar o papel da professora ao guiar os alunos no estabelecimento de relações numéricas.

Conclusão

O processo *zeroing-in* descrito por Threlfall (2009) parece evidenciar-se no modo como Luís alcança as soluções de 100-52 e 19+25, estabelecendo relações numéricas em processos que ocorrem simultaneamente. Luís relaciona os cálculos desconhecidos com factos numéricos que domina, embora nem sempre tirando partido dos cartões disponibilizados. A flexibilidade associada às relações numéricas distingue-se marcadamente dos procedimentos processuais (Gravemeijer et al., 2016) usados por Lúcia, quando esta usa o processo de contagem pelos dedos, ou por Luís quando este usa o procedimento da decomposição dos números em ordens, em 52-29.

A oscilação verificada entre o estabelecimento de relações numéricas e o uso de procedimentos que, além de terem conduzido a soluções incorretas, não se encontram plenamente ancorados numa base compreensiva de sentido de número (McIntosh et al., 1992), releva para a importância da fase de discussão coletiva (Stein et al., 2008) enquanto momento de socialização dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos. É nesta fase que a professora potencia o estabelecimento de relações numéricas que levem os alunos a alcançar novas soluções a partir de factos numéricos conhecidos. Assim, a discussão ocorrida nesta turma contribuiu para a criação de uma rede de relações numéricas (Baroody, 2006) em que os números são encarados como objetos mentais (Gravemeijer et al., 2016) e simultaneamente como processos operatórios, ao serem decompostos e recompostos. Em particular, o foco que a professora fez da relação entre 100-52 e 100-48 levou os alunos à generalização da adição e subtração como operações inversas e da relação parte-todo, tendo contribuído para a construção do 100 (enquanto número de referência) como objeto mental e para o desenvolvimento de um raciocínio flexível envolvendo as somas e diferenças decorrentes dessa relação, tal como advogado por Gravemeijer et al. (2016).

Agradecimento

Este artigo foi desenvolvido no quadro do Projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* financiado pelo Instituto Politécnico de Lisboa.

Referências

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22-31.

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006, April). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations – the number sense view. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Boston, M., & Wolf, M. K. (2006). *Assessing academic rigor in mathematics instruction: The development of the instructional quality assessment toolkit. CSE Technical Report 672* (No. 672). Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support learning and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3.ª ed.). New York: Macmillan.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-356). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in The Netherlands: A paradigm case? *Mathematical* Thinking and Learning, *18*(1), 25–44. http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107821

Heirdsfield, A., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trans.). Lisboa: APM.

National Research Council (NRC) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 557-567.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268–275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 541-555.

MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES NUM PERCURSO DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Helena Gil Guerreiro

Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hg@campus.ul.pt

Cristina Morais

Externato da Luz; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

cristina.morais@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação de Lisboa; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Neste artigo pretendemos compreender como a valorização de múltiplas representações e o uso de modelos podem contribuir para a aprendizagem dos números racionais pelos alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Este estudo, realizado no contexto de um grupo de trabalho colaborativo entre professores, integra uma Investigação Baseada em Design em que foi construído um percurso de aprendizagem dos números racionais, realizado com alunos do 3.º ano de escolaridade. Os dados foram recolhidos através de gravações áudio das sessões do grupo de professores, de recolha documental dos registos escritos das professoras e dos alunos, bem como de registos fotográficos do trabalho em sala de aula. Analisamos três tarefas focando a aprendizagem dos números racionais dos alunos, na perspetiva das professoras, através da discussão e reflexão no grupo colaborativo. Os resultados evidenciam que o uso de representações ativas e icónicas na sala de aula, usadas como modelos de forma regular, parecem ter apoiado uma compreensão interligada das representações simbólicas por parte dos alunos. Além disso, os resultados destacam também o papel essencial que o grupo colaborativo teve para fazer chegar a investigação à sala de aula.

Palavras-chave: Números racionais, representações, aprendizagem, trabalho colaborativo.

Introdução

Na investigação em Educação Matemática, os números racionais são considerados um tópico complexo e cuja aprendizagem, com compreensão, assume a maior importância (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Tian & Siegler, 2017). Atualmente, em Portugal, a aprendizagem dos números racionais inicia-se no 2.º ano de escolaridade, sendo indicada a fração como representação a privilegiar. No entanto, Monteiro e Pinto (2006) consideram que o estudo dos aspetos formais relativos aos números racionais é introduzido demasiado cedo, associado a uma excessiva preocupação com os procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos. A sua complexidade está relacionada com o facto de os números racionais poderem assumir diferentes representações e múltiplos significados. Apesar de a investigação fornecer evidências sobre como diferentes representações podem ser articuladas, com compreensão, numa etapa inicial da aprendizagem destes números (e.g., Moss & Case, 1999), essa informação parece ter pouca expressão nos programas oficiais e na sala de aula.

Nesta comunicação procuramos compreender, num contexto de trabalho colaborativo entre professoras, de que modo ideias sustentadas em investigação sobre a valorização de múltiplas representações e modelos (Guerreiro, Serrazina & Ponte, 2018; Morais, Serrazina, & Ponte, 2018) podem contribuir para a aprendizagem dos números racionais de alunos do 3.º ano.

Múltiplas representações na aprendizagem dos números racionais

Na aprendizagem dos números racionais[1], os alunos devem compreender que um mesmo número racional pode ser expresso através de diferentes representações simbólicas, nomeadamente numeral decimal, percentagem ou fração. Para além destas, representações ativas e icónicas (Bruner, 1999), bem como a linguagem oral e escrita (Ponte & Serrazina, 2000) constituem representações igualmente importantes na construção de um conhecimento conceptual de número, permitindo estabelecer relações e fazer inferências à medida que os alunos pensam e estruturam a resolução de um problema.

Um trabalho que envolva diferentes tipos de representação é fundamental na compreensão de que cada representação proporciona uma perspetiva diferente do número racional, sendo que a compreensão dos alunos se desenvolve à medida que essas perspetivas se relacionam, complementando-se (Ponte & Quaresma, 2011; Tripathi, 2008). Gravemeijer (1999) destaca que um modelo emerge do uso que os alunos fazem de representações na interpretação de uma dada situação. Trata-se de um processo de modelação emergente em que as representações são usadas como modelos que permitem apoiar o desenvolvimento de um conhecimento progressivamente mais formal (Gravemeijer, 1999). Assim, a aprendizagem dos números racionais através de modelos, nos primeiros anos do ensino básico, pode constituir um processo dinâmico de grande importância para fazer evoluir o uso de representações e a construção de conhecimento conceptual.

Os contextos em que as representações podem ser percecionadas como modelos são fundamentais para compreender e estabelecer relações complexas e significativas (Brocardo, 2010). A reta numérica, o MAB (Multibase Arithmetic Blocks) ou o *decimat* (Roche, 2010), são representações que destacam a estrutura multiplicativa dos números racionais, proporcionando a exploração de relações entre quantidades. Estas representações remetem para os significados de medida e parte-todo, considerados centrais na compreensão dos números racionais, em particular numa fase inicial da aprendizagem destes números (Behr et al., 1983; Lamon, 2012). Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) salientam o papel que as representações assumem na compreensão dos números racionais, associando-a à flexibilidade de realizar transformações entre representações e numa mesma representação. Deste modo, a

[1] Usamos o termo "números racionais" para designar números racionais não negativos.

flexibilidade dos alunos em realizar transformações envolvendo diferentes representações dos números racionais é indicador da compreensão destes números (Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985).

Reconhecer o mesmo número em diferentes representações resulta de uma coordenação global de representações, que traduz e promove o raciocínio matemático (Duval, 2006). As transformações entre representações de números racionais são centrais na atividade matemática (Duval, 2006) e a sua análise constitui uma lente necessária para aceder a processos de raciocínio matemático dos alunos, como as estratégias de resolução e a justificação (Mata-Pereira & Ponte, 2017).

Metodologia

Este estudo segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). O estudo centra-se na aprendizagem dos números racionais por alunos de duas turmas de 3.º ano, no contexto de um trabalho em colaboração (Ponte & Serrazina, 2003), que envolveu professoras e investigadoras.

As professoras de ambas as turmas participam num grupo colaborativo de escola, que envolve cinco professoras e que integra também a primeira autora. O grupo reúne semanalmente há cerca de 10 anos para planificar aulas em conjunto. Todas as professoras têm um percurso de alguma forma ligado à investigação, na qual procuram apoiar a sua prática. Dada a preocupação em trabalhar a aprendizagem inicial dos números racionais no 3.º ano, o grupo decidiu construir um percurso de aprendizagem. Assim, também a segunda autora integrou o grupo como investigadora convidada e, em conjunto com a primeira autora, partilharam ideias chave de estudos em curso para serem discutidos no grupo (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018; Morais, Serrazina, & Ponte, 2018) e apoiar a construção, realização em aula e reflexão das tarefas. O ambiente relacional positivo vivido no grupo facilitou a naturalidade com que cada elemento assumiu o seu papel – professoras e investigadoras – numa relação de ajuda mútua, tendo em vista um objetivo comum (Ponte & Serrazina, 2003), neste caso a construção de um percurso de aprendizagem adequado aos alunos daquelas professoras integrando os princípios da investigação recente no âmbito dos números racionais.

Três professoras colocaram em prática este percurso de aprendizagem, mas apenas duas, Hélia e Sandra, participaram ativamente nas sessões do grupo consideradas nesta comunicação, sendo por isso participantes neste estudo. As sessões de trabalho do grupo colaborativo decorreram uma vez por semana de acordo com o calendário escolar, entre fevereiro e junho de 2018. O foco do trabalho colaborativo foi a aprendizagem dos alunos na perspetiva das professoras, tendo por base os seus relatos e os trabalhos escritos dos alunos.

A importância de interligar diferentes representações simbólicas de números racionais, apoiadas por várias representações usadas como modelos, constituiu-se como um dos princípios orientadores do percurso de aprendizagem construído e implementado nesta Investigação Baseada em Design.

Este percurso privilegiou as representações simbólicas de percentagem (Etapa 1), numeral decimal (Etapa 2 e 3) e fração (Etapa 4), nos significados medida e parte-todo, de acordo com a sequência apresentada na Figura 1.

ETAPA1	ETAPA 2	ETAPA 3	ETAPA 4
Percentagem	Percentagem	Percentagem	Percentagem
Numeral decimal	**Numeral decimal (centésima)**	**Numeral decimal**	Numeral decimal
Fração	Fração (decimal)	Fração (decimal)	**Fração**
barra de estado	barra de estado	reta numérica	
baterias	garrafas	MAB	reta numérica
reta numérica	reta numérica	Tabela de 10×10	sem modelo
		decimat	

Tarefa A **Tarefa B** **Tarefa C**

Figura 1 – Percurso de aprendizagem dos números racionais realizado

Embora não sendo linear, dado que cada representação simbólica foi emergindo em interligação com as outras e retomada sempre que oportuno, o percurso de aprendizagem realizado teve subjacente a sequência *percentagem – numeral decimal – fração*. Esta sequência privilegiou, na Etapa 1, a percentagem, como representação que permite maximizar os conhecimentos que os alunos trazem dos números inteiros de 1 a 100 e raciocinar proporcionalmente com quantidades (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018; Moss & Case, 1999). Na Etapa 2, em articulação com a percentagem, foi introduzida a representação em numeral decimal, na relação com a fração decimal, permitindo apelar a transformações dentro e entre representações, contribuindo para uma conceptualização da unidade (Morais, Serrazina, & Ponte, 2018). Finalmente, na Etapa 3, foi trabalhada a fração, em articulação com as outras representações, procurando um entendimento da grandeza do número, de forma independente da sua representação.

Os dados foram recolhidos através de gravações áudio das sessões do grupo, recolha documental dos registos escritos das professoras, dos trabalhos escritos dos alunos (trazidos pelas professoras para as sessões), bem como de registos fotográficos das professoras na sua sala de aula. Os princípios de honestidade e transparência foram garantidos no decurso desta investigação, tendo-se obtido o consentimento informado de participação das professoras neste estudo e salvaguardado o seu anonimato e privacidade (IE–UL, 2016).

Nesta comunicação centramo-nos em três tarefas, resolvidas pelos alunos, que decorreram na Etapa 3 do percurso de aprendizagem realizado, analisando o uso de representações como modelos, bem como a mobilização de diferentes representações simbólicas, de forma interligada.

Resultados

Tarefa A. Anteriormente à Tarefa A, foi pedido aos alunos que enchessem e vazassem cinco garrafas de modo a estabelecer relações entre as suas capacidades, e a associar a cada garrafa etiquetas escritas na representação em numeral decimal, relativas à sua capacidade (Figura 2).

Figura 2 – Tarefa de colocar etiquetas em garrafas

Entre as garrafas, existiam duas iguais, com a mesma capacidade, e foram dadas duas etiquetas com 0,5l e 0,50l. Na sessão de preparação da tarefa seguinte, as professoras identificaram a necessidade de levar os alunos a justificar a igualdade entre as representações 0,5 e 0,50:

Hélia: Agora que acabámos o [a tarefa] encher recipientes e eles ficaram no ponto que cinco décimas é igual a cinquenta centésimas mas não sabem porquê . . . Pronto, íamos por aí...

Helena: Para a equivalência com diferentes representações.

. . .

Hélia: Portanto vou perguntar por que é que cinquenta centésimas é o mesmo ponto que cinco décimas, porque quero que me justifiquem...

Embora Sandra tenha sugerido o uso da barra de estado como representação de suporte a esta tarefa, o grupo, em discussão, concluiu que seria importante promover o recurso à reta numérica, reconhecendo a necessidade de evoluir para uma representação mais formal.

Sandra, remetendo para os seus alunos, sugere que a reta numérica dupla fosse apresentada com a marcação correspondente às décimas e, eventualmente, às centésimas:

Sandra: . . . Na minha turma... Eu foco muito a sua [alunos] atenção em "Em quantas [partes] está [a unidade] dividida? Então são quantas de quantas?". Por isso é que nós chegámos a isto [proposta de divisão da reta] . . .

Esta sugestão surge devido ao facto de Sandra reconhecer que os seus alunos, ao longo do seu percurso tinham explorado os números racionais sobretudo numa perspetiva de parte-todo, que associam à representação em fração. Hélia recorda que os seus alunos usaram, sobretudo, a fração decimal com denominador cem, devido ao facto de a percentagem, para eles ser uma referência:

Hélia: O que eu puxo para a fração é sempre a fração decimal em centésimos . . . Porque para eles a percentagem é ... O orientador deles!

Deste modo, ao antecipar de que forma os seus alunos iriam relacionar 0,5 e 0,50, sugere que 50% estivesse já representado na reta numérica dupla:

Hélia: Vamos começar logo por questionar. Eles vão perceber que cinquenta é porque está dividido... As percentagens aqui... eu acho que devia estar ali 50%. . .

Contudo, no grupo sentiu-se que dividir a reta deste modo ou incluir outras representações simbólicas poderia condicionar os alunos na seleção da representação a usar na justificação. Pelo que, o grupo decidiu apresentar apenas a representação em numeral decimal para, por um lado, focar a questão nesta relação de equivalência e, por outro, permitir que os alunos mobilizassem representações por iniciativa própria.

A realização da tarefa pelos alunos evidenciou justificações de natureza diferente. Sandra referiu que os seus alunos justificaram a igualdade entre 0,5 e 0,50 convocando argumentos apoiados no recurso a representações ativas, de acordo com o que tinham vivenciado na experiência de encher e vazar garrafas.

Sandra: Eles chegaram à conclusão que cinco décimas é igual a cinquenta centésimas porque as garrafas têm a mesma capacidade. . .

Estes argumentos parecem evidenciar que os alunos entenderam, nesta tarefa, a representação simbólica de numeral decimal como um rótulo que identifica determinada quantidade de água, entendimento este fortemente ligado ao contexto. O significado que os alunos atribuem à representação simbólica em numeral decimal é neste caso apoiado em representações ativas.

Os argumentos usados pelos alunos de Hélia remetem para um entendimento das representações simbólicas envolvidas sem necessidade de convocar a sua experiência durante a tarefa das garrafas.

Hélia: Quase todos os grupos chegaram à conclusão de que em cinco décimas temos a unidade dividida em dez partes e em cinquenta centésimas temos a unidade dividida em cem partes . . .

O significado que os alunos atribuem à representação simbólica em numeral decimal é apoiado na interpretação da reta numérica e noutras representações, como a fração decimal (Figura 3).

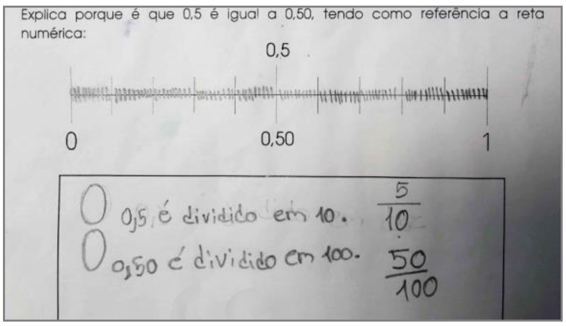


Figura 3 – Registo de um grupo de alunos de Hélia na Tarefa A

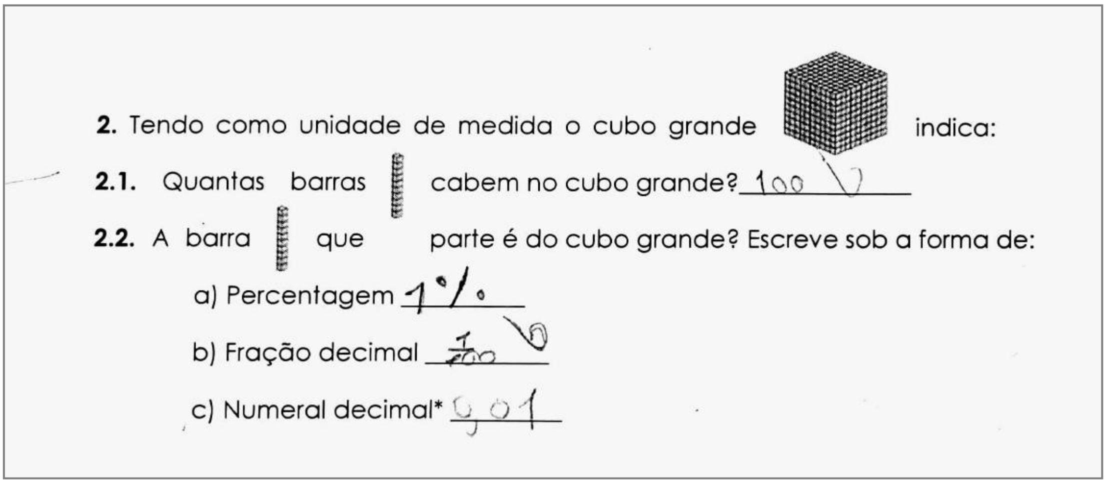
Desta forma, os alunos parecem reconhecer o mesmo número em diferentes representações que mobilizaram para justificar a igualdade entre 0,5 e 0,50. Nesta fase do percurso de aprendizagem para além da representação ativa das garrafas e da representação icónica da reta numérica, o MAB foi uma outra representação privilegiada para a compreensão da representação decimal.

Tarefa B. Inicialmente, durante a construção do percurso de aprendizagem, o recurso ao MAB para o trabalho com os números racionais não foi consensual. O facto de esta representação ter sido usada no trabalho com os números inteiros, parecia oferecer mais constrangimentos do que vantagens no trabalho com os números racionais:

Hélia: Quando tivemos o outro grupo, há 4 anos atrás, nós pensámos "não vamos por aqui". E porquê? O MAB era ótimo, décima, centésima, milésima, … mas não vamos porque eles conhecem-no é com números inteiros e só vamos baralhar. E agora não. Agora decidimos ir por aqui. É importante ver o MAB com diferentes unidades.

Os constrangimentos identificados no grupo prendiam-se com a importância que a unidade de referência assume na compreensão dos números racionais. Como referiu Hélia, os alunos usaram o MAB associado aos números inteiros, considerando o cubo mais pequeno como unidade, por associação ao processo de contagem. Contudo, o grupo reconheceu a importância da mudança da unidade e a vantagem do uso do MAB, podendo ser percecionado enquanto modelo, numa perspetiva de continuidade entre a aprendizagem dos números inteiros e a dos números racionais.

Deste modo, na segunda fase do percurso, o MAB foi mobilizado num conjunto de tarefas, no qual se incluiu a tarefa B. Nesta tarefa, tendo como unidade de medida o cubo grande, os alunos foram convidados a relacionar as diferentes peças, registando essa relação em diferentes representações simbólicas (Figura 4).


2. Tendo como unidade de medida o cubo grande indica:

2.1. Quantas barras cabem no cubo grande? 100

2.2. A barra que parte é do cubo grande? Escreve sob a forma de:

a) Percentagem 1%

b) Fração decimal 1/100

c) Numeral decimal* 0,01

Figura 4 – Registo de um aluno de Sandra na Tarefa B

Nesta tarefa, o aluno de Sandra estabelece a relação 1/100 entre a barra e o cubo grande, parecendo interpretar com aparente facilidade o cubo grande como a unidade. Essa relação é registada em percentagem, fração decimal e numeral decimal, tal como solicitado. O trabalho com o MAB permitiu compreender as relações entre as diferentes peças de acordo com a unidade considerada. Além disso, possibilitou traduzir essa relação em diferentes representações simbólicas, destacando-se nesta fase do percurso, a representação em numeral decimal como afirma Sandra:

Sandra: Eles passaram a ver a barra como a centésima, o cubo pequeno a milésima e a placa a décima, a placa representava a décima, então quantas vezes é mais pequena? É passar as relações para os numerais decimais.

Hélia: A partir daqui, foi um transpor das relações para os numerais decimais. Tendo como referência, como unidade de medida, o cubo grande . . .

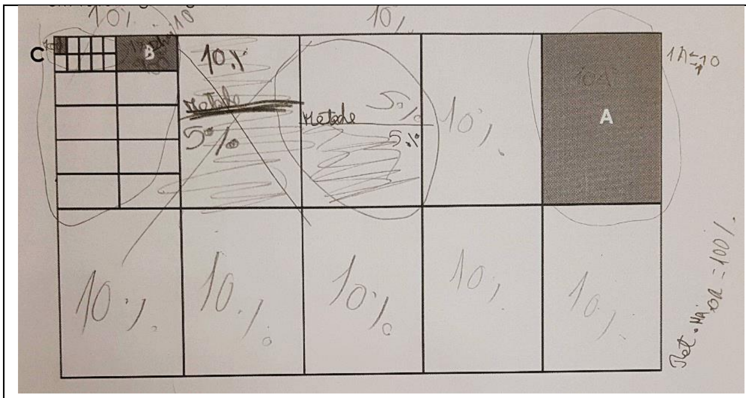
Este alargamento das relações subjacentes ao sistema de numeração decimal, traduz a perspetiva de continuidade entre a compreensão dos números inteiros e dos números racionais, presente ao longo do percurso de aprendizagem realizado. O MAB revelou-se como representação que permitiu aos alunos estabelecer essa continuidade, tal como destaca Hélia:

Hélia: . . . Tínhamos que fazer mudar a unidade e relacionar as partes da unidade, então fomos buscar o que eles conheciam dos números inteiros, o que é a dezena, a centena, … tendo como unidade o cubo pequenino, por exemplo. Isto era o que eles já conheciam e foi o transpor para os numerais decimais.

Deste modo, o uso do MAB como representação ativa no trabalho com os números racionais parece ter contribuído para a construção das relações multiplicativas entre a unidade e as suas partes, décima, centésima e milésima, suportando o uso de diferentes representações simbólicas com compreensão.

O fortalecimento destas relações entre as partes não inteiras do numeral decimal continuou a ser promovido ao longo do trabalho com uma outra a representação, o *decimat*.

Tarefa C. Na Tarefa C foi pedido que os alunos representassem as áreas sombreadas do *decimat*, em percentagem, numeral decimal e fração. O registo apresentado na Figura 5 ilustra como uma aluna de Sandra usou o *decimat* como modelo, na medida em que se apropria da representação, anotando as relações que foi estabelecendo, recorrendo à percentagem.



10% metade 5% [retângulo A]

1%, dividi em 10 o 100 [centésima, retângulo B]

1000 [retângulo C]

retângulo maior = 100%

Figura 5 – Registo de uma aluna de Sandra na Tarefa B

A aluna interpretou o *decimat*, que designou por retângulo maior, como 100%, associando cada retângulo A a 10%. Identificou metade de 10% como 5%, que justificou traçando a metade de um retângulo A. Interpretou o retângulo B como 1%, justificando-o com a divisão de 100, que parece associar à centésima, em 10. Para além disso, identificou o retângulo C como 1000, que parece revelar que a aluna identifica a relação 1/1000 deste retângulo com o retângulo maior. Deste modo, a aluna pareceu ter compreendido a relação existente entre cada área sombreada no *decimat*.

Hélia corroborou que este modelo permitiu aos seus alunos visualizar e mobilizar diferentes representações simbólicas, facilitando a sua interligação. Tal é evidente, nas palavras de Hélia, ao refletir sobre uma outra situação, semelhante à da Figura 5, em que o *decimat* tinha sombreados três retângulos A:

> Hélia: Para os meus alunos foi uma sistematização... Esta construção foi essencial. Por exemplo, os meus alunos olharam para o *decimat* e a maior parte disse que estava lá [pintado] 30%.

Como menciona Hélia, o uso do *decimat*, representação habitualmente relacionada com a representação em numeral decimal, suportou e desencadeou o uso de outras representações como a percentagem. Ao observarem a região sombreada no *decimat*, relativa a três décimas, os alunos de Hélia mobilizaram com prontidão a representação da percentagem. O uso desta representação icónica foi muito valorizado pelas professoras enquanto "representação de sistematização", como referiu Hélia, considerando a etapa do percurso de aprendizagem para a qual foi pensada.

Considerações finais

Considerando que o nosso objetivo era compreender como a valorização de múltiplas representações pode contribuir para a aprendizagem dos números racionais no 1.º ciclo, este estudo evidencia que um trabalho com compreensão que envolve a articulação entre percentagem, numeral decimal e fração, parece ser promissor na fase inicial da aprendizagem dos números racionais. Destacamos que a compreensão destas representações simbólicas e suas relações é apoiada pelo uso de representações ativas e icónicas (Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008), de modo recorrente. O contributo das representações ativas e icónicas traduz-se na sua utilização enquanto modelos levando os alunos a estabelecer relações (Gravemeijer, 2004), entre representações e num mesmo tipo de representação. Deste modo, permitem fazer emergir representações simbólicas com compreensão.

Embora o percurso tenha sido construído de acordo com a sequência de representações simbólicas percentagem – numeral decimal – fração, verificamos que os alunos mobilizaram a representação que consideraram mais adequada para justificar relações de equivalência. Esta capacidade mostra uma aparente confiança no trabalho com números racionais, considerando que os alunos estão numa fase inicial da aprendizagem destes números. Deste modo, o trabalho centrado na compreensão de que um mesmo número pode assumir diferentes representações, não só simbólicas, mas também ativas e icónicas, contribuiu para a sua conceptualização de número racional.

O facto de o grupo de professoras já ter uma rotina de trabalho colaborativo anterior a este estudo, facilitou o ambiente de partilha criado e proporcionou a entrada da investigação na sala de aula. Salientamos a relação entre a teoria e a prática neste estudo: a teoria encontrou um modo de apoiar a prática e a prática forneceu pistas para a problematização da teoria. Por um lado, o percurso de aprendizagem para os números racionais foi baseado em investigação realizada, que enfatiza a articulação crucial entre representações simbólicas de números racionais (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018; Moss & Case,1999; Morais, Serrazina, &

Ponte, 2018; Ponte & Quaresma, 2011; Tripathi, 2008). Por outro lado, a prática informou que não só esta articulação é possível no 1.º ciclo, como também beneficia de um trabalho contínuo que envolve igualmente outros tipos de representações, nomeadamente icónicas e ativas.

Referências

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–126). New York, NY: Academic Press.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática*, *109*, 15–23.

Bruner, J. S. (1999). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 105–128.

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké*, *26*(2), 354–374.

IE–UL (2016). *Carta ética para a investigação em educação e formação*. Consultado a 6 de setembro de 2016, em http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/564658.PDF.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and rations for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* (3rd Edition). New York, NY: Routledge.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169–186.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89–108.

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae, 20*(4), 552–570.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2),77–98.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, *20*(1), 55–81.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática: O papel da colaboração. *Zetetiké, 11*(20), 51–84.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications from research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts: Multiple research perspective. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Learning, teaching and assessing rational number concepts: Multiple research perspective* (pp. 327–362) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,16*(1), 18–36.

Roche, A. (2010). Decimats: Helping students to make sense of decimal place value. *Australian Primary Mathematics Classroom, 15*(2), 4–10.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review,* 1–22.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110–113.

ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS NO CÁLCULO MENTAL COM PERCENTAGEM

Renata Carvalho

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ul.pt

Resumo: A percentagem surge em diversos contextos do quotidiano, pelo que é essencial compreendê-la e saber usá-la no cálculo. Esta comunicação analisa as estratégias dos alunos no cálculo mental com percentagem, no contexto de uma experiência de ensino onde se privilegia a partilha e discussão de estratégias de cálculo mental com números racionais. O estudo segue uma metodologia de investigação baseada em *design* onde se realizaram dois ciclos de experimentação com a participação de duas professoras e 39 alunos. Os resultados mostram que, no cálculo mental com percentagens, os alunos recorrem a estratégias de relações numéricas baseadas na decomposição, na relação entre representações dos números racionais, relações parte-todo e parte-parte. Dada a riqueza das relações numéricas estabelecidas, as estratégias parecem ter essencialmente subjacentes representações proposicionais enquanto representações mentais que apoiam os raciocínios dos alunos.

Palavras-chave: Cálculo mental, números racionais, estratégias, percentagem.

Introdução

Os números racionais, na representação percentagem, surgem em diversos contextos do quotidiano para descreverem ou compararem dados de diversos tipos. Diariamente deparamo-nos com percentagens em notícias sobre ambiente, educação, economia ou política, assim como na etiqueta da roupa que vestimos ou em contextos de descontos ou de impostos. Para interpretar esta informação é essencial compreender e saber calcular com percentagens, por vezes mentalmente, de forma rápida e eficaz.

No Programa de Matemática em vigor (MEC, 2013), a noção de percentagem surge pela primeira vez no 1.º ciclo, no 4.º ano, relacionada com a frequência relativa em Organização e Tratamento de Dados (OTD). No 2.º ciclo, surge apenas no 5.º ano associada à resolução de problemas de vários passos e, no 3.º ciclo, volta a ser abordada em relação com a OTD. Contudo, espera-se que os alunos, à entrada do 3.º ciclo, sejam capazes de "mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionar de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens)" (p. 14). É de notar que nos primeiros anos de escolaridade, não é realizada uma abordagem intuitiva aos números racionais, onde as representações destes números sejam trabalhadas de modo relacional como recomenda a investigação em Educação Matemática (e.g., Carvalho, 2016; Guerreiro, Serrazina & Ponte, 2018; Moss, 2002). A homologação recente de Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) reforça a importância de representar números racionais (não negativos) na forma de fração, decimal e percentagem e de estabelecer relações entre estas representações a partir do 1.º ciclo, dando-se continuidade a esta abordagem ao longo do 2.º ciclo.

Tendo em conta a importância da percentagem na vida quotidiana, a sua fraca valorização no percurso de aprendizagem dos alunos e a escassez de investigação em torno desta representação dos números nacionais, esta comunicação analisa as estratégias de cálculo mental dos alunos com percentagem no contexto de uma experiência de ensino onde se privilegia a partilha e discussão de estratégias de cálculo mental com números racionais.

Números racionais na representação percentagem

Parker e Leinhardt (1995) referem que a percentagem, enquanto representação de um número racional é rica em relações, comparações e ações podendo ser usada em conversões, exercícios e problemas. Na sua perspetiva, trata-se de um conceito matemático dinâmico que tem vindo a sofrer alterações ao longo do tempo. Inicialmente era associado ao cálculo de taxas, juros ou funções envolvendo a regra de três simples, mas passa a ser usado na comparação de frações e razões entre diferentes conjuntos de objetos e números para comparar diferentes tipos de dados. Segundo os autores, uma percentagem representa uma linguagem simples e concisa que descreve uma relação proporcional, apresentando propriedades de números, de relações parte-todo, de razões e de funções que originam outros números ou uma estatística que relaciona dois números. É uma representação cuja conversão para numeral decimal e fração potencia a equivalência entre estas três representações dos números racionais (e.g., 25% pode ser interpretado como $0{,}25$ ou $\frac{1}{4}$). A discussão destas relações com os alunos é essencial uma vez que todo o valor representado em percentagem tem uma equivalência em fração e numeral decimal que é fácil de determinar, mas o inverso nem sempre acontece. Por exemplo, frações como $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{7}$ não possuem um correspondente direto simples em percentagem e decimal (Moss & Case, 1999). Hansen, Drews, Dudgeon, Lawton e Surtees (2014) defendem igualmente uma aprendizagem relacional da percentagem justificando que a sua compreensão só é possível se os alunos compreenderem a equivalência entre esta representação e a fracionária.

No que se refere à aprendizagem da percentagem, Moss (2002) defende que a extensão dos conhecimentos dos alunos acerca dos números naturais entre 1 e 100 em situações de comparação pode ser um elemento facilitador, embora reconheça que esses conhecimentos também podem dar origem a erros, caso esta extensão não seja realizada com compreensão. Assim, sugere que a aprendizagem dos números racionais se inicie com a percentagem. Esta é também a perspetiva de Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018) que sublinham a importância da aprendizagem da percentagem em conjunto com as representações decimal e fracionária pelos contributos que pode trazer para o desenvolvimento do sentido de número.

Para Parker e Leinhardt (1995) a aprendizagem da percentagem deve contemplar a abordagem de diferentes expressões envolvendo esta representação, para explorar e discutir diversas relações. Consideram que podemos pedir aos alunos que apliquem uma percentagem $(10\%\ de\ 20 = ?)$, que encontrem a percentagem $(\_\%\ de\ 20 = 2)$ ou o valor sobre o qual aplicámos uma dada percentagem $(10\%\ de\ \_ = 2)$. Num problema, todas estas formas de usar a percentagem podem estar presentes, enquadradas num contexto de onde o aluno deve retirar a informação relevante, trabalhá-la matematicamente e resolver o problema. O tipo de expressão que sugerem, apesar de não requerer recolha e tratamento de informação, fornece oportunidades para os alunos estabelecerem relações parte-parte ou parte-todo através de expressões de valor em falta.

Cálculo mental com números racionais

Neste estudo, o cálculo mental é entendido como um cálculo exato, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz que, recorrendo a representações mentais, faz uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e operações, onde é possível usar registos intermédios em papel (Carvalho, 2016). Calcular mentalmente requer a compreensão da grandeza e valor dos números e do efeito das operações sobre os números e o domínio prévio de um conjunto de factos numéricos que permitam calcular rapidamente e com precisão (Heirdsfield, 2011). Por isso, o conhecimento que os alunos possuem sobre números e operações é essencial para a realização de cálculo mental em geral e com números racionais em particular. Factos numéricos, regras memorizadas, relações numéricas e representações mentais são elementos que fazem parte do quadro concetual representado na Figura 1.

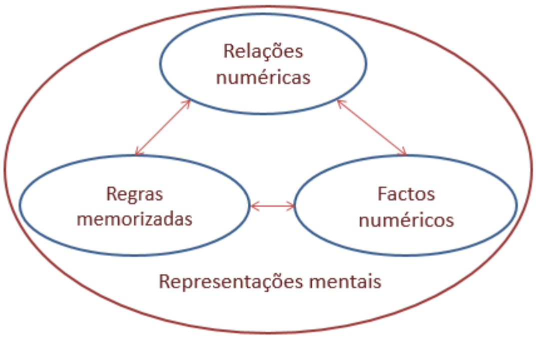


Figura 1 – Quadro concetual para o estudo de estratégias de cálculo mental

A aprendizagem de factos numéricos inicia-se com os números naturais e vai aumentando ao longo da vida alargando-se a outros conjuntos numéricos, por influência escolar e da vida quotidiana. Estes factos referem-se ao conhecimento prévio de somas, produtos, diferenças e quocientes e são essenciais para apoiar o cálculo mental. Por exemplo, se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ for um facto numérico para um determinado aluno, no cálculo de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ ele pode decompor $\frac{3}{4}$ em $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ para rapidamente usar este facto numérico no cálculo de $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ e chegar ao resultado $1\frac{1}{4}$.

O recurso a estratégias baseadas na aplicação de regras memorizadas, surge em função da complexidade dos raciocínios usados no cálculo mental com números racionais, maior do que com números naturais (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross 2010). Possivelmente também resulta da experiência matemática dos alunos, cujo conhecimento acerca das operações com números os leva a simplificarem cálculos cada vez com maior frequência. Estas regras memorizadas envolvem, por exemplo, a aplicação de procedimentos referentes à multiplicação e divisão por potências de 10 (memorizando que na multiplicação por potências de 10, se desloca a vírgula uma posição decimal para a direita ou, na divisão por potências de 10, uma posição decimal para a esquerda) ou procedimentos algorítmicos como, na adição de frações, a adição de numeradores quando os denominadores são iguais. O uso de factos numéricos e de regras memorizadas pode surgir isoladamente enquanto estratégia de cálculo mental, mas pode igualmente surgir como auxiliar no estabelecimento de relações entre números e operações, como mostra o exemplo para o cálculo de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$.

Estratégias baseadas em relações numéricas envolvem aprendizagens com compreensão sobre números e operações e evidenciam pensamento relacional (Empson, Levi & Carpenter, 2010). Pensar de forma relacional é ter capacidade para usar propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson et al., 2010). O pensamento relacional é importante para o cálculo mental por se basear em relações numéricas. São exemplos de estratégias baseadas em relações numéricas, a mudança de representação entre números racionais (e.g., fração→percentagem; percentagem→ fração; percentagem→decimal e decimal→percentagem) ou de números racionais para números naturais (decimal→número natural referente a $\frac{10}{100}$ em que, por exemplo, no cálculo de 0,19 + 0,1 considera 0,19 como 19 e 0,1 como 10); as relações parte-todo ou parte-parte; a equivalência entre expressões; ou as relações entre operações inversas.

Outro aspeto importante a considerar são as representações mentais a que os alunos recorrem no cálculo mental. O ser humano constrói representações mentais a partir do mundo envolvente e usa essas representações para dar sentido ao que o rodeia e para fazer inferências. Estas representações mentais podem ser compreendidas através da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1990). Esta teoria pretende explicar processos de conhecimento complexos e, em particular, processos de compreensão e inferência, assumindo que existem três tipos de representações mentais fundamentais nos processos de pensamento: modelos mentais, imagens mentais e representações proposicionais. A diferença entre estas representações reside na sua especificidade e função, embora os modelos mentais sejam a base para a criação de imagens e representações proposicionais. As representações mentais são consideradas modelos mentais se representam perceções globais do mundo real (e.g., uso de um contexto de partilha equitativa para dividir uma determinada quantia entre duas pessoas). Se representam o mundo real com alguma especificidade, contemplando algumas características, são consideradas imagens (e.g., uma piza dividida em duas partes da qual se considera uma parte, relacionada com a representação simbólica $\frac{1}{2}$). Se representam proposições verdadeiras ou falsas, importantes para a construção de inferências acerca do mundo real, são representações proposicionais (e.g., se $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ então $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, porque $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$). As representações mentais estão na base de processos de raciocínio dos alunos e refletem as suas conceções acerca dos números racionais e das suas operações.

Metodologia de investigação

Este estudo é qualitativo e interpretativo com uma metodologia de investigação baseada em *design* (Cobb et al., 2003; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira & Quaresma, 2016). Participam duas professoras e duas turmas do 6.º ano (39 alunos) que já tinham trabalhado os números racionais em várias representações (decimal, fração, percentagem) e nas quatro operações e a primeira autora (doravante designada por investigadora) como observadora participante. O anonimato dos alunos é assegurado usando nomes fictícios.

O estudo decorreu em três fases (Figura 2): preparação, experimentação e análise. A preparação envolveu uma primeira revisão de literatura e um estudo preliminar com alunos do 5.º ano da investigadora, baseado num protótipo de experiência de ensino com 6 tarefas de cálculo mental. Era objetivo desta fase perceber as estratégias dos alunos no cálculo mental com números racionais e as dinâmicas inerentes à realização de uma aula centrada em tarefas de cálculo mental e na discussão coletiva dessas tarefas. Posteriormente, foi construída uma experiência de ensino, partindo da conjetura que a realização durante dois períodos letivos de tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos (expressões) e não matemáticos (situações contextualizadas) com números racionais envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias dos alunos, contribui para o desenvolvimento do seu reportório de estratégias de cálculo mental e para a melhoria do seu desempenho em tarefas de cálculo mental.

