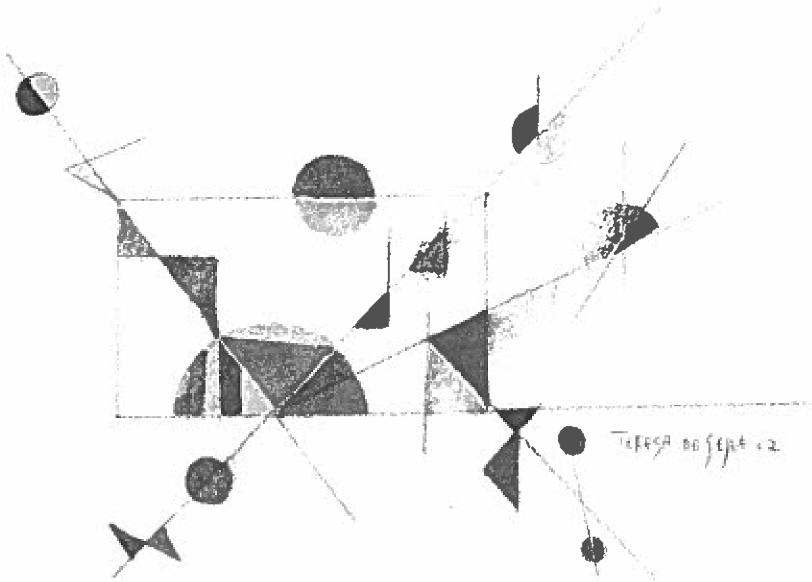
Ensino e Aprendizagem da Geometria



Organização

Manuel Joaquim Saraiva

M.ª Isabel Coelho

José Manuel Matos

Secção de Educação Matemática

Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação

O IX Encontro de Investigação em Educação Matemática, promovido pela Secção de Educação Matemática da SPCE, teve lugar no Fundão, em Maio de 2000.

Este livro contém todos os textos relativos às conferências plenárias e comunicações apresentadas.

A gravura da capa é uma pintura de Teresa Sena. A composição final contou com a colaboração de Júlio Gavinhos. Aos dois os nossos agradecimentos.

Autores

Gila Hanna

Universidade de Toronto

Canadá

Gisélia Piteira

Escola E. B. 2/3 Rui Galvão Carvalho —

Açores

John Olive

Universidade da Geórgia

EUA

João Filipe Matos

Universidade de Lisboa

José Manuel Matos

Universidade Nova de Lisboa

Manuel Joaquim Saraiva

Universidade da Beira

Interior

Conceição Costa

Escola Superior de Educação de Coimbra

Maria Isabel Coelho

Escola E. B. 2/3 Serra da Gardunha —

Fundão

Cristina Loureiro

Escola Superior de Educação de Lisboa

Enrique de la Torre

Universidade da Corunha —

Espanha

Rita Bastos

Escola Secundária António Arroio —

Lisboa

Índice

Prefácio

Neste encontro procurou-se responder a algumas das necessidades que se vinham sentindo, ao momento, no seio da comunidade de educação matemática em Portugal. Era imperioso debater um tema:

(i) matemático, com implicações directas no processo de ensino/aprendizagem da Matemática;
(ii) transversal, que permitisse a presença das várias sensibilidades dos investigadores;
(iii) actual, que permitisse mobilizar também os professores.

A Geometria foi o tema escolhido. Trata-se de um tópico muito especial no ensino/aprendizagem da Matemática que suscita, em simultâneo, polémicas apaixonadas e consensos implícitos.

Discutiu-se, em particular:

(i) as características de um ambiente computacional geométrico, rico de um ponto de vista educativo – a tecnologia altera o modo como relacionamos a construção de figuras com aspectos metacognitivos relacionados com o controlo das nossas acções?
(ii) o papel da demonstração em Geometria – a demonstração é apenas uma formalização estática das ideias? A demonstração é uma dinâmica, na qual os alunos revelam muita dificuldade?
(iii) o papel desempenhado pela imaginação na aprendizagem da Geometria – o que é uma imagem mental? Como desenvolver a capacidade de visualização nos alunos?