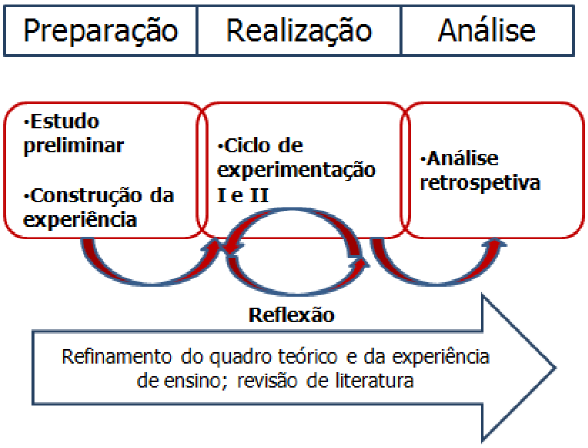


Figura 2 – Fases de desenvolvimento do estudo

A fase de experimentação contemplou dois ciclos, um em 2012 (C I) e outro em 2013 (C II). Os dados foram recolhidos recorrendo à observação direta das aulas e de reuniões de preparação/reflexão da experiência de ensino com as professoras participantes. A experiência foi elaborada pela investigadora e discutida e reajustada com as professoras das turmas. A discussão na sala de aula foi conduzida pelas professoras, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias dos alunos. As reuniões de trabalho com as professoras foram áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental foram áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva.

Na análise de dados foram visionados e transcritos episódios de aula para identificar as estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão. Para a análise das estratégias, consideramos três categorias e diversas subcategorias construídas com base em estudos anteriores (e.g., Caney & Watson, 2003) e na análise dos dados recolhidos. Na Tabela 1 apresentamos as categorias e alguns exemplos de subcategorias de estratégias usadas na análise de dados. O nome dado à estratégia do aluno foi escolhido em função do elemento mais forte presente (por exemplo, se faz um uso forte de relações numéricas, nomeadamente da relação parte-todo é considerada uma estratégia de categoria "relações numéricas" e subcategoria "relação parte-todo"). Para cada categoria foram identificadas as representações mentais subjacentes às estratégias dos alunos, nomeadamente modelos mentais, imagens mentais, ou representações proposicionais.

Tabela 1 – Categorização das estratégias de cálculo mental com números racionais

	Categorias		
	Relações numéricas	Factos numéricos	Regras memorizadas
Subcategorias	- Mudança de representação - Relação parte-todo - Relação entre operações - Decomposição	- Duas metades formam a unidade - Um meio de um meio é um quarto	- Regra para adicionar/subtrair frações - Regra para multiplicação/divisão por potências de 10

As três fases do estudo foram acompanhadas por uma reflexão individual da investigadora e coletiva entre esta e as professoras participantes, o que permitiu melhorar e aprofundar o quadro concetual, a conjetura de ensino-aprendizagem e a experiência de ensino.

A experiência de ensino

A experiência de ensino é composta por 10 tarefas de cálculo mental, que denominámos de “Pensa rápido!”. Estas tarefas incluem expressões e situações contextualizadas que foram projetadas semanalmente na sala de aula com recurso a um *PowerPoint* temporizado. Cada tarefa é constituída por duas partes com 5 expressões ou 4 situações contextualizadas. Os alunos têm 15 segundos para resolver individualmente cada expressão e 20 segundos para resolver cada situação contextualizada e anotar o resultado numa folha de registo. No final da primeira parte promove-se um momento de discussão de estratégias dos alunos com o objetivo de influenciar positivamente a realização da segunda parte da tarefa. No final da segunda parte promove-se novo momento de discussão. As tarefas de cálculo mental têm uma duração entre 30 e 90 minutos, onde se privilegia o questionamento na sala de aula, quer no sentido professor-aluno, quer entre alunos, como por exemplo: Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega? Este tipo de questões tem como objetivo ajudar o aluno a explicar e clarificar como pensou e a ser crítico face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as estratégias dos alunos, através da interação entre estes.

Os alunos, na experiência de ensino, começam por calcular mentalmente com a representação fracionária (adição/subtração na tarefa 1 e multiplicação e divisão na tarefa 2), depois com decimais e frações com as quatro operações básicas (tarefa 3) e a seguir apenas com numerais decimais (adição/subtração na tarefa 4 e multiplicação e divisão na tarefa 5). Posteriormente, resolvem situações em contextos de medida e comparação com a representação fracionária e decimal (tarefa 6). A representação percentagem surge na tarefa 7 e nas tarefas 8, 9 e 10 surge as representações decimal, fracionária e percentagem.

Nas tarefas com expressões, intercalam-se expressões sem valor em falta (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$) com expressões de valor em falta (e.g., 0,7 +__=1), sendo que estas últimas representam um contexto de aprendizagem promotor de pensamento relacional ao invés de uma aplicação direta de procedimentos de cálculo (Carpenter, Franke & Levi, 2003). As tarefas com situações contextualizadas (e.g., “*Uma tina tem de capacidade* $22{,}5\ l$ *. Quantos baldes de* $\frac{1}{2}\ l$ *são necessários encher para despejar por completo a tina?”*) pretendem facilitar a criação de representações mentais bem como ajudar os alunos a dar significado aos números através da relação entre estas e as expressões apresentadas, podendo os raciocínios ser transpostos de uma situação para outra. As tarefas permitem não só rever e consolidar aprendizagens envolvendo números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental dos alunos. Os números racionais surgem em diferentes representações (decimal, fração e percentagem), estando a representação usada em cada tarefa de acordo com o tópico que as professoras estavam a trabalhar no momento. No momento em que se estudam volumes usa-se sobretudo a representação decimal, no estudo das relações e regularidades usa-se a representação em fração e em Estatística usam-se as três representações. Esta opção permite desenvolver o cálculo mental de forma integrada com a aprendizagem dos números racionais prolongada no tempo e estabelecer relações entre diferentes tópicos matemáticos. Recorremos ao uso de numerais decimais com o último dígito par ou múltiplos de 5 e de 10 e números de referência para facilitar a equivalência entre as representações decimal, fracionária e percentagem. Enfatizámos a importância de algumas relações numéricas (e.g., dividir por 0,5 é o mesmo que multiplicar por 2) fazendo-as surgir em diversas questões ao longo das 10 tarefas.

Estratégias dos alunos no cálculo mental com percentagens

Analisamos de seguida as estratégias de cálculo mental dos alunos com a representação percentagem em questões envolvendo percentagens de referência e expressões com e sem valor em falta e situações contextualizadas. As estratégias apresentadas ilustram os raciocínios seguidos pela maioria dos alunos nos dois ciclos de experimentação.

Em questões de cálculo mental envolvendo 50%, os alunos recorrem a relações numéricas, associando esta percentagem ao cálculo de metades e dobros como fizeram Ivo e Marta (Quadro 1). Estas estratégias sugerem o uso de representações proposicionais – no caso de Marta, se 50% de ?=60 e 50%+50%=100% então ?=60×2 e, no caso de Ivo, se 50% corresponde a metade de algo, então 50% de 40=40÷2.

Quadro 1 – Estratégias para o cálculo de 50%

	Tarefa 7	
Questão de cálculo mental	**50% *de* 40**	**50% *de* ? = 60**
Explicação do aluno	***Ivo (CI)***: Metade de 40 é 20.	***Marta(CI):*** Fiz 60 vezes 2 . . . Porque 50 [%] mais 50 [%] dá 100 [%].
Estratégia	Relações numéricas - cálculo de dobros/metades	
Representação mental	Representação proposicional	

As estratégias dos alunos em cálculos envolvendo 25%, enfatizam a relação entre as representações percentagem e fracionária (Quadro 2). Os alunos mudam de representação e dividem por 4 ao reconhecer que "25% é $\frac{1}{4}$ de 100 [%]" como, por exemplo, mostra a explicação de Ricardo, ou reconhecem a relação entre o todo (100%) e as suas partes "25+25+25+25 ou 25×4 é 100%" e multiplicam por 4 para calcular o valor sobre o qual se aplicou 25%, como mostra a estratégia de António. Estas estratégias indiciam o recurso a representações proposicionais tendo em conta as relações numéricas que os alunos usam: se 25%=$\frac{1}{4}$ então 25% de 20=$\frac{1}{4}$ de 20=20÷4 (Ricardo); se 25+25+25+25=25×4 e corresponde ao todo, então 20+20+20+20=20×4 (António).

Quadro 2 – Estratégias para o cálculo de 25%

	Tarefa 7	
Questão de cálculo mental	$25\%\ de\ 20$	$25\%\ de\ ? = 20$
Explicação do aluno	***Ricardo (CII):*** Eu só fiz 20 a dividir por 4 . . . Porque 25% é $\frac{1}{4}$ de 100 [%].	***António (CII):*** 25+25+25+25 ou 25×4 é 100%. Se 25% é igual a 20, tipo 20×4, 80. 25×4 100%.
Estratégia	Relações numéricas	
	Mudança de representação	Relação parte-todo
Representação mental	Representação proposicional	

No cálculo de percentagens múltiplas de 10%, como 20%, os alunos recorrem a estratégias de decomposição, cálculo de dobros, de relação parte-todo e de mudança de representação (Quadros 3 e 4). Nas estratégias de Rui (Quadro 3) e Dina (Quadro 4) 10% surge como percentagem de referência para o cálculo de 20%. Rui decompõem o cálculo de 20% no cálculo de 10% mais 10% e Dina usa 20% como sendo o dobro de 10%. Embora Rui resolva uma expressão sem valor em falta e Dina uma situação contextualizada, a situação apresentada a Dina pode ser resolvida com recurso a uma expressão (20% de 25€) semelhante à resolvida por Rui (20% de 50). A estratégia de Rui parece ter subjacente uma representação proposicional mais centrada numa relação aditiva (se 20%=10%+10%, então 20% de 50 corresponde à soma de 10% de 50 com 10% de 50). A estratégia de Dina uma representação proposicional centrada numa relação multiplicativa (se 20% de 25= (10% de 25)×2 então 20% de 25=2,5×2). Os alunos realizam de modo automático o cálculo de 10% de uma quantidade, tendo-se verificado em inúmeros casos que este cálculo tem subjacente uma regra memorizada para a divisão por 10 (desloca a vírgula uma posição decimal para a esquerda).

Em expressões de valor em falta, Dina usa uma estratégia (Quadro 3) diferente da que usou na resolução da situação contextualizada. Para o cálculo de $20\%\ de\ ? =\ 8$, recorre à relação parte-todo “20% cabe 5 vezes em 100%” sugerindo o recurso à representação proposicional: se 100%=5×20% então na expressão 20% de ?=8, ?=5×8.

Quadro 3 – Estratégias para o cálculo de 20%

	Tarefa 8	Tarefa 9
Questão de cálculo mental	$\mathbf{20\%\ de\ 50}$	$\mathbf{20\%\ de\ ?=\ 8}$
Explicação do aluno	***Rui (CII):*** 20% se eu decompuser em 10% mais 10%. 10% de 50 é 5, mais outro 10% de 50 é 5. Então 5 mais 5, 10.	***Dina(CI):*** 20% cabe 5 vezes em 100%. Fiz 8×5 que deu 40.
Estratégia	Relações numéricas	
	Decomposição	Relação parte-todo
Representação mental	Representação proposicional	

Lídia identifica "20% de 25€" como a expressão que resolve a situação contextualizada apresentada no Quadro 4. Neste sentido, partilha uma estratégia que se centra num conjunto de relações numéricas que inicia na mudança de representação (20%=0,20= $\frac{1}{5}$) e culmina na relação entre multiplicar por $\frac{1}{5}$ e dividir por 5 "25€ vezes $\frac{1}{5}$ que é o mesmo que dividir por 5". Esta estratégia sugere o recurso à representação proposicional: se 20%=0,20=$\frac{1}{5}$ então, 20% de 25€=$\frac{1}{5}$ de 25€=25÷5.

No cálculo de percentagens inferiores a 10%, os alunos recorrem a estratégias de relações numéricas onde surgem relações entre as representações decimal e percentagem, parte-parte e parte-todo (Quadro 5). Tanto Eva como Pedro usam 10% como percentagem de referência e cujo cálculo pode ter sido apoiado por regras memorizadas, uma vez que as suas explicações não são claras quanto ao modo como realizaram este cálculo. Eva, partindo de 10% estabelece uma relação multiplicativa para comparar parte-parte e posteriormente parte-todo. A estratégia de Eva poderá ter na sua origem a representação proposicional: se 5% de ?=3, então 2×5% corresponde a 2×3 (relação parte-parte). Como 100%=10×10% então ?=10×2×3 (relação parte -todo).

Quadro 4 – Situação contextualizada estratégias para o cálculo de 20%

	Tarefa 10	
Questão de cálculo mental	Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. **Calcula o valor do desconto.**	
Explicação do aluno	***Lídia (CI)***: 20% transformei em centésimas . . . 20 centésimas é $\frac{1}{5}$. Então fiz 25€ vezes $\frac{1}{5}$ que é o mesmo que dividir por 5 que me deu 5.	***Dina (CI)***: Fiz 10%. 10% de 25 é 2,5 depois 20% é o dobro de 10%, dá 5€
Estratégia	Relações numéricas	
	Mudança de representação	Cálculo de dobros
Representação mental	Representação proposicional	

Quadro 5 – Estratégias para o cálculo de percentagens inferiores a 10%

	Tarefa 7	Tarefa 8
Questão de cálculo mental	$\mathbf{5\%\ de\ ? = 3}$	$\mathbf{\_\%\ de 30 = 0,3}$
Explicação do aluno	***Eva(CI):*** Eu passei o 5% para 10% que era mais fácil. Mas tive de multiplicar por 2 e então tínhamos de multiplicar o resultado por 2 também, 6. . . Depois multipliquei 10 por 6 que dá 60.	***Pedro (CI)***: Quase toda a gente respondeu 10% e eu vou explicar como é que isso é impossível. É assim, 10% de 30 é 3. 10% de 3 é 0,3. 10% de 10% é 1.
Estratégia	Relações numéricas	
	Relação parte-parte e parte-todo	Mudança de representação
Representação mental	Representação proposicional	

Pedro calcula 10% de 30 e obtém o resultado 3. Calcula 10% de 3 e chega ao resultado pretendido, indicando que o valor em falta é 1%. De salientar a forma como justifica o resultado de 1% dizendo que “10% de 10% é 1” o que considera válido pois “nós usamos metade de metade é $\frac{1}{4}$ e 10% de 10% é 1. E 10% de 10% que é de 3 é 0,3“. O aluno faz uma composição de operadores, e, na verdade, determinando 10% seguido de 10%, é o mesmo que determinar 1%. Pedro poderá ter pensado na expressão 0,1×0,1×30 ou $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times 30$ e baseando-se num conhecimento que possui: “metade de metade é $\frac{1}{4}$” tenta generalizar um procedimento. Subjacente a esta flexibilidade de raciocínio pode estar, a facilidade com que muda da representação percentagem para a decimal ou fracionária. A expressão usada por Pedro (“metade de metade é $\frac{1}{4}$”) na sua explicação, parece ser reveladora de que recorreu à mudança de representação para realizar o cálculo apoiando-se numa representação proposicional baseada nos conhecimentos que evidencia na sua explicação: se 10% de 30 é 3 e 10% de 3 é 0,3 então o valor em falta é 10% de 10% que corresponde a 1%.

Ao longo da experiência de ensino, alguns alunos manifestarem dificuldades em operar com a representação percentagem enquanto outros a usaram para apoiar os seus raciocínios em questões onde surgem as representações decimal e fracionaria como mostram as estratégias apresentadas no Quadro 6. Apesar de, neste estudo, a representação percentagem ter sido a última a ser introduzida no cálculo mental com números racionais, as relações entre 50% e $\frac{1}{2}$ e 25% e $\frac{1}{4}$ parecem estar presentes no raciocínio dos alunos logo desde o inicio da experiência, como mostra a estratégia de Gonçalo. O aluno usa percentagens para pensar sobre frações parecendo recorrer a um modelo mental (usa o contexto de uma piza de modo pouco específico) e a uma representação proposicional: se $\frac{1}{2}$=50% e $\frac{1}{4}$=25% então $\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$ é equivalente a 50%$-$?=25%.

Quadro 6 – Estratégias em questões sem a representação percentagem

	Tarefa 1	Tarefa 8	
Questão de cálculo mental	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - ? = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$	$\mathbf{0,25\ de\ ? = 10}$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{de}\ \mathbf{60}$
Explicação do aluno	**Gonçalo (CII):** Eu pensei assim, 50% depois vamos ter de arranjar um número até chegarmos a 25% … para chegarmos a 25% da piza.	***Lídia (CI)***: Deu-me 40. Eu fiz 25% que é quartos e fiz 10×4 que eu sei logo que é 40.	**António (CII):** Eu coloquei o 75% em metade e depois dividi o 60 ao meio que deu 30 e dividi o 30 ao meio que deu 15. Depois somei 15 mais 15 e voltou a dar 30, mais 15 deu 45.
Estratégia	Relações numéricas		
	Mudança de representação		
		Relação parte-todo	Cálculo de metades
Representação mental	Representação proposicional		
	Modelo mental		

Para o cálculo de $0,25\ de\ ? = 10$, Lídia muda de representação ao considerar 0,25 como 25% e relaciona parte-todo ao considerar 25% como sendo a quarta parte do todo: “Eu fiz 25% que é quartos”. Neste sentido, multiplica igualmente 10 por 4 para encontrar o valor em falta. Esta estratégia sugere o uso, por parte da aluna de uma representação proposicional centrada nas relações numéricas que estabelece: se 0,25=25%=$\frac{1}{4}$ então $0,25\ de\ ? = 10$ é equivalente a 25% de ?=10 e a $\frac{1}{4}$ de ?=10, logo 4×25%=100% e 4×10=?.

A estratégia de António reflete também a importância da mudança de representação no cálculo mental com números racionais e ilustra o tipo de estratégia usada no cálculo de 75% de uma quantidade. Depois de considerar $\frac{3}{4}$=75%, usa 75% como sendo 50%+25% e calcula 25% de 60 através do cálculo de metade de metade e adiciona o resultado três vezes. Poderia ter estabelecido uma relação multiplicativa entre 25% e 75% como alguns alunos fizeram noutras questões envolvendo o cálculo de 75% depois de terem realizado o cálculo sucessivo de metades, mas, como habitual, António recorre a relações aditivas que parecem ter subjacente o uso da representação proposicional: se $\frac{3}{4}$=75% e 75%=50%+25% então $\frac{3}{4}$ *de* 60=75% de 60=25% de 60 + 25% de 60 + 25% de 60.

Discussão e Conclusão

As estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos na representação percentagem centram-se essencialmente em relações numéricas de vários tipos. No cálculo de 50% de uma quantidade, os alunos recorrem a estratégias baseadas no cálculo de metades/dobros e associam o cálculo de 25% de uma quantidade ao cálculo da quarta parte ou ao cálculo sucessivo de metades. A mudança de representação surge como uma estratégia (Caney & Watson, 2003; Carvalho, 2016) forte no cálculo de 25%, 75% e 20% a que muitos alunos associam e usam no cálculo as representações fracionárias $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$. O facto de associarem o cálculo de 50% a metade também tem implícita a relação entre 50% e $\frac{1}{2}$. O cálculo de 10% de uma quantidade é usado como referência para o cálculo de percentagens inferiores ou múltiplas de 10 e está associado ao cálculo da décima parte de uma quantidade onde, com frequência, os alunos recorrem a regras memorizadas para realizar a operação (desloca a vírgula uma posição decimal para a esquerda). Estratégias centradas na mudança de representação revelam compreensão, por parte dos alunos, acerca dos números racionais (Hansen et al., 2014; Moss & Case, 1999), uma vez que estes transitam entre representações dando-lhes significado como é o caso de associarem 50% ao cálculo de metade, de 25% a $\frac{1}{4}$ de 100 [%] ou ao facto de 20% representar 5 partes de 100%. De notar que em questões de cálculo mental onde não era apresentada a representação em percentagem, os alunos usam-na para pensar e calcular mentalmente com numerais decimais e frações (Quadro 6). Estratégias envolvendo relações parte-todo e parte-parte, como as de António, Eva, Dina e Lídia, evidenciam propriedades das percentagens (Parker & Leinhardt, 1995) e enfatizam a sua natureza multiplicativa. Este tipo de estratégia surge em expressões de valor em falta propícias ao desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos (Carpenter et al., 2003; Empson et al., 2010). Estratégias centradas na decomposição de percentagens envolvendo as referências 10% ou 25%, aliadas a relações multiplicativos permitem fazer uma extensão dos conhecimentos que os alunos possuem acerca das operações com números naturais de 1 a 100 (Moss, 2002). Contudo, nem sempre o raciocínio multiplicativo está devidamente desenvolvido em alunos do 6.º ano, como nos mostram as estratégias de António. Isto reforça a necessidade de desenvolver o cálculo mental dos alunos com números racionais com as representações decimal, fracionária e percentagem para que as relações multiplicativas possam ser discutidas e aprofundadas.

No que se refere às representações mentais, as estratégias dos alunos sugerem o recurso maioritário a representações proposicionais e pontualmente a modelos mentais. As representações proposicionais baseiam-se em proposições verdadeiras que refletem o conhecimento matemático dos alunos, que estes usam para relacionar números e operações.

Neste estudo, as estratégias de cálculo mental dos alunos com percentagens mostram a riqueza de relações que é possível explorar a partir da resolução de diversas questões onde o cálculo se centra na procura de relações ao invés de se centrar exclusivamente na aplicação de regras. Dada a escassez de estudos sobre percentagem, este pretende ser um contributo para a valorização do trabalho em torno da compreensão e cálculo de percentagens na sala de aula, através do desenvolvimento de práticas de cálculo mental, tornando-o uma ferramenta de apoio à interpretação de informação.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através da bolsa atribuída à primeira autora (SFRH/BD/69413/2010).

Referências

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3–5*. Reston, VA: NCTM.

Caney, A., & Watson, J.M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em15/05/2010)

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Direção-Geral da Educação. (2018). *Aprendizagens essenciais*. (retirado de http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico em 17/08/2018)

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409–428). Heidelberg: Springer.

Guerreiro, H., Serrazina, L., & Ponte, J.P. (2018). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 359–384.

Hansen, A., Drews, D., Dudgeon, J., Lawton, F., & Surtees, L. (2014). *Children's errors in mathematics*. London: SAGE.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96–102.

Johnson-Laird, P.N. (1990). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ministério da Educação e Ciência (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. (retirado de http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17 em 04/09/2013).

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122–147.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In B. Litwiller & G. Bright (Eds): *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 109–120). Reston, VA: NCTM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421–481.

Ponte, J.P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, 25*(2), 77–98.

COMPREENSÃO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA NO 8.º ANO DE ESCOLARIDADE

Kelly Aguiar

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

kelly.aguiar@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Esta comunicação tem o objetivo de perceber que compreensão de variáveis e equações têm alunos do 8.º ano, como utilizam linguagem algébrica simbólica para resolver problemas e que dificuldades evidenciam. Quatro alunos de uma turma de 8.º ano participaram da pesquisa, e os dados foram recolhidos por meio de entrevistas com gravação de áudio e recolha dos trabalhos dos alunos. Os resultados do estudo indicam uma frágil compreensão das expressões algébricas, tanto no que se refere aos seus significados e sua função de exprimir a generalização, quanto aos conceitos que envolvem a manipulação simbólica. Suas principais dificuldades consistem em traduzir situações problemáticas em linguagem algébrica, em associar expressões algébricas aos contextos dos problemas e, particularmente, em descrever algebricamente configurações visuais.

Palavras-chave: Álgebra; Linguagem algébrica; Variáveis; Simbolização.

Introdução

De acordo com o NCTM (2000), é expectável que a consolidação das bases da Álgebra ocorra no final do 8.º ano, onde o aluno deverá analisar e generalizar padrões usando diversas formas de representação e usar Álgebra simbólica tanto para representar situações quanto para resolver problemas, com compreensão conceitual de diferentes utilizações das variáveis e de formas equivalentes de expressões algébricas. Assente nesta ideia e perspectivando a aprendizagem da Álgebra a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico e do sentido de símbolo, este trabalho tem o objetivo de perceber que compreensão de variáveis e equações têm alunos do 8.º ano, como utilizam linguagem algébrica simbólica para resolver problemas e que dificuldades evidenciam. Pretendemos, deste modo, conhecer as aprendizagens e as dificuldades dos alunos no tópico matemático de expressões com variáveis e equações de 1.º grau de modo a poder dar contribuições para o trabalho do professor na lecionação destes conceitos.

Quadro Conceptual

A Álgebra é um tema fundamental da Matemática escolar (Arcavi, 2006; Kaput, 2008; Ponte, Branco & Matos, 2009). Ao abordar este tema, o NCTM (2000) refere a linguagem algébrica simbólica como uma aquisição cultural que se tornou crucial no trabalho matemático, uma vez que, por meio dela, ideias matemáticas complexas podem ser expressas de modo sucinto. Segundo Kaput (2008), a Álgebra pode ser encarada como um corpo de conhecimento culturalmente adquirido ou como uma atividade humana, o pensamento algébrico. Este autor sublinha que a generalização e a simbolização são centrais ao pensar em Álgebra e descreve dois aspectos fundamentais da Álgebra: a simbolização sistemática de generalizações e a ação guiada sintaticamente em um sistema simbólico. Em sua perspectiva, ao visar o desenvolvimento do pensamento algébrico, os dois aspectos devem ser amplamente trabalhados de modo a promover interpretação de símbolos algébricos e compreensão da sintaxe algébrica, capacidades fundamentais no âmbito da Álgebra.

Arcavi (2006) aponta para compreensão do significado dos símbolos e manipulação simbólica como processos igualmente importantes na atividade algébrica. Em sua perspectiva, a transição flexível entre estes dois processos, constitui uma componente fundamental do que ele chama de *sentido de símbolo*. O domínio de técnicas de manipulação algébrica é valorizado por carregar procedimentos que exprimem significados sem, entretanto, requerer um constante esforço cognitivo enquanto as ações de raciocínio e conexão de ideias trazem a elaboração de novos significados à situação em questão na atividade matemática. Neste sentido, o NCTM (2000) afirma que a destreza na manipulação das expressões simbólicas pode ser promovida a partir da compreensão inicial dos significados e da utilização das variáveis, da percepção de equivalência e do desenvolvimento da capacidade de associar expressões simbólicas aos contextos dos problemas, evidenciando que estes dois aspectos devem ser, portanto, desenvolvidos simultaneamente. Também Sfard e Linchevski (1994) apontam para a necessidade de que os alunos desenvolvam compreensão dos símbolos tanto por uma concepção operacional, quanto por uma concepção estrutural, referindo que apenas pela complementariedade destas duas concepções os alunos podem adquirir versatilidade e adaptabilidade no uso da linguagem algébrica.

Muitas dificuldades são relatadas nas investigações em aprendizagem da Álgebra. Por exemplo, Ponte, Branco e Matos (2009) discutem uma série destas dificuldades dos alunos em Álgebra, entre as quais podemos destacar as que se referem às noções de equivalência e de monômios semelhantes, e ao uso habitual da letra x como variável. Radford (2004) afirma que a habilidade de manipulação simbólica requer primeiramente uma compreensão das propriedades e relações matemáticas estruturais, o que constitui o aspecto semântico da Álgebra: “as dificuldades na aprendizagem da sintaxe é resultado de uma pobre compreensão das estruturas matemáticas subjacentes às representações algébricas” (p. 162). Radford (2000) afirma ainda que muitas das dificuldades dos alunos estão associadas ao significado que atribuem aos símbolos. Em sua perspectiva, a compreensão da estrutura sintática da linguagem algébrica e dos significados dos símbolos é um longo processo na trajetória ontogenética dos alunos.

Metodologia

O estudo foi realizado por meio de entrevistas individuais a quatro alunos de uma turma de 8.º ano de uma escola de 2.º e 3.º Ciclos em Santarém. As entrevistas tiveram duração de 40 a 50 minutos com cada um dos participantes, onde eles realizaram cinco tarefas. Os dados foram registados com auxílio de gravação em áudio, diário de bordo e recolha de resoluções dos alunos e foram analisados à luz do enquadramento teórico e em duas categorias – estratégias e dificuldades dos alunos.

A professora de Matemática da turma apoiou a realização do estudo realizando a seleção dos participantes, que teve como critério, abranger alunos de diferentes níveis de desempenho em Matemática. Uma vez que alunos de diferentes níveis de desempenho podem apresentar compreensões distintas da linguagem algébrica, consideramos que esse critério possibilitaria a obtenção de um conjunto de dados mais diversificado. Rosa é uma aluna dedicada, mas apresenta muita dificuldade em Matemática, com rendimento abaixo do esperado. Mafalda apresenta também alguma dificuldade em Matemática, mas geralmente tem resultados satisfatórios. Filipe é um aluno muito atento e aplicado e apresenta bons resultados em Matemática. José é um ótimo aluno, tem sempre excelentes resultados e demonstra interesse por problemas matemáticos. As tarefas (em anexo) foram construídas a partir de tarefas usadas em outras pesquisas, como apresentado na tabela 1.

Tabela 1 – Fonte das tarefas

Tarefa	Referência
1	Branco (2008)
2	Branco (2008)
3	Ponte, Branco e Matos (2009)
4	Adaptado de NCTM (2000)
5	Branco (2008)

As tarefas orientadoras deste estudo estão relacionadas com os aspectos centrais da Álgebra, a compreensão dos significados dos símbolos e a manipulação simbólica. Perceber que compreensão de variáveis e equações estes alunos do 8.º ano apresentam e como utilizam linguagem algébrica na resolução de problemas, indicando as dificuldades evidenciadas em ambos, são questões associadas ao objetivo do estudo. A primeira aponta para a interpretação de expressões algébricas de acordo com seu contexto, ou seja, para a capacidade de traduzir em linguagem verbal informações expressas em linguagem algébrica (tarefas 2 e 4). A segunda destaca a capacidade de expressar em linguagem algébrica uma situação problemática (tarefas 1 e 5). Naturalmente, o papel da manipulação simbólica surge em cada uma das tarefas, mas é verificado especialmente na tarefa 3.

Resultados

Tarefa 1

A primeira tarefa em análise neste trabalho explora um tipo de problema comum no ensino de equações, onde o aluno deve interpretar o enunciado da situação e resolvê-lo, recorrendo ao uso da linguagem simbólica ou a outra estratégia apropriada. O objetivo investigativo desta tarefa consiste em perceber se os alunos recorrem espontaneamente a representações algébricas simbólicas na resolução de problemas e se conseguem usá-las adequadamente.

Rosa iniciou sua resolução questionando se deveria equacionar o problema, o que evidencia alguma familiaridade com esta estratégia. Procedeu à representação simbólica das distâncias percorridas no sábado e no domingo de forma correta (x e $x + 6$), mas incluiu na equação apenas a distância percorrida no domingo. A dificuldade da aluna surgiu na tradução da relação de adição das duas distâncias para totalizar 38 quilômetros pois, apesar de ter relacionado a distância percorrida no domingo com a distância percorrida no sábado, Rosa não somou x com $x + 6$ para expressar o total. Ao concluir que a resposta encontrada não fazia sentido no contexto, pois a distância percorrida no sábado não poderia ser 32 quilômetros, a aluna desistiu de usar a linguagem simbólica no problema e tentou resolvê-lo aritmeticamente (figura 1). Sua resolução não levou ao resultado correto, uma vez que ela procedeu primeiramente à divisão por 2 desconsiderando o fato dos 6 quilômetros adicionais do domingo estarem incluídos no total e voltando a somá-los depois.

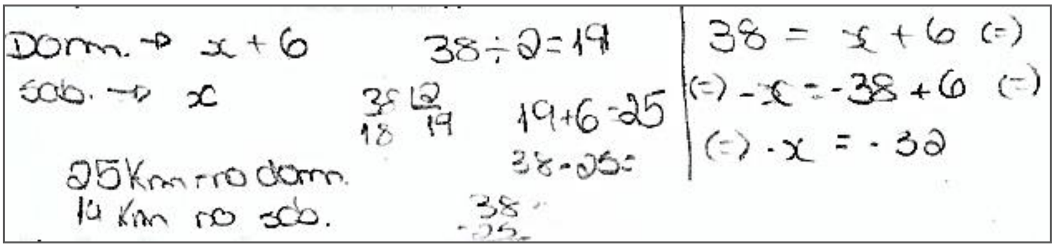


Figura 1 – Resolução de Rosa da Tarefa 1

Assim como Rosa, Mafalda representou simbolicamente bem cada distância e teve dificuldade em traduzir sua soma, escrevendo apenas $x + 6 = 38$. A aluna escreveu e verbalizou a relação "domingo mais sábado é igual a 38 quilômetros", mas teve dificuldade em fazê-lo em linguagem simbólica algébrica, e nem mesmo tentou resolver a equação, optando por uma estratégia aritmética (figura 2). Em sua estratégia, Mafalda também dividiu 38 por 2 mas realizou uma compensação para chegar aos resultados corretos. A aluna identificou que nos 19 estava incluída a metade do acréscimo de domingo e somou a outra metade, 3. Dos 19 tirou também o total do acréscimo e depois adicionou 3. Esta estratégia da aluna não se desenvolveu por um procedimento eficiente, mas evidencia alguma compreensão das propriedades das operações.

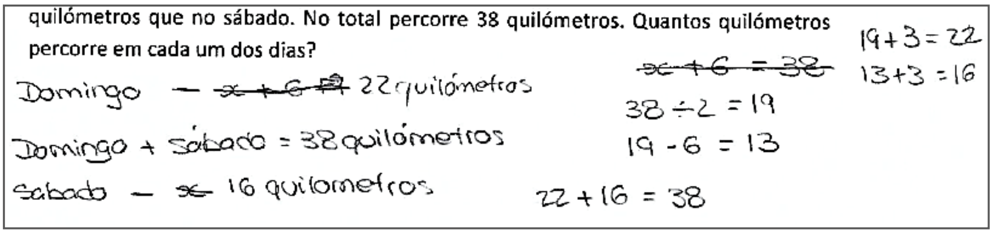


Figura 2 – Resolução de Mafalda da Tarefa 1

Filipe equacionou e resolveu o problema sem dificuldades e de maneira automatizada, demonstrando estar habituado a usar equações para resolver problemas como este e também ter domínio dos procedimentos de resolução de equações de 1.º grau.

José optou por usar uma estratégia aritmética, realizou as operações inversas corretamente e referiu que não havia necessidade de usar equação pela simplicidade do problema.

Como estava proposto, observamos que Rosa, Mafalda e Filipe optaram espontaneamente por usar linguagem algébrica simbólica para resolver o problema, mas apenas Filipe o fez corretamente. Rosa e Mafalda tiveram dificuldade em traduzir em linguagem simbólica algébrica a soma das distâncias percorridas em cada dia, apesar de representarem corretamente cada uma delas e seguiram para estratégias aritméticas. Nesta tarefa, vimos ainda a importante relação entre o uso de linguagem simbólica e as competências aritméticas. Em suas estratégias, Rosa não evidencia compreensão das operações em causa enquanto Mafalda demonstra tal compreensão e apresenta uma resolução interessante para o problema. Por seu lado, a estratégia e as expressões de José mostram que, além da compreensão das propriedades aritméticas, ele escolheu não usar linguagem algébrica simbólica, ou seja, reconheceu que o uso de uma representação aritmética poderia ser mais adequado na situação matemática.

Tarefa 2

Os objetivos desta tarefa eram reconhecer expressões como meio de representar situações problemáticas e resolver equações. Buscamos perceber se os alunos compreenderiam o significado da variável e das expressões apresentadas nas alíneas.

Rosa percebeu que l representa o preço da camisola de lã e que $2l$ representa o preço de duas camisolas de lã. Entretanto, a aluna não reconheceu que $l - 5$ representa o preço da camisa e, consequentemente, não reconheceu que a expressão $3(l - 5) + 2l + 10$ representa o total gasto, afirmando que o número 3 na expressão refere-se a três camisas, vezes a camisola de lã menos 5 que, em si, representa o preço da camisa (figura 3).

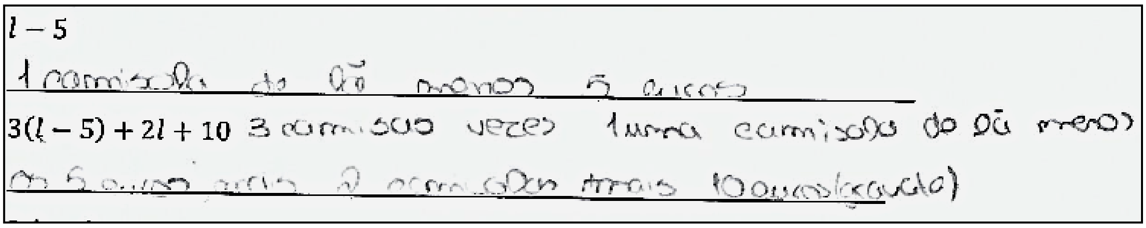


Figura 3 – Respostas de Rosa da Tarefa 2

Na alínea seguinte Rosa escreveu a expressão $x - 5$ para representar o preço da camisa e a expressão $120 = 3x - 5 + 10 + 2l$ para representar o total da compra. Rosa não utilizou a expressão em l para resolver a alínea b, mas elaborou uma expressão em x que levaria à solução do problema se não fosse pela falta dos parênteses e pelo sinal negativo no final da resolução (figura 4).

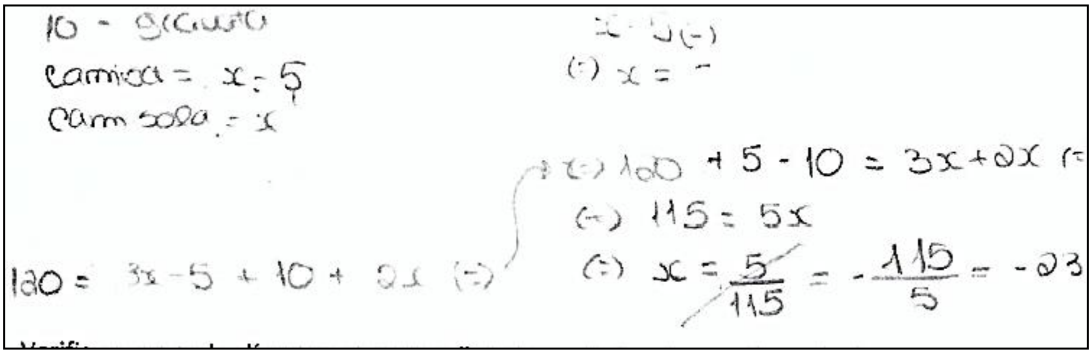


Figura 4 – Rosa resolve uma equação para o problema (Tarefa 2)

Mafalda não apresentou dificuldades na interpretação do problema, reconheceu que as expressões representam a situação descrita e utilizou a expressão dada para calcular os valores pedidos na alínea b (figura 5).

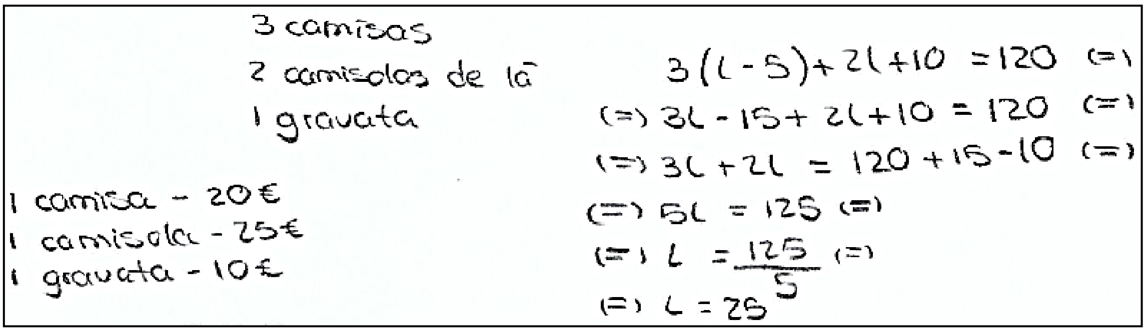


Figura 5 – Mafalda resolve a equação (Tarefa 2)

Filipe reconheceu que as expressões representam a situação proposta e demonstrou familiaridade com este tipo de problemas (figura 6).

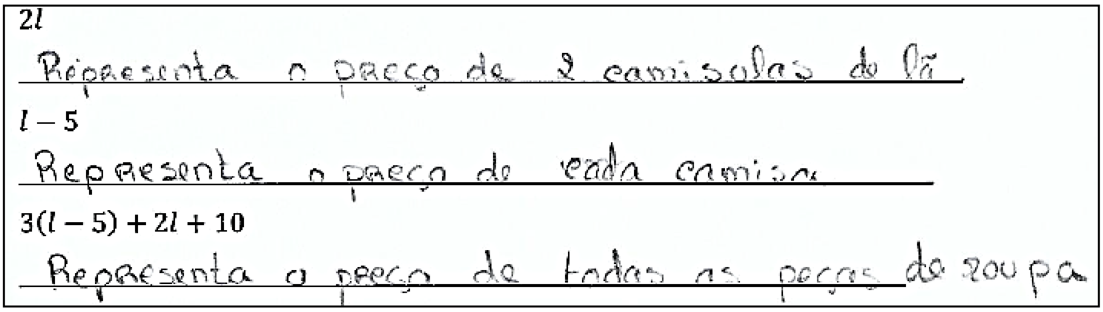


Figura 6 – Resposta de Filipe na alínea a) da Tarefa 2

José também reconheceu o significado das variáveis e expressões. O aluno resolveu a tarefa 1 aritmeticamente, mas nesta questão fez uso da linguagem simbólica algébrica devido a um maior grau de dificuldade do problema.

Nesta tarefa vimos que Mafalda, Filipe e José compreenderam o uso das variáveis na situação descrita, perceberam que a expressão final representa o total gasto na compra e utilizaram tal expressão para descobrir o preço de cada peça. Estes alunos não apresentaram dificuldades e usaram a estratégia de transposição de termos para resolver a equação. Rosa, porém, teve dificuldade na compreensão da expressão do total dado na alínea ‘a’. Esta dificuldade da aluna está associada à sua familiaridade com a letra x, uma vez que não compreendeu a expressão na variável l e construiu uma equação muito parecida com a dada, porém na variável x. Mostra assim que o uso da letra l constituiu um obstáculo para a compreensão do significado das expressões.

Tarefa 3

Esta tarefa explora procedimentos de manipulação algébrica e seus objetivos eram simplificar expressões algébricas e reconhecer expressões equivalentes. Pretendemos identificar as dificuldades dos alunos na simplificação de expressões algébricas.

Na alínea a), Rosa apresentou dificuldades na identificação dos monômios semelhantes e, consequentemente, somou termos que não são semelhantes. A aluna identificou que o coeficiente de c era 1 mas demonstrou dúvida se $3 + c$ é equivalente a $3c$ ou a $4c$, evidenciando falta de compreensão dos princípios que regem os procedimentos algébricos (figura 7).

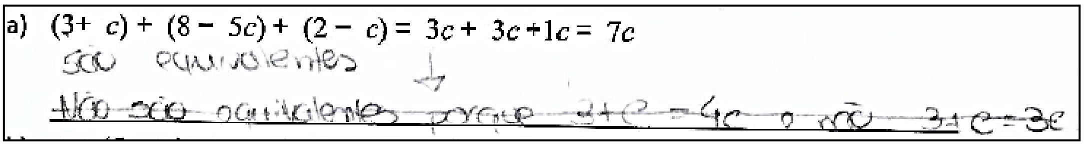


Figura 7 – Resposta de Rosa à Tarefa 3

Rosa: O c não tem um 1 atrás? Então $3 + 1c$ deveria ser 4. Acho eu... $8 - 5c$ vai dar $3c$ mais $2 - 1c$ vai dar $1c$.

Investigadora: Então elas são equivalentes?

Rosa: Eu acho que aqui é $1c$, portanto aqui deveria dar $4c$, mas eu não sei (...) Ah não, tô toda baralhada. Já não tenho certeza se é isto. $3 + c$ pode ser $3c$! (...) Ah então meto que são equivalentes.

Na alínea d), entretanto, Rosa identificou o erro na multiplicação de monômios, e justificou devidamente sua conclusão de que as equações não são equivalentes (figura 8).

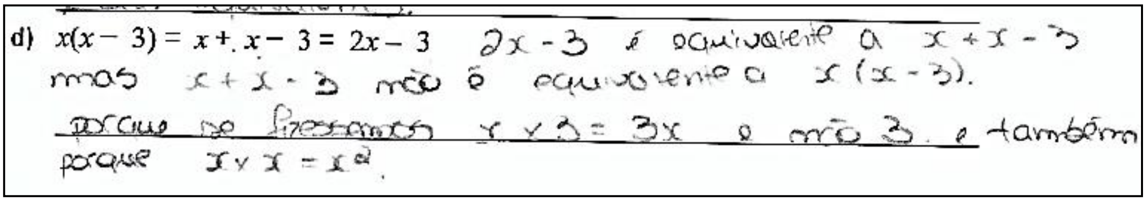


Figura 8 – Resposta de Rosa à Tarefa 3

Assim como Rosa, Mafalda fez adição de termos não semelhantes na alínea ‘a’ e concluiu que as expressões são equivalentes. Na alínea d, ao aplicar a propriedade distributiva, Mafalda assumiu poder ignorar que $x.x = x^2$ (figura 9).

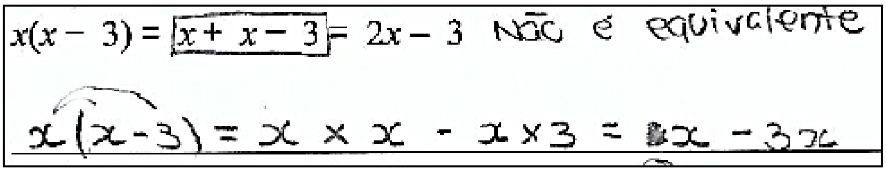


Figura 9 – Resposta de Mafalda à Tarefa 3

Filipe demostrou destreza na manipulação algébrica, realizou as simplificações corretamente e identificou as expressões equivalentes. Inicialmente, entretanto, Filipe apresentou algum desconforto com o uso da variável c.

Filipe: Mas o c é tipo o x?

José demonstrou domínio dos procedimentos esperados para este ano de escolaridade e realizou manipulações algébricas para que as expressões ficassem equivalentes.

Nesta tarefa vimos que Filipe e José não tiveram dificuldades na simplificação das expressões algébricas e José conseguiu ainda perceber que manipulações poderiam ser feitas para torná-las equivalentes. Suas estratégias evidenciaram que ele tem familiaridade com os símbolos. Rosa e Mafalda, entretanto, não identificaram as transformações incorretas na simplificação de expressões algébricas. Suas dificuldades relacionaram-se principalmente com a compreensão da noção de monômio e de monômios semelhantes e, essa dificuldade criou-lhes outros obstáculos na simplificação das expressões. Vimos novamente que o uso de uma letra diferente de x foi uma dificuldade apresentada, o que revela a limitada noção de símbolo que os alunos têm.

Tarefa 4

A proposta desta tarefa é que o aluno identifique expressões que podem representar o número de azulejos da borda de uma piscina a partir das medidas de comprimento e largura. Com esta tarefa pretendemos observar se os alunos conseguiriam associar as expressões simbólicas ao contexto do problema tanto a partir da percepção de que todas as expressões são equivalentes quanto, baseado no significado que cada expressão carrega relativamente ao problema.

Rosa apresentou muita dificuldade na interpretação do problema e em compreender que o objetivo era identificar expressões algébricas que representem o número de azulejos. O raciocínio da aluna estava bem agarrado à quantidade de azulejos apresentada no exemplo, de forma que ela não compreendia a representação algébrica e voltava constantemente a referir-se às medidas apresentadas na figura.

Rosa: Para calcular fazia este mais este, mais este, mais este. Mas não é nenhuma! Porque todas só têm a área (referindo-se a A nas expressões).

Investigadora: Mas o A representa o número de azulejos.

Rosa: Ah é! Pois é! ... $c + c$, 10 mais 10 dá 20, mais 6, dá 26! (contando os azulejos da figura)

Devido a erros na simplificação de expressões, Rosa não reconheceu que todas as expressões dadas são equivalentes. Rosa aplicou corretamente a propriedade distributiva em $2(c + 2) + 2l$, mas ao simplificar $(c + 2)(l + 2) - cl$ fez uma soma de termos que não são semelhantes (figura 10). Consequentemente, disse que esta expressão não representava o número de azulejos. A aluna demonstrou não associar significado a cada expressão relativamente ao contexto do problema exceto a equação $A = 4 + 2c + 2l$.

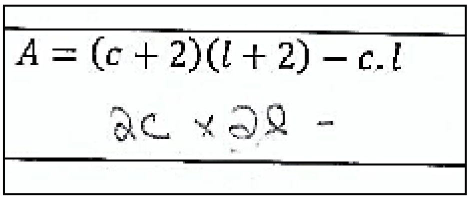


Figura 10 – Simplificação feita por Rosa na Tarefa 4

Investigadora: Mas, e as expressões? Quais representam o número de azulejos?

Rosa: Eu não sei! O problema é o 2 e o 4! Se calhar o 2 é porque são dois comprimentos e duas larguras. E o 4, são estes azulejos dos cantos! Mas isso nunca vai dar 26!

Investigadora: Mas podem ser piscinas de vários comprimentos e larguras!

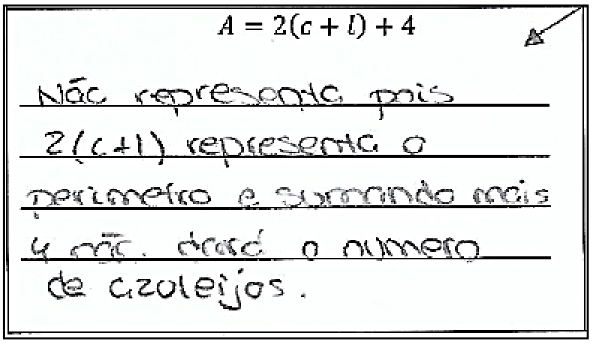
Rosa: Ahhh! Ok, ok! Então eu acho que esta está certa (referindo-se a $A = 4 + 2c + 2l$). Mas também pode ser esta aqui ($A = 2(c + 2) + 2l$)... E esta aqui ($A = 2(c + l)$) porque são iguais! Mas não sei explicar o por quê.

(...)

Rosa: Esta ($(c + 2)(l + 2) - cl$) não faz sentido!

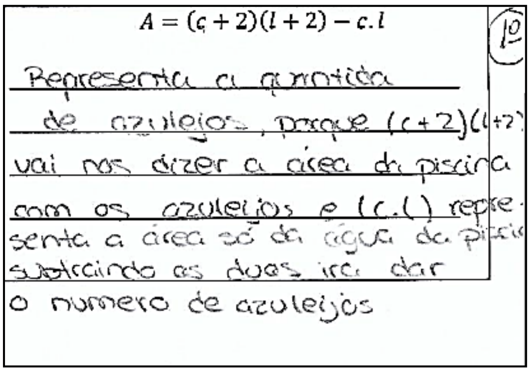
Mafalda compreendeu o significado das variáveis no contexto do problema e percebeu que $c + 2$ e $l + 2$ representam, respectivamente, comprimento e largura da piscina. O raciocínio de Mafalda para a relação entre áreas expressa em $A = (c + 2)(l - 2) - cl$ evidencia que a aluna conseguiu dar significado à expressão. Entretanto, não reconheceu que as demais expressões são equivalentes e não percebeu a razão pela qual o termo "4" aparece em duas das expressões (figuras 11 e 12).

Mafalda: É que eu não tô a perceber o quatro. Porque é que tá aqui o quatro (referindo-se a $A = 4 + 2c + 2l$).


$A = 2(c + l) + 4$

Não representa pois 2(c+1) representa o perimetro e somando mais 4 não dará o numero de azulejos.

Figura 11 – Mafalda não identifica equivalência (Tarefa 4)


$A = (c + 2)(l + 2) - c.l$

1º

Representa a quantida de azulejos, porque (c+2)(l+2) vai nos dizer a área da piscina com os azulejos e (c.l) representa a área só da água da piscina subtraindo as duas irá dar o numero de azulejos

Figura 12 – Justificação de Mafalda (Tarefa 4)

Filipe começou sua resolução simplificando as expressões e identificou a equivalência. O aluno indicou, então, que todas as expressões representam o número de azulejos, justificando corretamente que $2c + 2l + 4$ representa o número de azulejos. Acrescenta que não compreendia o significado das outras expressões na situação problemática (figura 13).

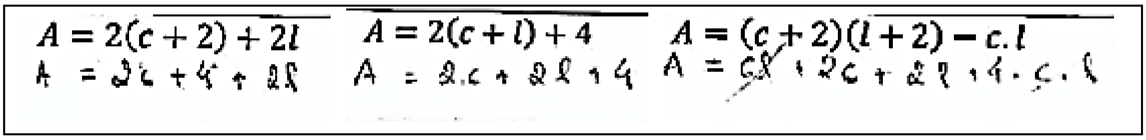


Figura 13 – Filipe reconhece a equivalência (Tarefa 4)

Investigadora: Agora, estas expressões também representam o número de azulejos?

Filipe: Sim!

Investigadora: Mas elas fazem sentido?

Filipe: Fazem sentido porque são equivalentes umas às outras. Mas ao problema... Não vejo muita ligação. Visualmente não, mas se resolvermos, sim! Se eu olhar, diria logo esta (apontando para a expressão $A = 4 + 2c + 2l$).

José escreveu a expressão $2c + 2l + 4$ para representar o número de azulejos da piscina e, em seguida, passou a analisar as expressões propostas. O aluno manipulou corretamente as expressões algébricas e concluiu que as expressões são equivalentes. Inicialmente José justificou a escolha das expressões com base apenas no fato de serem equivalentes. Entretanto, quando questionado, José voltou ao problema inicial, compreendeu e apresentou as razões porque cada uma das expressões representa o número de azulejos da piscina (figuras 14 e 15).

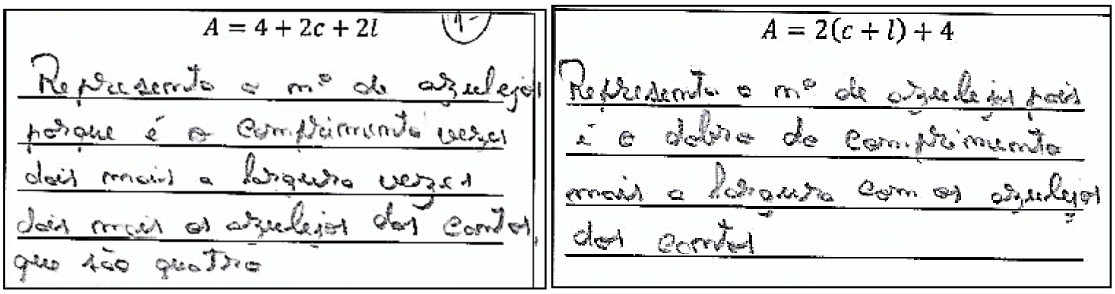


Figura 14 – Justificações de José na Tarefa 4

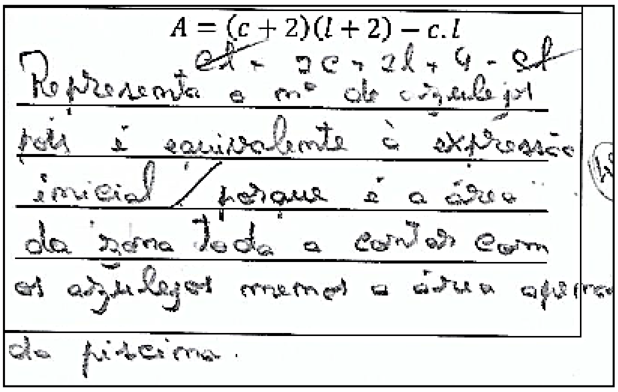
José: Esta poderia ser usada (apontando para $A = 4 + 2c + 2l$) que eu já escrevi. Esta também ($2(c + 2) + 2l$) porque se tirarmos aqui vai ficar $2c + 4 + 2l$, o mesmo que aqui está (apontando a primeira expressão). São equivalentes.

(...)

José: Hum, (apontando para $2(c + 2) + 2l$) é o comprimento mais esses dois azulejos dos cantinhos vezes dois e depois o $2l$ é a largura. Então ela também representa o número de azulejos.

Investigadora: E a última expressão?

José: Esta está mais difícil! (...) Seria o comprimento mais os dois azulejos do lado, também seria a largura com os dois azulejos do lado e um multiplicava pelo outro, que dava a área de tudo e depois tirávamos o cl que era a área da piscina (...). Que é a área de tudo menos a parte interior!



$A = (c+2)(l+2) - c.l$

$\cancel{cl} + 2c + 2l + 4 - \cancel{cl}$

Representa o nº de azulejos pois é equivalente à expressão inicial / porque é a área da zona toda a contar com os azulejos menos a área apenas da piscina.

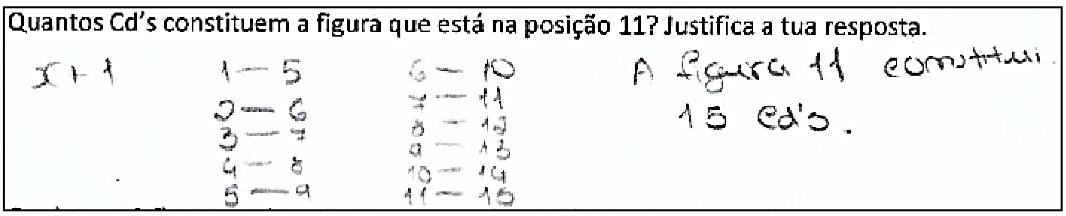
Figura 15 – Resolução de José na Tarefa 4

Nesta tarefa é evidenciada a importância da noção de equivalência e da compreensão dos princípios que regem a manipulação algébrica, bem como da complementariedade entre estas as ações no sistema simbólico e o significado das generalizações. Vimos que Rosa, particularmente, apresenta dificuldade com a generalização proposta na tarefa, uma vez que demora a perceber que as expressões se referiam aos valores desconhecidos de comprimento e largura. Rosa e Mafalda não identificaram a equivalência das equações e relacionaram apenas algumas das expressões ao problema da piscina. As alunas apresentaram dificuldade na simplificação de expressões, precisamente pela falta de compreensão de monômios semelhantes e, assim como Filipe, tiveram dificuldade em relacionar os aspectos geométricos do problema à representação simbólica algébrica. Este aluno demonstrou dominar os procedimentos de manipulação algébrica mas baseou-se unicamente na equivalência para justificar suas escolhas, apresentando dificuldade na compreensão dos significados da generalização expressa. As estratégias usadas por José evidenciaram uma maior compreensão do significado das variáveis e das expressões, pois este aluno apresenta a capacidade de manipular e também de 'ler' através das expressões simbólicas, e mostra flexibilidade no uso dessas duas capacidades.

Tarefa 5

Analisar e generalizar padrões através de expressões simbólicas é o objetivo desta tarefa. Pretendemos perceber se os alunos encontram o termo geral da sequência e se compreendem seu significado relativamente ao contexto do problema.

Inicialmente, Rosa verificou o aumento de um Cd de um termo para o termo posterior e escreveu a expressão $x + 1$ para representar o número de elementos de um termo a partir do anterior, mas acabou por optar pela estratégia de contagem para calcular o número de elementos da figura 11 (figura 16). Na alínea c, Rosa evidenciou dificuldade para compreender o comando de generalização. A aluna percebeu e verbalizou que o número de elementos de um termo seria o número de sua posição na sequência acrescido de 4 unidades, mas teve dificuldade em compreender a generalização e escrever a expressão.



Quantos Cd's constituem a figura que está na posição 11? Justifica a tua resposta.

$x + 1$

1 — 5
2 — 6
3 — 7
4 — 8
5 — 9
6 — 10
7 — 11
8 — 12
9 — 13
10 — 14
11 — 15

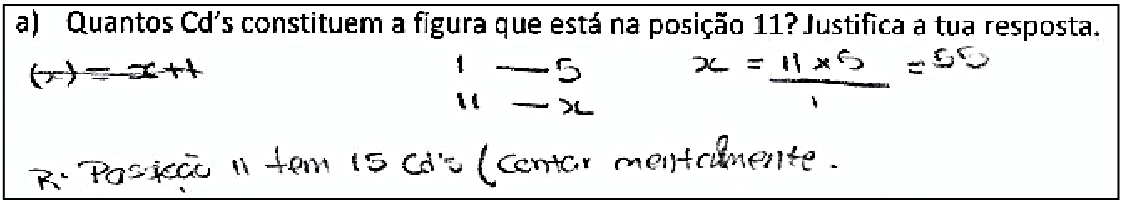
A figura 11 constitui 15 Cd's.

Figura 16 – Rosa usa a estratégia de contagem (Tarefa 5)

Investigadora: Agora escreve uma expressão que representa o número de cd's para uma figura de posição qualquer.

Rosa: Então pode ser qualquer figura, pode ser esta, esta ou esta? (...) Como assim "qualquer que seja a sua posição"?

Assim como Rosa, Mafalda percebeu o padrão $x + 1$, com x sendo o termo anterior, mas desistiu desta estratégia e usou raciocínio proporcional (figura 17). Após reconhecer que 55 não é um número razoável para a quantidade de cd's na posição 11, a aluna fez contagem, associando o termo ao número de cd's da figura. Na alínea b, Mafalda percebeu o padrão $n + 4$.

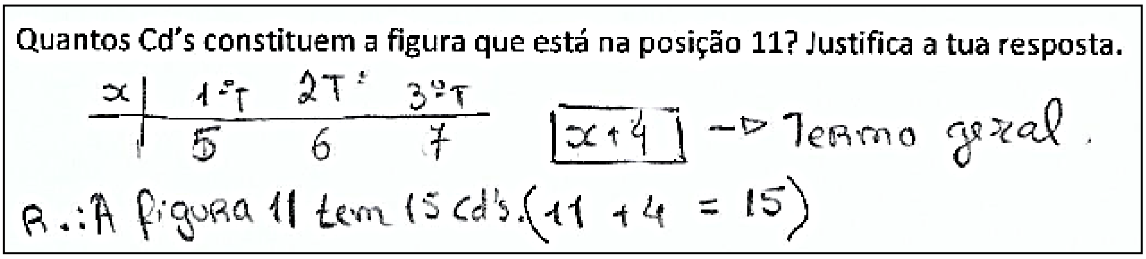

a) Quantos Cd's constituem a figura que está na posição 11? Justifica a tua resposta.

~~(x) = x+1~~ 1 — 5 / 11 — x $x = \frac{11 \times 5}{1} = 55$

R: Posição 11 tem 15 Cd's (contar mentalmente.

Figura 17 – Mafalda usa raciocínio proporcional (Tarefa 5)

Filipe realizou um procedimento comum para a resolução desta tarefa, comparou duas sequências numéricas para descobrir do termo geral (sequência de números de elementos da figura e de termos a que se referem). Este procedimento evidencia a realização de um menor esforço cognitivo, porém desvincula a expressão do termo geral da configuração visual que determina o padrão da sequência. Apenas quando questionado sobre o significado do termo geral, Filipe procura algum significado para sua expressão algébrica (figura 18).


Quantos Cd's constituem a figura que está na posição 11? Justifica a tua resposta.

x	1ºT	2ºT	3ºT
	5	6	7

$\boxed{x+4}$ → Termo geral.

R.: A figura 11 tem 15 cd's. (11 + 4 = 15)

Figura 18 – Resolução de Filipe (Tarefa 5)

Professora: Mas esse $x + 4$, achas que é expresso aqui na figura, de alguma maneira?

Filipe: Expresso na figura?

Professora: Na figura. Onde é que se vê esse 4?

Filipe: Não se vê.

Professora: Não?

Filipe: Ahhh, sim! É sempre no início, e vai sempre acrescentando mais 1.

José inicialmente tentou compreender o padrão presente na sequência e, uma vez que já sabia que a figura tem sempre 4 cd's a mais que o número da posição, representou isto por meio de uma expressão algébrica e explicou seu raciocínio (figura 19).

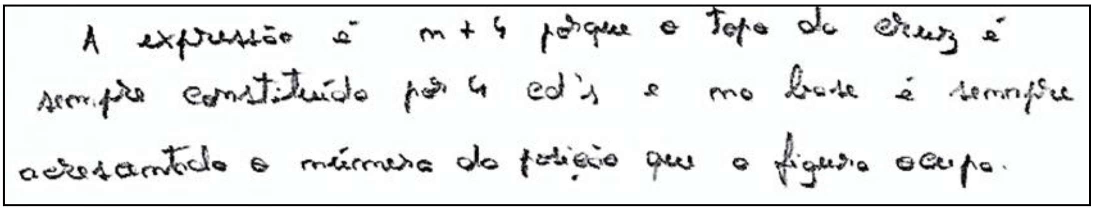

A expressão é $n+4$ porque o topo da cruz é sempre constituído por 4 cd's e na base é sempre acrescentado o número da posição que a figura ocupa.

Figura 19 – José justifica a expressão (Tarefa 5)

Os quatro participantes da pesquisa chegaram ao termo geral da expressão. Vimos novamente que Rosa apresentou dificuldade em compreender a ideia de generalização. Apenas José recorreu a uma estratégia que envolve uma percepção visual do padrão estabelecido, Rosa, Mafalda e Filipe fizeram uma comparação de sequências numéricas (número do termo e número de Cd's que constituem a figura), e Filipe, particularmente demonstrou estar familiarizado com esta estratégia. Mafalda e Rosa usaram ainda estratégias de contagem e raciocínio proporcional antes de compararem as duas sequências numéricas. Rosa, Mafalda e Filipe tiveram dificuldade na visualização da configuração geométrica da sequência e em ver sua relação com a expressão do temo geral por eles encontrada, ou seja, em atribuir significado à expressão simbólica.

Conclusão

Esta análise global das resoluções dos alunos mostra que Rosa e Mafalda apresentam dificuldades tanto na manipulação algébrica quanto na compreensão dos significados dos símbolos, José transita bem entre manipulação de símbolos e compreensão dos significados dos símbolos, demostrando sentido de símbolo, e Filipe apresenta bom domínio de manipulação simbólica, mas compreensão restrita dos significados dos símbolos.

Os resultados do estudo indicam que os alunos usam espontaneamente a linguagem algébrica na resolução de problemas, pois estão habituados ao uso de equações neste nível de escolaridade, entretanto as dificuldades na resolução de equações e de manipulação simbólica impedem alguns deles de seguirem com o uso da linguagem algébrica. Com exceção de José, que evidencia reconhecimento de vantagens e desvantagens no uso dos símbolos, os demais alunos não demonstram o sentido do poder dos símbolos referido por Arcavi (2006). A compreensão das propriedades das operações e as demais competências aritméticas surgem como um aspecto interessante evidenciado na primeira tarefa em sua relação com a linguagem algébrica. Vimos que os alunos que têm frágil compreensão aritmética apresentam também dificuldades na compreensão dos princípios que regem os procedimentos de trabalho com os símbolos, como defende Radford (2004). Consoante com a literatura, observamos que a dificuldade na noção de monômios semelhantes e a identificação de expressões equivalentes é um dos principais obstáculos na manipulação algébrica (Ponte, Branco & Matos, 2009).

As dificuldades dos alunos em compreender os comandos de generalização e ainda a associação que fazem entre variável e a letra x apontam para a importância da aprendizagem dos conceitos algébricos em situações que os levem a ver os significados dos símbolos, como destaca o NCTM (2000). Traduzir informação dada em linguagem verbal em linguagem simbólica algébrica é também uma das dificuldades apresentadas pelos alunos, particularmente no que diz respeito à representação das relações e operações realizadas a partir de uma variável e na descrição de uma configuração visual usando representações algébricas. Verificamos ainda que os alunos apresentaram dificuldade em associar expressões algébricas ao contexto do problema, particularmente no problema dos azulejos da piscina, mas, com exceção de Rosa, perceberam a adequação da expressão apresentada para representar o problema da compra de roupas, o que pode ter sido facilitado pela estrutura sequencial lógica da tarefa para a construção da expressão.

Os resultados do estudo indicam uma frágil compreensão das expressões algébricas, tanto no que se refere aos seus significados e sua função de generalização, quanto aos conceitos que envolvem a manipulação simbólica – os dois aspectos centrais da Álgebra referidos por Kaput (2008). As dificuldades dos alunos em traduzir situações problemáticas em linguagem algébrica, em associar expressões algébricas aos contextos dos problemas, e particularmente em descrever algebricamente configurações geométricas/visuais apontam para a necessidade de realizar mais trabalho em sala de aula que promova a compreensão conceitual algébrica e, consequentemente, versatilidade e adaptabilidade no uso da linguagem algébrica (Sfard & Lincheviski, 1994).

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, L. Fonseca, A. Barbosa, T. Pimentel, P. Canavarro , & L. Santos (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? . Em J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Radford, L. (2000). Students' processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. Em T. Nakahara, & M. Koyama (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education. 4*, pp. 81-88. Hiroshima: Hiroshima University.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. Em M. Høines, & A. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28 Conference of the internacional group for the psychology of mathematics education. 1*, pp. 161-166. Norway: Bergen University College.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 191-228.

ANEXO

Tarefas

1) O José durante o fim-de-semana faz passeios de bicicleta. No domingo faz mais 6 quilómetros que no sábado. No total percorre 38 quilómetros. Quantos quilómetros percorre em cada um dos dias?

2) O senhor José comprou três camisas, duas camisolas de lã e uma gravata. Cada camisa custou menos 5 euros que cada camisola de lã e a gravata custou 10 euros. Considere L o preço de uma camisola de lã.

    a) Diga o que representa cada uma das seguintes expressões:

$2L$ ____

$L - 5$ ____

$3(L - 5) + 2L + 10$ ____

    b) Sabendo que o senhor José, no total, gastou 120 euros, determine o preço de cada uma das peças de vestuário.

3) Verifique, em cada alínea, se as expressões apresentadas são ou não equivalentes. Nos casos em que isso não se verifica, corrige de modo a torná-las equivalentes:

    a) $(3+ c) + (8 - 5c) + (2 - c) = 3c + 3c + 1c = 7c$

____

    b) $y - (5 - y) = y - 5 + y = 2y - 5$

____

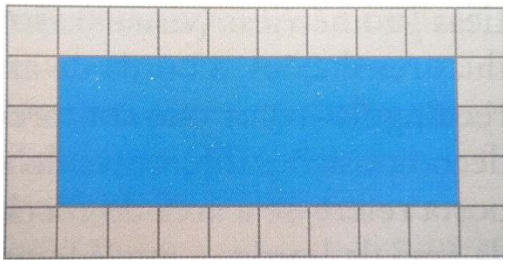
c) $3(2 + a) + 2(3+ a) = 6 + 3a + 6 + 2a = 5a +12$

____

d) $x(x - 3) = x + x - 3 = 2x - 3$

____

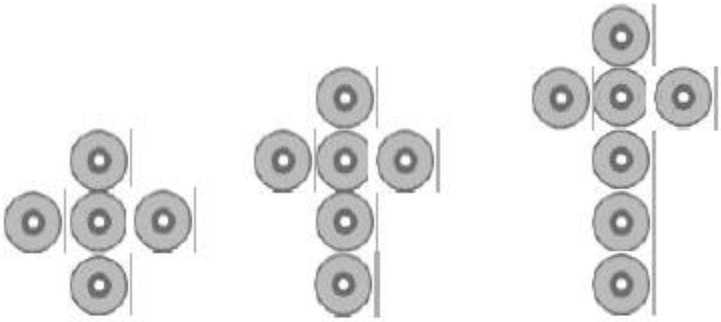
4) Uma piscina retangular deverá ter uma borda de azulejos. A borda terá uma largura de um azulejo em todo o seu perímetro. Quantos azulejos serão precisos para piscinas de vários comprimentos e larguras?



Assinale as fórmulas que podem ser usadas para calcular o número de azulejos (a letra A representa o número de azulejos, c a medida do comprimento da piscina e l a medida da largura da piscina). Explique as suas escolhas.

$A = 2(c + 2) + 2l$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	$A = 4 + 2c + 2l$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________
$A = 2(c + l) + 4$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	$A = (c + 2)(l + 2) - c.l$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________

5) Observe a seguinte sequência:



a) Quantos Cd’s constituem a figura que está na posição 11? Justifica a tua resposta.

b) Qual a posição ocupada pela figura com 27 Cd’s? Explica como chegaste a essa conclusão.

c) Escreva uma expressão que represente o número de Cd’s que constituem uma figura qualquer que seja a sua posição.

A INTERPRETAÇAO DE RELAÇÕES ESPACIAIS POR CRIANÇAS DE 2 E 5 ANOS[1]

Conceição Costa

UIED & Escola Superior de Educação de Coimbra,

ccosta@esec.pt

José Manuel Matos

UIED & Universidade Nova de Lisboa

jmm@fct.unl.pt

Eliane Charneca, Marisa Nascimento

Escola Superior de Educação de Coimbra,

enaile_mm@hotmail.com,

mnascimento@esec.pt

Resumo: Esta comunicação apresenta a continuação de um trabalho anterior (Costa et al., 2010) e pretende compreender: se os quatro modos de pensamento previstos no modelo teórico para a compreensão do pensamento visual espacial (Costa et al., 2010) são adequados para interpretar as respostas de crianças pequenas em situações que envolvem a interpretação de relações espaciais. Para explorar aquelas compreensões desenvolvemos dois estudos, um com crianças de dois anos, e outro com crianças de 5 anos. Em ambos foi adotada uma metodologia de pesquisa interpretativa; a perspetiva da primeira matemática de Clements e Sarama (2009) e a perspetiva sociocultural de aprendizagem de Rogoff (1998). Os dados foram recolhidos através de observações e de vídeos realizados em momentos de aprendizagem, procedendo-se à sua transcrição. Para a análise de dados foi feita a análise de conteúdo.

Os principais resultados mostram que o modelo teórico de pensamento visual-espacial parece conveniente e útil para crianças jovens, fornecendo compreensão específica em relação ao foco "interpretar relações espaciais" e pode apoiar o educador na orquestração das atividades das crianças. A correção do vocabulário espacial da Educadora é importantes e regula como as crianças interpretam o vocabulário espacial.

Palavras-chave: Modelo de pensamento visual-espacial; vocabulário espacial; interpretação de relações espaciais; crianças 0-5 anos.

Introdução

O modelo teórico para o pensamento visual-espacial (Costa et al., 2010) que gera o estudo que apresentamos diferencia quatro modos distintos de pensar: o pensamento visual-espacial

[1] Este texto foi apoiado por fundos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/CED/02861/2016.

resultante da perceção, modo PVP; o pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens, modo PVMM; o pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens, modo PVR; o pensamento visual-espacial que está ligado à transmissão-comunicação e representação, isto é, à exteriorização do pensamento, modo PVE. O quadro 1 apresenta as definições destes quatro modos de pensamento.

Quadro 1 – Modos de pensamento visual-espacial e respetivas definições (Costa et al., 2010)

Modos de pensamento visual-espacial	**Definição de cada modo de pensamento visual-espacial**
Pensamento visual-espacial resultante da perceção (PVP).	Operações intelectuais sobre material percetivo-sensorial e de memória.
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens (PVMM).	Operações intelectuais relacionadas com manipulação e transformação de imagens.
Pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens (PVR).	Operações intelectuais relacionadas com a construção mental de relações entre imagens, a comparação de ideias, conceitos e modelos.
Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE).	Operações intelectuais relacionadas com a representação, a tradução e a comunicação de ideias, conceitos e métodos.

Para o modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção, os processos mentais que lhe vão estar associados são: intuições primárias; construção visual, avaliação e re-apresentação de imagens; reconhecimentos visuais; identificação de objetos, modelos, formação de um gestalt, apreensão global de uma configuração geométrica; abstração perceptual; geração de conceitos; uso de metáforas.

Os processos mentais que vão estar associados ao modo de pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens são: intuições secundárias, unificações, transformações mentais, abstração reflexiva, coordenação, generalização construtiva, estruturação espacial, construção visual.

Consideramos que ao modo de pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens podem ser associados os seguintes processos de pensamento: intuições antecipatórias; descoberta de relações entre imagens, entre propriedades e factos; abstração reflexiva; metacognição.

Finalmente, os processos mentais associados ao modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento são: representações; tradução; descrição da dinâmica mental através da verbalização e gestos; construção de argumentação, de conjeturas; uso de analogias.

Os quatro modos de pensamento visual-espacial parecem relacionar-se. Com o fim de diferenciar a natureza dos modos de pensamento visual-espacial foram considerados dois planos. Num mesmo plano, o plano cognitivo, ficam o modo de pensamento resultante da perceção, o modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens e o modo de pensamento ligado à construção mental de relações entre imagens. Em outro plano, o plano da comunicação, está o modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento, cuja natureza é diferente da dos outros modos, sendo uma espécie de condutor do pensamento visual-espacial, na medida em que é por seu intermédio que podemos conhecer os outros três modos.

Nem todos os processos mentais, acima indicados foram detetados numa investigação empírica que se focou em dois ambientes de ensino para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial no contexto de exploração e compreensão das isometrias com alunos do 4º ano do Ensino Básico e cujas descrições podem ser encontradas em Costa (2005).

Este trabalho pretendeu estudar a adequação daquele modelo teórico (Costa et al., 2010) ao estudo do pensamento visual-espacial com crianças mais pequenas. Colocado de outro modo, pretendemos saber se o modelo fornece compreensão para as respostas de crianças em idade pré-escolar quando colocadas perante atividades que envolvem a interpretação de relações espaciais. Para tal efetuámos dois estudos: o estudo A com crianças de dois anos e o estudo B com crianças de cinco anos.

Enquadramento teórico

O pensamento visual-espacial

As componentes do pensamento matemático, quer ele incida ou não sobre geometria, envolvem por vezes um pensar que é simultaneamente visual e espacial. O pensar é visual porque ocorre um fluxo contínuo de imagens mentais visuais. Mas o pensamento é também espacial pois pode envolver uma estrutura espacial percecionada visualmente que incorpora descrições implícitas dos elementos das imagens e relações espaciais entre esses elementos, isto é, pode fazer emergir as regras dessa estrutura espacial. Este pensamento espacial é baseado no sistema percetual humano comum e em elementos universais presentes nos ambientes humanos, tais como, em primeiro lugar o próprio espaço físico, e depois a gravidade, a permanência dos objetos, etc.

Os dois "pensares", o visual e o espacial, ocorrem muitas vezes em simultâneo. Faz então sentido ressaltar o pensamento cujas criações visuais-espaciais revelam um pensar que combina o visual com o espacial ou seja, onde a informação visual-espacial se interliga e é esse pensar que intervém no estudo da matemática, que denominamos de *pensamento visual-espacial* (Costa, 2005, p. 88).

O termo visual-espacial usualmente não é usado na literatura, sendo antes evidenciados termos como pensamento visual, raciocínio visual, e raciocínio espacial, pensamento espacial. O primeiro, o pensamento visual, aparece muitas vezes a par do termo "visualização" (Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Sénechal, 1991) que se foca na perceção e manipulação de imagens visuais, e tem diferentes conotações consoantes esteja ligado à educação matemática, à investigação científica, ou à psicologia. Os termos pensamento espacial ou raciocínio espacial surgem com frequência ligados a capacidades espaciais (Clausen-May e Smith, 1998; Meissner e Pinkernell, 2000).O pensamento visual-espacial está na base de criações significativas da mente humana, é fulcral para a educação em matemática a todos os níveis, conceitos, operações e processos mentais ou capacidades espaciais envolvidos nesse mesmo pensamento ainda permanecem sob uma certa obscuridade (Costa, 2005, pp. 88-89). A literatura da especialidade, relatórios de pesquisa, questionários e observação de atividades mostraram que o raciocínio visual-espacial influenciou tomadas de decisão (Owens, 2015)

A Geometria e o pensamento espacial nos primeiros anos

A geometria e o pensamento espacial são áreas muito importantes da aprendizagem da matemática em todos os níveis educacionais, incluindo na educação da primeira infância. O pensamento espacial é uma capacidade essencial humana que contribui para a capacidade matemática, sendo muito importante na aprendizagem de muitos tópicos da matemática. Envolve duas grandes capacidades: a *orientação espacial* e a *visualização espacial* (Clements & Sarama, 2009).

A orientação espacial está relacionada com a compreensão de relações entre diferentes posições no espaço, através de dois tipos de sistemas de referência espacial: aquele que é baseado nos nossos próprios corpos (sistema de autorreferência) e aquele que é baseado em outros objetos (sistema de referência externa). As crianças aprendem a perceber perspetivas das outras ao verem objetos e aprendem a coordenar diferentes pontos de vistas. As primeiras palavras espaciais que as crianças aprendem são *dentro, em cima* e *por baixo*, junto com termos de direção vertical como: *em cima* e *em baixo*. Posteriormente, aprendem palavras de proximidade tais como *ao lado* e *entre* e de seguida também aprendem palavras que se referem a estruturas de referência, tais como *em frente de* e *atrás de*. As palavras *esquerda* e *direita* são aprendidas muito mais tarde e são fonte de confusão durante muito tempo, não bem compreendidas até aos 6 - 8 anos de idade (Clements & Sarama, 2009).

As imagens espaciais são representações mentais internas de objetos e parecem ser semelhantes aos objetos do mundo real. As capacidades de visualização espacial são processos envolvidos em gerar e manipular mentalmente imagens a duas ou três dimensões, que incluem movê-las, relacioná-las e combiná-las. Por exemplo, as crianças podem criar a imagem mental de uma forma, manter essa imagem e procurar por esse mesmo objeto numa figura mais complexa (Clements & Sarama, 2009).