A conferência de John Olive, da Universidade da Geórgia, EUA, debruça-se sobre as implicações da utilização dos AGD (ambientes geométricos dinâmicos) no ensino e na aprendizagem da Geometria nos vários níveis de escolaridade. O autor coloca algumas questões relacionadas com a forma como os alunos podem aprender Geometria utilizando os AGD, bem como possíveis implicações para o processo do ensino da

Geometria. Toda a sua intervenção é suportada na experiência pessoal do autor e na de diversos professores e investigadores na utilização dos AGD, muito em particular do *Geometer`s Sketchpad*.

Também relacionado com a utilização dos AGD no ensino e aprendizagem da Geometria, o texto de Isabel Coelho, da Escola EB 2/3 Serra da Gardunha, Fundão, e Manuel Saraiva, da Universidade da Beira Interior, Covilhã, é dedicado à apresentação e problematização dos resultados da investigação realizada em Portugal, nos EUA, no Canadá e em alguns países da Europa, bem como à problematização da investigação nesta área. Apresenta, também, uma reflexão, *a posteriori*, sobre as limitações e as implicações curriculares inerentes ao uso dos AGD.

Ainda sobre a utilização dos AGD no ensino e aprendizagem da Geometria, a comunicação de Gisélia Piteira, da Escola EB 2/3 Rui Galvão de Carvalho, Açores, e João Filipe Matos, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, apresenta e discute algumas conclusões intercalares de uma investigação em curso, cujo objectivo é compreender as potencialidades dos AGD como mediadores para a aprendizagem dos alunos.

A conferência de Gila Hanna, da Universidade de Toronto, Canadá, reafirma a proeminência das demonstrações na educação matemática. A autora defende categoricamente que a demonstração matemática está bem viva na prática matemática e que continua a ter um lugar importantíssimo no currículo da Matemática escolar. É fundamental que os educadores matemáticos compreendam o papel da demonstração no ensino para que possam realçar a sua utilização na sala de aula. Gila Hanna afirma que o principal papel da demonstração na aula de Matemática é a promoção, nos alunos, da compreensão matemática. Tornou-se claro, para a autora, que uma demonstração apenas se torna legítima e convincente para um matemático quando ele alcança uma verdadeira compreensão matemática dela.

O texto de Cristina Loureiro, da Escola Superior de Educação de Lisboa, e Rita Bastos, da Escola Secundária António Arroio, Lisboa, preocupa-se em identificar e destacar ideias sobre a demonstração matemática promotoras do desenvolvimento da investigação sobre o ensino da Geometria e sobre o desenvolvimento curricular. É um texto que se propõe contrapor ideias e levantar questões sobre a demonstração matemática. Para as autoras, a demonstração tem um lugar insubstituível no ensino da Geometria, questionando essencialmente a forma e o momento do seu uso.

Ainda sobre o tema das demonstrações, Enrique de la Torre, da Universidade da Corunha, Espanha, afirma que a demonstração em Geometria tem mudado ao longo dos tempos e tem sido entendida de formas diferentes consoante as pessoas que a questionam. Para o autor, a tarefa mais importante para os professores e educadores matemáticos é a de promover a tomada de consciência dos alunos sobre a necessidade de falar em “prova” ou “demonstração” e nos diferentes níveis de rigor, pois, muitas vezes falamos de demonstração antes dos alunos sentirem a necessidade de demonstrar.

Relativamente ao terceiro tema, José Manuel Matos, da Universidade Nova de Lisboa, pretende contribuir para o aprofundamento do conhecimento do que é o saber matemático, argumentando que é possível relacionar o conceito matemático básico com as intuições. Para o autor, é a partir destas, com origem no mundo sensório - motor, que são construídos os conceitos matemáticos. O seu ponto de vista é desenvolvido a partir do conceito de ângulo.

A visualização, veículo para a educação em Geometria, é também desenvolvida por Conceição Costa, da Escola Superior de Educação de Coimbra. A autora pretende, com o seu texto, realçar determinados aspectos cruciais para a compreensão de uma educação em Geometria, como: i) o poder da visualização; ii) os diferentes significados e mecanismos relacionados com o termo visualização; e iii) as várias perspectivas existentes para abordar uma educação em Geometria.