> “A ênfase na interpretação espacial da geometria por crianças pequenas não é surpreendente porque a geometria e o pensamento espacial fazem parte do dia a dia das crianças. Enquanto andam, jogam, olham as crianças investigam o ambiente e descobrem o mundo. Ao fazê-lo, elas aprendem a encontrar o seu caminho, a determinar a sua própria localização, a descrever para os outros a sua própria posição ou a posição de um objeto. Também a visualização e aptidões de raciocínio espacial se desenvolvem através de variadíssimas atividades e jogos, como por exemplo *o jogo das escondidas* onde as crianças se tentam esconder num lugar onde não serão visíveis, tentando imaginar ou raciocinar o que a outra criança irá ou não será capaz de ver enquanto se desloca. (Aaten et.al., 2011, citado em Charneca, 2017, p. 55)
>
> “Dominar o vocabulário utilizado nas relações é fundamental para que as crianças consigam descrever receber indicações para se movimentarem ou para levarem os outros a seguir as suas indicações” (Tortola & Pirola, 2012, citada em Charneca, 2017, pp 58).

Metodologia

Os dados apresentados na comunicação são uma síntese do estudo A (publicado em Charneca, 2017) e do estudo B (publicado em Nascimento, 2018), desenvolvidos em teses de mestrado da Escola Superior de Educação de Coimbra. A comunicação pretende fundamentalmente compreender como os quatro modos de pensamento que apoiam o modelo teórico para a compreensão do pensamento visual espacial (Costa et al., 2010) são adequados para crianças pequenas e o que pode apoiar a aprendizagem daquelas crianças na interpretação do que elas veem e pensam sobre relações espaciais, examinando episódios das duas realidades empíricas: **estudo A** e **estudo B** na procura da sua importância na caracterização do pensamento visual-espacial de crianças pequenas.

O estudo A (Charneca, 2017) foi desenvolvido com vinte e duas crianças que pertenciam ao grupo de estágio em creche da investigadora. A metodologia envolveu um processo cíclico de planear, implementar e avaliar três espaços de aprendizagem, tendo em conta as ideias de Bjorklund (2012). O estudo B (Nascimento, 2018) usou uma atividade com “pattern blocks” para explorar o entendimento de crianças de cinco anos de relações visuais e espaciais. Os participantes no estudo foram duas crianças com 5 anos de idade, pertencentes ao grupo de estágio da investigadora em Jardim de Infância A metodologia envolveu um processo cíclico de planear, implementar e avaliar dois momentos de aprendizagem, influenciado pelas ideias de Cheng e Ling (2013). Nesta comunicação os nomes das crianças são substituídos por letras de modo a garantir a confidencialidade.

O modelo e as crianças de 2 anos

Vamos apresentar a análise de 3 episódios do estudo A. Três crianças (dois meninos **A** e **J**; e uma menina, **K**) estão em pé à volta de uma mesa. Uma cesta com fruta (3 maças, 3 laranjas e 3 Kiwis) está colocada em cima dessa mesa. A investigadora (**Inv.**) já tinha pedido a cada criança individualmente que colocasse uma maçã à sua frente.

Episódio 1:

Inv. Agora K põe a maçã à minha frente.

*(**K** apanha a maçã do chão e vai até junto da investigadora que se encontra em pé e evidencia hesitação)*

Inv.: Onde é que é "à minha frente"?

(**K** *encosta a maçã ao seu peito e depois quer colocar a maçã no bolso da investigadora. Entretanto a investigadora abaixa-se até ao nível de **K** e esta encosta a maçã ao peito da investigadora dando-lha depois para a mão.)*

Figura 1 – Sequência de ações da criança K interpretando "à minha frente"

As *intuições primárias* sobre a interpretação da posição espacial de um objeto que não está referenciado relativamente ao seu próprio corpo são manifestadas por K. Depois, K executa uma *inferência intuitiva* ao adaptar a interpretação do vocabulário relativo a um referencial exterior ao seu próprio corpo ao vocabulário análogo que dominava relativamente ao seu corpo. Repare-se também que os objetos de referência que são exteriores à criança e muito familiares, ela reconhece imediatamente a sua função sem prestar atenção à questão que lhe é proposta (o bolso da bata da investigadora) que tem por função *ter dentro alguma* coisa, fazendo com que a criança interprete o que estava a ser pedido como por *dentro de*.

Episódio 2:

Inv. (dirigindo-se ao grupo de crianças). Agora vamos colocar o kiwi ao *nosso lado*, no chão. Põe o Kiwi no chão *ao teu lado*.

*(**A** coloca o kiwi ao seu lado no chão, acocorando-se. **J** e **K** aproximam-se de **A,** com uma certa hesitação para ver o que ele fez e fazem como ele)*

Inv. A: está o kiwi ao teu lado?

A: está.

Inv. Está ao pé de ti?

A: está.

Inv.: **J**, o kiwi está ao pé de ti?

J: Sim.

Inv.: **K**, o kiwi está ao pé de ti?

K: está.

Figura 2 – Momento de imitação das crianças

As crianças **J** e **K** parecem resolver a situação através de *imitação*, atividade mental que ajuda a formular as concepções do mundo que nos rodeia (Lindahl & Samuelsson, 2002). Esta atividade implicou que as crianças **J** e **K** pudessem perceber a locução colocar o kiwi, *ao teu lado*, e transferir a perceção para um plano de ação e conduzir elas próprias uma atividade motora semelhante à ação da outra criança **A**. Contudo, neste episódio, não fica claro se as crianças **J** e **K** após a sua ação de *imitação* tinham percebido de facto a locução *colocar kiwi ao teu lado*, já que a investigadora lhes colocou uma outra questão o *kiwi está ao pé de ti*? Vocabulário que todas as crianças interpretavam muito bem, desviando assim a atenção das crianças do novo vocabulário.

Episódio 3:

Inv.: [J] agora vais pôr a maçã à frente de A.

(**J** *vai até* **A** *e quer entregar-lhe em mão a maçã em frente ao peito de* **A**, *mas* **A** *aponta-lhe para o chão e* **J** *fica confuso.)*

Inv.: Em cima da mesa à frente de **A.**

(J *coloca a maçã em cima da mesa, à frente de* **A**. *Depois agarra a maçã e coloca-a no chão debaixo da mesa. Parece confuso e continua confuso).*

Figura 3 – Sequência das crianças A e J a interpretar "à frente de"

A criança **J** põe a maçã à frente do peito da criança **A** que não concorda e sugere-lhe, apontando, colocar a maçã no chão (parece que a criança **A** não identifica aquele gesto como sendo à sua frente) o que faz com que a criança **J** fique confusa. Ambas as crianças ainda estão a construir a interpretação de *"à frente de*". Agora presenciamos o processo mental de *avaliar uma imagem* e *abstração perceptual* ligada com reconhecimento e interpretação da posição espacial do objeto, PVP.

Em todos estes três episódios detetamos processos envolvidos em pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento, PVE: *gestos* (linguagem corporal, expressões faciais) e *ações*.

O modelo e as crianças de 5 anos

Duas crianças **B** *e* **C** *foram convidadas a construir uma figura usando "pattern blocks "diferente das que já tinham feito" e depois a falar dela à investigadora para esta fazer uma igual. Na sua vez, cada criança estava sentada à mesma mesa da investigadora e separada desta por uma caixa colocada estrategicamente no meio da mesa, de forma que nem a criança nem a investigadora_pudessem ver o que a outra manipulava. Em cima da mesa encontrava-se um balde com "pattern blocks".*

Episódio 4:

Inv.: então já utilizamos estas pecinhas, não já? Hoje vais criar uma figura e depois vais me falar sobre ela (...) cria uma figura diferente das outras que fizeste ontem. Pode ser?

*(**C** acena afirmativamente com a cabeça e inicia a sua construção retirando peças cinzentas e verdes à medida que vai construindo a sua figura, começando pelas peças cinza e para a acabar pede uma peça verde.)*

Figura 4 – Figura construída pela criança **C**

C: já está. É uma flor.

Inv.: então agora vais-me dizer como é que fizeste a flor para eu fazer uma igual, pode ser? *(C acena afirmativamente com a cabeça.)* Então, podes começar.

C: fiz com cinzentas e verdes.

Inv.: quantas verdes precisamos?

C: (*conta as peças, tocando em cada uma ao contar*) doze…. e cinzentas catorze.

Inv.: então podes começar…vamos começar com as cinzentas ou com as verdes?

C: com as cinzentas.

Inv. Diz me lá como é que vou pôr as minhas peças?

C: Umas ao lado das outras.

Inv. : todas? (*a criança acena afirmativamente com a cabeça*), …e que parte é que fica a unir? Elas tocam-se entre elas? Elas ficam a tocar?

C: ficam *(a criança acena afirmativamente com a cabeça sem olhar para a sua construção)*

Inv.: com que parte? Com uma qualquer? *(a criança acena afirmativamente com a cabeça)* é? E como é que elas têm que ficar?.... é para ficarem em fila não é? (*a criança acena afirmativamente com a cabeça*).

C: eu fiz uma

Inv. Elas tocam-se só num sítio?

C: Sim. (*a* **Inv.** *coloca as peças…enquanto isso a criança brinca com duas peças fingindo que estas dançam, construindo outra figura*…).

Inv. Então e agora?

C: as verdes ficam no buraco *(tocando nas suas peças verde, sendo o buraco a reentrância entre as peças cinzentas).*

Inv.: no buraco?… Tens de me dizer, só. Como é que as verdes se tocam? Explica-me. Podes fazer gestos, com as mãos e explicas-me como é que elas se tocam.

C: elas ficam no lado em que as cinzentas não ficaram juntas.

Inv.: é só num pontinho? É num lado todo? Como é?

C: é num lado todo.

Inv.: hum… deve ser isto. Então elas não se tocam sempre do mesmo lado, pois não? Uma vez em baixo outra em cima

C: Não

Inv.: posso tirar [a caixa]? *(a criança acena afirmativamente com a cabeça e a investigadora retira a caixa e comparam as construções.)*

Figura 5 – Figuras construídas, uma pela criança **C** e outra pela investigadora

A criança **C** escolhe peças, usando os ângulos bem como os comprimentos dos lados das peças, vira e roda estas para a construção de uma figura, *construção visual* (fazer uma estrutura visual) evidenciando um processo criativo complexo recorrendo só a peças cinzentas e verdes. Também a criança *estabelece inter-relações entre as componentes dessa estrutura espacial*, o que configura o modo PVM. A criança usa a sua imagética mental para construir a sua figura, e o seu pensamento visual-espacial é conhecido quando responde as questões colocadas pela investigadora. A experiência de observação da sua figura envolve *perceção visual* e *interpretação de relações espaciais* (modo PVP), sendo este processo principiante e feito através vocabulário espacial incipiente e informal ("*umas ao lado das outras*", "*no buraco*", "*num lado todo*").

Episódio 5:

(É colocada a mesma tarefa à criança **B**.**)**

Inv.: tu é que vais criar uma figura como tu quiseres, usando as peças que tu quiseres e depois vais ter de me dizer para eu fazer uma igual… olha temos aqui isto ao meio que é para eu não ver nada e tu não veres nada do que eu estou a fazer.

(**B** *apenas retira peças à medida que vai fazendo a sua construção usando primeiro peças cinzentas e depois verdes.*)

B: é uma árvore de Natal com uma estrela.

Inv.: estás pronta para me dizer que peças é que tu aí tens? *(B acena afirmativamente com a cabeça.)*

B: cinzentas e verdes.

Inv.: então e quantas peças cinzentas é que eu preciso?

B: *(conta as peças cinzentas, tocando em cada uma)* dez.

Inv.: Pronto, dez. Então e mais? Precisamos de mais peças.

B: verdes. ..sete. *(conta mentalmente as peças verdes.)* … e mais nada.

Inv.: mais nada…são só cinzentas e verdes…e como é que vou pôr as peças?...

B: as verdes são triângulos. Tens de fazer um triângulo com as verdes.

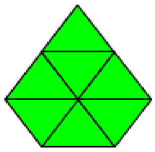


Figura 6 – Organização das peças verdes feita por **B**

Inv.: então e diz-me como é que eu faço um triângulo. Como é que eu ponho? Conta-me.

B: A primeira peça direita *(olhando para as peças).* E a outra peça …e a outra peça virada para baixo. Depois as outras duas peças ao lado, direitas, e depois duas peças viradas para baixo, em baixo dessas.

Inv.: em baixo destas… em baixo desta é aqui. Ok. E a outra? *(abanando no ar a peça verde que lhe sobrou).*

B: a outra fica no meio dessas duas *(apontando para as suas peças).*

Inv.: Mas do lado de cima ou do lado de baixo?

B: virada para cima.

Inv.: mas isto não me parece um triângulo. Disseste que isto dava um triângulo, não era?

B: dá... é um triângulo grande.

Inv.: então vamos. explica-me outra vez.

B: tens que por as cinzentas ao lado das outras.

Inv.: então não são com as verdes?

B: Sim (*Desfaz a figura composta de peças verdes e vai reconstruindo-a à medida que explica o que faz.)* As verdes são: a primeira para cima, direita; a segunda para baixo. para baixo; depois pões duas ao lado da de barriga para baixo, de barriga para cima, estas ao lado.

Inv.: Duas de barriga para cima.

B: depois pões uma de barriga para baixo, por baixo da que está aí de barriga para cima. Uma de barriga para cima debaixo da que está aí de barriga para baixo.

Inv.: Qual delas, Ah esta de barriga para cima debaixo

B: depois, as que ficaram com buraquinhos usas para tapar as que sobraram. Fica quase um triângulo. Parece mais uma jarra.

Inv.: sobra uma. Ai! Este triângulo está complicado.

B: eu já fiz. *(Começa a colocar as peças cinzentas na construção.)*

Inv.: isto dá um triângulo?

B: parece um triângulo e depois um círculo

Inv.: pronto princesa**.** Então, agora o que é que eu agora faço com as cinzentas?

B: Fazes uma flor, fazes as pétalas,..fazes uma roda.

Inv.: uma roda. Então como é que eu ponho as peças?

B: Umas ao lado das outras…ficam todas juntas mas na parte de cima não ficam. Ficam separadas na parte de cima….em baixo das cinzentas ficam juntinhas e acima das cinzentas ficam separadas.

Inv.: Juntas e aqui separadas. Pronto, ok. Então e agora as verdes onde é que eu as coloco?

B: tens que pôr por baixo da parte fininha do triângulo, por cima, das verdes, para por ao lado das cinzentas.

Inv.: Ficam por baixo das cinzentas?

B: Não. O triângulo tens de fazer: uma, nos biquinhos que ficaram ao lado do triângulo, ao lado, pões uma cinzenta mas depois continuas a pôr por cima do triangulo, as…ai não. Depois pões uma por cima… e depois pões quando chegares ao triângulo, à pontinha do triângulo, continuas a pôr… Já acabei *(a criança acaba de reconstruir a sua figura).*

Inv.: então vamos ver? Que é para ver se eu percebi. Pode ser? (*retira a caixa e mostra o que construiu*).

Figura 7 – Figuras construídas, uma pela criança **B** e outra pela investigadora

A criança B usa a sua imagética visual dinâmica (capacidade de mover ou transformar uma imagem visual concreta) para a *construção visual* da sua figura, estrutura visual, evidenciando uma certa criatividade, modo PVM. A *perceção visual* acontece com o manejar pela criança dos “pattern blocks”. A criança atua e pensa estando presente *abstração percetual* relacionada com *reconhecimento visual* de estruturas familiares, modo PVP. Também são *identificadas* pela criança *componentes espaciais* da sua estrutura espacial *e estabelecidas inter-relações* entre elas. Ainda a capacidade de *coordenaçã*o processo no aspeto de envolver o codificar pela criança das posições espaciais de objetos (última fala da criança **B**). Foram sendo tentadas *intuições antecipatórias,* inspiradas pelo uso dos “pattern blocks.”

Em todos estes dois episódios detetamos processos envolvidos em pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (modo PVE): construções; ações criativas, uma mistura de fontes percetuais vindas do manejar os “pattern blocks”; gestos e falas com vocabulário espacial incipiente, já identificados no modelo (Costa, 2005).

Conclusões

As conclusões desta comunicação parecem apontar para:

- Os processos mentais de pensamento visual-espacial vivenciadas pelas crianças no estudo A e no estudo B fazem parte dos modos de pensamento identificados no modelo teórico (Costa et al., 2010).

- Foi identificada um outro processo, a *imitação*, que parece poder fazer parte do modo PVP do modelo teórico, mas é uma hipótese a investigar.

- O modelo teórico de pensamento visual-espacial que tinha sido estudado com alunos do 4º ano parece conveniente e útil para crianças mais jovens, pois parece fornecer compreensão específica em relação ao foco "interpretar relações espaciais" e poder apoiar a educadora na sua orquestração das atividades das crianças.

- A linguagem da educadora sobre vocabulário espacial parece mostrar ser pertinente na regulação de como as crianças veem e interpretam o vocabulário espacial.

Referências

Bardin, L. (2008). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Bjorklund, C. (2012). What counts when working with Mathematics in a toddler group? *Journal of Early Years Education, 18: 1,* 71-84.

Charneca, E. (2017). *Era uma vez…. e a primeira matemática.* Relatório Final de Mestrado (não publicado), Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra.

Cheng, E. C., & Ling, L. M. (2013). *The Approach of Learning Study: Its Origin and Implications.* Obtido em 18 de Outubro de 2017, de OECD iLibrary: http://www.oecd-ilibrary.org/content/workingpaper/5k3wjp0s959p-en

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York and London: Routledge.

Costa, C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. (Tese de doutoramento). Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Costa, C., Matos, J. M. & Silva, J. 2010). A theoretical model for visual-spatial thinking. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavengne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.2246-2255). Lyon: Institute National de Recherche Pédagogique.

Lindahl, M. & Samuelsson, I. (2002). Imitation and Variation: reflections on toddlers´strategies for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 46 (1),* 1-2.

Nacimento, M. (2018). *Manipulativos no Pré-Escolar.* Relatório Final de Mestrado (não publicado), Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra.

Owens, K. (2015). A cultural perspective on visuospatial reasoning: an overview of 40 years of research. Em Beswick, K., Muir, T.,& Wells, J. (Eds). *Proceedings of 39th PME conference,* Vol. 1, pp.193. Hobart, Australia; PME.

Rogoff, B. (1998). Cognition as a collaborative process. In Damoon, W. (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception and language*, 2, 679-744. US: Jonh Wiley & Sons, Inc.

ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL NOS PRIMEIROS ANOS

Joana Conceição
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
conceicaoj@campus.ul.pt

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: O presente artigo pretende aprofundar o conhecimento acerca do processo de estruturação espacial de alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Focando o trabalho de duas alunas do 1.º ano de escolaridade, o artigo compara algumas das construções bidimensionais que realizaram com quatro triângulos congruentes e os desenhos que fizeram dessas construções. Os dados foram recolhidos durante um estudo piloto realizado durante a fase de preparação de uma experiência de ensino respeitante à primeira fase da investigação baseada em design.
Os resultados mostram que o nível de desempenho das alunas foi diferente ao utilizar os dois tipos de representação. Os desenhos, junto com os materiais manipuláveis, parecem oferecer o potencial de levarem as alunas a refletir sobre a estrutura das construções, mas a interação com o professor é importante para conduzir esse processo de reflexão.
A natureza aberta das tarefas e a valorização de diferentes tipos de representação foram aspetos que contribuíram para o acesso às conceções das alunas como ponto de partida para a construção do conhecimento.

Palavras-chave: Estruturação espacial; raciocínio espacial; composição/decomposição; desenhos.

Introdução

Nos primeiros anos, o ensino da Geometria deve privilegiar a exploração de uma diversidade alargada de figuras, tendo em conta as suas estruturas, características e relações (NCTM, 2000). Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) sugerem o trabalho com construções e operações com figuras como sendo de particular importância, nos primeiros anos. Estes dois aspetos incidem em particular na estrutura das figuras e nas relações que se estabelecem entre partes dessas figuras, assumindo, assim, uma forte relação com a estruturação espacial.

A estruturação espacial está relacionada com a construção mental de estruturas que permitam representar um objeto ou conjunto de objetos (Battista, 2008). Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998) sugerem que a estruturação espacial de figuras bidimensionais e tridimensionais constitui o *input* para o raciocínio espacial e para o raciocínio geométrico, uma vez que permite criar relações envolvidas na organização e coordenação de sistemas.

Para além da importância que a estruturação espacial tem, no âmbito da Geometria, vários autores têm evidenciado a relação da estruturação espacial com outros tópicos da Matemática.

Mamolo et al. (2015) valorizam particularmente as abordagens geométricas e visuais como forma de acesso a conceitos matemáticos mais avançados.

Apesar da importância que a Geometria tem no ensino da Matemática, pouco se tem investido quer no ensino quer na investigação, nesta área, em Portugal (Serrazina, 2018). No que respeita à estruturação espacial, a maior parte dos trabalhos publicados, com maior aprofundamento foram desenvolvidos por Battista e pela sua equipa. Em Portugal, não foram encontrados até à data, trabalhos de investigação que incidissem na estruturação espacial.

O estudo aqui apresentado integra-se numa investigação mais ampla, no âmbito de uma tese de doutoramento, que tem como objetivo compreender como é que os alunos do 1.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico desenvolvem a estruturação espacial de figuras bidimensionais e tridimensionais a partir de tarefas que envolvam construções e operações com figuras, durante uma experiência de ensino. Das questões de investigação formuladas a partir deste objetivo, focamo-nos em particular, neste artigo, na seguinte questão: Que estratégias utilizam os alunos para estruturar espacialmente figuras bidimensionais em tarefas que envolvam as construções e as operações com figuras?

Para tentar encontrar elementos que permitam responder a esta pergunta, focamos a nossa análise na comparação de dois tipos de representação, com materiais manipuláveis (triângulos de papel) e com desenhos, de figuras bidimensionais, construídas por duas alunas do 1.º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico.

Enquadramento teórico

Estruturação espacial

Um dos objetivos do ensino da Geometria é o desenvolvimento de sistemas conceptuais para raciocinar sobre formas e sobre o espaço (Battista, 2008), sendo para isso necessário que os alunos desenvolvam uma compreensão aprofundada das formas, das estruturas, da posição e das transformações geométricas (NCTM, 2000).

Nos primeiros anos, as experiências de aprendizagem em Geometria relacionam-se com o desenvolvimento do raciocínio espacial, através de um aprofundamento progressivo da compreensão e da estruturação do espaço. O raciocínio espacial pode ser definido como a “capacidade para ‘ver’, inspecionar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações” (Battista, 2007, p. 843). Pela sua natureza visual, o raciocínio espacial está, de acordo com Battista (2007), subjacente à maior parte do raciocínio geométrico.

Battista (2008) apresenta um modelo teórico para o desenvolvimento progressivo do raciocínio geométrico baseado em níveis de estruturação: estruturação espacial, estruturação geométrica, estruturação logica/axiomática. A estruturação espacial consiste no estabelecimento de relações espaciais entre componentes de uma determinada figura. A estruturação geométrica consiste no “uso de conceitos geométricos formais para representar ou analisar” (Battista, 2012, p. 3) as relações espaciais construídas a partir da estruturação espacial. A estruturação logica/axiomática utiliza e organiza os conceitos geométricos e as relações geométricas em sistemas (Battista, 2012). Ao associar o raciocínio espacial à formação de imagens mentais que representem objetos e que permitam raciocinar sobre as relações espaciais presentes nesses objetos, está a estabelecer-se uma relação com a estruturação espacial. A progressão para níveis de sofisticação mais elevados requer, inicialmente, experiências de aprendizagem concretas que permitam ir construindo imagens mentais que representem relações espaciais.

Como refere Battista (2012), a estruturação espacial “é o processo principal no pensamento geométrico” (p. 3), porque o seu desenvolvimento permite estabelecer alicerces importantes relacionados com o raciocínio espacial. A estruturação espacial implica a decomposição de um objeto nas suas partes principais e no estabelecimento de relações entre essas partes. O processo de estruturação espacial está relacionado, por isso, com a identificação de componentes espaciais, a combinação de componentes em compostos espaciais e no estabelecimento de inter-relações entre componentes e compostos (Battista, 2012). A compreensão das relações espaciais, que se vai aprofundando através da estruturação espacial, permite aos alunos raciocinar num nível mais elevado.

A estruturação espacial pode ser local o que se verifica quando os alunos começam a discriminar componentes e a estabelecer relações entre eles, mas ainda não há uma relação entre componentes e o todo. Quando já são capazes de estabelecer relações entre os componentes e entre os compostos e o todo utilizam então uma estruturação global.

Battista e Clements (1996) consideram duas operações cognitivas envolvidas no processo de estruturação espacial. A primeira, a coordenação, permite estabelecer relações entre diferentes vistas ortogonais. A segunda, a integração, permite estabelecer uma correspondência entre um modelo mental prévio e a estrutura de um modelo físico (objeto). A capacidade de integração, utilizando modelos mentais já existentes, parece estar ligada à antecipação, permitindo a mobilização desses modelos mentais para estruturar uma figura. A sua ausência implica a construção de novos modelos mentais. Esta relação entre modelos mentais e modelos físicos implica também a coordenação de diferentes partes que podem estruturar esse objeto.

Para além da proposta referente ao desenvolvimento do raciocínio geométrico em níveis de estruturação (Battista, 2008), Battista (2007; 2012) propõe uma reformulação dos níveis de van Hiele. Assim, no âmbito da sua proposta, dentro do primeiro nível, visual holístico, os alunos percecionam as figuras geométricas globalmente. No nível 2, da análise dos componentes, os alunos começam a identificar partes das figuras e a estabelecer algumas relações entre as diferentes partes. No nível 3, da inferência de relações baseada em propriedades, os alunos são capazes de interrelacionar as propriedades das figuras geométricas e fazer inferências. Finalmente, o nível 4, o nível da dedução formal, não apresenta subníveis. Os níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico por estruturação e a proposta resultante da reformulação dos níveis de van Hiele por Battista (2007; 2012) parecem apresentar aspetos complementares, na medida em inicialmente os alunos percecionam as figuras como um todo antes de discriminarem componentes, mas este aspeto não é descrito por Battista (2008). Clements, Swaminathan, Hannibal e Sarama (1999) referem a dificuldade que os alunos têm em reconhecer exemplos não-prototípicos de figuras que admitem uma diversidade alargada de exemplos, como o triângulo. O facto de os alunos não atenderem aos atributos das figuras, mas ao seu aspeto global pode condicionar a compreensão das relações entre as suas propriedades e a sua classificação.

Nos primeiros anos, as experiências de aprendizagem devem contemplar a possibilidade de os alunos trabalharem sobre a estrutura dos objetos. Nesse sentido, os aspetos das construções e das operações com figuras enunciados por van den Heuvel-Panhuizen and Buys (2005) constituem-se como aspetos relevantes para desenvolver a estruturação espacial, porque proporcionam condições para que os alunos experienciem diferentes propriedades da estrutura dos objetos, levando-os a estabelecer relações entre essas propriedades.

O trabalho com construções pode ser relacionado com a composição e decomposição de figuras enunciado por Clements e Sarama (2014). Estes investigadores apresentaram trajetórias de aprendizagem para a composição e decomposição de figuras bidimensionais e tridimensionais onde a progressão dos alunos está relacionada com a capacidade de estabelecer relações entre componentes de figuras e antecipar essas relações, tal como referido relativamente à estruturação espacial. Para além disso, a capacidade de antecipação dos alunos na conceção de soluções e na utilização de determinadas peças ou combinação de peças sugere uma ligação à estruturação local, se conseguem antecipar relações entre componentes, ou à estruturação global, se conseguem antecipar relações entre compostos e o todo.

As operações com figuras incidem sobretudo em transformações geométricas que permitem estruturar e restruturar figuras, sendo por isso relevantes na estruturação espacial, nomeadamente ao contribuírem para o estabelecimento de relações dinâmicas entre figuras ou entre partes de figuras. De acordo com Clements e Sarama (2014) as crianças são capazes de utilizar isometrias, como translações, reflexões e rotações, desde os cinco anos, ainda que inicialmente apenas ao nível da manipulação de materiais.

Tanto nas construções como nas operações com figuras estão subjacentes capacidades de visualização espacial que contribuem para o processo de estruturação espacial, como a discriminação de componentes ou o estabelecimento de relações espaciais. As capacidades de visualização permitem também articular a manipulação física de objetos com a formação de imagens mentais que possibilitam a manipulação mental das figuras.

A aula de Geometria

As experiências de aprendizagem, nos primeiros anos, devem contemplar explorações, investigações e discussões na sala de aula sobre as figuras e estruturas geométricas, nomeadamente através da observação e da descrição de figuras variadas com vista a descobrir as suas propriedades e relações (NCTM, 2000). Para isso, as tarefas devem levar os alunos a percecionar e estabelecer relações entre propriedades que permitam desenvolver argumentos geométricos e usar esses argumentos para raciocinar sobre os objetos geométricos.

A par de tarefas abertas, investigativas ou exploratórias, um ambiente de sala de aula em que as discussões matemáticas são valorizadas é mais propício à construção de significados partilhados (Sfard, 2008). A comunicação matemática pode ser concretizada através de diversos meios: da linguagem falada ou escrita, de gestos, de objetos, de símbolos ou desenhos. Estes meios fazem parte de sistemas que podem ser combinados e que permitem ou procuram transmitir mensagens. Thom & McGarvey (2015) referem que os desenhos podem ter uma dupla função, por um lado como forma de acesso aos processos de visualização dos alunos e, por outro lado, como uma ferramenta importante para a aprendizagem, na medida em que a reflexão dos alunos sobre o próprio processo de desenhar evidencia relações espaciais, constituindo um modo de pensar e, por isso, um meio para a aprendizagem.

Os materiais manipuláveis desempenham, nos primeiros anos, um papel importante pois permitem mediar o processo de aprendizagem (construção de representações mentais a partir de representações físicas) através da sua manipulação e da reflexão que fazem acerca dessa manipulação (von Glasersfeld, 1991). Para isso, importa que o professor crie situações que façam emergir essa reflexão, nomeadamente através do questionamento aos alunos e da condução de discussões, na sala de aula. No entanto, é também importante que os materiais constituam representações fiáveis dos conceitos que se pretende que os alunos aprendam.

Metodologia

Os dados apresentados neste artigo foram recolhidos durante um estudo piloto realizado durante a fase de preparação da experiência de ensino que constitui a primeira fase da investigação baseada em design (Cobb & Gravemeijer, 2008) visando produzir teorias locais de ensino. Este estudo preliminar tinha como propósito testar a adequação de algumas tarefas e sequências de tarefas, o uso de alguns materiais manipuláveis e ainda recolher alguma informação inicial sobre as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas.

Este estudo foi desenvolvido numa turma do 1º Ciclo com alunos de diferentes anos de escolaridade habituados a trabalhar de forma colaborativa. A investigadora, primeira autora do artigo, a par da professora da turma, teve também um papel participante durante as aulas, questionando os alunos para os levar a explicitar formas de raciocínio ou para levá-los a refletir sobre a sua atividade. A recolha e a análise dos dados incidiu: nos registos fotográficos de construções de duas alunas do 1.º ano, Isabel e Marisa (nomes fictícios), com triângulos de papel; nos desenhos das construções; e em notas de campo escritas pela investigadora, durante ou após as aulas, decorrentes da observação das alunas. Não houve gravação áudio e vídeo por não termos obtido as respetivas autorizações.

Tendo sido implementadas 11 tarefas, para este artigo, foi escolhida a segunda tarefa: "Cortar o quadrado" (Dana, 1981). Nesta tarefa, os alunos tinham de cortar um quadrado de papel pelas suas diagonais e obter quatro triângulos congruentes que usaram para construir o maior número de figuras diferentes, desenhando as suas descobertas na folha da tarefa. Ao compor diferentes figuras com os triângulos, era esperado que os alunos fossem estabelecendo algumas relações entre as partes e entre elas e a figura no seu todo. O registo das descobertas tinha como objetivo servir de suporte aos alunos durante as discussões coletivas, permitindo-lhes comparar as suas descobertas com as dos colegas. No entanto, o desenho das construções levantou algumas questões acerca do processo de estruturação espacial dos alunos e, por isso, passaram a constituir também um objeto de análise.

Para a análise de dados, foram tidas em conta como categorias analíticas a estruturação local e a estruturação global. No que se refere à estruturação local, foram consideradas as seguintes subcategorias: posição e orientação espacial dos componentes; e tipo de relação estabelecida.

Resultados

Apresentamos agora dois exemplos de construções e respetivos desenhos das duas alunas, Isabel e Marisa, para a tarefa "Cortar o quadrado". Estes dois exemplos apresentam desempenhos diferentes que nos interessam por representarem diferentes formas de resolver a tarefa, nomeadamente quanto ao nível de abstração.

Na primeira situação, Isabel começou por compor um retângulo usando os quatro triângulos, tal como é visível na Figura 1.

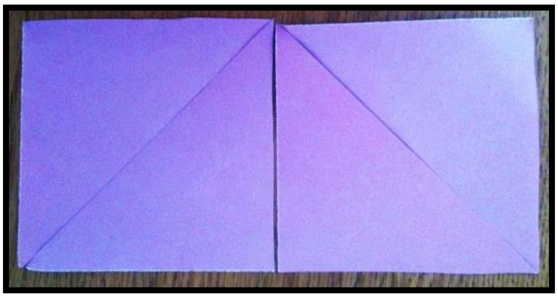


Figura 1 – Retângulo composto usando triângulos de papel

Ao desenhar a sua construção (Figura 2), no papel, a aluna começou por tentar desenhar os quatro triângulos que compõem o retângulo (registo apagado), estabelecendo uma relação entre os triângulos desenhando-os dois a dois. No entanto, ao verificar que esse registo não era semelhante à construção com peças, sentiu necessidade de apagar. O desenho parece proporcionar condições para levar a aluna a refletir sobre a correspondência de representações diferentes do mesmo objeto, sendo que, para isso, tem de estabelecer relações entre partes correspondentes das duas representações. O facto de se verificar que a aluna apagou a sua primeira tentativa pode evidenciar esse processo de reflexão.

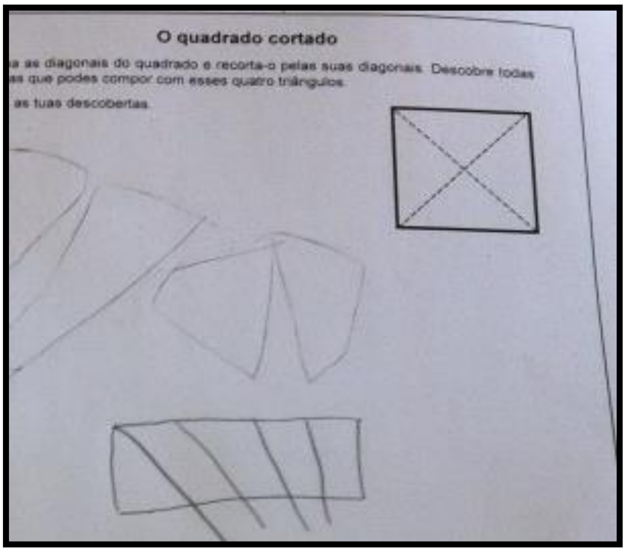


Figura 2 – Desenho de Isabel para representar a construção do retângulo

Reconhecendo depois a figura do retângulo com a ajuda da investigadora, desenhou então apenas o retângulo, parecendo-lhe que dessa forma estaria a representar a sua construção. No entanto, este registo inicial não correspondia à construção dado que não estava discriminada a forma como os triângulos compunham o retângulo. Por isso, a investigadora pediu à aluna que mostrasse, no seu desenho, como tinha posicionado os triângulos. A aluna começou por desenhar o triângulo mais à esquerda, hesitou, e depois desenhou mais três linhas oblíquas. Para a aluna, estas quatro linhas poderão corresponder aos quatro triângulos que compõem o retângulo, dividindo, no entanto, o retângulo em cinco partes, um triângulo e quatro quadriláteros, sem, contudo, que Isabel se tenha apercebido disso. Uma outra característica interessante do registo apresentado na Figura 2 é que a única representação próxima de triângulo foi desenhada numa posição invertida quando em relação com a construção com os triângulos de papel. Embora a forma como o triângulo está representado na construção não corresponda à forma como mais frequentemente os triângulos são apresentados, a forma como está representado no desenho parece muito mais próxima das representações prototípicas (Clements et al., 1999). Ou seja, ao representar o triângulo desta forma a aluna poderá estar a mobilizar uma forma de representação do triângulo mais prototípica, tornando-se, por isso, mais fácil de registar por ser mais familiar para si.

Isabel parece, por um lado, reconhecer a existência dos diferentes componentes e, por outro lado, reconhecer o retângulo como figura global. No entanto, evidencia alguma dificuldade em tornar explícita a relação entre os quatro componentes e o todo quando desenha a figura. Assim, a partir dos quatro triângulos, Isabel não consegue desenhar o retângulo, tal como, tendo como referência o desenho do retângulo, não consegue organizar as peças de forma a corresponder à construção com os triângulos de papel. Desta forma parece que, para a aluna, a relação entre o todo e as partes ainda não é muito clara. Este desempenho está associado ao primeiro nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico de Battista (2007).

A falta de consistência entre a construção que a aluna faz com os triângulos de papel e a forma como desenha essa construção parece assim evidenciar que o facto de ter construído o retângulo, não significa que a figura tivesse sido construída por antecipação, ou seja, que a aluna tivesse já um modelo mental de como iria organizar as peças para formar o retângulo.

Tendo em conta que a estrutura da figura, relativamente à posição dos triângulos e às relações que podem ser estabelecidas entre estes componentes, ainda não é evidente no desenho, é possível que a aluna tenha chegado à construção do retângulo utilizando como estratégia a tentativa e erro para a colocação das peças. Desta forma, o desenho da construção proporcionou um conjunto de informação acerca da forma como a aluna estrutura as figuras que não era possível obter apenas através da construção.

A imagem que se apresenta de seguida, na Figura 3, mostra uma construção diferente da mesma aluna, na mesma tarefa: o gato.

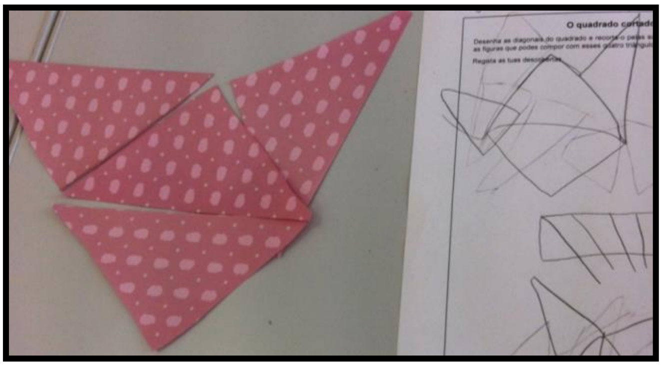


Figura 3 – Figura construída usando triângulos de papel e respetivo desenho

Na Figura 3, podemos ver que os dois triângulos centrais representados no desenho correspondem aos mesmos triângulos na construção à esquerda. Neste caso, tanto a orientação como a posição dos triângulos foram tidas em conta pela aluna, assim como a correspondência entre os lados congruentes dos triângulos. A posição prototípica (Clements et al., 1999) do triângulo de cima pode ter facilitado o seu reconhecimento e o seu registo desenhado. Apesar do triângulo de baixo não estar numa posição prototípica, o facto de ter como referência o triângulo de cima e de partilharem o lado mais comprido, pode ter contribuído para o estabelecimento de relações entre estes dois componentes que facilitem a compreensão da figura.

Os triângulos da esquerda e da direita parecem ter oferecido um grau de desafio maior para o respetivo desenho. Como podemos ver, na Figura 3, o triângulo da direita está numa posição claramente não-prototípica, o que pode tornar a figura de difícil reconhecimento para os alunos, se não estiverem a considerar as propriedades das figuras. No entanto, no caso particular desta aluna, ela reconheceu a figura e a sua posição e orientação, não atendendo no entanto à congruência dos lados, desenhando assim um triângulo mais pequeno.

O caso do desenho do triângulo da esquerda parece ser paradigmático. Na construção com os triângulos de papel, este triângulo apresenta a mesma orientação que o triângulo central de baixo, mas a aluna não conseguiu desenhá-lo como fizera com o de baixo, embora tivesse considerado algumas das suas propriedades. A aluna parece ter tido em conta a orientação da figura, o que é visível pelo vértice apontado para baixo. Este vértice parece representar também o vértice do ângulo reto correspondente ao da construção. No entanto, não foram considerados aspetos importantes como a medida dos lados e a congruência entre os quatro triângulos e entre lados dos triângulos.