Este encontro confirma que os três tópicos estão interligados, evidenciando a impossibilidade de discutir a visualização sem a confrontar com os problemas levantados pela utilização do computador, ou sem a relacionar com a formalização do discurso matemático; por sua vez, também é incontornável o papel desempenhado pelo computador na aprendizagem da demonstração. A investigação já realizada procura, assim, interligar os três tópicos, deixando antever progressos significativos neste domínio do conhecimento, tão antigo quanto fundamental para o desenvolvimento da educação matemática.

Covilhã, 03 de Dezembro de 2002

Manuel Joaquim Saraiva

Maria Isabel Coelho

José Manuel Matos

Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning

John Olive
The University of Georgia
Athens, Georgia, USA

In this talk I would like to explore the implications of using Dynamic Geometry Technology for teaching and learning geometry at different levels of education. Through example explorations and problems using the *Geometer's Sketchpad* I hope to provoke questions concerning how children might learn geometry with such a tool, and the implications for teaching geometry with such a tool. I shall draw on my own experiences and the experiences of other teachers and researchers using dynamic geometry technology with young children, adolescents, and college students.

What is Dynamic Geometry Technology?

This question is best addressed through demonstration. I include any technological medium (both hand-held and desktop computing devices) that provides the user with tools for creating the basic elements of Euclidean geometry (points, lines, line segments, rays, and circles) through direct motion via a pointing device (mouse, touch pad, stylus or arrow keys), and the means to construct geometric relations among these objects. Once constructed, the objects are transformable simply by dragging any one of their constituent parts. Examples of dynamic geometry technology include, but are not limited to the following:

Cabri-Geometry (Cabri I and Cabri II for desktop computers, and Cabri on the TI-92 calculator).

The Geometer's Sketchpad (Version 3 for both Windows and Macintosh computers, and the new implementation for TI-92 and 93 calculators and the Casio Cassiopeia hand-held computer).

The Geometry Inventor (Computer software)

Geometry Expert (GEX, a new computer-expert system from China).

TesselMania® (dynamic tessellation software).

Goldenberg & Cuoco (1998) provide an in-depth discussion on the nature of Dynamic Geometry. A common feature of dynamic geometry is that geometric figures can be constructed by connecting their components; thus a triangle can be constructed by connecting three line segments. This triangle, however, is not a single, static instance of a triangle which would be the result of drawing three line segments on paper; it is in essence a prototype for all possible triangles. By grasping a vertex of this triangle and moving it with the mouse, the length and orientation of the two sides of the triangle meeting at that vertex will change continuously. The mathematical implications of even this most simple of operations was brought home to me when my seven-year old son was "playing" with the *Geometer's Sketchpad* software (hereafter referred to as *Sketchpad* or GSP). As he moved a vertex around the screen he asked me if the shape was still a triangle. I asked him what he thought. After turning his head and looking at the figure from different orientations he declared that it was. I asked him why and he replied that *it still had three sides!* He continued to make triangles which varied from squat fat ones to long skinny ones (his terms), that stretched from one corner of the screen to another (and not one side horizontal!). But the real surprise came when he moved one vertex onto the opposite side of the triangle, creating the appearance of a single line segment. He again asked me if this was still a triangle. I again threw the question back to him and his reply was: "Yes. It's a triangle lying on its side!" I contend that this seven-year old child had constructed for himself during that five minutes of exploration with the *Sketchpad* a fuller concept of "triangle" than most high-school students ever achieve. His last comment also indicates intuitions about plane figures which few adults ever acquire: That they have no thickness and that they may be oriented perpendicular to the viewing plane. Such intuitions are the result of what Goldenberg, Cuoco, & Mark (1998) refers to as "visual thinking."

Implications for Elementary Teaching and Learning

Nathan's use of the dynamic drag feature of this type of computer tool illustrates how such dynamic manipulations of geometric shapes can help young children abstract the essence of a shape from seeing what remains the same as they change the shape. In the case of the triangle, Nathan had abstracted the basic definition: a closed figure with three straight sides. Length and orientation of those sides was irrelevant as the shape remained a triangle no matter how he changed these aspects of the figure. Such dynamic manipulations help in the transition from the first to the second van Hiele level: from "looks like" to an awareness of the properties of a shape (Fuys, Geddes & Tischler, 1988).

What Nathan did during the next 15 minutes with *Sketchpad* also indicates how such a tool can be used to explore transformational geometry at a very young age. I showed him how he could designate a line segment as a "mirror" using the TRANSFORM menu. We then selected his triangle and reflected it about the mirror segment. Nathan was delighted with the way the image triangle moved in concert with his manipulations of the original triangle. He quickly realized that movement toward the mirror segment brought the two triangles closer together and movement away from the "mirror" resulted in greater separation. I decided to add a second line approximately perpendicular to the first mirror segment and designate this second line as a mirror. We then reflected both the original triangle and its reflected image across this line, resulting in four congruent triangles. Nathan then experimented by dragging a vertex of the original triangle around the screen (see Figure 1). He was fascinated by the movements of the corresponding vertices of the three image triangles. He was soon challenging himself to predict the path of a particular image vertex given a movement of an original vertex. At one point he went to the chalkboard, sketched the mirror lines and triangles, and indicated with an arrow where he thought an image vertex would move. He then carried out the movement of the original vertex on the screen and was delighted to find his prediction correct. Note also that Nathan was not constrained by physical mirrors. He had no hesitation in crossing over the mirror lines! Goldenberg and Cuoco (1998) challenge us to think seriously about the educational consequences for children working in an environment in which such mental reasoning with spatial relationships can be provoked.

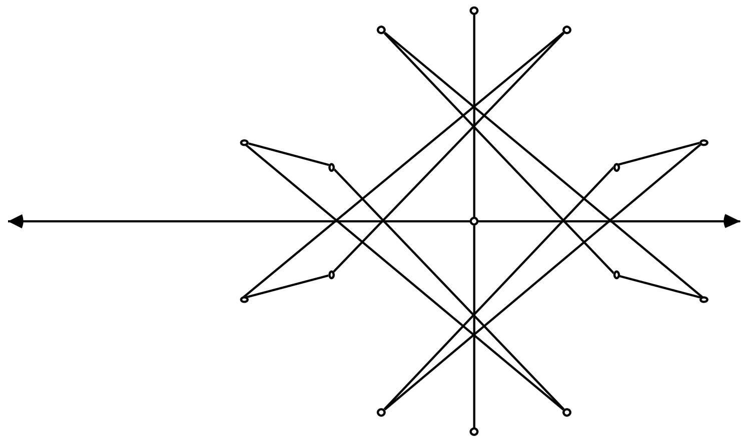


Figure 1: Double reflection of a triangle from *Geometer's Sketchpad*

Lehrer, Jenkins and Osana (1998) found that children in early elementary school often used "mental morphing" as a justification of similarity between geometric figures. For instance a concave quadrilateral ("chevron") was seen as similar to a triangle because "if you pull the bottom [of the chevron] down, you make it into this [the triangle]." (p. 142) That these researchers found such "natural" occurrences of mental transformations of figures by young children suggests that providing children with a medium in which they can actually carry out these dynamic transformations would be powerfully enabling (as it was for Nathan). It also suggests that young children naturally reason dynamically with spatial configurations as well as making static comparisons of similarity or congruence. The van Hiele (1986) research focused primarily on the static ("looks like") comparisons of young children and did not take into account such dynamic transformations.

Logo or Dynamic Geometry in the Elementary School?

I was one of the many Logo enthusiasts who embraced this computer programming language as a tool for children's mathematical explorations. Papert (1980) made a very strong case for how the "turtle geometry" (accessible through simple Logo computer commands) was closely related to children's own movements in space (walking forward or backwards, turning right or left). Balacheff and Sutherland (1994) point out critical differences between the "learning milieu" (Brousseau, 1988) that may be created using the Logo computer programming language and dynamic geometry software (*Cabri-géomètre*). While children can enact Logo-like commands themselves to walk the pathways they might want to create on the computer screen, the programming interface is symbolic, requiring the child to encode their movements (or the turtle's movements on the computer screen) using words and numbers. This encoding by the children is a crucial aspect of the Logo learning milieu. It requires quantification and formalization of the geometric constructs. The direct manipulation of screen objects through motion of a pointing device in dynamic geometry environments does not require a priori formalization.

Papert (1980) has argued that the possibility for children to experiment with Logo commands in an interactive way, producing movements of the screen turtle, without having to first write, compile and then run a program, reduces the demand for formalized thought. Children would construct their own notions of a "turtle step" as a unit of linear measure, and their own notions of angle measure through experimenting with the Forward and Back, and the Right and Left turning commands in Logo. Early research in the Logo community, however, indicated that the notions that children constructed of angle measure especially, were very limited and often misleading (Hoyles & Sutherland, 1986).