O significado que os alunos atribuem às suas construções também aqui merece ser tido em conta. Para a aluna, esta construção parece representar um gato e por isso, ela talvez estivesse mais focada em fazer com que o desenho também parecesse um gato, desenhando assim as “orelhas” numa posição oblíqua sem, aparentemente, ter reparado que a "orelha" da esquerda poderia ser obtida pela translação do triângulo central de baixo. Ao mesmo tempo, outro aspeto que pode ter dificultado este desenho está relacionado com o facto de o lado partilhado entre o triângulo à esquerda e o triângulo central de cima não ser o mais comprido e não estar numa posição vertical ou horizontal. A falta deste tipo de referências, na construção, pode ter tornado o desenho mais desafiante para a aluna.

No entanto, há que considerar que o desempenho da aluna, nesta segunda construção, evidencia um nível de raciocínio mais elevado quando comparado com o primeiro exemplo, já que, neste caso, apesar de a aluna também considerar a figura no seu todo, já teve em consideração o reconhecimento de alguns componentes e o estabelecimento de relações entre esses componentes. Desta forma, a aluna evidencia uma estruturação local, onde consegue relacionar componentes da figura, mas ainda de forma pouco consistente e, por isso, ainda não consegue estabelecer relações entre os componentes da figura e o todo.

Na figura 4, são apresentadas duas imagens que correspondem aos processos de construir e de desenhar utilizados por Marisa.

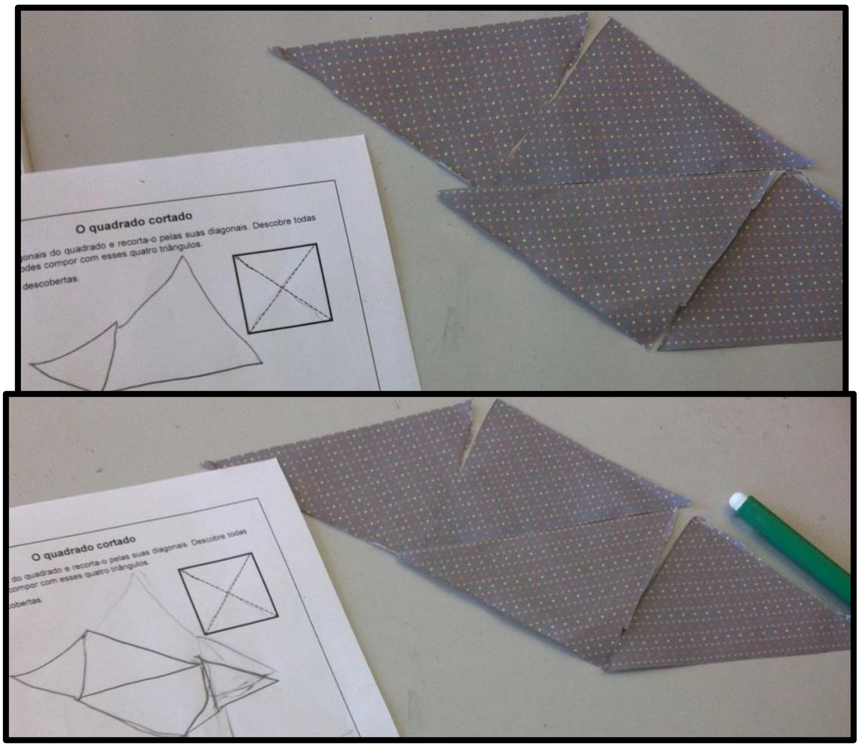


Figura 4 – Construção, tentativa de registo e desenho final do paralelogramo, por Marisa

A primeira imagem apresenta uma primeira tentativa de Marisa de desenhar a sua construção. Parece ter começado pelo triângulo mais à esquerda, seguindo depois para o triângulo central de cima, acabando por desenhar um quadrilátero, provavelmente na tentativa de fazer corresponder os dois lados das duas figuras. A investigadora interveio pedindo à aluna que observasse a posição do triângulo que estava a desenhar com o que já tinha desenhado, focando-se, por exemplo, nos pontos onde começavam ou acabavam os lados do triângulo. Tendo percebido que o desenho não correspondia à construção, a aluna apagou e refez o desenho, conseguindo depois desenhar uma representação que correspondesse à construção.

Embora a construção tivesse levantado alguma dificuldade à aluna, o processo de reflexão emergente da comparação entre a construção e o desenho permitiu-lhe estabelecer relações espaciais adequadas, nomeadamente entre os triângulos do meio que compõem uma figura conhecida, o quadrado, embora com uma orientação diferente. A localização dos dois triângulos laterais parece respeitar quer a localização das peças quer a congruência dos lados, evidenciando assim que esta aluna conseguiu ter em conta aspetos relativos às propriedades das figuras que fazem parte da composição.

A Figura 5 mostra uma outra composição, um triângulo, e o respetivo registo de Marisa.

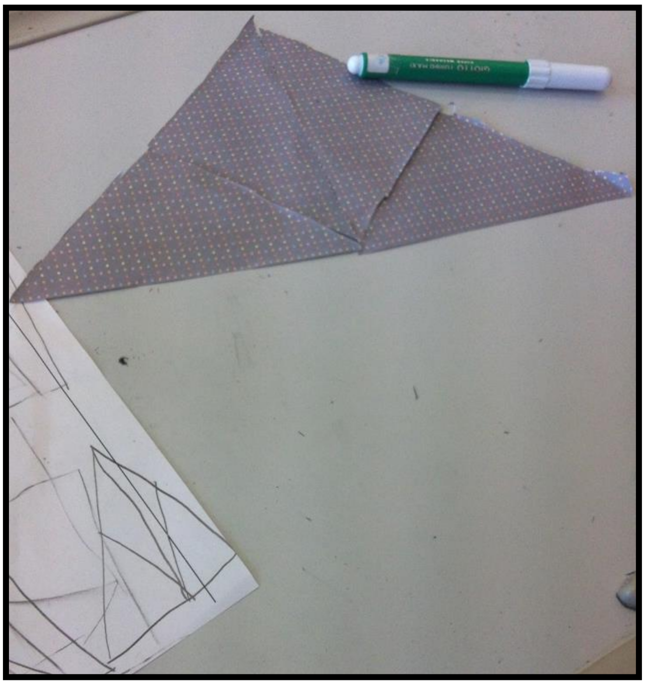


Figura 5 – Construção do triângulo e respetivo desenho, por Marisa

Embora o desenho não seja uma representação rigorosa, o registo aqui apresentado mostra o estabelecimento de relações adequadas entre as diferentes partes que compõem o triângulo. Tanto a posição como a orientação dos triângulos foram respeitadas. A correspondência dos lados congruentes foi tida em conta. A parte central parece ser a mais fácil de compor com as peças, mas o seu desenho apresenta o desafio da posição oblíqua, não-prototípica, dos ângulos retos, sendo que Marisa desenhou ângulos obtusos, parecendo resultar mais num losango do que num quadrado.

Apesar de Marisa mostrar conseguir estabelecer relações espaciais concordantes entre a construção com os triângulos de papel e os seus desenhos, não é possível afirmar que se trata de uma estruturação global já que não é possível, com os dados recolhidos, confirmar se a figura foi construída por antecipação, tendo já um modelo mental que guiasse a construção ou se, por outro lado, a aluna foi seguindo uma estratégia de tentativa e erro. Seja qual for a situação, parece ser possível afirmar que o nível de desempenho evidencia já algumas relações espaciais claras e consistentes entre os componentes de ambas as construções com um nível de abstração superior.

Conclusões

As duas alunas mostraram desempenhos diferentes quer entre si quer entre as construções e respetivos desenhos que realizaram. Enquanto Marisa parece ter um desempenho mais consistente entre as diferentes tarefas, Isabel parece ter um desempenho mais oscilante. No entanto, esta informação é insuficiente para fazer inferências quanto ao desenvolvimento da estruturação espacial das alunas, já que os desenhos, só por si, podem ocultar aspetos relacionados com o raciocínio espacial (Thom & McGarvey, 2015). Os diferentes desempenhos poderão estar relacionados com o desenvolvimento das alunas em termos da estruturação espacial, mas podem estar também relacionados com outros aspetos. Dado que um dos fatores que influencia o desempenho dos alunos é o tipo de tarefas, analisar o desempenho dos participantes, ao longo de diferentes tarefas, pode permitir compreender que aspetos podem influenciar esse desempenho e estabelecer relações entre desempenhos, de forma a compreender como é que a estruturação espacial ocorre. Por outro lado, a natureza das figuras pareceu condicionar a estruturação que as alunas fazem dessas mesmas figuras, levando-as a atender a aspetos diferentes, nomeadamente a conseguir discriminar partes e a estabelecer determinados tipos de relações entre as peças (ou componentes). Para a Isabel, no caso do retângulo, a dificuldade associada à discriminação das peças parece estar relacionada com a própria natureza do retângulo que é, normalmente, apresentado sem qualquer registo no interior. O mesmo não se verificou na construção do gato, que por ter um significado associado a cada uma das partes, essa discriminação e o estabelecimento de algumas relações pareceu facilitar a estruturação que a aluna fez da figura.

Um outro fator tem a ver com as peças utilizadas na construção e as relações entre as peças, nomeadamente a posição e a orientação. Os triângulos isósceles, por terem lados diferentes, por poderem assumir posições diversas e poderem ser combinados com outros triângulos de formas variadas, poderão ter condicionado o desempenho das alunas. Em situações em que a orientação dos triângulos era semelhante aos protótipos, as alunas pareceram conseguir desenhar as figuras mais facilmente. Em situações em que os triângulos não tinham orientações próximas das prototípicas, verificaram-se duas situações: ou era muito difícil relacionarem os componentes, evidenciando dificuldades significativas no desenho das figuras; ou estabeleciam relações com outras figuras prototípicas e, partir dessas, conseguiam desenhar.

Outro aspeto que podemos concluir é que, embora desenhar possa trazer grandes constrangimentos, a necessidade de desenharem as suas construções, levou as alunas a compararem as duas produções, com os triângulos de papel e os desenhos. Esta comparação possibilitou a reflexão sobre os aspetos não coincidentes, levando-as a reformular os desenhos. Estes aspetos não coincidentes estão relacionados com as propriedades das figuras. Como referem Thom e McGarvey (2015), “o ato de desenhar e o desenho possuem o potencial de estimular o pensamento de uma pessoa ou pessoas ao trabalhar a Matemática mas também dos outros através do seu envolvimento” (p. 472). Neste sentido, importa referir que o desenho por si só não garante a necessidade de refletir. Muitas vezes, esta reflexão implica o questionamento por parte do professor ou entre alunos, levando os alunos a focarem-se em aspetos essenciais. Isto é possível quando a comunicação matemática é valorizada na sala de aula.

A presença de diferentes níveis de desempenho na mesma aluna (Isabel), inferida na análise dos dados, é consistente com a ideia de permeabilidade entre níveis de raciocínio, ou seja, um aluno pode mostrar diferentes níveis de raciocínio em diferentes situações, ao mesmo tempo (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998; Battista, 2007). Assim, o desenvolvimento do raciocínio dos alunos não pode ser assumido como um processo linear.

A diferença entre o desempenho das alunas nas construções e nos desenhos conduz-nos à ideia de que um trabalho com ambas as representações pode facilitar a flexibilidade no uso de diferentes representações e, ao mesmo tempo, permitir aos alunos aprofundar o seu nível de estruturação. Assim, as construções bidimensionais com materiais manipuláveis e a sua representação através de desenhos podem ser aspetos complementares, no que diz respeito à estruturação espacial.

O acesso às conceções das alunas foi possível pela valorização da diversidade de representações utilizadas para comunicar. Pela natureza aberta das tarefas propostas, foi possível partir das conceções pessoais das alunas, independentemente do nível referente ao raciocínio geométrico em que se encontravam, para construir o seu conhecimento matemático.

Apontamos como limitações a fase inicial desta investigação e a falta de registo áudio e vídeo que poderiam trazer dados que permitissem aprofundar a análise das resoluções das alunas.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers' geometry microworld. In G. W. Blume, M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. 2, pp. 131–56). Charlotte: Information Age.

Battista, M. T., (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Battista, M.T. & Clements, D. (1998). Students' understandings of three-dimensional rectangular arrays of cubes: Findings from a research and a curriculum development project. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 227–247). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Battista, M.T., Clements, D.H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*. 9(5), 503–532.

Bruce, C.D. & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM*, 47, 331-343.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York and London: Routledge.

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M.A. & Sarama, J. (1999). Young children concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192–212.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support learning and understand Learning Processes. In Kelly, A. E., Lesh, R.A.& Baek J. Y. (Eds), *Handbook of Design Research methods in Education* (68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dana, M. E. (1987). Geometry-A square deal for elementary school. In M. M. Lindquist e A.P. Shulte (Eds) *Learning and Teaching Geometry (1987 Yearbook). Learning and Teaching Geometry, K-12 (pp. 113*–125) Reston, VA: NCTM.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.). (2005) *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children‘s reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137–167). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R. & Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM*, *47*(3), 483–496.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Serrazina, L. (2018) Contributos da investigação para a aprendizagem da matemática: uma visão global. *Educação e Matemática*, 144-145, 2–8.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Thom, J. S., & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing (s): observing geometric thinking with, in, and through children’s drawings. *ZDM*, *47*(3), 465–481.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry*. TAL Project, Freudhental Institute, Utrecht University, National Institute for Curriculum Development.

Von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, re-presentation, and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 45-67). Springer, New York, NY.

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO ESPACIAL NUMA TAREFA DE INVESTIGAÇÃO COM POLIEDROS E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Este artigo enquadra-se numa experiência de formação inicial com futuros professores e educadores. O objetivo é compreender de que forma as tarefas de investigação podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio que promovem. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo e a sua análise incidiu nos processos de *construção, análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais*. O estudo sugere que o tipo de tarefas propostas, os recursos e as interações na sala de aula são condições relevantes para a ativação destes processos. No que respeita às tarefas, a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, apoiando os processos de raciocínio espacial, mas a sua utilização deve ser considerada de modo a não reduzir demasiado o desafio cognitivo; e o contexto de trabalho colaborativo favorece a comunicação do raciocínio e a estruturação espacial.

Palavras-chave: Geometria; Raciocínio Espacial; Poliedros; Materiais manipuláveis; Ensino exploratório.

Introdução

A evolução da matemática no séc. XIX, onde a busca pelo rigor se traduziu na recusa das demonstrações apoiadas em figuras e na desconfiança sobre a perceção visual, contribuiu para a desvalorização da visualização (Veloso, 1998). Também o enfraquecimento da investigação na área da visualização, particularmente depois de a psicologia ter sido dominada pela corrente *behaviorista*, teve uma influência na sua desvalorização (Presmeg, 2006). Contudo, a evolução das perspectivas sobre a geometria que identificamos em matemáticos como Atiyah (1982) ou Malkevitch (2009), valorizando a sua componente visual, contribuíram para uma mudança de paradigma. O conceito de visualização, inicialmente muito associado à criação de imagens mentais (Zimmermann & Cunningham,1991), passou ser visto como uma forma de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, que visam a resolução de problemas ou demonstração de propriedades (Gutiérrez, 1996) ou representar e comunicar informação, pensar e desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e avançar na sua compreensão (Arcavi, 2003). Surgem assim novas expressões que remetem para esta conceptualização, como "o raciocínio espacial", capaz de fornecer "não apenas o *input* para o raciocínio geométrico formal, mas também ferramentas cognitivas críticas para uma análise geométrica formal" (Battista, 2007, p. 844).

Sinclair et al. (2016) afirmam que na última década o raciocínio espacial tem merecido uma atenção crescente na investigação, quer no campo da educação matemática, quer das ciências cognitivas. Contudo, estes autores defendem a necessidade de mais investigação sobre a promoção de oportunidades de envolvimento em raciocínio espacial, tanto para alunos como professores, bem como as formas de avaliar e valorizar tal raciocínio. Nesse sentido, este artigo visa compreender, num contexto de formação inicial de professores, de que forma as tarefas podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio envolvidos durante a sua resolução. Concretamente, procuraremos responder às seguintes questões: Quais os processos de raciocínio espacial em que os formandos se envolvem quando resolvem tarefas de contagem e estabelecimento de relações em classes de poliedros? De que forma estas tarefas, realizadas num contexto de ensino exploratório e com recurso a materiais manipuláveis, promovem a realização destes processos?

Raciocínio espacial e materiais manipuláveis

Gutiérrez (1996) e, mais recentemente, Sinclair et al. (2016), referem a existência de vários termos ou expressões (entre os quais raciocínio visual, pensamento espacial, imagens mentais, espaciais, visuais, etc.) que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.). Esta variedade de termos gera uma "confusão" que reflete a coexistência de diferentes correntes de investigação que se dedicam e este estudo.

Tomemos como referência a proposta de Battista (2007) que define raciocínio espacial como sendo a

> capacidade de 'ver', analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisá-las para responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre imagens, e manter as imagens ao serviço de outras operações mentais. (p. 843)

Pelo seu lado, Gutiérrez (1996) utiliza o termo visualização, mas a sua definição é muito próxima da anterior, pois concebe-a como um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, igualmente desenvolvida com vista à resolução de questões, como problemas ou demonstração de propriedades. Para este investigador, este tipo de raciocínio integra quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização.

As imagens mentais são o centro do raciocínio espacial. Gutiérrez (1996) define imagem mental como uma representação cognitiva de um conceito ou propriedade através de elementos visuais ou espaciais que assume constituir o elemento básico. No entanto, considera relevante ter ainda em conta outro tipo de representações que mobilizamos e se articulam com as imagens mentais: as representações externas, que correspondem a qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo retratos, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar as imagens mentais e a realizar raciocínio espacial. Para o autor, um processo de visualização é uma ação mental ou física que envolve imagens mentais. Existem dois processos: a interpretação visual da informação para criar as imagens mentais e a interpretação de imagens mentais para gerar informação, a qual se decompõe em três subprocessos: observação e análise de imagens mentais, transformação de imagens mentais noutras imagens mentais e a transformação de imagens mentais noutro tipo de informação.

Na perspetiva de Battista (2009), para que seja possível operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los), é necessário que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo, o que envolve a estruturação espacial. A estruturação espacial é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos. Inclui identificar unidades, relações entre as unidades e reconhecer que um subconjunto de objetos, devidamente repetidos, pode gerar todo o conjunto (Battista & Clements, 1996). A estruturação espacial está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que tem uma estrutura isomórfica à estrutura percecionada da situação e que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007). Desta forma, podemos afirmar que o modelo mental resulta do conjunto das imagens mentais que capturam as propriedades percecionadas do objeto.

No caso de objetos tridimensionais, como explica Yamanskaya (citado por Gutiérrez, 1996), a criação das imagens que dão origem aos modelos (mentais) daqueles objetos só é possível a partir da acumulação de diferentes representações que são necessárias à sua construção e, quanto mais rico e diverso for o repertório de representações, mais fácil é a construção dos modelos. Mas a construção dos modelos mentais destes objetos implica ainda a coordenação e a integração de imagens correspondentes a partes desse objeto ou das suas vistas[1] (Battista & Clements, 1996). Contudo, como refere Gutiérrez (1996), frequentemente a única informação que os alunos têm sobre os sólidos é a partir das suas representações no plano, em particular dos manuais escolares. Estas representações fornecem uma informação parcelar pois usam habitualmente o mesmo tipo de perspetiva e variam pouco as posições dos sólidos, o que não favorece a construção de modelos mentais e justifica a necessidade de manipulação dos modelos tridimensionais.

Além da utilização de modelos tridimensionais de sólidos, há ainda a considerar o interesse da sua construção física. Como refere Guillén Soler (2004), a construção de modelos de sólidos conduz a uma análise primária dos seus elementos (vértices, arestas e faces), bem como da forma como se organizam localmente, e favorece uma contagem estruturada. O material utilizado na construção pode, inclusivamente, conduzir a diferenças na sua análise. Por exemplo, os modelos “abertos” podem facilitar que a atenção se foque nas arestas, ao contrário dos “fechados” que direcionam a atenção para as faces. Mais ainda, a construção destes modelos promove a perceção dos aspetos comuns e diferenças entre sólidos e a introdução das ideias que estão na “génese” das suas classes.

Metodologia de investigação

Opções metodológicas, participantes e recolha de dados

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo de uma investigação baseada em design, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), envolvendo uma turma de 25 formandos que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica) lecionada pela primeira autora deste artigo. Habitualmente, o trabalho em aula desenvolvia-se a partir de tarefas consistentes com um ensino exploratório (Ponte, 2005) e realizadas de acordo com a dinâmica: lançamento da tarefa pela professora, seguida de trabalho em grupos de três a cinco elementos, apresentação e discussão coletiva, finalizando com uma sistematização. A turma mostrou-se sempre bastante empenhada e o ambiente de trabalho era muito bom. Os dados

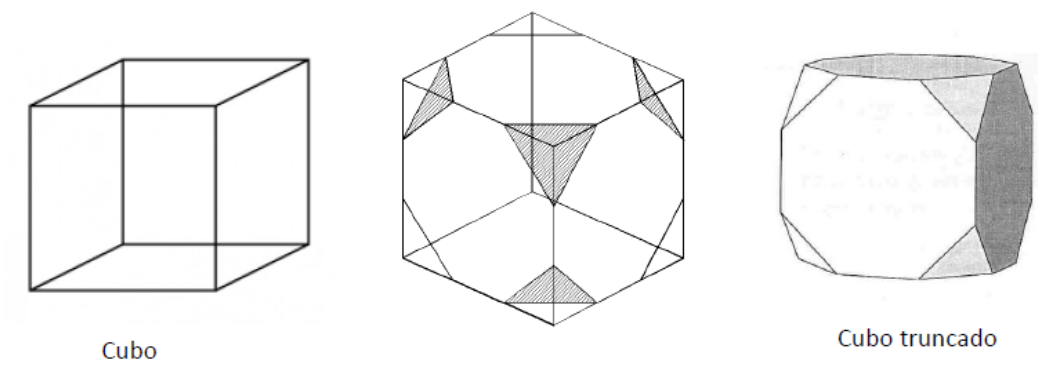
[1] Referimo-nos às projeções ortogonais do objeto, tal como Veloso (1998) descreve.

que apresentamos referem-se a um grupo de formandos que exibe habitualmente algumas dificuldades, tanto no domínio de conceitos trabalhados no ensino básico como na aquisição de novos conceitos e desenvolvimento de capacidades.

A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas que foram ainda confrontados com a análise documental das produções escritas, muito embora não haja aqui referência a essas produções. Esta opção deriva do facto de os diálogos e os gestos captados nas imagens vídeo evidenciarem o raciocínio espacial dos participantes de uma forma mais clara. Como defendem Battista e Clements (1996), as ações físicas e mentais (neste caso explanadas em parte nos diálogos) tornam-se representações explícitas da estruturação dos objetos, um elemento fundamental do raciocínio espacial.

Neste artigo apresentamos dados resultantes da realização da tarefa *Sólidos platónicos truncados* (Figura 1). Para a resolução da tarefa, cada grupo tinha ao seu dispor peças encaixáveis (ver Figuras 2 a 11) para que pudessem construir os sólidos platónicos, uma classe que já haviam estudado com apoio deste material, bem como a classe dos anti-prismas. Optámos por esta tarefa pois ela envolve o trabalho com figuras tridimensionais que, na perspectiva de Gutiérrez (2017), é a área da matemática que implica uma maior exigência em termos do raciocínio espacial. Além disso, o facto de se partir de um tipo de sólido para gerar mentalmente outro é uma atividade que implica necessariamente a construção de imagens mentais, bem como a realização de operações e transformações de imagens mentais. Finalmente, este tipo de tarefa corresponde ao que Battista e Clements (1996) designam por tarefa de contagem ou enumeração que, como referem, influencia e é influenciada pela estruturação espacial. Por um lado, a estruturação espacial fornece o *input* e a organização para a contagem. Por outro, as tentativas de contagem geram frequentemente a estruturação ou restruturação espacial.

Sólidos platónicos truncados



Imagina que vamos cortar um cubo junto de cada vértice por um plano, de modo a que a secção obtida seja um polígono regular, tal como mostra sequência de figuras que termina no cubo truncado.

1. No caso do cubo truncado, as faces correspondentes às secções são triângulos equiláteros e as restantes octógonos regulares. Observa os outros sólidos platónicos e diz como serão as faces dos sólidos platónicos truncados.
2. Quantos vértices, arestas e faces tem o cubo truncado? E os outros poliedros truncados? Preenche a tabela da página seguinte.
3. Observa os dados e compara-os. Estabelece as seguintes relações e procura justificá-las.

a. Qual a relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado? b. E entre o número de faces? c. E de arestas? Sugestão: Além de observares os valores, pensa na forma como chegaste até eles.

Figura 1 – Tarefa proposta (Adaptado de Projeto Matemática para Todos, s.d.)

Análise de dados

Para analisarmos o raciocínio espacial desenvolvido durante a atividade de contagem e estabelecimento de relações na classe dos sólidos platónicos, utilizamos um quadro de análise que construímos a partir das ideias de Battista (2009) e Gutiérrez (1996) sobre raciocínio espacial que, do nosso ponto de vista, se complementam.

Desta forma, consideramos que o raciocínio espacial inclui, por um lado, a *construção mental de imagens e modelos* sobre objetos espaciais e relações e, por outro, a *análise e realização de transformações e operações* entre objetos e relações usando as imagens e modelos mentais, ainda que se possam apoiar em representações externas (Tabela 1).

Tabela 1 – Processos de raciocínio espacial

Processos	Subprocessos
Construção dos modelos mentais	Interpretação visual da informação
	Identificação de subconjuntos do objeto
	Coordenação dos subconjuntos do objeto
	Integração dos subconjuntos do objeto
Análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais	Observação e análise de imagens mentais
	Transformação de imagens mentais noutras imagens mentais
	Transformação de imagens mentais noutro tipo de informação

A construção de modelos inclui a *interpretação visual da informação* (como perceber quais as características do plano de corte a partir das secções apresentadas), a *identificação de subconjuntos do objeto* (como decompor um sólido noutros sólidos ou em partes do sólido, como as faces), a *coordenação de subconjuntos do objeto* (implica identificar relações entre os subconjuntos, por exemplo, perceber se duas faces que se situam em subconjuntos diferentes são adjacentes ou partilham algum vértice) e *a integração dos subconjuntos do objeto* (que se traduz, por exemplo, na construção da imagem de um sólido a partir do conhecimento sobre a suas faces). A análise, transformação e operação com modelos mentais inclui a *observação e análise de imagens mentais* (conduz, por exemplo, a identificar o número de arestas em torno de um vértice), a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* (como identificar qual a face resultante de uma secção do sólido por um determinado plano) e a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* (por exemplo, generalizar que o número de vértices de um sólido platónico truncado corresponde ao produto do número de vértices do sólido platónico pelo número de arestas convergentes no mesmo vértice).

Resultados

Na aula anterior à realização da tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*, a turma tinha estudado a classe dos sólidos platónicos, nomeadamente as propriedades que a caracterizam. Já nesta aula, a professora fez uma introdução da tarefa com foco na ideia de seccionar um sólido (desconhecida da maioria) e incentivou à descoberta de novos sólidos e das relações entre si. Nesta secção, apresentamos e analisamos dados de três episódios ocorridos durante a resolução da tarefa em grupos. Os episódios ocorreram sequencialmente na mesma aula, sem interrupção para trabalho coletivo, e são representativos dos aspetos e questões que emergiram no grupo.

Episódio A

Sandra, Vânia, Afonso e Mónica estão numa fase inicial da resolução da tarefa e estão a contar o número de faces, vértices e arestas de um cubo truncado. No diálogo que se segue discutem o número de arestas:

Sandra: Dá-me 40. 3 e 3 são 6, mais 6 são 12 [contou as arestas das faces triangulares no topo]. 12 + 12 são 24 [juntou às da base]. 25, 26, 28, 28 [circunda uma face lateral, figuras 2, 3 e 4], 29, 30, 31, 32 [outra], 33,34,35,36 [outra], 37, 38, 39, 40! [a 4ª face lateral].

Figuras 2, 3, 4 – Sandra conta as arestas de um cubo truncado a partir do cubo

Sandra: É o número de arestas do cubo mais 24 porque é o número de arestas que se acrescenta. 12 + 12, 24.

Vânia: Tem de ser 48. Quanto é que vos deu as arestas?

Afonso: 40.

Vânia: A nós deu-nos 48.

Afonso: Repara, quantas arestas é que tu já tens?

Vânia: Nós não fizemos assim. Tu tens em cada face um octógono. Então sabes que são 8 arestas em cada lado, então fazes 8, 8, 8, 8, 8, 8 [aponta para cada face do sólido]. 6 vezes 8.

Afonso: Mas a nós deu-nos 40. Só se nos enganámos.

Sandra: Acho que faltam os de cima [volta a repetir o que fizeram]. Esquecemo-nos de contar as de cima e as de baixo que são 4+4, 8. Dá 48.

Afonso: Não! Mas ao contares estas já estás a contar as de cima! Logo é 40.

Neste momento, a professora passa pelo grupo e alerta para o que diz o Afonso:

> **Professora**: Reparem que isto [apontando para as arestas do modelo físico] é só uma aresta!
>
> **Sandra**: Então ainda dá menos do que 40!

Sandra e o Afonso voltam ao cubo, contam as arestas (12):

> **Sandra** e **Afonso**: Então 12 + 24. Dá 36!

Neste episódio podemos observar como o mesmo objeto pode ser estruturado de formas diferentes, o que é evidenciado pela explicitação das contagens. As ações de Sandra e Afonso sugerem um modelo mental que resulta da *identificação de subconjuntos do objeto*: a composição das faces triangulares (e respetivas arestas) com as arestas do cubo que surgem associadas às arestas das quatro faces laterais. Contudo, a *integração* dos vários elementos não é correta devido a um problema de *coordenação* — não identificam inicialmente que estão a duplicar a contagem de quatro arestas. Já Vânia e Mónica (que não intervém neste diálogo apesar de estar a trabalhar com a colega) revelam um modelo que resulta também da *identificação de subconjuntos do objeto*: a composição de 6 octógonos e respetivas arestas, o que não requer a contagem separada das arestas das faces triangulares. No entanto, também este par erra na contagem pelo mesmo problema identificado no raciocínio dos colegas — a coordenação dos 6 octógonos que têm 12 arestas em comum.

Apesar dos erros, Sandra já havia identificado que o número de arestas do sólido truncado é a soma do número de arestas do sólido original com o número de arestas que resultam da secção. Esta relação resulta da *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* e, curiosamente, é a sua aplicação e o confronto de resultados diferentes que os leva a repensar as suas estratégias e a restruturar o sólido. Há ainda a referir que, se o material disponível foi fundamental para realizar as contagens, possibilitando a realização de ações que explicitam o modelo mental, as diferenças entre o modelo físico e o sólido geométrico (nomeadamente a existência de arestas que se encaixam mas não se "fundem") levaram Vânia e Mónica a fazer uma interpretação visual da informação errada.

Episódio B

Afonso e Mónica estão a determinar o número de faces, vértices e arestas de outros sólidos truncados sobre os quais não existe qualquer representação externa. No início deste episódio estão a analisar o icosaedro truncado:

> **Afonso**: O número de vértices, ou seja 12, vezes 5. Percebes porque é que é?
>
> **Mónica**: Não.
>
> **Afonso**: Vamos fazer com este [usa o modelo do octaedro]. Então é assim: cada vértice, quando tiver a face truncada[2], essa face vai ficar com o número de lados que é o número de arestas que converge nesse vértice. E depois só temos de multiplicar pelo número de vértices.
>
> **Mónica**: Ah! Já percebi.

[2] Para simplificar, consideremos que a expressão "face truncada" corresponde à nova face que se obtém quando o poliedro é truncado.

Neste diálogo é percetível que Afonso já encontrou uma relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado e explica-a a Mónica. Esta relação pressupõe a construção de uma imagem mental da face truncada em que os vértices da nova face se situam nas arestas que convergem num vértice do poliedro original, ou seja, a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* que é apoiada pela utilização do material. Ao encontrar a relação referida, Afonso procede à *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*. A utilização desta expressão é representativa de uma situação em que é a estruturação espacial do sólido que determina a contagem e não o contrário.

No próximo passo, vão analisar o dodecaedro truncado, mas começam por registar o número de vértices do dodecaedro. Mónica segura no sólido e Afonso conta (Figura 5):

Afonso: 1, 2, 3, 4, espera. Já contaste este?

Figuras 5, 6 e 7 – Mónica e Afonso contam os vértices do dodecaedro

Afonso: Põe assim que é mais fácil [Figura 6]. Estão 5 aqui e 5 aqui [pentágono na base e no topo]. … 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [Figura 7]. OK 10. Então são…

Mónica: 20.

Afonso: 5, 5, 10. Sim, são 20.

Afonso: Agora número de vértices do sólido truncado… é só fazer 5 vezes 20. Vamos ver porquê. O número de arestas que converge…

Mónica: É 3, agora é 3.

Afonso: Ah, pois é, agora é triângulos [a face truncada]. 60.

Mónica: Então, número de faces do sólido truncado. Então este é 12. Somar as faces truncadas 20. 20+12.

Nesta interação, vemos que a determinação do número de vértices do dodecaedro truncado surge naturalmente da relação encontrada e Mónica parece encontrar sentido nessa relação que Afonso lhe explicou, já que é ela que corrige o colega ao dizer que deve multiplicar por 3 e não por 5. Curiosamente, o que parece ser mais desafiante é a contagem dos vértices do sólido original. De facto, o dodecaedro é o poliedro regular que tem mais vértices e é importante, mais do que nos outros sólidos, encontrar uma organização mental que nos permita realizar a contagem eficazmente. A primeira tentativa deste par foi percorrer, aparentemente sem critério, todos os vértices, uma abordagem que foi rapidamente abandonada. A estratégia que usaram depois mostra que, por um lado, a posição do modelo físico é relevante, em particular pelo posicionamento de uma face na horizontal, como se tratasse de uma base. Por outro lado, a forma de contar mostra que o modelo mental que estão a construir resulta da *identificação dos subconjuntos do objeto*: os 5 vértices da face topo, os 5 vértices da face "base" e os 10 vértices que se encontram na zona central do poliedro e que formam uma espécie de ziguezague. Desta forma, neste caso é a tarefa de contagem e as ações que desencadeia, nomeadamente fixando a posição do modelo e percorrendo organizadamente os elementos, que sugerem uma estruturação do sólido.

Ainda neste episódio vemos que o par de formandos já percebeu que para contar o número de faces de um sólido truncado tem de adicionar o número de faces do sólido original com o seu número de vértices (de novo *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*).

Episódio C

Mónica e Afonso identificaram todas as relações pedidas e o número de faces, vértices e arestas dos poliedros truncados. Contudo, a professora pediu-lhes para completarem a resposta à primeira questão, sobre o tipo de faces de cada novo poliedro, uma vez que só tinham referido a face que se obtém ao truncar o sólido e omitiram a forma da face original depois de transformada. No diálogo seguinte estão a analisar o tetraedro truncado:

> **Afonso**: É um quadrilátero assimétrico. Não sei. Quando se corta o tetraedro fica assim [Figura 8]… Não sei dizer bem qual é o quadrilátero…


Figuras 8 e 9 – Afonso e a professora simulam como ficam as faces triangulares quando o cubo é truncado

> **Professora**: Ah! Já estou a perceber. A outra face fica um quadrilátero, qual é esse quadrilátero?
>
> **Afonso**: Pois é essa a questão. A Mónica diz que é um paralelogramo.
>
> **Professora**: Mas não se esqueçam que o que acontece a este vértice vai acontecer aos outros também! Portanto, têm de fazer assim [Mónica coloca as mãos também, Figura 17]

Figura 10 – Mónica simula com a professora como fica uma face triangular depois de truncar três vértices

Figura 11 – Afonso conta o número de arestas da nova face

Afonso: Ah, sim, já percebi. Tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 [contorna a figura formada, Figura 11]. OK, já percebi. É um… pentágono? Não, um hexágono.

Professora: Mas agora pensem lá… O Afonso contou um a um, usando o seu dedo. Não existe uma lógica que me permita perceber quantos lados é que eu vou ter?

Afonso: Ah! Basta contar o número de vértices e o número de lados já existentes!

Professora: Ou seja? Isso não é o mesmo número? Ou seja, aqui [tetraedro] tens 3 lados e 3 vértices. Passaste a ter?

Afonso: Um hexágono, sim.

Professora: É importante a estrutura da figura para nós percebermos o que está a acontecer.

Num outro momento, a professora passa pelo grupo e Afonso aborda-a:

Afonso: Nós estivemos a ver a figura e deu-nos em todos um hexágono.

Professora: Em todos?

Afonso: Sim.

Professora: Então vamos lá pensar naquela relação que tu disseste há bocado. Portanto, quando temos triângulos nas faces vamos passar a ter hexágonos. Foi o que aconteceu no tetraedro, e aqui [octaedro]?

Afonso: Também é um triângulo, vai acontecer o mesmo.

Professora: Portanto ficamos com hexágonos. No icosaedro idem. E no dodecaedro?

Afonso: Também porque convergem 3 arestas num vértice. Ah não! Pois é, não pode ser. Então fica… é multiplicar, não? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. É um…

Mónica: Já falámos disso aqui.

Professora: Então qual é o prefixo de 10…

Anteriormente, Afonso havia determinado corretamente o tipo de face que surge nos poliedros quando os truncamos e justificou o número de vértices dessa face. Esta ação implica uma *transformação* do modelo mental do poliedro original, através da *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais*, dando origem a um novo modelo — o do poliedro truncado. Contudo, os formandos não tiveram o mesmo sucesso em transformar mentalmente as faces existentes. No caso do tetraedro, foi necessária uma simulação com materiais e a realização de ações físicas para contar o número de arestas do hexágono resultante, ou seja, foi necessário ir além de uma operação mental. Mesmo depois da análise do tetraedro truncado, não foi fácil generalizar a relação pois Afonso considerava que seriam sempre hexágonos e foi a professora que lhe sugeriu repensar esta conclusão.

Desta forma, podemos perceber que mesmo tendo descoberto anteriormente todos os valores corretos para o número de arestas, vértices e faces dos poliedros truncados e um dos tipos de faces, estes formandos não tinham ainda uma estruturação completa dos sólidos, mas sim uma estruturação local, focada nas faces truncadas.

Discussão

A análise da forma como os participantes resolveram a tarefa revelou vários aspetos sobre os processos de raciocínio espacial em que se envolveram. Verificamos que os futuros professores construíram modelos mentais dos sólidos platónicos e dos sólidos platónicos truncados, analisaram, transformaram e operaram com estes modelos, o que já era esperado. Analisando mais detalhadamente estes processos, percebemos que o trabalho realizado envolveu ainda todos os subprocessos que considerámos no quadro de análise, ainda que com níveis de desafio diferentes.

Na *construção de modelos mentais*, a *interpretação visual da informação* e a *identificação de subconjuntos dos objetos* que, integrados, resultassem no objeto completo parecem ser processos que os participantes realizaram com alguma facilidade; já a *coordenação dos subconjuntos* constituiu um desafio maior, uma vez que surgiram alguns erros de duplicação de arestas (Episódio A). Para a superação deste desafio contribuíram especialmente a manipulação dos modelos físicos e a explicitação verbal dos modelos mentais que tinham dos sólidos, o que permitiu corrigir a interpretação errada de duas formandas. Na construção dos modelos mentais, destacamos ainda como o mesmo objeto pode ser estruturado de formas diferentes (Episódio A) e que, por vezes, a estruturação dos objetos é apenas local, ou seja, pode não existir um modelo para todo o objeto mas apenas de partes do objeto, sem haver integração (Episódio C).

Do ponto de vista da *análise, transformação e operação sobre os modelos mentais*, consideramos que a *observação e análise de imagens mentais* foi um processo realizado com sucesso na maioria das vezes, o que contribuiu para a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* — neste caso, a explicitação das relações entre os elementos dos sólidos. Já a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* assume diferentes níveis de dificuldade, tal como vimos na determinação da forma das faces do sólido truncado (Episódio C), o que provavelmente decorre da complexidade do objeto e da operação a realizar. No entanto, destacamos que, mais uma vez, foi determinante a manipulação física dos sólidos e a explicitação verbal dos modelos mentais para o raciocínio correto.

Assim, no que diz respeito à utilização dos materiais manipuláveis, confirma-se a perspetiva de que constituem representações externas que, tal como refere Gutiérrez (1996), ajudam a realizar raciocínio espacial. Concretamente, na análise dos sólidos platónicos, os materiais favoreceram *a identificação de subconjuntos do objeto* por permitirem manipular essas representações colocando-as em posições mais favoráveis à organização da contagem (Episódio B) e realizar simulações que apoiam a construção dos modelos mentais dos novos sólidos através da transformação de imagens mentais noutras imagens mentais (Episódio C).