Balacheff & Sunderland (1994) make the point that "the interface [of computer software] cannot be strictly separated from the so-called internal representation, it is not a mere superficial layer." They go on to say that "What the learner explores is at the same time the structure of the objects, and their relations and the representation which make them accessible. In this sense, direct manipulation does not only make the use of the microworld more friendly, it is an integral part of it." (p. 7). For young children, then, it would appear that the direct manipulation interface of dynamic geometry software would bring the children in direct contact (through action) with the "structure of the objects, and their relations". Nathan's initial explorations with *Sketchpad* would certainly bare this out. Elementary teachers can take advantage of the direct manipulation interface and of the dynamic transformational properties of the software to introduce young children to rotation (and angle measure) as an amount of turning from one ray to another, translation as a "slide" in a given direction that does not change the orientation of a figure, and reflection as "mirror motion".

An example activity developed by a third grade teacher in Project LIMTUS[1] illustrates these possibilities.

<u>The Paper Doll Caper</u>. Children draw a free-hand stick figure in *Sketchpad* using the segment and circle tools. The challenge is to construct a row of "paper dolls" similar to the paper dolls one would get when cutting out a stick figure from a strip of paper that had been folded many times. In Figure 2, the stick figure has been translated by the vector RS and its translated image has also been translated by this same vector.

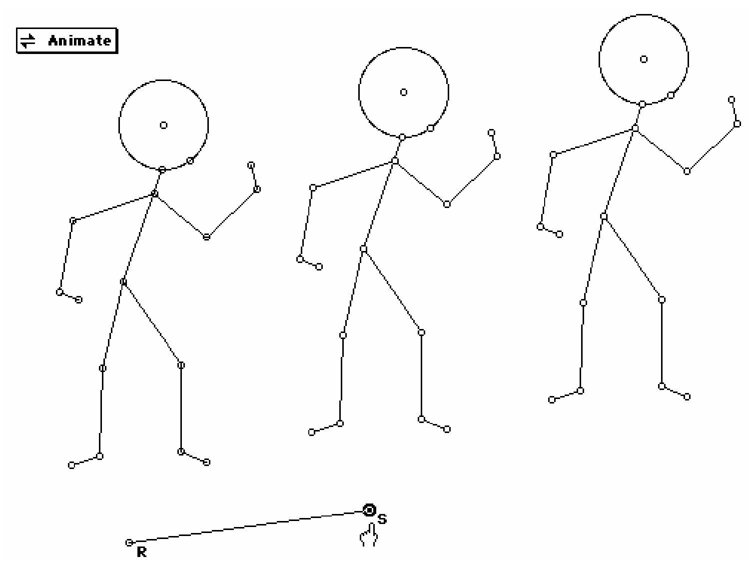


Figure 2: Translated "Paper Dolls"

While "translation by a vector" may be far too abstract a description of the transformation for young children, they can make sense of the notion of "sliding" a given distance in a given direction. In the sketch shown in Figure 2, the children can explore this sliding motion by moving point S very close to point R and then slowly moving point S away from R. As point S gets close to R the 3 figures will merge into one figure. As point S is moved away from R, the 2 image figures will "slide" away from the original figure. The children enjoyed moving parts of the original stick figure to make the row of figures "dance" together. The teacher who developed this activity used it to also investigate measures of corresponding segments and corresponding angles formed by the elements of the stick figures. These measures

---

[1] Leadership Infusion of Technology in Mathematics and its Uses in Society. A seven-year Teacher Enhancement project at the University of Georgia, funded, in part, by the National Science Foundation (1991-1997).

change dynamically as the segments are manipulated, thus, the children could see that these measures were the same for each of the stick figures, even when they changed position and length of parts of the original figure.

Some children decided to reflect their stick figure using a vertical segment as a "mirror" as in Figure 3.