Apesar das vantagens reconhecidas, há alguns aspetos a ressalvar. Em primeiro lugar, como referem ainda Sarama e Clements (2016), embora forneçam suporte e mediação, os materiais não “carregam” diretamente as ideias matemáticas subjacentes, pelo que é necessário estar atento ao entendimento que os indivíduos fazem dos recursos. Em segundo lugar, é tão importante saber como e quando usar os materiais, como perceber quando devemos limitar a sua utilização. Nesta tarefa, a existência de modelos físicos para os sólidos platónicos e a inexistência do mesmo tipo de modelo para os truncados obrigou a um trabalho mental que não seria realizado se existissem os modelos para todos os sólidos. Este é um aspeto importante para o raciocínio espacial e que pode depender de individuo para indivíduo, pelo que cabe ao professor estar atento às necessidades de cada um.

Finalmente, centremo-nos no papel da tarefa. Tal como referem Battista e Clements (1996), a atividade influencia e é influenciada pela forma como os indivíduos estruturam os objetos. Neste caso, parece-nos que a mobilização de vários processos de raciocínio espacial foi particularmente promovida por alguns fatores: a complexidade dos sólidos utilizados e da operação de secção por um plano que deve ser adequada aos indivíduos a que se destina, mantendo um nível de desafio cognitivo elevado mas alcançável; o pedido do número de faces, vértices e arestas que, associado à complexidade dos objetos, implica a sua estruturação; o estabelecimento de relações e sua justificação que reforça a necessidade de estruturação.

Além do enunciado da tarefa, temos a forma como foi realizada. Como os diálogos mostram, a interação entre os participantes com a comunicação dos seus raciocínios foi um elemento determinante para o sucesso da atividade. Como mostra o episódio A, o confronto de respostas diferentes resultou na revisão do raciocínio dos futuros professores ou no seu enriquecimento, decorrente da diversidade de perspetivas. Também o episódio C, em que os formandos interagem com a professora, mostra a importância do seu apoio para ultrapassar erros de interpretação e raciocínio e reorientar a sua análise com base em estratégias produtivas. De facto, apesar do raciocínio espacial apelar a uma atividade centrada em imagens mentais, eventualmente mais difíceis de partilhar, sublinhamos a relevância do trabalho de natureza exploratória (Ponte, 2005), com uma forte componente de discussão e negociação de resultados que se revela fundamental.

Conclusão

O desenvolvimento do raciocínio espacial envolve a realização de processos associados à construção, análise, transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais (Battista, 2009; Gutiérrez, 1996). Este estudo sugere que há várias condições que são relevantes para a ativação destes processos, em particular, no que respeita ao tipo de tarefas propostas, os recursos disponibilizados e as interações na sala de aula. No que respeita às tarefas, a seleção dos sólidos e das operações mentais deve manter o nível de desafio cognitivo elevado, mas alcançável; a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, mas a sua utilização não deve diminuir o desafio cognitivo, nomeadamente, substituindo ou sobrepondo-se às imagens mentais; e o contexto de trabalho colaborativo favorece a comunicação do raciocínio que, por sua vez, estimula a estruturação e restruturação espacial dos objetos.

Referências

Atiyah, M. (1982). What is geometry? The 1982 Presidential Address. *The Mathematical Gazette, 66*(437), 179-184.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258-292.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Guillén Soler, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16* (3), 103-125.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.*), Proceedings of the 20th PME International Conference,* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Spain.

Malkevich, J. (2009). What is geometry? In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.

Projecto Matemática para Todos (s.d.). *Investigações na sala de aula: Propostas de trabalho*. Lisboa: APM

Sarama, J. & Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: what is "concrete"? In P. S. Moyer-Packenham (Ed.) *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 71-93). Cham: Springer.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education*, *48*(5), 691-719.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

A MEDIAÇÃO SEMIÓTICA COM A CALCULADORA GRÁFICA NA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Manuela Subtil

Agrupamento de Escolas Fragata do Tejo, UIED[1]

mm.pedro@campus.fct.unl.pt

António Domingos

Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, UIED, DCSA

amdd@fct.unl.pt

Resumo: Encarando o artefacto, calculadora gráfica, como uma ferramenta de mediação semiótica, pretendemos analisar como é que se desenvolveu a transição de significados pessoais para significados matemáticos, na resolução da tarefa: "A minha mão", através da orquestração da professora. Inserindo-se num estudo de natureza qualitativa, seguindo uma abordagem interpretativa, adoutou-se como modalidade de investigação de Design Research, implementando-se uma experiência de ensino. A experiência foi realizada com todos os alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade e nesta comunicação, discutiremos o desempenho de duas alunas. A análise dos resultados mostrou que as alunas inseridas na comunidade de ensino e aprendizagem, que é colocada em ação na aula, compreenderam em que condições um gráfico cartesiano representa uma função.

Palavras-chave: Artefacto; calculadora gráfica; mediação semiótica; esquemas de utilização; função.

Introdução

Sendo a Matemática uma disciplina "onde se regista um elevado insucesso, a introdução de pequenas mudanças no processo de ensino, podem ajudar os alunos a modificar a sua atitude face a esta disciplina" (Pedro, 2013, p. 107). Neste sentido, os investigadores devem de ter o cuidado de desenvolver ambientes de ensino-aprendizagem mais proveitosos e que decorram num período de tempo mais alargado (Gravemeijer & Cobb, 2006) de modo a percecionar a evolução dos alunos (Steff & Thompson, 2000).

Este estudo está integrado numa experiência de ensino mais ampla, que decorreu numa escola pública do distrito de Setúbal, nos anos letivos 2016/17 e 2017/18. Tratou-se de uma experiência de ensino inovadora, que integrou a calculadora gráfica, num nível de ensino onde tradicionalmente este tipo de abordagem não é privilegiado. No entanto, na opinião de Lopes e Domingos (2015) é possível no ensino básico, utilizar de forma eficiente esta ferramenta propiciando ambientes ricos e motivadores de aprendizagem.

O estudo foi sustentado por uma conjetura de ensino-aprendizagem (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003) que assentou no pressuposto de que quando a aprendizagem

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2016.

decorre no ambiente social da aula, onde se promovem produções individuais, resultantes da realização de tarefas, com recurso à calculadora gráfica e a discussão coletiva, orquestrada pela professora, pode gerar-se uma maior facilidade na perceção de significados matemáticos. No que concerne à dimensão do conteúdo, esta conjetura esteve relacionada com aquilo que se pretendeu ensinar, isto é, objetivou-se fortalecer o conceito de gráfico cartesiano, apreendido no 5º ano de escolaridade e compreender quando é que um gráfico cartesiano corresponde a uma representação de uma função, percecionando-se o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos. Na dimensão pedagógica, onde se perspetivou a consolidação da dimensão anterior, recorreu-se a uma tarefa com o apoio da calculadora gráfica, no ambiente social de aprendizagem da aula. em que se promoveram produções individuais e discussões coletivas, orquestradas pela professora (Confrey & Lachance, 2000),

Tomando como suporte a conjetura de ensino-aprendizagem, os dados foram analisados com base na Teoria da Mediação Semiótca (Bussi & Mariotti, 2008), tendo em conta os desempenhos dos alunos analisados à luz da Génese Instrumental (Rabardel, 1995) na utilização do artefacto, calculadora gráfica, encarado como um instrumento de mediação semiótica.

Quadro Teórico

Artefacto

Um artefacto é um objeto muitas vezes usado como uma ferramenta, não sendo necessariamente físico (Drijvers et al., 2010). Dadas as suas características intrínsecas, é projetado com a finalidade de realizar uma tarefa específica (Rabardel, 1995). A ideia de artefacto é muito geral e abrange vários tipos de objetos produzidos pelos seres humanos através dos tempos: sons e gestos, utensílios, formas de linguagem oral e escrita, textos, livros, instrumentos musicais, instrumentos científicos, ferramentas das tecnologias de informação e comunicação (Bussi & Mariotti, 2008).

O uso de um artefacto na resolução de uma tarefa matemática, pode proporcionar o emergir de conhecimento pré-existente do aluno, que se relaciona com o conhecimento matemático essencial à atividade de ensino e aprendizagem. O artefacto pode ser considerado como um gerador de conhecimento, onde se estabelece uma ligação entre a teoria e a prática (Mariotti, 2012).

Por exemplo, no que concerne a um *software* de geometria dinâmica, pode-se considerar o *software* como um todo, isto é, como um único artefacto ou interpretá-lo como um conjunto de artefactos, tais como artefacto de construção, artefacto de medição, artefacto de arrastamento, etc (Leung, 2008). Um único computador pode ser considerado como um conjunto de artefactos (por exemplo CAS, processamento de texto) (Trouche, 2004).

Tendo em conta os aspetos instrumentais da utilização de um artefacto tecnológico por um sujeito, que no nosso caso, se referem à calculadora gráfica e aluno, respetivamente, surge a abordagem instrumental (Gomes, 2001).

Abordagem Instrumental

Trata-se de uma abordagem fundamentada nas ideias de Vygotsky e desenvolvida por Rabardel (1995). A construção de um instrumento não é espontânea, trata-se de uma construção psicológica e ocorre segundo um processo designado por génese instrumental. Um instrumento surge quando o sujeito é capaz de se apropriar do artefacto, percebe a sua utilidade no que concerne ao tipo de tarefas que pode fazer e à maneira como as pode realizar e o integra na sua atividade. Trata-se de uma entidade mista, na medida em que resulta da apropriação de um artefacto, material ou simbólico, pelo sujeito, através de esquemas de utilização[2] (Rabardel, 1995). Esse processo de apropriação é o que permite que o artefacto seja "responsável" pela mediação da atividade (Drijvers & Trouche, 2008).

No processo de Génese Instrumental, a transformação do artefacto num instrumento, pode ocasionar o surgimento de signos e, consequentemente, de significados relacionados com os esquemas de utilização. Neste sentido, para Mariotti (2018), a evolução de significados, provenientes das interações entre signos é inerente ao desenvolvimento do processo de mediação semiótica, que só ocorre quando existe conteúdo matemático a ser mediado pelo professor.

Teoria da Mediação Semiótica

A Teoria da Mediação Semiótica é centrada em torno da ideia seminal de mediação semiótica introduzida por Vygotsky (1978) e tem como objetivo descrever e explicar o processo desencadeado por um aluno, que se inicia com o uso de um artefacto específico para realizar uma tarefa e leva à apropriação de um determinado conteúdo matemático (Mariotti, 2012, 2018). Trata-se de uma abordagem teórica que do ponto de vista didático, analisa o ensino e aprendizagem da matemática, usando a integração da tecnologia (Noss & Hoyles, 1996), cujo objetivo é investigar os diferentes tipos de signos[3] compreendidos em atividades orientadas por artefactos.

O processo de mediação semiótica é promovido através da iteração de ciclos didáticos, concebidos para explorar o potencial semiótico de um artefacto[4]. Existe um processo de evolução que se inicia com o aparecimento de signos pessoais, relacionados com significados pessoais que emergem da realização da tarefa e o uso do artefacto, desenvolvendo-se a produção coletiva de signos comuns relacionados com a utilização do artefacto e os conteúdos matemáticos para serem aprendidos, como se pode exemplificar na figura 1.

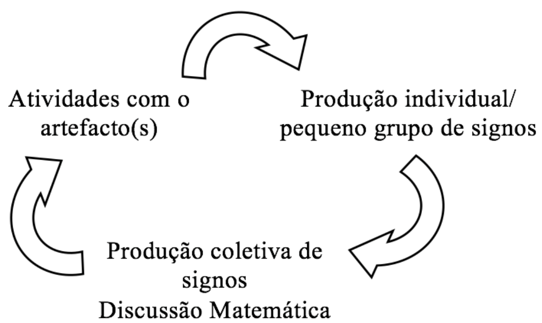


Figura 1 – O ciclo didático (Adaptado de Mariotti, 2018, p. 23)

Este tipo de atividade desempenha um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem e constitui o cerne do processo de mediação semiótica. Toda a turma está envolvida: diversas soluções são discutidas coletivamente e os textos escritos pelos alunos são analisados coletivamente. As intervenções dos alunos são coordenadas pelo professor com o objetivo de

[2] Rabardel (1995) descreve a noção de esquema de utilização de um artefacto como sendo um conjunto de procedimentos que organiza a atividade com o artefacto, associado à realização de uma determinada tarefa.

[3] O termo signo refere-se à relação indissolúvel entre significado e significante *"signified and signifier"* inspirado por Pierce.

[4] Entende-se por potencial semiótico do artefacto, a facilidade que o artefacto possui em associar significados matemáticos evocados pelo seu uso, culturalmente determinados, com significados pessoais que cada sujeito desenvolve na utilização do mesmo (atividade instrumentada) na realização de tarefas específicas.

promover o avanço para significados matemáticos, explorando as potencialidades semióticas que advêm do uso do artefacto em causa (Mariotti, 2018). Para a dinâmica de coordenação das diferentes discussões que surjam em sala de aula, orientadas/mediadas pelo professor, Bussi (1998) utiliza o termo orquestração. A autora considera que um dos objetivos da atividade de ensino e aprendizagem, é a gestão da turma durante a discussão matemática, descrevendo o processo como "uma polifonia de vozes articuladas num objeto matemático" (p. 68). Segundo a autora, em cada fase do processo de ensino e aprendizagem, é essencial a ação do professor, nomeadamente na orquestração das discussões da turma.

Neste sentido, tendo um professor consciência do potencial semiótico do artefacto, tanto em termos de significados matemáticos como em termos de significados pessoais, pode atuar intencionalmente como mediador, para mediar o conteúdo matemático, usando o artefacto como um instrumento de mediação semiótica (Mariotti, 2012).

Metodologia

Este estudo está enquadrado numa investigação mais ampla, de natureza qualitativa, seguindo uma abordagem interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Adoutou-se como modalidade de investigação, o processo *Design Research*[5] (Cobb, 2000; Confrey, Bell & Carrejo, 2001; Cobb et al , 2003), fomentando-se uma experiência de ensino, que na opinião de Clements (2008) é um importante meio de investigação no desenvolvimento curricular.

Uma experiência de ensino é uma das modalidades de *Design Research* (Confrey et al., 2001), que é uma metodologia usada em educação, cujo objetivo é desenvolver, testar, implementar e difundir práticas inovadoras de ensino e aprendizagem, em que a tecnologia poderá ser um possível recurso (Kelly, 2003). Trata-se de uma forma de investigação intervencionista que cria e avalia novas condições de aprendizagem. Os resultados desejados incluem novas possibilidades para as práticas educacionais e novos conhecimentos relativamente ao processo de aprendizagem. Não se estuda o que existe, mas o que pode vir a ser (Schwartz, Chang & Martin, 2008). Trata-se de um tipo de metodologia, cujo propósito é incrementar teorias que expliquem o modo como se processa a aprendizagem à custa de um investimento empírico, sendo fundamental descrever os meios utilizados que conduzem aos sucessivos raciocínios dos alunos, culminando com uma melhoria do processo educativo (Cobb et al., 2003). O resultado incide numa maior compreensão de uma ecologia de aprendizagem, que é interpretada como um sistema complexo e interativo que envolve a necessidade de criação e compreensão do funcionamento de vários elementos de diferentes tipos e níveis, que em conjunto apoiam a aprendizagem. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem normalmente incluem as tarefas ou problemas que os alunos são convidados a resolver, os tipos de discurso que são incentivados, as normas de participação que são estabelecidas, as ferramentas e materiais fornecidos, e os meios práticos de que os professores em sala de aula podem orquestrar entre estes elementos (Cobb et al., 2003).

O estudo apresentado decorreu numa turma do 7º ano de escolaridade, no ambiente natural da aula e a análise dos dados foi feita de uma forma descritiva e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Tratou-se de uma forma de investigação intervencionista onde se procurou criar e avaliar novas condições de aprendizagem. Pretendeu-se analisar e compreender como é que os alunos se apropriaram da calculadora gráfica, artefacto mediador, na resolução de uma tarefa e como conseguiram construir conceitos matemáticos, com a orquestração da professora. Foi nossa intenção validar a conjetura de ensino-aprendizagem (Cobb et al., 2003), que assentou no seguinte pressuposto: *"Quando a aprendizagem decorre no ambiente*

[5] Na literatura atual, também se podem encontrar designações como *Design-Based on Research (Investigação Baseada em Design – IBD), Design Experiments, Design Studies e Development Research.*

social da aula, em que se promovem produções individuais, resultantes da realização de tarefas, com recurso à calculadora gráfica e posterior discussão coletiva, orquestrada pela professora, pode gerar-se uma maior facilidade na perceção de significados matemáticos". Tratou-se de uma dinâmica não muito vulgar neste nível de ensino.

Tendo em conta o facto da experiência de ensino ter sido realizada com todos os alunos da turma, decidiu-se optar pela modalidade estudo de caso, de modo a obter uma observação mais minuciosa e dados mais consistentes sobre a atividade dos discentes, pois "O estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 89). Neste sentido, recaiu uma observação mais minuciosa sobre duas alunas, que vamos denominar ficticiamente por Maria e Berta. Esta opção deveu-se ao facto das mesmas apresentarem características semelhantes no que concerne ao seu percurso académico na disciplina de Matemática, boa capacidade oral e escrita, bom comportamento, disponibilidade e motivação para participar no estudo.

A experiência de ensino apresentada, foi dinamizada pela professora titular da turma, onde a mesma assumiu o duplo papel de professora-investigadora o que teve como consequência bastante tempo dispendido e um grande esforço intelectual. No entanto, o processo foi facilitado na medida em que a investigadora estava inteiramente integrada na investigação, pois foi a autora da conjetura de aprendizagem, dominava os conteúdos a serem explorados, foi ouvinte, orquestrou as discussões e foi avaliadora (Confrey & Lachance, 2000).

As técnicas utilizadas para recolher os dados foram baseadas em relatórios escritos dos alunos, observação direta, imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica e diário de bordo (Creswell, 2012).

A tarefa apresentada aos alunos: "A minha mão"

A implementação de uma experiência de ensino em sala de aula, obedece a várias fases: preparação, experimentação e análise retrospetiva do estudo de investigação (Cobb et al, 2003; Cobb et al, 2016).

A fase de preparação incide numa clarificação das intenções teóricas subjacente à descrição de conjeturas sobre anteriores aprendizagens, bem como especificação dos objetivos e recursos inerentes à concretização do estudo. De modo a documentar adequadamente a ecologia de aprendizagem, deverão ser elaboradas as respetivas planificações em que figurem várias formas de recolha de dados (Cobb et al, 2003; Cobb et al, 2016).

A tarefa (figura 2) foi concebida pela professora titular da turma, que assumiu o duplo papel de professora-investigadora. A planificação da mesma, teve em consideração o currículo prescrito de acordo com as orientações plasmadas no Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013).

Tendo em conta o potencial semiótico do artefacto, pretendeu-se fortalecer o conceito de gráfico cartesiano, apreendido no 5º ano e compreender que um gráfico cartesiano é uma das formas de representar uma função, consolidando o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos.

1. Numa folha quadriculada, desenha um referencial cartesiano e traça sobre o mesmo o contorno da palma da tua mão. Com lápis ou caneta, marca 24 pontos. Depois dos pontos marcados indica as coordenadas na seguinte tabela:

	abcissa	**ordenada**	**coordenadas**
1º ponto			(,)
2º ponto			(,)
3º ponto			(,)
…			(,)
24º = 1º ponto			(,)

Nota: Os pontos da tabela devem estar numerados de acordo com a sequência de construção da mão. O último tem de ser igual ao primeiro para a imagem ficar fechada.

Utilizando a calculadora gráfica, traça o gráfico poligonal correspondente aos pontos representados na tabela anterior. Desenhaste a palma da tua mão sobre um referencial cartesiano. Será que esta representação corresponde a uma função? Justifica a tua resposta.

2. Em que condições é que um gráfico cartesiano, representa uma função?

Figura 2 – A tarefa apresentada aos alunos: A minha mão"

A fase de experimentação do estudo é inerente à implementação do mesmo, na aula, onde o professor/investigador analisa os raciocínios dos alunos e testa e revê as conjeturas inicialmente propostas. Com o propósito de analisar a evolução das conjeturas e realizar possíveis questões sobre as mesmas, no decorrer do estudo deve-se recorrer a alguns instrumentos de recolha de dados, tais como a observação participante, relatórios escritos dos alunos e registos áudio e vídeo. Múltiplas fontes de dados asseguram que a análise retrospetiva do estudo empiricamente fundamentado, tenha credibilidade, na medida em que o mesmo fará parte de ciclos subsequentes de conceção (Cobb et al, 2003; Cobb et al, 2016).

A tarefa (figura 2) foi realizada individualmente e no final da mesma, os alunos foram convidados a fazer um relatório sobre o processo desenvolvido e as suas descobertas. Posteriormente, foram analisadas as produções individuais de cada aluno, tendo-se desenvolvido a discussão coletiva, gerida pela professora, promovendo a evolução de significados pessoais dos alunos em direção a significados matemáticos.

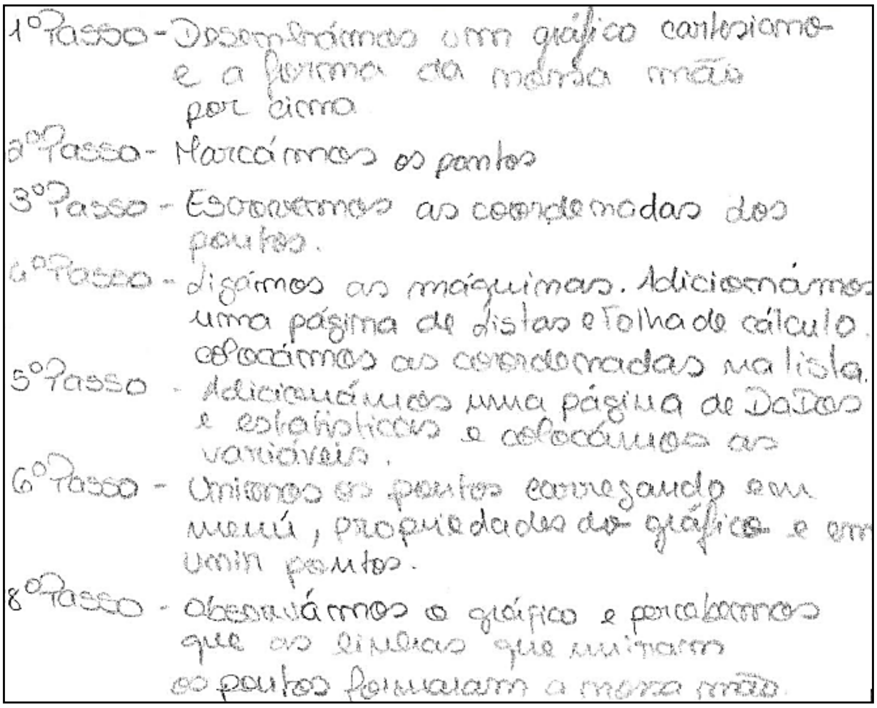
Por último, a fase da análise retrospetiva do estudo de investigação poderá contrastar com as análises que foram feitas no decorrer do mesmo, na medida em que estas tiveram o objetivo de apoiar a aprendizagem dos alunos. A análise retrospetiva dos resultados relata situações de aprendizagem, em que se desenvolveram conjeturas testáveis tendo em conta os meios que foram utilizados. Existe a necessidade de explicar "O que funcionou" sustentado pela preocupação de clarificar "como, quando e porque" funcionou (Cobb et al , 2003; Cobb et al, 2016).

Apresentação e análise dos resultados

É através da experiência e conhecimentos prévios que os alunos constroem e compreendem os conceitos matemáticos (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007). Então, antes da realização da tarefa, foi feita uma breve revisão sobre referenciais cartesianos, ortogonais e monométricos, abcissas, ordenadas, coordenadas e gráficos cartesianos. Estes conceitos tinham sido lecionados no 5º ano. Por sua vez, no que concerne ao 7º ano, foi abordado na aula anterior, o conceito de função, através de alguns exemplos do dia a dia.

Evidenciou-se os conceitos de objeto, imagem, domínio, contradomínio, conjunto de partida e conjunto de chegada. Também foi feita alusão a várias formas de representar uma função, tais como diagrama de setas e tabelas.

Numa primeira etapa foi distribuida a tarefa e os alunos iniciaram a resolução da mesma, onde foram evidenciados esquemas de utilização, no que concerne à gestão que fizeram do artefacto, calculadora gráfica, conforme a descrição realizada pela aluna Berta, na figura 3.

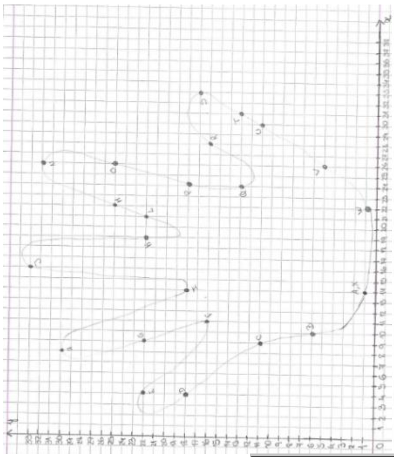


1º Passo - Desenhámos um gráfico cartesiano e a forma da minha mão por cima
2º Passo - Marcámos os pontos
3º Passo - Escrevemos as coordenadas dos pontos.
4º Passo - ligámos as máquinas. Adicionámos uma página de listas e folha de cálculo. colocámos as coordenadas na lista.
5º Passo - Adicionámos uma página de Dados e estatísticas e colocámos as variáveis.
6º Passo - Unimos os pontos carregando em menú, propriedades do gráfico e em unir pontos.
8º Passo - observámos o gráfico e percebemos que as linhas que uniram os pontos formaram a minha mão.

Figura 3 – Descrisão das etapas necessárias para a resolução da tarefa, pela aluna Berta

Inicialmente, o contacto com o artefacto fomentou a emergência de signos, que foram registados no relatório solicitado e plasmados posteriormente na discussão coletiva. A discussão coletiva iniciou-se com a *ação de retorno à tarefa* (Mariotti, 2018), onde a professora solicitou a intervenção dos alunos para fazerem os seus relatos, relativamente à tarefa realizada. Operacionalizou-se o primeiro passo no processo de mediação semiótica que consistiu em promover a emergência de signos pessoais relacionados com o uso do artefacto, evoluindo para signos matemáticos, num ambiente social de aprendizagem, a aula.

Maria: Professora, olhe como ficou a minha mão! A que eu desenhei e depois na calculadora!



	abcissa	ordenada	coordenadas
1º ponto	14	1	A (14,1)
2º ponto	10	6	B (10,6)
3º ponto	9	11	C (9,11)
4º ponto	4	18	D (4,18)
5º ponto	4	22	E (4,22)
6º ponto	11	16	F (11,16)
7º ponto	9	22	G (9,22)
8º ponto	8	30	H (8,30)
9º ponto	14	18	I (14,18)
10º ponto	16	33	J (16,33)
11º ponto	19	22	K (19,22)
12º ponto	21	22	L (21,22)
13º ponto	22	25	M (22,25)
14º ponto	26	32	N (26,32)
15º ponto	28	25	O (28,25)
16º ponto	24	18	P (24,18)
17º ponto	24	13	Q (24,13)
18º ponto	28	16	R (28,16)
19º ponto	33	17	S (33,17)

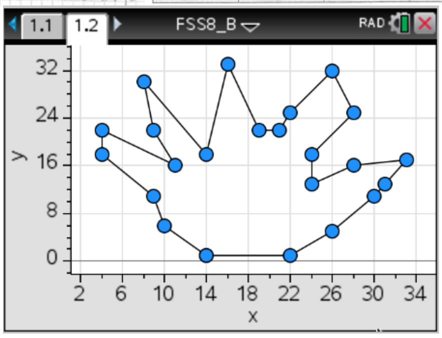
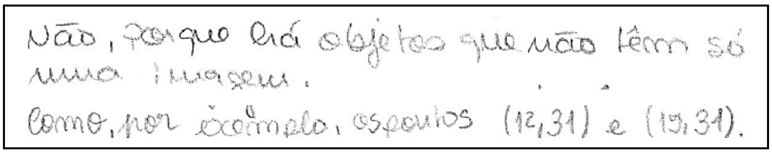


Figura 4 – As resoluções da Maria inerentes à tarefa: "A minha mão"

Gerou-se uma polifonia de vozes. Vários alunos mostraram as suas resoluções. Um aspeto curioso! Todos os alunos desenharam as suas mãos no 1º quadrante do referencial cartesiano. Entretanto, a Berta mostra à professora as suas conclusões, relativamente à questão 1, da tarefa, onde se pretendia saber se a palma de uma mão desenhada sobre um referencial cartesiano corresponde a uma representação de uma função.



Não, porque há objetos que não têm só uma imagem.
Como, por exemplo, os pontos (12,31) e (15,31).

Figura 5 – Resposta da Berta relativamente à questão 1 da tarefa

Perante as conclusões de Berta, a professora solicita que a aluna enuncie as mesmas, em voz alta.

Berta: Eu acho que não é função, porque há objetos com mais do que uma imagem. Por exemplo, o par (12,31) e o par (15,31).

Maria: Desculpa! Isso está errado! O 12 e o 15 são objetos diferentes e têm a mesma imagem. Professora, eu escrevi que não é função porque a cada abcissa corresponde mais de uma ordenada, e dei o exemplo dos pontos (24,18) e (24,13). Está certo, não está? Se eu fizer um **corte** na mão, estes pontos estão na mesma **linha**.

A Berta utilizou significados contraditórios. Aproxima-se do conceito de função, tem noção que existe uma correspondência unívoca, no entanto, faz confusão entre os conceitos, objeto e imagem. Por outro lado, tendo em conta o facto de Maria ter utilizado os signos pessoais, "linha" e "corte", a professora intervém intencionalmente, pois os mesmos tendem a movimentar-se para signos matemáticos, "reta" e "interseção". Nesta fase operacionalizou-se a *ação de focalização* (Mariotti, 2018).

Professora: Certo, Maria! Mas, linha, corte? Que linha? Qual corte? Não estou a entender!

Maria: Professora, se eu fizer passar uma linha na mão, a linha corta a mão, nesses dois pontos e isso não pode acontecer! Ah! Que giro! Às vezes corta em três pontos e noutros em quatro pontos.

Professora: Uma linha curva?

Maria: Como eu tenho dois pontos, (24,18) e (24,13), por exemplo, tenho uma reta! E essa reta corta o gráfico em dois pontos.

Professora: Mas os pontos que a Berta referiu (12,31) e (15,31), também estão sobre a mesma reta e essa reta interseta o gráfico, em pelo menos dois pontos.

Maria: Professora, mas a reta tem de estar na vertical e com os pontos da Berta, [a reta] está na horizontal. Porque uma abscissa só pode ter uma e uma só ordenada, mas a mesma ordenada pode ter muitas abcissas.

Berta: Pois é! Devia de ter dito um objeto que tivesse mais do que uma imagem. Os pontos que eu disse, pode ser função. Ontem, a professora deu o caso dos gémeos, que são pessoas diferentes e que a fotografia é igual e pode ser função.

No sentido de se dar uma descontextualização dos signos pessoais, procedendo-se à sua movimentação para signos matemáticos, a professora *solicitou uma síntese* (Mariotti, 2018).

Professora: Então, quem é que consegue sintetizar a resposta à questão 1?

Berta: A representação da minha mão não é uma função porque existem objetos que têm diferentes imagens. Se eu fizer passar uma reta vertical, ela corta o gráfico em mais que um ponto. Eu fiz confusão com a tabela. No gráfico é que se vê bem.

Perante a primeira parte da afirmação da Berta, a professora constatou que a aluna usou uma linguagem formal inadequada. O modo como a aluna construiu o conceito de função não estava compativel com a matemática reconhecida por um especialista (Bussi & Mariotti, 2008). A professora colocou uma questão à aluna, de modo a perceber se se tratou apenas de um problema de comunicação.

Professora: Então Berta, relativamente aos pontos que representaste na tabela, será que essa correspondência representa uma função?

Berta: Sim, porque cada objeto tem uma e uma só imagem.

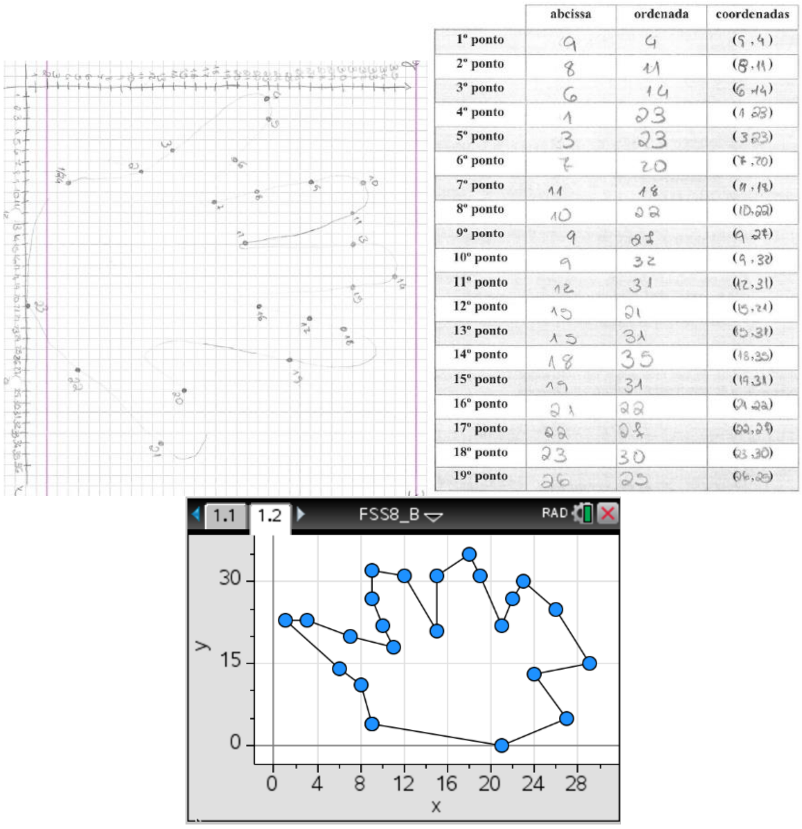
Professora: Tens a certeza? Olha bem para a tabela!

Berta: Que confusão! O 15 tem dois resultados! Duas imagens! Pois o [objeto] 15 tem duas imagens! Então, não é!

Professora: Não é, o quê?

Berta: Não é função!

Professora: Muito bem! Penso que agora está percebido!



	abcissa	ordenada	coordenadas
1º ponto	9	4	(9,4)
2º ponto	8	11	(8,11)
3º ponto	6	14	(6,14)
4º ponto	1	23	(1,23)
5º ponto	3	23	(3,23)
6º ponto	7	20	(7,20)
7º ponto	11	18	(11,18)
8º ponto	10	22	(10,22)
9º ponto	9	27	(9,27)
10º ponto	9	32	(9,32)
11º ponto	12	31	(12,31)
12º ponto	15	21	(15,21)
13º ponto	15	31	(15,31)
14º ponto	18	35	(18,35)
15º ponto	19	31	(19,31)
16º ponto	21	22	(21,22)
17º ponto	22	27	(22,27)
18º ponto	23	30	(23,30)
19º ponto	26	25	(26,25)

Figura 6 – As resoluções da Berta inerentes à tarefa: “A minha mão”

Entretanto, a Maria começou a movimentar os pontos do gráfico cartesiano, utilizando a função de arrastamento da calculadora e transformou-o num polígono convexo.

Maria: Professora, neste caso, a reta continua a cortar o gráfico em dois pontos, com a mesma abscissa e ordenada diferente.

A técnica de arrastamento inerente ao software de geometria dinâmica, da calculadora gráfica, permitiu que Maria, ao poder observer vários gráficos diferentes, verificasse a sua conjetura.

De modo a tornar explícitos os significados matemáticos e os significados construídos através da discussão na aula, a professora interveio com a oferta de uma síntese, relativamente à questão 2 (Mariotti, 2018), evidenciando a propriedade de um gráfico cartesiano que representa uma função: sempre que qualquer reta paralela ao eixo Oy, interseta o gráfico num único ponto.

Conclusão

As alunas utilizaram esquemas de utilização, no que concerne à resolução da parte instrumental da tarefa, com a calculadora gráfica. A aluna Maria foi mais longe, ao confirmar a sua conjetura, através do esquema de utilização, técnica de arrastamento.

Para Berta a realização da tarefa com recurso à calculadora gráfica, não demonstrou ter sido uma mais valia na construção de conceitos matemáticos. A aluna evidenciou uma certa dificuldade em distinguir a diferença entre objeto e imagem, assim como construir formalmente o conceito de função. No entanto, estes aspetos "parece-nos" que foram colmatados com a discussão coletiva e a insistente orquestração da professora.

Para Maria, o artefacto, calculadora gráfica, permitiu compreender em que condições um gráfico cartesiano corresponde à representação de uma função. Deu-se a transformação do artefacto em instrumento, que juntamente com a intervenção da professora, na gestão da discussão coletiva, fomentou o emergir dos significados pessoais, tais como "corte" e "linha", articulando-se com os significados matemáticos, "interseção" e "reta". O mesmo funcionou como um instrumento de mediação semiótica, facilitador da construção de conceitos matemáticos. Neste sentido, confirmou-se a conjetura de ensino-aprendizagem, formulada inicialmente, que assentou no pressuposto de que quando a aprendizagem decorre no ambiente social da aula, em que se promovem produções individuais, resultantes da realização de tarefas, com recurso à calculadora gráfica e posterior discussão coletiva, orquestrada pela professora, pode gerar-se uma maior facilidade na perceção de significados matemáticos.

Referências

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bussi, M. G. B. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in mathematics classroom* (pp. 65–84). Reston, VA: NCTM.

Bussi, M.G.B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. Recuperado de http://www.cfem.asso.fr/actualites/bartolini-mariotti_handbook.

Clements, D. H. (2008). Design Experiments and curriculum research. In Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 410-422). Routledge: New York and London. Recuperado de http://samples.sainsburysebooks.co.uk/9781317639640_sample_645428.pdf.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: an analysis and critique. In L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 481-503). New York, NY, USA: Routledge.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., Bell, K., & Carrejo, D. (2001). *Systemic crossfire: What implementation research reveals about urban reform in mathematics.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Seattle, WA.

Creswell, J. W. (2012). *Educacional Research, Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. (4 th ed.). Boston: Pearson.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: *Vol. 2. Cases and perspective*s (pp. 363–392). Charlotte, NC: Information Age.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In: C. Hoyles, & J-B. Lagrange, (Eds.), *Mathematics education and technology rethinking the terrain* (pp. 88-132). New York: Springer.

Gomes, A. S. (2001). *Développement conceptuel consécutif à l'activité instrumentée: l'utilisation d'un système informatique de géométrie dynamique au collège*. Presses universitaires du Septentrion.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Kelly, A. E. (2003). Research as design: The role of design in educational research. *Educational Researcher,* 32(1), 3-4.

Leung, A. (2008). Dragging in dynamic geometry environment through the lens of variation, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 135–157.

Lopes, L., & Domingos, A. (2015). A utilização da calculadora gráfica no currículo do ensino básico: uma experiência no 8º ano. *Educação e Matemática*, *131*, 45-48.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities software for teaching-learning in mathematics classroom: the semiotic potential of artefacts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology Mathematics Education* (pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME.

Mariotti, M. A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. In Atas XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2000).

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer.

Pedro, M. Manuela Subtil (2013). *A experiência Veiga Simão na matemática nos terceiro e quarto anos (1972-1975).* Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Schwartz, D. L., Chang, J., & Martin, L. (2008). Instrumentation and innovation in design experiments: Taking the turn towards efficiency. *Handbook of design research methods in education*, *650*, 47-67.

Steff, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experimente methodology: Underlying principles And essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematcs and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students´command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society, the Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.

O USO DO GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO E COMPREENSÃO DE MÚLTIPLAS DEFINIÇÕES DE UM MESMO QUADRILÁTERO

Catarina Cruz

Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação

cmcruz@esec.pt

Armando Gonçalves

Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação

adsgoncalves@esec.pt

Ana Santiago

Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação

asantiago@esec.pt

Fernando Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação

fmlmartins@esec.pt

Nuno Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação

nmartins@esec.pt

Resumo: Durante muito tempo, o ensino da Matemática privilegiou a introdução dos conceitos a partir de uma definição dada *à priori*, desvalorizando a ação dos estudantes na construção e exploração de outras possíveis definições. Investigações realizadas têm mostrado e defendido a importância do papel do estudante enquanto elemento ativo na construção do seu próprio conhecimento, e das definições em particular. Neste sentido, os Ambientes de Geometria Dinâmica têm-se revelado ferramentas importantes, uma vez que auxiliam a compreensão de conceitos matemáticos, promovem a visualização, a exploração e a descoberta.

Neste texto é apresentada uma parte de um estudo mais alargado que tem como objetivo analisar a possível influência do uso do *software* GeoGebra na validação e construção de múltiplas definições de um mesmo quadrilátero. O estudo foi realizado com estudantes da Licenciatura em Educação Básica de uma Instituição de Ensino Superior, tendo sido utilizada uma metodologia de natureza qualitativa, de índole interpretativa.

A análise dos resultados evidencia que existe compreensão e construção de diferentes definições de um mesmo quadrilátero por partes dos estudantes quando estes recorrem ao uso

de um *software* de geometria dinâmica, nomeadamente no uso de diferentes propriedades envolvendo diagonais.

Palavras-chave: Geometria, definições, quadriláteros, GeoGebra, formação inicial de professores.

Introdução

O ato de definir como ponto de partida da atividade matemática influencia a conceção de definição por parte do estudante (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). A ideia, ainda persistente, do ensino sustentado no formato que apresenta a definição antes de exemplos e exploração de propriedades (de Villiers, 2017) limita o papel do estudante no processo de definir, bem como na criação de múltiplas definições para um mesmo conceito.

As definições em Geometria têm motivado vários estudos focando-se a investigação, nomeadamente, na compreensão do processo de definir e na necessidade de definir (Sinclair et al., 2017). No caso particular das definições de quadriláteros, sugere-se que os estudantes sejam envolvidos em atividades de validação e construção de possíveis definições, uma vez que os leva a discutir as características e o papel das definições (Brunheira & Ponte, 2016), bem como em atividades para gerar figuras a partir de suas propriedades (Herbst, Gonzalez & Macke, 2005). A literatura salienta o potencial dos Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) no processo de definir existindo vários estudos empíricos que apontam neste sentido, do qual destacamos o de Govender e de Villiers (2004). Segundo Sinclair et al., "tais abordagens parecem ajudar os estudantes a desenvolver os conceitos de modo mais robusto e dinâmico do que o tradicional protótipo, no qual as imagens são estáticas e tendem a não favorecer as definições inclusivas" (Sinclair et al., 2017, p. 282).

Numa Unidade Curricular da área de Matemática, do plano de estudos da Licenciatura em Educação Básica de uma Instituição de Ensino Superior, na qual três dos investigadores são docentes, observou-se, durante a realização de tarefas propostas nas aulas bem como num momento de avaliação, uma tendência dos estudantes para definirem quadriláteros a partir apenas das propriedades relacionadas com os lados e ângulos, bem como o recurso a excesso de informação. A partir dessas observações emergiu o seguinte problema: que artefacto se poderá utilizar para os estudantes conseguirem compreender e construir múltiplas definições de um mesmo quadrilátero?

Assim, para dar resposta a este problema efetuou-se um estudo exploratório, do qual uma parte é aqui apresentada, dedicado à compreensão e construção de definições com recurso ao *software* GeoGebra.

As fragilidades, referidas anteriormente, identificadas nestes estudantes, vão ao encontro de outros estudos já realizados, em particular, Govender e de Villier (2004), no qual este estudo exploratório se baseou. Também Brunheira e Ponte (2016), num estudo cujo objetivo foi a caracterização da atividade de definir quadriláteros por futuros professores, verificaram tendências semelhantes da parte dos estudantes, evidenciando, inicialmente, conceções erradas sobre o que é uma definição, focando-se apenas nas proprieadades necessárias das figuras, que se revelaram simples quando relacionadas com os elementos visíveis das figuras ou com factos bem conhecidos.

No entanto, o estudo exploratório que aqui se apresenta, incidindo também nas definições de quadriláteros, foca-se essencialmente na construção e compreensão de múltiplas definições de um mesmo quadrilátero com o recurso ao *software* GeoGebra, pretendendo-se que os estudantes desmistifiquem a ideia da existência de uma única definição para um mesmo conceito bem como dar-lhes a possibilidade de intervir ativamente no processo de definir, validando e construindo definições.

Assim, este estudo exploratório tem como objetivo desenvolver a validação, compreensão e construção de múltiplas definições de um mesmo quadrilátero, por estudantes da formação inicial de professores, usando o *software* GeoGebra. Foi dada particular atenção ao princípio mínimo das definições, isto é, definir com um conjunto mínimo de condições. É objetivo desta investigação compreender as possíveis implicações do uso do *software* GeoGebra na valiação e construção de múltiplas definições de um quadrilátero.

Enquadramento teórico

As definições em Matemática, em particular em Geometria, são frequentemente apresentadas aos estudantes de modo direto, não exigindo o seu envolvimento no processo de definir. De acordo com de Villiers (2017), persiste ainda a ideia de que uma boa prática de ensino fornece primeiramente as definições como ponto de partida para o trabalho que se segue. Desta metodologia de ensino transparece a ideia de que a Matemática começa sempre com uma definição e que as definições de objetos matemáticos são dadas à *priori* (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). Segundo esta visão, o estudante é um mero recetor de informação, memorizando muitas vezes a definição desprovida de compreensão. Nesta abordagem, uma definição é tendencialmente apresentada como única, induzindo o estudante a pensar, erradamente, que existe um único modo de definir um dado conceito matemático. Desde há muito tempo que matemáticos e educadores matemáticos, tais como Freudenthal (1973), Vinner (1991) e de Villiers (1998), têm contrariado esta ideia, defendendo um papel ativo do estudante no processo de definir. Vários estudos têm sido desenvolvidos neste sentido, são disso exemplo os estudos de Brunheira e Ponte (2016) e Govender e de Villiers(2004).

Muitas vezes o ato de definir é confundido com o ato de descrever, não sendo feita essa distinção. Segundo Herbst, Gonzalez e Macke (2005), as definições não são descrições. Numa definição não importa apenas a clareza no uso de uma palavra mas também a forma sucinta como a definição é formulada. Neste sentido, é importante envolver os estudantes em contextos que lhes permitam identificar condições mínimas, necessárias e suficientes, para definir um objeto matemático. Govender e de Villiers (2004) referem que investigações realizadas por vários matemáticos e educadores matemáticos, entre eles Linchevsky, Vinner e Karsenty (1992), indicam que muitos futuros professores não compreendem que as definições em Geometria têm de ser económicas, isto é, não devem conter informação supérflua, e que são arbitrárias no sentido de poderem existir várias definições alternativas.

Winicki-Landman e Leinkin (2000), baseados nos trabalhos de Khinchin (1968), Poincaré (1909/1952), Solow (1984) e Vinner (1991), apresentaram um conjunto de princípios lógicos que devem ser considerados na definição de conceitos matemáticos:

a) definir é dar um nome: a afirmação usada como uma definição apresenta o nome do conceito e este (nome) aparece uma única vez na afirmação;
b) uma definição estabelece condições necessárias e suficientes para o conceito;
c) na definição de um novo conceito, apenas podem ser usados conceitos previamente definidos;
d) o conjunto de condições necessárias e suficientes deve ser mínimo;
e) uma definição é arbitrária.

O princípio mínimo das definições, referido na alínea d), é crucial no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Govender e de Villiers (2004) para distinguir as definições económicas das definições não económicas consideram se o conjunto de condições necessárias e suficientes usadas para definir é mínimo ou não.

Moise (1975) destaca, nas definições geométricas, a importância das figuras, realçando que quase toda a definição geométrica pode ser, e geralmente é, precedida por uma figura que transmite uma ideia intuitiva. Segundo o mesmo, a definição pode ser confrontada com a figura, com o intuito de verificar se transmite a ideia que deve transmitir. Neste sentido, os AGD constituem ferramentas poderosas, uma vez que permitem a construção de figuras dinâmicas favorecendo, em particular, a validação bem como a construção de definições geométricas. São inúmeros os estudos que realçam a importância destes ambientes no processo de definir (Sinclair et al., 2017).

Os *softwares*de geometria dinâmica são ferramentascom crescente aplicação no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria (Clements,& Battista, 1992; de Villiers, 1996, 1998, 2017; Duval, 1998; Laborde 1992, 1995, 2001). Segundo Trindade (2010), com a sua utilização, a aprendizagem centra-se nas ferramentas de que o estudante dispõe e não no discurso do professor. Estes *softwares* permitem, através de transformações dinâmicas, manipular construções importantes para a compreensão de propriedades geométricas bem como modificar figuras, observando as propriedades que permanecem invariantes, revelando-se instrumentos potentes, não apenas na compreensão de definições, mas também na sua construção. Segundo Skovsmose (2008), é incentivado no estudante o espírito de descoberta, levando-o a colocar questões e a procurar explicações.

Diversos estudos evidenciam o potencial dos AGD na compreensão e construção de definições. São exemplos, Kaur (2015), Gal e Lew (2008) e de Villiers et al. (2009), que destacam a influência dos AGD no processo de definir, em particular, pelo facto de permitirem a realização de construções dinâmicas de figuras geométricas, a partir de suas propriedades, e cuja modificação por arrastamento de seus elementos possibilita a visualização de inúmeros exemplos de um mesmo conceito. Tal potencialidade, promove, entre outros, a compreensão das definições inclusivas, a validação de definições e a análise de condições necessárias e suficientes.

Opções metodológicas e contexto de intervenção

Este estudo exploratório é de natureza qualitativa, de índole interpretativa (Bogdan & Bicken, 2013), sendo parte de um estudo mais alagardo no âmbito da utilização do GeoGebra como um possível artefacto para a compreensão, validação e construção de definições. O estudo foi efetuado com 43 estudantes do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica de uma Instituição de Ensino Superior, no ano letivo de 2017/2018, que se encontravam a frequentar uma Unidade Curricular da área de Matemática, lecionada por três dos investigadores, correspondendo o grupo de estudantes envolvidos no estudo a uma escolha por conveniência. Estes estudantes têm uma formação pré-universitária heterogénea, evidenciando, na sua maioria, lacunas no conhecimento matemático. O único contacto que os estudantes tiveram com o *software* GeoGebra até ao momento do estudo, ocorreu em duas aulas da Unidade Curricular na qual este se desenvolveu.

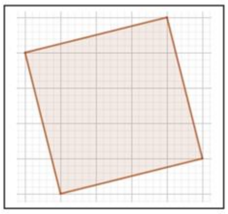
Nesta Unidade Curricular, no tópico Geometria no Plano, foram abordados os quadriláteros, tendo sido feita inicialmente a exploração das suas propriedades e sua classificação sem recurso a qualquer tipo de *software* de geometria dinâmica ou outro meio tecnológico.

De entre os vários softwares de geometria dinâmica, optámos, neste estudo pelo *software* GeoGebra por ser gratuito e de fácil acesso aos estudantes.

O período de recolha dos dados considerados neste trabalho foi organizado em três momentos que serão apresentados e analisados nexte texto: fase inicial, sessão com o GeoGebra e fase final. Na fase inicial, pretendeu-se perceber que conceção os estudantes têm de definição, que propriedades dos quadriláteros usualmente são referidas na sua caracterização e definição (no caso particular do quadrado), se conseguem caracterizar quadriláteros a partir de um conjunto mínimo de condições, necessárias e suficientes, aceitado-o como uma possível definição. Na sessão com o GeoGebra, pretendeu-se explorar propriedades de quadriláteros, analisar condições que são necessárias ou suficientes para a sua definição, validar e construir diferentes definições para um mesmo quadrilátero. Na fase final, procurou-se verificar se, para as mesmas questões da fase inicial, depois do trabalho desenvolvido com o GeoGebra, houve mudanças relativamente ao seu desempenho.

A fase inicial do estudo consistiu na resolução individual das tarefas apresentadas na Figura 1, sem recurso a *software* de geometria dinâmica:

Numa aula de Matemática foi proposto o jogo "Adivinha quem sou eu!". No jogo há cartas com uma figura que representa um quadrilátero. O aluno terá de descrever o quadrilátero aos colegas, sem o mostrar, de modo que os colegas consigam adivinhar qual o quadrilátero representado. O João recebeu a seguinte carta.



1.Ajude o João a descrever o quadrilátero dando o menor número de pistas possível.

2.Apresente uma definição do quadrilátero representado na carta.

Figura 1 – Tarefas propostas na fase inicial

Estas tarefas tiveram como objetivo analisar o desempenho dos alunos na identificação de características do quadrado, de um conjunto mínimo de condições necessárias e suficientes para a sua descrição e no reconhecimento de tais descrições como uma definição de quadrado.

Na sessão com o GeoGebra, os alunos agruparam-se em pares. De acordo com uma apreciação prévia do desempenho dos pares, foi selecionada, para análise, uma díade que consideramos ser representativa das produções dos alunos. Os dois elementos que fazem parte da díade serão designados por Aluno X e Aluno Y, respetivamente. Nesta sessão, foram propostas tarefas (Figura 2) que envolveram a manipulação de construções dinâmicas criadas previamente pelos investigadores (Figura 3). A opção de recorrer a construções criadas pelos investigadores deveu-se ao facto de, até ao momento, os alunos terem tido pouco contacto com o *software* GeoGebra, propondo-lhes, deste modo, tarefas nas quais o *software* não fosse um entrave ao seu desempenho. A tarefa foi entregue em papel aos alunos, tendo estes acedido ao ficheiro GeoGebra através da plataforma da Unidade Curricular onde se encontrava disponível. Cada díade possuía um ou dois computadores pessoais com o GeoGebra instalado.

Intencionalmente, não foi feita qualquer introdução ou interpretação conjunta da tarefa, uma vez que se pretendia que o trabalho fosse desenvolvido autonomamente pelos alunos, inclusive a sua interpretação. Relativamente ao GeoGebra, uma vez que a manipulação das construções bem como o trabalho sobre as mesmas requeriam o uso de ferramentas já conhecidas dos alunos, foram dedicados, inicialmente, apenas uns breves minutos à revisão das ferramentas disponíveis. Nesta sessão, os investigadores docentes assumiram, sobretudo, o papel de orientadores, esclarecendo pontualmente questões relacionadas com o manuseamento do *software* GeoGebra. Os alunos trabalharam colaborativamente, trocando entre si opiniões e discutindo aspetos relativos às tarefas propostas. A tarefa não foi discutida no grupo turma uma vez que a sua discussão poderia comprometer o trabalho sugerido na sessão seguinte integrada no estudo mais alargado.

Numa prova foi pedido aos alunos que definissem losango. Considere três respostas dadas pelos alunos A, B e C, respetivamente.

A. Um quadrilátero com dois pares de lados adjacentes congruentes.

B. Um quadrilátero no qual as diagonais se bissetam e são perpendiculares.

C. Um quadrilátero com as diagonais perpendiculares e congruentes.

1. Analise a veracidade de cada resposta a partir das construções realizadas no GeoGebra. Relativamente a cada resposta que considerar incorreta, o que acrescentaria ou modificaria de modo a torná-la correta?

2. Defina losango de modos distintos.

Figura 2 – Tarefaspropostas na sessão com o GeoGebra

As tarefas apresentadas na Figura 2 foram acompanhadas de um ficheiro GeoGebra contendo três construções dinâmicas (Figura 3). No quadrilátero [ABCD] os pontos A, C e E são movíveis, mantendo-se as diagonais perpendiculares. No quadrilátero [FGHI] os pontos F e H são movíveis, mantendo-se dois pares de lados consecutivos congruentes. No quadrilátero [JKLM] são movíveis os pontos J, K e L, as diagonais são perpendiculares e bissetam-se. Nas construções, os alunos poderiam proceder às medições que considerassem necessárias bem como testar posições relativas de determinados elementos geométricos.

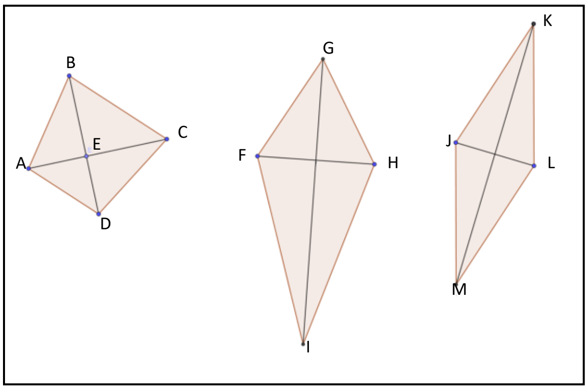


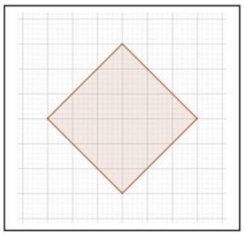
Figura 3 – Representações das construções dinâmicas realizadas com o GeoGebra

A tarefa 1 teve como finalidade, através da manipulação das construções, verificar se cada uma das afirmações apresentadas conduz obrigatoriamente à definição de losango. A afirmação A é uma condição necessária mas não suficiente para a definição de losango. No caso da afirmação C, é apresentada uma condição necessária mas não suficiente (diagonais perpendiculares) e uma condição não necessária (diagonais congruentes). A afirmação B é uma definição de losango uma vez que a conjunção das condições é necessária e suficiente para a sua definição.

Na tarefa 2, pretendeu-se que os alunos, a partir da exploração de propriedades realizada até ao momento, apresentassem diferentes definições de um mesmo quadrilátero.

A fase final do estudo consistiu na resolução individual das tarefas apresentadas na Figura 4, coincidentes com as tarefas propostas na fase inicial, sem recurso ao *software* GeoGebra.

Numa aula de Matemática foi proposto o jogo "Adivinha quem sou eu!". No jogo há cartas com uma figura que representa um quadrilátero. O aluno terá de descrever o quadrilátero aos colegas, sem o mostrar, de modo que os colegas consigam adivinhar qual o quadrilátero representado. O João recebeu a seguinte carta.



1. Ajude o João a descrever o quadrilátero dando o menor número de pistas possível.

2. Defina quadrado.

Figura 4 – Tarefas propostas na fase final

A recolha de dados para este estudo foi feita através de registos escritos dos investigadores (diário de bordo), bem como de produções escritas dos alunos, com e sem o GeoGebra. Para analisar e interpretar os dados recolhidos, foram tidos em consideração os tipos de definição descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – Tipos de definição e respetiva descrição (Govender & de Villiers, 2004)

Tipos de definição	**Descrição**
Definição correta	Apresenta condições necessárias e suficientes.
Definição incorreta	Apresenta condições incorretas ou insuficientes.
Definição económica	Apresenta um conjunto mínimo de condições necessárias e suficientes.
Definição não económica	Apresenta condições necessárias e suficientes, embora com mais informação do que a necessária (informação redundante).

Apresentação e discussão de resultados

Nesta secção são apresentados e discutidosos resultados obtidos ao longo dos três momentos, fase inicial, sessão com o GeoGebra e fase final, permitindo-nos analisar uma possível influência deste AGD.

Nas duas tarefas que integraram a fase inicial, resolvidas sem recurso ao Geogebra, o AlunoX apenas respondeu à tarefa 2:

~~O quadrilátero representado tem todos os lados e ângulos congruentes.~~
~~As diagonais bissetam-se, intersetando-se no ponto médio~~
~~Lad~~ Lados e ângulos congruentes.

Figura 5 – Resposta do Aluno X à tarefa 2

O Aluno X responde com uma definição económica, no entanto, evidencia alguma hesitação ao indicar inicialmente uma definição não económica (que se encontra rasurada).

Nesta fase, o AlunoY apresentou as respostas que constam nas Figuras 6 e 7, às tarefas 1 e 2, respetivamente.

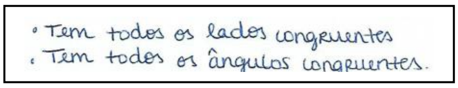

• Tem todos os lados congruentes
• Tem todos os ângulos congruentes.

Figura 6 – Resposta do Aluno Y à tarefa 1

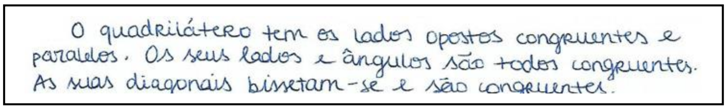

O quadrilátero tem os lados opostos congruentes e paralelos. Os seus lados e ângulos são todos congruentes. As suas diagonais bissetam-se e são congruentes.

Figura 7 – Resposta do Aluno Y à tarefa 2

Na resposta à tarefa 1 (Figura 6), o Aluno Y respeita o que lhe é pedido, isto é, o uso de um conjunto mínimo de condições, eapresenta uma definição económica. No que diz respeito à tarefa 2 (Figura 7), não tendo sido imposto o uso de um conjunto mínimo de condições, para além das condições apresentadas na tarefa 1, o Aluno Y acrescenta outras condições, redundantes, apresentando uma definição não económica.

Relativamente à sessão com o GeoGebra, uma vez que nesta sessão os alunos trabalharam em pares, apresentaremos as respostas dadas pelo par selecionado, formado pelos alunos X e Y.

Durante a sessão, os alunos envolveram-se colaborativamente nas tarefas propostas, discutindo e partilhando ideias. As dificuldades evidenciadas inicialmente, no manuseamento do GeoGebra, rapidamente foram superadas. Começamos por analisar as respostas da díade à tarefa 1 da sessão com Geogebra.

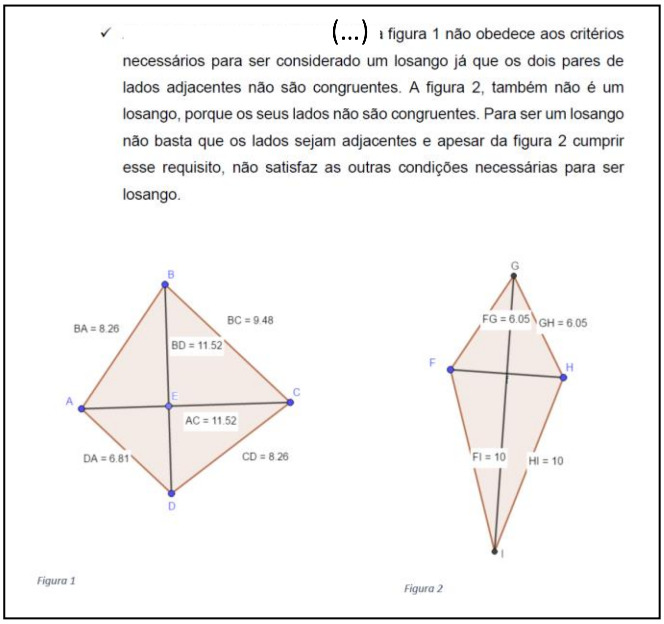

✓ (...) figura 1 não obedece aos critérios necessários para ser considerado um losango já que os dois pares de lados adjacentes não são congruentes. A figura 2, também não é um losango, porque os seus lados não são congruentes. Para ser um losango não basta que os lados sejam adjacentes e apesar da figura 2 cumprir esse requisito, não satisfaz as outras condições necessárias para ser losango.

Figura 8 – Análise da afirmação A da tarefa 1 pela díade

Na análise da afirmação A (Figura 8), os alunos manipularam as construções dos quadriláteros [ABCD] e [FGHI], mediram os comprimentos dos lados e, no caso do quadrilátero [ABCD], mediram também os comprimentos das diagonais. Os alunos apresentaram os quadriláteros da Figura 8 como exemplos de não losangos, reforçando assim a sua análise. Note-se, que o quadrilátero [ABCD] não satisfaz a afirmação A, não sendo um bom exemplo, o que poderá ter decorrido de dificuldades na interpretação da afirmação. No entanto, os alunos usam este quadrilátero para fazerem referência à necessidade da condição A na definição de losango ("dois pares de lados adjacentes congruentes"). O quadrilátero [FGHI] permitiu aos alunos mostrar a não suficiência da afirmação em análise dizendo que seria exigível que todos os lados fossem congruentes ("não é um losango, porque os seus lados não são congruentes"). A resposta apresentada revela um discurso pouco coerente e com algumas imprecisões do ponto de vista matemático.

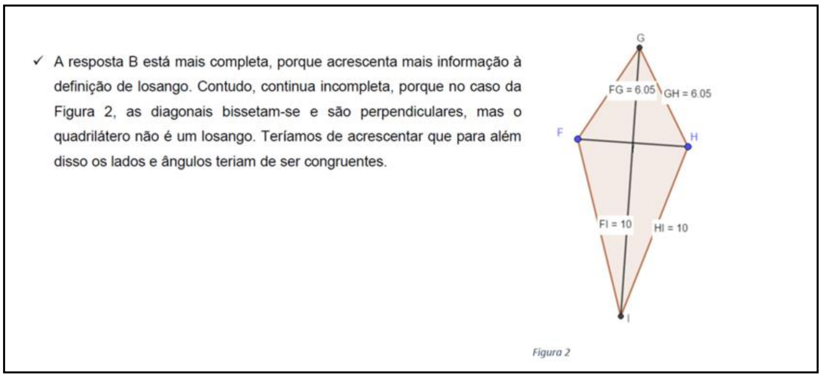


Figura 9 – Análise da afirmação B da tarefa 1 pela díade

A análise da afirmação B (Figura 9), por estar apoiada numa figura que não corresponde às condições da afirmação (as diagonais não se bissetam), induziu os alunos a uma resposta confusa e incorreta. No entanto, estes reconhecem que as condições da afirmação vão mais ao encontro da definição ao dizerem que "(…) acrescenta mais informação à definição de losango".

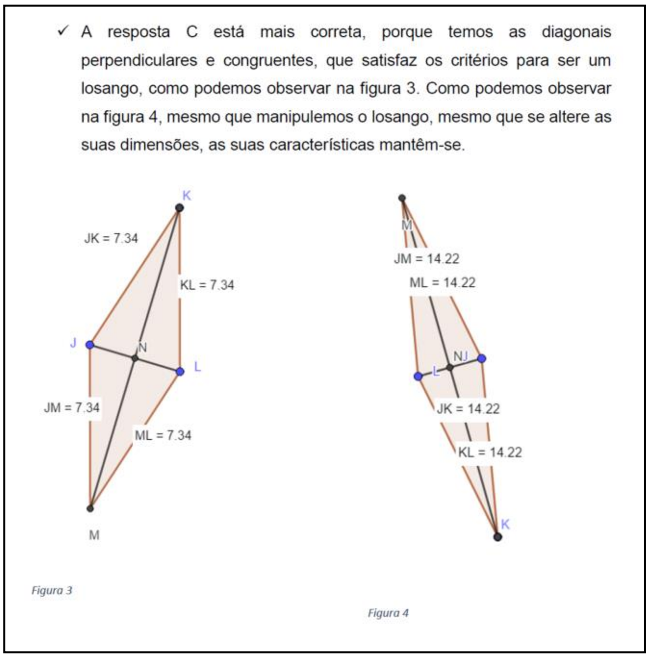


Figura 10 – Análise da afirmação Cda tarefa 1 pela díade

Relativamente à afirmação C (Figura 10), tal como na análise da afirmação B, os alunos auxiliam a sua resposta em figuras que não satisfazem as condições da afirmação (diagonais congruentes). Evidenciam alguma confusão ao referirem, na sua resposta, a necessidade da congruência das diagonais para ser losango apresentando, no entanto, exemplos de losangos cujas diagonais não são congruentes.

Na resposta à tarefa 2, os alunos apresentaram duas definições de losango:

✓ Um losango é um quadrilátero com os lados e ângulos opostos congruentes

Figura 11 – Primeira definição de losango apresentada pela díade

✓ Um losango tem os lados adjacentes congruentes e paralelos dois a dois e as suas diagonais bissetam-se e são perpendiculares. A figura 5 cumpre todos os requisitos para ser um losango.

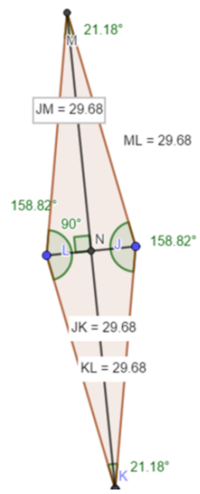


Figura 12 – Segunda definição de losango apresentada pela díade

Na primeira definição (Figura 11), os alunos expõem características envolvendo unicamente os conceitos de lado e de ângulo. Em contrapartida, na segunda definição (Figura 12), os alunos recorrem também a propriedades das diagonais.

É de notar que, ambas as definições são não económicas, isto é, as duas apresentam condições redundantes. No que diz respeito à primeira definição, a condição "ângulos opostos congruentes" é desnecessária uma vez que pode ser deduzida da condição "lados congruentes", sendo esta necessária e suficiente.

Na segunda definição, são apresentadas quatro condições:

a) os lados adjacentes congruentes;
b) lados paralelos dois a dois;
c) as diagonais bissetam-se;
d) diagonais são perpendiculares.

Tal como já foi referido, a definição é não económica. De facto, a condição "os lados adjacentes congruentes" é necessária e suficiente para definir losango. A partir das condições b), c) e d) é possível construir duas definições económicas combinando b) com d) e c) com d).

Nas definições apresentadas nota-se o recurso a diferentes propriedades dos losangos. Os alunos evidenciam alguma dificuldade em verificar que algumas condições são redundantes uma vez que são dedutíveis de outras também apresentadas.

Por fim, analisemos as respostas individuais dos alunos X e Y às questões colocadas na fase final, sem recurso ao GeoGebra.

Na fase final, o Aluno X apresentou as respostas seguintes (Figuras 13 e 14) às tarefas 1 e 2, respetivamente:

As diagonais são congruentes e bissetam-se

Figura 13 – Resposta do Aluno X à tarefa 1

Quadrado é um quadrilátero com ângulos e lados congruentes e os seus ângulos são retos. As suas diagonais bissetam-se e são perpendiculares.

Figura 14 – Resposta do Aluno X à tarefa 2

Na resposta à tarefa 1, o Aluno X apresenta condições necessárias à descrição do quadrilátero e cuja conjunção não é uma condição suficiente para a sua caracterização, pois conduz à noção de retângulo (não necessariamente quadrado). Assim, o Aluno X apresenta uma definição incorreta. Relativamente à tarefa 2, apresenta uma definição não económica. É de notar que, na resposta à tarefa 2, nas propriedades das diagonais, o Aluno X não refere que são congruentes, como tinha feito na tarefa 1.

O Aluno Y apresentou as respostas seguintes (Figuras 15 e 16) às tarefas colocadas:

- os lados / ângulos são congruentes
- as diagonais bissetam-se.

Figura 15 – Resposta do Aluno Y à tarefa 1

Um quadrado é um quadrilátero com os lados opostos todos congruentes, bem como os seus ângulos (todos retos). As suas diagonais são congruentes e bissetam-se, sendo perpendiculares.

Figura 16 – Resposta do Aluno Y à tarefa 2

Na resposta à tarefa 1, o Aluno Y apresenta excesso de informação, uma vez que lhe é pedida uma descrição do quadrilátero a partir de um conjunto mínimo de condições, apresentando uma definição não económica.

Quanto à tarefa 2, o aluno apresenta também uma definição não económica. É de notar que, as condições apresentadas envolvendo as diagonais seriam necessárias e suficientes para definir quadrado.

Analisando de uma forma genérica as produções dos alunos nos três momentos, observamos que, quando é pedida uma definição, os alunos tendencialmente apresentam definições não económicas, tal como em Brunheira e Ponte (2016) bem como em Govender e de Villiers (2004), descrevendo as propriedades que conhecem do quadrilátero em questão, revelando, como sugerem Herbst, Gonzalez e Macke (2005), confusão entre o ato de descrever e de definir. Nas definições não económicas, a presença de informação redundante, revela dificuldade na análise de condições que são dedutíveis a partir de outras também apresentadas.

A caracterização de um quadrilátero a partir do uso de um conjunto mínimo de condições apenas é feita, e nem sempre corretamente, quando é explicitamente pedido, não sendo reconhecida pelos alunos como definição do quadrilátero, uma vez que respondem de modo distinto às duas questões apresentadas nas fases inicial e final. Tal, reforça a ideia de que uma definição deve conter toda a informação relativa ao que se está a definir.

Ao longo da sessão com o GeoGebra, os alunos foram ultrapassando algumas dificuldades sentidas inicialmente, manifestando gradualmente um maior à-vontade com a ferramenta. Nesta sessão, os alunos evidenciaram algumas lacunas no conhecimento matemático,como é visível na resposta à tarefa 1 (Figuras 8, 9 e 10). No entanto, com o manuseamento do *software* parece haver um progressivo domínio das propriedades e conceitos associados aos quadriláteros, como se constata na resposta à tarefa 2 da mesma sessão, bem como na fase final do estudo.

Comparando o desempenho dos alunos nas diferentes fases do estudo, verificou-se, na sessão com o GeoGebra e na fase final, o recurso mais frequente a propriedades envolvendo elementos menos evidentes dos quadriláteros, como as diagonais, na construção de diferentes definições de um mesmo quadrilátero. A identificação e compreensão de outras propriedades parece ser uma consequência do recurso ao GeoGebra, notando, no entanto, que na tarefa 1 da sessão com o GeoGebra são referidas propriedades que envolvem as diaginais e que de algum modo poderão influenciar o desempenho dos alunos.

Considerações Finais

Na análise das produções dos alunos verificou-se uma tendência para definir de modo não económico. Tal poderá decorrer da conceção que os alunos têm de definição, como uma descrição de todas as características associadas ao conceito, ou de dificuldades em identificar condições redundantes, isto é, de condições dedutíveis a partir de outras consideradas.

A eficácia de certas ferramentas digitais, como os AGD, bem como a sua maior disponibilidade, têm influenciado as principais áreas de investigação, como o processo de prova e o uso e o papel das definições (Sinclair et al., 2017). Nas tarefas propostas com recurso ao *software* GeoGebra, envolvendo a validação e construção de definições, observou-se um maior à-vontade no usoe domíniode propriedades dos quadriláteros, em particular, envolvendo as diagonais.Esta possível influência do uso do *software* na compreensão de propriedades e, consequentemente, na consrução de diferentes definições de um mesmo quadrilátero, vai ao encontro do que é referido na literatura (Sinclair et al., 2017), no sentido de os AGD alterarem significativamente as representações geométricas e o discurso em comparação com as abordagens de papel e lápis.

Este estudo, desenvolvido com estudantes da formação inicial de professores, permitiu desmistificar algumas ideias associadas à conceção de definição matemática. O envolvimento dos estudantes em tarefas nas quais assumiram um papel ativo no processo de definir, como é sugerido por Freudenthal (1973), Vinner (1991) e de Villiers (1998), usando, neste caso particular, o *software* GeoGebra, possibilitou o confronto de diferentes propostas de definição de um mesmo conceito. Este estudo, para além de se ter revelado determinante para os estudantes envolvidos, pretendeu também ser um possível exemplo para a sua prática profissional enquanto possíveis futuros professores. Por outro lado, é também um contributo para a melhorias das práticas na formação inicial de professores visando um ensino com e para a compreensão.

Referências

Bodgan, R., & Biklen, S. (2013).*Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Brunheira, L., & Ponte, J.P. (2016). Prospective teachers work on defining quadrilaterals through an exploratory approach. *Didactica Mathematicae*, *38*, 33-56.

Clements D. H., & Battista M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, 420-464. New York, Macmillan.

de Villiers, M. (1996), Future of Secondary School Geometry, *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4 November, Pretoria.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define?. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME 22(2)*, 248-255. Stellenbosch, RSA.

de Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. In T.V. Craine & R. Rubinstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*, 189-203. Reston, VA: NCTM.

de Villiers, M. (2017). An Example of Constructive Defining: From a Golden Rectangle to Golden Quadrilaterals and beyond. *At right angles, 6(1),*64-69.

Duval R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry For the 21st Century: an ICMI study*, 33-48. Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as na educational task*. Dordrecht: Reidel.

Gal, H., & Lew, H. C. (2008). Is a rectangle a parallelogram? Towards a bypass of Van Hiele Level 3 decision making. In H. N. Jahnke & H. C. Lew (Eds.), *The 11th International Congress on Mathematics Education*. Mexico: Monterrey.

Govender, R., & de Villiers, M. (2004). A dynamic approach to quadrilateral definitions. *Pythagoras*, *58*, 34-45.

Herbst, P., Gonzalez, G., & Macke, M. (2005). How Can Geometry Students Understand What It Means to Define in Mathematics?.*The Mathematics Educator*, *15(2)*, 17-24.

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles. *ZDM: International Journal on Mathematics Education*, *47*(3), 407-420.

Khinchin, A.Y. (1968). *The teaching of mathematics*. London: The English Universities Press.

Laborde C. (1992). Solving problems in computer based geometry environments: the influence of the features of the software. *ZentralbalttfürDidaktik des Mathematik*, *(4)*,128-135.

Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer based environment. In L. Burton & B. Jaworski (Eds.), *Technology in Mathematics Teaching – a Bridge Between Teaching and Learning*, 35-68. London: Chartwell-Bratt.

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6 (3),* 283-317.

Linchevsky, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992), To be or not to be minimal? Student teachers views about definitions in geometry. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sisteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 2,* 48-55. Durham, USA.

Moise, E. (1975). The meaning of Euclidean geometry in school mathematics. *The Mathematics Teacher*, *68*, 472-477.

Poincaré, H. (1909/1952). *Science and method*. New York, NY: Dover.

Sinclair, N., Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs*, 277-287. Hamburg, Germany.

Skovsmose (2008). *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. São Paulo: Papirus.

Solow, D. (1984). *Reading, writing and doing mathematical proofs. Book I.* Palo Alto, CA: DaleSeymour.

Trindade, S. (2010). *Contributo dos ambientes de geometria dinâmica para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática*. Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias, Lisboa.

Vinner, S. (1991). The role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics*, *20(1),* 17-21.

APRENDIZAGEM DO CÁLCULO PARA ECONOMISTAS – CARATERIZAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO NÍVEL SUPERIOR

Jorge Dias Veloso

Escola Superior Pedagógica da Lunda-Norte — Universidade Lueji A'Nkonde, Dundo, Lunda-Norte

jdveloso@yahoo.com.br

Resumo: O objeto do estudo é a aprendizagem do Cálculo I à luz das teorias APOS e da Reificação de Dubinsky e Sfard, respetivamente. Ambas teorias cognitivistas são consequentes do Construtivismo Cognitivista de Piaget. Permitiram-nos perceber melhor como os alunos constroem o seu conhecimento, bem como fenómenos e situações que interferem na sua construção. Com base numa metodologia de natureza aplicada, com uma abordagem ao problema qualitativa, descritiva e interpretativa, bem como procedimentos próprios de um estudo de caso, foram analisados dados recolhidos dos alunos a quem foram aplicados questionários seguidos de entrevistas. O estudo, realizado numa instituição de formação superior de Angola, incidiu inicialmente sobre 10 alunos e, posteriormente, restringiu-se a um número de três alunos. Obtiveram-se conclusões valiosas tanto para quem investiga como para quem ensina ou aprende conteúdos de Cálculo I. De uma maneira geral os alunos têm maior compreensão operacional do que concetual, manifestada predominantemente no desempenho algébrico. A associação entre a interiorização e a reificação feita pelos alunos nem sempre é de sucesso-sucesso ou de insucesso-insucesso. A aprendizagem dos alunos é heterogénea resultando de fatores como o seu nível de preparação, seu empenho e tipo de abordagem do Cálculo.

Palavras-chave: Função, Aprendizagem do Cálculo, Conceitos do Cálculo, Ensino Superior.

Introdução

As dificuldades dos alunos decorrentes, dentre outros motivos, (1) de ineficiência da metodologia de ensino e de aprendizagem, (2) de dificuldade de articular os diferentes conteúdos, leva-nos a considerar o seguinte problema de investigação: Como caraterizar a aprendizagem do Cálculo?

Da colocação que se apresenta do problema, destacam-se três perspetivas para o seu estudo: o professor, o aluno e o conteúdo, consequentemente as atividades que protagonizam, o ensino e a aprendizagem. Pretende-se, para melhor compreender e propor uma solução para o problema, estudá-lo do ponto de vista da aprendizagem do aluno. É importante realçar que o foco deste estudo é o aluno, as demais perspetivas serão consequentemente estudadas.

A investigação tem como objetivo geral caraterizar a aprendizagem dos alunos e identificar cenários metodológicos que favoreçam a aprendizagem do Cálculo. São objetivos específicos: (1) Caraterizar o nível de preparação dos alunos para o Cálculo; (2) Descrever o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem do Cálculo; (3) Caraterizar a aprendizagem dos alunos no Cálculo.

Enquadramento teórico

As teorias APOS e da Reificação, ambas construtivistas, na sua essência, trazem uma abordagem semelhante. Ambas enriquecem a mesma teoria da aprendizagem de que são oriundas, a Teoria Construtivista Cognitivista, dando profundidade ao contributo de Piaget, enquadrando os seus conceitos na aprendizagem da Matemática, construindo e apresentando novos conceitos que contribuem para um melhor entendimento do fenómeno da aprendizagem da Matemática. Ambas se socorrem de linguagens de programação para reforçar a diferença que tanto procuram clarificar entre operação — ação e/ou processo — e objeto, entre raciocínio ao nível deste e daquele. Ambas, como não podia deixar de ser, na sua condição de teorias cognitivistas, abordam a estrutura mental do indivíduo, explicam a sua evolução na construção do conhecimento matemático, estabelecem uma hierarquia que tem como nível mais baixo a operacionalização de conceitos e o mais alto os conceitos como objetos. Ambas reconhecem que essa hierarquização é cíclica à medida que o tempo passa e se vai estudando novos conceitos que congregam outros anteriores, normalmente de menor complexidade. Em determinados momentos uma vai mais a fundo que a outra, uma apresenta mais detalhes que a outra, mas ainda assim são semelhantes na sua abordagem sobre a aprendizagem da Matemática.

Tabela 1 – Comparação entre as teorias APOS e da Reificação

	Teoria APOS	Teoria da Reificação
Estruturas mentais consideradas	Ação, processo, objeto e esquema	Processo, unidade compacta e objeto
Mecanismos mentais considerados	Interiorização, capsulamento, coordenação, reversão descapsulamento, tematização e generalização	Interiorização, condensação e reificação
Conceitos considerados a nível da operacionalização	Ação, processo e interiorização	Interiorização, processo, condensação e unidade compacta
Conceitos considerados a nível de objetos	Objeto, esquema, capsulamento, coordenação, reversão descapsulamento, tematização e generalização	Reificação e objeto

David Tall (1992) afirma que há diferença na abrangência e na profundidade com que se aborda o Cálculo em diversas realidades. Para o autor, quanto à abrangência e à profundidade, o Cálculo classifica-se em: **1**. cálculo informal; **2**. análise formal; **3**. ideias infinitesimais baseadas em análises não padronizadas; **4**. abordagens computacionais utilizando uma ou mais das instalações de manipulação gráfica, numérica e simbólica, com ou sem programação.

Dando ênfase ao conceito de limite de uma função, Tall (1992) apresenta uma lista de dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo: • imagens mentais restritas de funções, • a notação de Leibniz - uma "ficção útil" ou um significado genuíno, • dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo, • dificuldades em selecionar e usar representações apropriadas, • manipulação algébrica — ou falta dela, • dificuldades em absorver novas idéias complexas em um tempo limitado, • dificuldades em lidar com quantificadores em definições multiplamente quantificadas, • consequente preferência do aluno por métodos procedimentais, em vez de compreensão conceitual.

A partir dos dados estudados, Domingos (2003) pôde agrupar os níveis de conceito imagem que podem (co)existir na mente do aluno em três meta-categorias: conceito imagem incipiente, instrumental e relacional. Considera-se conceito imagem incipiente aquele que está mais próximo à Matemática Elementar, considera-se conceito imagem relacional aquele próximo à Matemática Avançada e considera-se conceito imagem instrumental o que se encontra a nível intermédio, na zona de transição entre os dois anteriores. Para chegar à categoriazação acima, o autor teve em conta diferentes domínios utilizados nas teorias cognitivas consideradas no estudo: objetos, processos, tradução entre representações, principais propriedades e pensamento proceptual.

Para Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) o conceito de função é central para a aprendizagem da Matemática a nível de graduação, fundamental para a Matemática moderna e essencial para as ciências. Consideram também que o seu empobrecido entendimento contribui para o insucesso escolar. Os autores defendem um ensino que promova conceções ricas, habilidades de raciocínio poderosas de modo a despertar curiosidade e interesse nos alunos e, consequentemente, sucesso escolar.

Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), apoiados nas estruturas mentais ação e processo da teoria APOS, caraterizam comparativamente as visões de ação e de processo dos alunos sobre funções. Fazem recomendações sobre como passar de uma visão para outra: (1) Pedir aos alunos que expliquem os factos básicos da função em termos de entrada e saída; (2) Perguntar sobre o comportamento de funções em intervalos inteiros, além de pontos únicos; (3) Pedir aos alunos para fazer e comparar julgamentos sobre funções em várias representações.

Segundo Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), a aplicação do raciocínio covariacional é uma forma de se construir a visão de processo das funções. Os autores decompõem o raciocínio covariacional em cinco ações mentais e nos respetivos comportamentos exteriorizados pelos alunos. Em síntese, o que os autores fazem é uma descrição das estruturas mentais ação e processo, bem como do mecanismo mental interiorização, como forma de se transitar da primeira estrutura mental para a segunda. Os autores apresentam atividades desenvolvidas com funções, descrevem e fundamentam os fenómenos associados às mesmas e, mais adiante, caraterizam as estruturas mentais e o mecanismo mental de transição entre elas.

Carlson, Madison, & West (2015) apresentam-nos a taxonomia da Prontidão do Conceito de Cálculo (PCC) — Calculus Concept Readiness (CCR) — como base de construção do instrumento, com o mesmo nome, de avaliação das habilidades de raciocínio e dos entendimentos fundamentais para a aprendizagem do Cálculo. “The CCR is a 25-item multiple-choice instrument that can be used as a placement test for entry into calculus and to assess the effectiveness of precalculus level instruction.” (Carlson, Madison, & West, 2015, p. 209). O PCC é um instrumento de 25 itens feito com base na taxonomia de 23 itens do PCC. Os 23 itens da taxonomia estão distribuídos em cinco categorias, nomeadamente (1) Habilidade de raciocínio; (2) Compreender, representar e interpretar padrões de crescimento de função; (3) Compreender e usar os conceitos ou ideias de grandeza, variável, inclinação / taxa constante de variação, taxa média de variação, composição de função, função inversa, translações (horizontais e verticais) de funções; (4) Compreender ideias centrais da trigonometria; (5) Outras habilidades. Apesar do valor do instrumento PCC e dos seus critérios, os autores deixam aberta a possibilidade de ajustes às condições e ao currículo locais. Fica clara a flexibilidade do instrumento sem, no entanto, perder a sua essência constante da sua taxonomia.

Um dos conceitos fundamentais para os alunos na aprendizagem do Cálculo é o de variável, aliás como também é reconhecido pela Taxonomia de PCC. Trigueros & Usini (2003), com os objetivos de (1) analisar as dificuldades dos alunos, (2) fazer observações em sala de aula, (3) dar tratamento a livros didáticos e de (4) desenvolver e testar design instrutivo, criaram o "Modelo de 3 Usos da Variável (3UV)". Neste modelo as variáveis são classificadas em três categorias: incógnita, número genérico e variáveis relacionadas. Incógnita é um símbolo cujo valor pode ser encontrado mediante resolução. Número genérico refere-se ao significado associado ao símbolo em expressões genéricas em que seja necessário realizar operações algébricas. Um caso particular dos números genéricos são os parâmetros. Variáveis relacionadas são as que constituem os símbolos dependente e independente como, por exemplo, numa relação funcional.

Em síntese, podemos afirmar que as teorias APOS e da Reificação descrevem a aprendizagem como ciclos contidos uns nos outros ou entrelaçados. Quanto mais sólidas forem as passagens pelos subciclos que compuserem o ciclo — ciclo em curso, ciclo do novo conceito em aprendizagem —, (sem considerar outros fatores como o nível de empenho do aluno e o tipo de abordagem do conceito) maior solidez terá este ciclo. Podemos também afirmar que Tall (1992) apresenta-nos uma importante categorização das dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem do Cálculo que, cruzada com a categorização do nível de compreensão dos conceitos feita por Domingos (2003), permite-nos melhor classificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos. A Taxonomia de Prontidão do Conceito de Cálculo (PCC) de Carlson, Madison, & West (2015) acrescenta uma terceira dimensão à análise das dificuldades de aprendizagem dos alunos, tornando-a mais minuciosa e ajustada ao tipo de abordagem do Cálculo. Permite ajustar melhor a análise ao currículo considerado. O modelo 3UV de Trigueros & Usini (2003) é um bom instrumento de observação das transições que o raciocínio do aluno faz pelos subconceitos de variável, permitindo-nos melhor compreender o raciocínio do aluno sobre grandeza e sobre função.

Metodologia

Este estudo foi feito na Escola Superior Politécnia do Namibe, unidade orgânica da Universidade Mandume Ya Ndemufayo, localizada na cidade Moçâmedes, província do Namibe, em Angola. A mesma instituição foi criada à luz do Decreto Presidencial 236/11 de 29 de agosto que aprova o Estatuto Orgânico da Universidade Mandume Ya Ndemufayo. O trabalho de campo, incluindo a recolha de dados, foi feito ao longo dos anos letivos[1] 2014, 2015, 2016 e 2017. O ano letivo 2016 foi de recolha efetiva de dados principalmente ao longo do primeiro semestre, período em que se lecionou a unidade curricular Matemática I. O curso de Contabilidade e Gestão com uma duração de cinco anos, sendo quatro letivos e um de elaboração e defesa de um trabalho de fim de curso, tem como principais perfis de saída o de técnico de contas e o de gerente. Claro está que o curso não visa formar matemáticos nem professores de matemática.

Por pretendermos trabalhar com condições contextuais — o que, segundo Yin (2001), confere significância e pertinência ao fenómeno estudado —, dando profundidade à abordagem ao problema, optámos por uma investigação, quanto à natureza, aplicada, quanto à forma de abordagem do problema, qualitativa, descritiva e interpretativa, e, quanto aos procedimentos, estudo de caso. Em relação ao estudo de caso, importa destacar cinco caraterísticas relevantes consideradas para a sua escolha:

[1] Em Angola os anos letivos ocorrem dentro de um único ano civil e não em dois.

> Destacamos cinco características básicas do estudo de caso: é um sistema limitado e tem fronteiras em termos de tempo, eventos ou processos, as quais nem sempre são claras e precisas; é um caso sobre algo, que necessita ser identificado para conferir foco e direção à investigação; é preciso preservar o caráter único, específico, diferente, complexo do caso; a investigação decorre em ambiente natural; o investigador recorre a fontes múltiplas de dados e a métodos de coleta diversificados: observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, narrativas, registros de áudio e vídeo, diários, cartas, documentos, entre outros. (Prodanov & Freitas, 2013, 64)

Recolha de dados: foram feitas entrevistas aos alunos e à professora, foram aplicados questionários aos alunos, foram estabelecidos diálogos com outros professores de Matemática da mesma instituição em que decorreu o estudo, foram feitas anotações ao longo das aulas e foram revistos os cadernos dos alunos. A recolha dos dados empíricos dos alunos decorreu no ano letivo 2016, com maior intensidade no primeiro semestre, altura em que foi lecionada a unidade curricular Matemática I (denominação curricular do Cálculo no primeiro semestre).

Neste estudo foram elaborados e aplicados três questionários, nomeadamente (1) questionário de caraterização dos alunos, (2) questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos e (3) questionário dirigido aos professores. O primeiro e o terceiro questionários foram elaborados pelo investigador, o segundo foi elaborado pelo investigador com ajuda da professora da unidade curricular Matemática I. O primeiro questionário foi de aplicação mais abrangente, pois foi aplicado aos 160 alunos constituintes da população do nosso estudo. Felizmente, por serem alunos de duas turmas, matinal e noturna, controladas pela mesma professora e na mesma instituição de formação, o retorno dos questionários preenchidos foi de 96,89%. Os alunos receberam-no como atividade a desenvolver nos dois primeiros dias de aula e apresentaram-no no segundo e no terceiro dias de aula, 140 no segundo dia de aula e 15 no terceiro dia. Apesar de se pedir os nomes dos participantes nos questionários, ao serem aplicados, sempre se frisou que a confidencialidade dos dados recolhidos estava garantida. O questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos, segundo questionário, foi aplicado a 10 alunos selecionados, no quarto dia de aula, à margem da aula, em ambiente vigiado, durante quatro tempos, com tolerância de um tempo, conforme solicitação dos alunos. O questionário dirigido a professores, com o intuito de melhor conhecer três professores de Matemática com experiência no ensino do Cálculo, foi aplicado na segunda semana de aula.

Embora tenham decorridos outros diálogos informais, consideramos um total de duas entrevistas. As mesmas tiveram como objetivo averiguar factos resultantes de análises previamente feitas a respostas a questionários. Deste modo, revelou-se mais adequado o tipo de entrevista despadronizada ou não estruturada, dando liberdade aos entrevistados de falar sobre determinado assunto. O entrevistador foi incentivando e direcionando os entrevistados a se debruçar sobre os aspetos em que mais carecia de informação e, deste modo, foi consolidando ou descartando informações previamente recolhidas.

À medida que a investigação foi decorrendo, fruto da aplicação do questionário de caraterização dos alunos, reduzimos o grupo de alunos observados obtendo, assim, uma amostra não probabilística de 10 alunos do curso de Contabilidade e Gestão de um total de 160 alunos. Este curso é lecionado em dois regimes: o regular (matinal e vespertino) e o pós-laboral (noturno). Em 2016 tinha inscritos 60 alunos no regime regular e 100 no pós-laboral. Assim, consideramos a população do estudo os 160 alunos inscritos no 1.º ano em 2016. Dentro do plano curricular do curso, a unidade curricular estudada é denominada Matemática I e é lecionada com uma carga horária de seis tempos semanais.

Aos 10 alunos aplicámos o questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos, pois tinham idades compreendidas entre os 18 e os 20 anos, são formados a nível secundário em Ciências Físicas e Biológicas em três instituições diferentes e, do Ensino Secundário para o Ensino Superior, não ficaram anos letivos sem estudar. Os 10 alunos declararam ter conhecimentos de funções, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral de 3 a 5 — numa escala de 1 a 5 —, ou seja, de médio a muito bom, com maior predominância das opções 3 e 4, médio e bom, respetivamente. Nenhum dos 10 alunos trabalhava, todos eles apenas estudavam. De maneira geral os alunos consideraram a Matemática importante para o seu curso por permitir aplicar métodos e fórmulas à sua área de formação. Nenhum dos 10 alunos manifestou aversão à Matemática. Em poucas palavras, considerando a caraterização feita, são os alunos que melhores condições reuniam para a aprendizagem do Cálculo.

A aplicação do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos permitiu-nos identificar três alunos com melhores condições para a aprendizagem da Matemática I. No referido questionário, assente em conceitos previamente lecionados no Ensino Secundário, com seis questões sobre função, quatro sobre diferenciação e três sobre integração, os três alunos apresentaram melhor desempenho, melhor nível de compreensão dos conceitos, o que se confirmou com a entrevista feita a seguir. Com estes três alunos demos sequência à investigação, analisando os seus desempenhos nas duas provas parcelares realizadas ao longo da lecionação da unidade curricular.

Discussão

Para apresentação de excertos do tratamento de dados, tomamos como referência o desempenho da aluna Ana[2]. A seguir apresentamos respostas a questões do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos, da 1.ª e da 2.ª prova parcelares, bem como as respetivas discussões.

Caraterização do conceito de função

As questões que se seguem, acompanhadas pelo desempenho da aluna e pela análise do investigador, foram extraídas do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos, questionário assente em conceitos do Ensino Secundário, visando aferir o nível de preparação dos alunos.

Questão 1: *O que entende por função?* Espera-se da resposta (Figura 1) da aluna uma ideia o mais aproximada possível da definição de função, não necessariamente uma definição com todo o rigor que encerra. Procura-se caraterizar o nível de compreensão do conceito de função que o aluno tem.

Figura 1 – Resposta à questão 1

> Entrevistador: Quer acrescentar alguma coisa ao conceito que apresentou de função no questionário?
>
> Ana: [silêncio reflexivo]
>
> Entrevistador: Quer falar um pouco da relação existente entre os conjuntos A e B?
>
> Ana: Posso dar exemplo?

[2] Nome fictício.

Entrevistador: Conforme preferir.

Ana: Por exemplo, na questão 2 a relação que existe entre os conjuntos A e B é $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ porque permite transformar elementos do conjunto A em elementos do conjunto B.

O conceito de função apresentado pela Ana revela-se incompleto, pelo que não se consegue perceber que conjunto corresponde ao domínio e que conjunto corresponde ao contradomínio, não se consegue também perceber como a relação pode ser expressa e que conjunto ela transforma no outro. O conceito está incompleto, mas não necessariamente errado e, na descrição que a aluna tem a oportunidade de fazer ao longo da entrevista, podemos perceber que ela tem maior domínio do conceito de função do que aquilo que apresenta por escrito, ou seja, apoiando-se na expressão analítica da questão 2, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, explicou como associar elementos do conjunto A a elementos do conjunto B. À medida que reflete sobre o conceito de função, em parte por força dos exercícios que lhe são apresentados, a aluna vai reconhecendo e adicionando propriedades ao seu conceito de função, ou seja, ocorre aprendizagem. A aluna revela um nível de compreensão do conceito de função instrumental.

Questão 2: *Dada a função* $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$*. a) Determine a sua imagem nos pontos 2, -*$\frac{1}{2}$*, -2 e 0; b) Determine o seu domínio*. Procura-se caracterizar de que forma alguns procedimentos de cálculo relacionados com as funções são operacionalizados. A Ana apresenta a seguinte resolução (Figura 2):

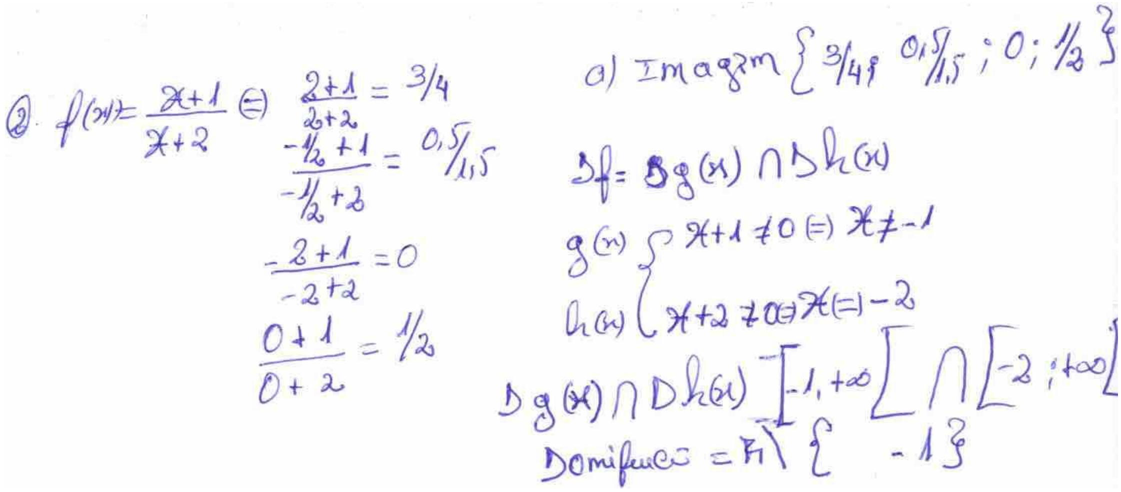


Figura 2 – Resposta à questão 2

Na questão 2 (Figura), pedia-se a imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ nos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0. Falta algum rigor na apresentação das imagens dos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0. Todas elas são apresentadas na mesma sequência de passos, sem indicação do ponto cuja imagem se está a calcular, o que facilmente confunde observadores menos atentos. Na apresentação da imagem do ponto $-\frac{1}{2}$, o resultado é uma fração cujos numerador e denominador são dízimas, o que, mesmo não estando errado, não corresponde ao que é padrão na apresentação de resultados fracionários. O padrão é apresentar a fração simplificada, portanto, falta aqui a reificação dos conhecimentos sobre fração, o que dificulta obter e trabalhar com objetos fracionários. Na apresentação da imagem do ponto -2, em vez de simplesmente parar em $\frac{1}{0}$ e declarar que não existe imagem no ponto de abscissa -2, colocando a seguir o símbolo $\nexists$, segue em frente considerando que tal quociente resulta em 0. Não se trata de um caso com numerador igual a 0 e o denominador diferente de 0, trata-se do contrário, deste modo, o 0 não pode ser elemento absorvente. A aluna revela dificuldade em reificar algumas propriedades aritméticas. Confunde alguns elementos do contradomínio com o contradomínio da função. O conceito que tem de domínio é incipiente, para a sua determinação a aluna considera o numerador como $g(x)$ e o denominador como $h(x)$ e procura a interseção entre ambas funções num sistema de duas equações. Ora, uma vez que em funções racionais um polinómio do primeiro grau como numerador, como é o caso, não tem qualquer influência na determinação do domínio, o procedimento usado pela aluna não é sustentável e, claro, não produz os resultados desejados.

Questão 4: *Considere as funções* $f(x) = \frac{x}{x-1}$ *e* $g(x) = \sqrt[3]{x}$*. Determine. a)* $f \circ g$*; b)* $g \circ f$. Na resposta à questão 4 (Figura 3), pretende-se caraterizar de que forma o conceito de composição de função é operacionalizado algebricamente.

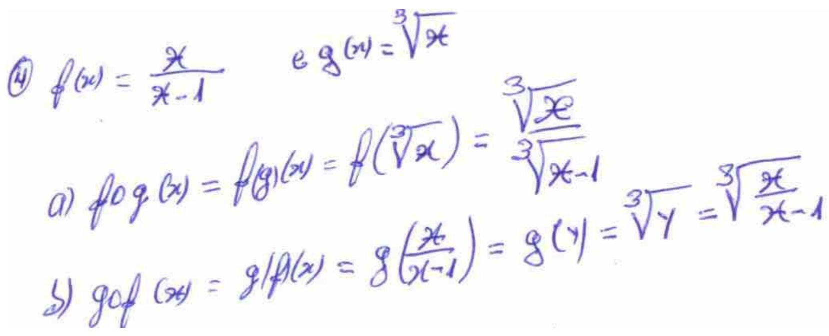


Figura 3 – Resposta à questão 4

A aluna resolve a questão 4 (Figura 3), sobre a composição das funções $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f \circ g$ e $g \circ f$, corretamente. Mostra conhecer os símbolos e sabe utilizar as relações existentes entre os mesmos, o que lhe permite chegar ao resultado final correto de maneira correta. A aluna mostra capacidade de coordenar a dependência de uma variável noutra, o que é um sinal da ação mental 1 (coordenar a dependência de uma variável noutra variável), bem como de interiorização de um processo.

Caraterização do conceito de função contínua

A questão que se segue, acompanhada pelo desempenho da aluna e pela análise do investigador, foi extraída da 1.ª prova parcelar, visando aferir o nível de compreensão de conceitos do Cálculo alcançado pela aluna com a lecionação da unidade curricular Matemática I. A primeira prova parcelar tinha três questões, a primeira sem alíneas, a segunda com duas alíneas e a terceira com três alíneas. Os tópicos abordados nas aulas até a aplicação da 1.ª prova parcelar foram sucessão, função, limite de uma função real de variável real e continuidade de função.

Questão 2 da 1.ª prova parcelar: 2. *Dado o gráfico (Figura). a) Analisar se existe continuidade no ponto x=3; b) Caso exista, indicar o tipo de descontinuidade*. Na resposta (Figura 4), pretende-se caraterizar o nível de compreensão do conceito de função contínua, analisando a continuidade no ponto de abscissa $x = 3$.

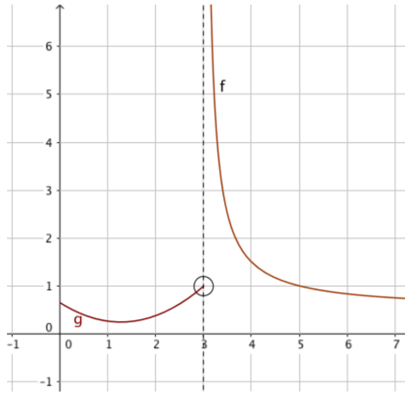


Figura 4 – Função cuja continuidade é analisada

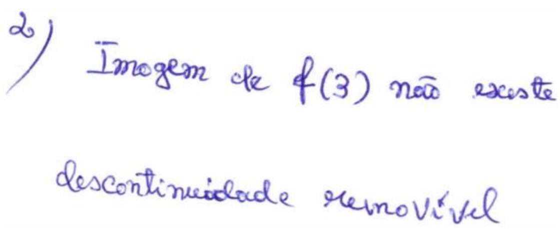


Figura 5 – Resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar

Na resolução (Figura 5) a aluna não explora completamente o conceito de continuidade de uma função num ponto, baseia-se apenas na análise à imagem da função no ponto $x = 3$ para concluir sobre a sua continuidade. Apesar de nas resoluções algébricas, geralmente, começar-se por apresentar a imagem da função, a análise da sua continuidade começa no limite, na comparação dos limites laterais. Só depois disso, não se encontrando descontinuidade na análise ao limite, é que se parte para a análise à imagem e, havendo imagem, para a comparação entre a imagem e o limite da função. Dito de outra forma, a sequência de análise da continuidade de uma função é: (1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$; (2) $\exists f(x_0)$; (3) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. A aluna começa e conclui a análise na segunda etapa, ou seja, não calcula os limites laterais da função na abscissa do ponto em análise, daí não ter chegado ao resultado pretendido. A aluna revela um nível de compreensão instrumental com dificuldades na aplicação do procedimento de análise da continuidade da função. Em relação às teorias APOS e da Reificação, revela uma estrutura mental a nível de processo e revela ter uma compreensão concetual na fase de condensação, respetivamente.

No que diz respeito ao conceito de continuidade de função, a aluna apresenta o nível de compreensão instrumental, mesmo nível apresentado no conceito de função no questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos. Portanto, entre os processos interiorizados e o novo conceito estudado a aluna manteve o mesmo nível de compreensão, o instrumental.

Caraterização do conceito de derivada de uma função

A questão que se segue, acompanhada pelo desempenho da aluna e pela análise do investigador, foi extraída da 2.ª prova parcelar, visando aferir o nível de compreensão de conceitos do Cálculo alcançado pela aluna com a lecionação da unidade curricular Matemática I. A segunda prova parcelar tinha três questões, sendo a primeira com três alíneas e as demais sem alíneas. O tópico abordado nas aulas até à aplicação da 2.ª prova parcelar foram definição de derivadas, fórmulas e regras das derivadas, derivadas de ordem superior, derivadas de funções implícitas, estudo de função e aplicações económicas de derivadas.

Questão 1c) da 2.ª prova parcelar: *1. Derive as funções seguintes. c) Achar* y' *para* $3x + e^{xy} - 3y = 0$. Na sua resposta (Figura 6), procura-se caraterizar o nível de compreensão do conceito de derivada de uma função dada na forma implícita.

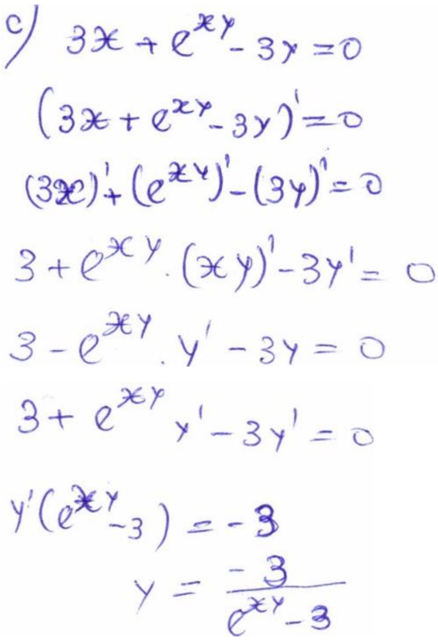


Figura 6 – Resposta à questão 1c) da 2.ª prova parcelar

Nesta questão (Figura 6) a aluna começa por aplicar bem a regra da derivada quando apenas está envolvida a operação soma algébrica, no primeiro e no segundo passos. No terceiro passo, na parcela $(e^{xy})'$, que nos dois passos seguintes é transformada em $e^{xy}(xy)'$ e em $-e^{xy} \cdot y'$, a aluna apresenta dificuldade em relacionar a regra da cadeia e a regra do produto. Notamos que onde se encontra a variável y, e^{xy} e $3y$, a aluna apresenta dificuldades em derivar a variável dependente apresentada na forma implícita. A interpretação da classificação de x e y como variáveis relacionadas, conforme o modelo 3UV de Trigueros & Usini (2003), precisa de ser melhorada no contexto das funções implícitas. A aluna tem dificuldade em absorver nova ideia complexa num tempo limitado, conforme descreve Tall (1992). Quanto às teorias APOS e da Reificação, a aluna revela ter uma estrutura mental a nível de processo e ter uma compreensão concetual na fase de condensação. A aluna tem um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função dada na forma implícita instrumental.

Notamos, em $e^{xy}(xy)'$, que a aluna interiorizou o conceito de função composta, bem como a regra de derivação de funções compostas — regra da cadeira — dadas na forma explícita, ou seja, a aluna consegue transformar $[f(g(x))]'$ em $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Portanto, a aluna tem processos interiorizados. Apesar disto, constatamos nos passos seguintes que a aluna não apresenta o mesmo nível de compreensão de derivada de funções implícitas. Deste modo, constatamos uma associação entre processos anteriores e a compreensão da aluna de sucesso-insucesso.

Conclusão

No que diz respeito ao nível de compreensão do conceito de função, a Ana apresenta um nível de compreensão do conceito essencialmente instrumental, com um nível de compreensão incipiente do conceito de domínio. Em relação ao conceito de derivada de uma função, a aluna apresenta um nível de compreensão instrumental, com dificuldades em relacionar as variáveis independente e dependente em funções implícitas. A heterogeneidade no nível de compreensão dos conceitos não é uma realidade isolada da Ana, os outros alunos também a apresentam.

De uma maneira geral, a aprendizagem dos alunos é caraterizada por níveis diferentes de compreensão e níveis diferentes de estrutura mental, dependendo dos subconceitos envolvidos no conceito considerado. Nestes termos, é uma aprendizagem com níveis heterogéneos de compreensão dos conceitos resultante de fatores como o nível de preparação dos alunos, empenho dos alunos e tipo de abordagem do Cálculo — atendendo à classificação de Tall (1992) quanto à abrangência e à profundidade de abordagem.

De uma maneira geral, notámos que a Ana tinha maior compreensão dos conceitos do ponto de vista algébrico. Deste ponto de vista, mais facilmente reconhecia os objetos, mais facilmente os manipulava, mais facilmente os interiorizava e os assimilava como processos, mais facilmente construía e reconstruía novos objetos matemáticos. Foi importante analisar as respostas dadas às questões relacionadas ao conceito de função, porquanto permitiram-nos ir assinalando os desempenhos e as insuficiências que a aluna tinha, o que nos permitiu melhor compreender as suas estruturas cognitivas.

Sobre as visões que os alunos vão manifestando dos diferentes objetos matemáticos, importa aqui fazer referência àquela sobre variáveis. Em relação à Ana notámos dificuldade em compreender a relação entre as variáveis independente e dependente numa função implícita. Das três classificações de variável conforme o Modelo 3UV — incógnita, número genérico e variáveis relacionadas — de Trigueros & Usini (2003), foi notória, com frequência considerável, particularmente no conceito de função, a confusão de alguns alunos entre incógnita e variáveis relacionadas. A capacidade de discernimento entre as três classificações constitui um elemento importante na construção do conhecimento do aluno.

A análise aos dados mostrou-nos a influência dos conhecimentos prévios dos alunos na sua aprendizagem do Cálculo. Registámos que processos interiorizados dão lugar a novos processos mais profundos e mais abrangentes. Registamos que processos não interiorizados dificultam a evolução da compreensão dos alunos. Registamos ainda que a associação entre processos anteriores e a compreensão dos alunos nem sempre é de sucesso-sucesso ou de insucesso-insucesso.

Constatamos a tendência convergente para utilização da teoria APOS no estudo da aprendizagem do Cálculo. Autores como Tall (1992); Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros, & Weller (2014); Sfard (1991); Domingos (2003); Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008); Carlson, Madison, & West (2015) assim como Trigueros & Usini (2003) cujas abordagens contribuíram para a nossa fundamentação tiveram na teoria APOS de Dubinsky uma referência importante para o desenvolvimento das suas ideias. É caso para se inferir que desde a sua criação à data presente, a teoria APOS consolida-se cada vez mais como ferramenta de análise.

Referências

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer.

Carlson, M. P., Madison, B., & West, R. D. (2015). A Study of Students' Readiness to Learn Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(2), 209–233.

Domingos, A. M. (2003). *Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados -- A Matemática no Início do Superior.* Tese de doutoramento.

Freitas, E. C., & Prodanov, C. C. (2013). *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas do trabalho acadêmico*. Novo Hamburgo — Rio Grande do Sul: Universidade Feevale.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. Em M. P. Carlson, & C. Rasmussen, *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*.

Tall, D. (Agosto de 1992). Students' Difficulties in Calculus. *Plenary presentation in Working Group 3, ICME*, 15.

Trigueros, M., & Usini, S. (2003). Starting college students' difficulties in working with different uses of variable. Em *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

PÓSTERS – GD4

UTILIZAÇÃO DE *CÁLCULO ALGÉBRICO SIMBÓLICO* (CAS) NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA COM ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO

Helder Martins

Escola Secundária António Damásio, UIED FCT-UNL

heldermart@gmail.com

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED FCT-UNL

amdd@fct.unl.pt

Resumo: Com este póster pretende-se apresentar um projeto de investigação, que tem por objetivo estudar a introdução do *Cálculo Algébrico Simbólico* (CAS) nas aulas de Matemática A do 12.º ano, recorrendo a calculadoras gráficas com CAS, e analisando formas de potenciar a aprendizagem da álgebra e do cálculo.

Palavras-chave: Aprendizagem Matemática, Tecnologia e Educação, Calculadoras Gráficas, Cálculo Algébrico Simbólico, Ensino Secundário.

Introdução

Tendo por base os domínios de funções reais de variável real e funções trigonométricas, os alunos inseridos neste projeto resolverão tarefas matemáticas em aula, utilizando processos gráficos, analíticos e/ou simbólicos.

Pretende-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

- Como incorporam os alunos a calculadora gráfica no estudo de problemas relacionados com álgebra e cálculo?
- De que forma a utilização do cálculo algébrico simbólico pode contribuir para a compreensão e resolução de problemas relacionados com álgebra e cálculo?
- Como se caracterizam os esquemas de raciocínio dos alunos de modo a que se verifique uma aprendizagem com significado?

Referencial teórico

A teoria da atividade será objeto de análise, visto se pretender estudar um sistema com uma atividade coletiva, orientado por objetos e mediado por artefactos (Engeström, 2001). Neste contexto será importante verificar as relações existentes entre o uso do artefacto e a realização da tarefa - potencial semiótico do artefacto (PSA).

Segundo Bussi e Mariotti (2008), a análise do PSA com tecnologia, envolve duas observações: entre o artefacto e os signos que emergem do seu uso; e, entre o artefacto e os signos matemáticos evocados pelo seu uso.

Com esta investigação pretende-se reconhecer processos que conduzam à formação das noções matemáticas pelos alunos. Para Domingos (2003), interpretar um conceito implica encarar essa entidade com um determinado potencial, que se manifesta através de uma sequência de ações.

Serão analisadas teorias que se debruçam sobre a construção de conceitos matemáticos, em particular, a teoria da reificação, de Anna Sfard, e a teoria APOS, de Ed Dubinsky.

No que concerne ao CAS, a sua utilização tem incidido na manipulação simbólica de objetos matemáticos, pretendendo-se, segundo Heid e al (2013), ajudar os alunos a desenvolver um *pensamento matemático versátil*.

Metodologia

A metodologia a adotar designa-se por *Design Based Research*, uma vez que se pretende efetuar análises simultâneas das tarefas e dos problemas colocados aos sujeitos do estudo, nomeadamente verificar o tipo de discurso utilizado na comunicação entre os diversos intervenientes e rever as ferramentas utilizadas no ambiente natural (Cobb et al, 2003).

O autor deste estudo assumirá o duplo papel de investigador/professor em duas turmas que se encontram a seu cargo, e o papel de observador participante numa terceira turma, que será lecionada por outro professor. A recolha de dados será feita em aula, no decurso da realização em grupo de diversas tarefas, tendo por base a observação dos sujeitos, os documentos produzidos pelos alunos, e os registos criados nas calculadoras, com recurso à aplicação TI-Navigator, e elaborando um diário de bordo, com notas de campo e grelhas de observação.

Pretende-se ainda constituir uma amostra, com quatro alunos, representativa das três turmas, de forma a efetuar estudos de caso com o intuito de se proceder a uma análise mais fina do trabalho apresentado pelos alunos na resolução das tarefas.

Referências

Bussi, M., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Em L. English et al. (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). New York: Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior*. Tese de Doutoramento. Lisboa: FCT-UNL.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*(1), 133-156.

Heid, M., Thomas, M., & Zbiek, R. (2013). How might computer algebra systems change the role of algebra in the school curriculum? Em M. A. Clements et al. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 597-641). Nova Iorque: Springer Science+Business Media.

VEÍCULO PARA APRENDER A QUESTIONAR: CARTÕES DE QUESTÕES EM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM SOBRE TABELAS E GRÁFICOS

Marisa Dias

Escola Superior de Educação de Coimbra

marisacfdias@gmail.com

Conceição Costa

CICS.NOVA & Escola Superior de Educação de Coimbra,

ccosta@esec.pt

Palavras chave: cartões de questões, questionamento, orquestração.

O questionamento é algo sobre pôr questões e procurar respostas, reconhecer problemas e procurar soluções, imaginar, explorar, investigar, discutir, raciocinar e olhar de forma crítica para o que vai sendo descoberto (Jaworski, 2015).

A ação de colocar questões tem revelado ser um passo importante para o desenvolvimento e avanço da aprendizagem de cada aluno. Aqueles que ainda hesitam em aprender ao formular as suas próprias questões precisam de ser habituados a fazê-lo. Uma simples ferramenta como os *Student Question Cards (SQC)* poderá ajudar o aluno a formular e partilhar questões que se concentram em aspetos-chave da aprendizagem matemática: significado, método, raciocínio e aplicação (Wong, 2012).

Apresentamos *o uso de Cartões de Questões por Alunos* (CQA), participantes de um estudo qualitativo (Dias, 2018), cujos objetivos são: compreender oportunidades de aprendizagem sobre tabelas e gráficos em alunos do 5.º ano do Ensino Básico (EB), num ambiente de questionamento com apoio de cartões de questões; refletir sobre a orquestração da professora nas atividades matemáticas dos alunos. O estudo foi desenvolvido na turma de Estágio (dezanove alunos, com pouca familiaridade com os CQA) do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do EB e foi fundamentalmente influenciado pelas ideias de: Jaworski (2015) sobre o questionamento no ensino e na aprendizagem da Matemática; Wong (2012) sobre como exercitar os alunos a colocar as suas próprias questões para promover uma aprendizagem ativa e metacognição; e Hundeland, Erfjord, & Carlsen (2016) sobre a orquestração de atividades matemáticas em aula.

O estudo tentou seguir uma metodologia próxima de Jaworski (2015), ciclo de ensino por questionamento de 4 fases. Na 1.ª fase, *planeamento do estudo*, foi escolhido: o tópico, “atividades matemáticas usando o questionamento”*;* os objetos de aprendizagem “tabelas e gráficos estatísticos”; e concebida uma sequência de ensino (três aulas) a *implementar* durante o Estágio, 2.ª fase do ciclo. A terceira fase, *Reflexão do Grupo de Reflexão*, envolveu fundamentalmente um exame minucioso e ponderado sobre os dados recolhidos (gravações áudio, produções dos alunos e notas de campo), muitas vezes revisitados e sujeitos a análise de conteúdo. A 4.ª fase, *Planeamento futuro*, envolveu a reflexão sobre: a análise dos dados tratados e as respostas da Investigadora a uma entrevista, para conclusão do estudo e traçar caminhos futuros de pesquisa.

Os principais resultados apontam que os alunos: estiveram envolvidos em processos de resolver e pôr problemas, recolher e organizar dados, ler e interpretar tabelas e gráficos, construir e interpretar pictogramas; usaram os CQA com questões de *significado*, *método*, *raciocínio* e *aplicação*, exercendo agência. Dada a familiaridade com os CQA, que tinha sido proporcionada à turma antes do estudo, parece não se poder garantir que o seu uso condicionou o questionamento. Os CQA parecem valiosos para os alunos na estruturação de questões, pois, antes do estudo, há evidências de constrangimento em questionar. A Investigadora, na orquestração, sentiu-se apoiada pelos CQA na orientação da aula e na estruturação das questões, percebendo qual era, em ação, a melhor questão a colocar. Também os CQA a apoiaram a ceder agência à turma.

O poster começa com a apresentação do estudo, objetivos, contexto e metodologia. O foco será então em alguns exemplos de questões dos alunos e orquestração da Investigadora, para fundamentar resultados. A apresentação deste poster pretende discernir: que tipo de CQA e ambiente os alunos necessitam para participar em interações frutuosas, por exemplo, aluno-aluno? Qual a orquestração do professor/a?; Que tarefas a conceber para que os alunos, na aula, escutem e coloquem questões matemáticas?

Referências

Dias, M. (2018). *O questionamento e a aprendizagem.* Relatório Final de Mestrado (não publicado), Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra.

Hundeland, P., Erfjord, I., & Carlsen, M. (2016). A kindergarten teacher’s revealed knowledge in orchestration of mathematical activities . University of Agder: Norway.

Jaworski, B. (2015). Teaching for mathematical thinking: inquiry in mathematics learning and teaching. *Mathematics Teaching Journal, nº 248*, 28-34.

Wong, K. Y. (2012). Use of student mathematics questioning to promote active learning and metacognition. *12 International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-13). Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University.