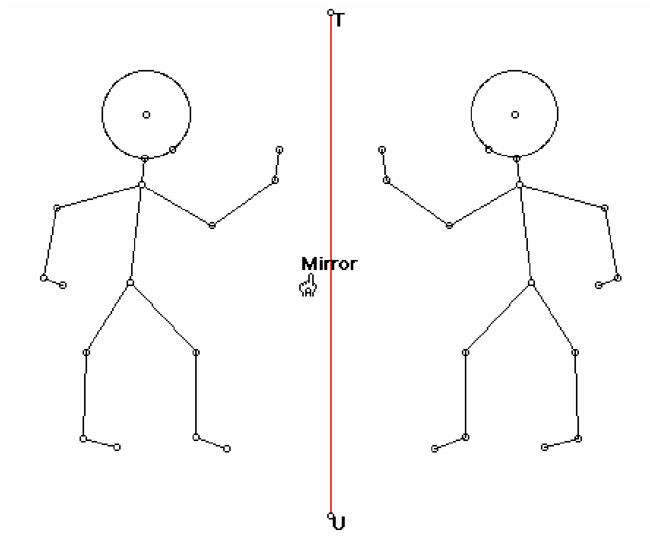


Figure 3: "Paper Doll" Reflection

By manipulating elements of their original stick figure, they were able to make them "dance" with one another. The teacher also encouraged measurement of angles and segments in this situation. Some of the children were able to "simulate" their paper folded dolls by creating another vertical mirror to the right of the reflected stick figure and reflecting both figures (and the initial mirror segment) about this new mirror (see Figure 4).

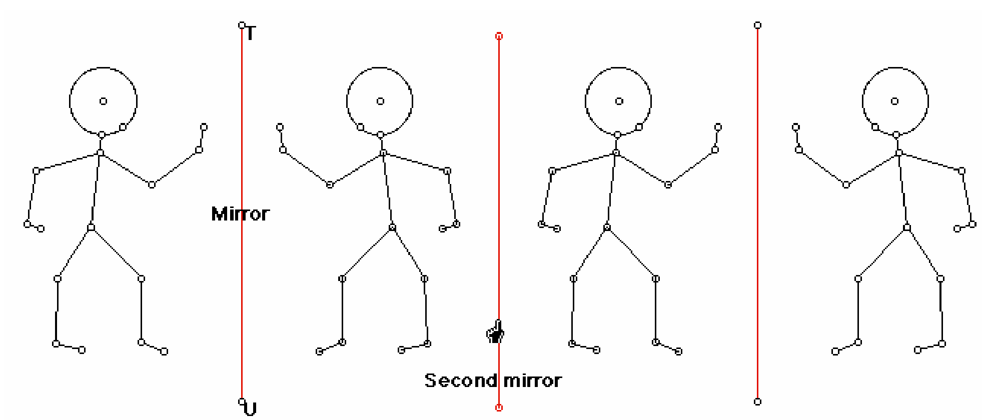


Figure 4: Double reflection of "Paper Dolls"

From this double reflection of their original stick figure the children were able to relate the effects of reflection with their paper folding and cutting activity.

As Ballacheff & Sunderland (1994) point out, the learning milieu that one can create in a Logo environment and that one can create in a dynamic geometry environment are essentially different because of the different objects and actions available in each, and the different modes of interaction within each. It is not to say that one is necessarily "better" than the other but that there is a "different complexity in each environment" and that "learning as the result of the interaction with these environments is likely to lead to the construction of quite different meanings." (p. 10)

Implications for Teaching and Learning in the Middle Grades

One of the constraints that educators have found when using dynamic geometry software with young children is the level of geometric knowledge needed in order to construct the most common geometric figures, such as equilateral triangles, squares, rectangles and parallelograms. Young children can easily DRAW such figures using the segment tool, but their figures do not maintain their specific configuration under direct manipulation (Olive, 1998). In order for a square to remain a square whenever one of its vertices or sides are dragged, the square has to be CONSTRUCTED using the available geometric construction tools (such as rotation of a segment about a point, or constructing a line perpendicular to a given segment through an end-point of the segment). Finzer and Bennet (1995) have pointed out the necessity for students to make this transition from drawing to construction when first encountering dynamic geometry software. But, for young children, this transition is very difficult, as it requires knowledge of geometric properties and relations they are yet to construct. Battista (1998a) developed a microworld within *Sketchpad* that provided young children with ready-made shapes that they could manipulate directly without having to construct them. According to Battista (1998b):

> This microworld was designed to promote in students the development of mental models that they can use for reasoning about geometric shapes. In it, each class of common quadrilaterals and triangles has a *"Shape Maker," a Geometer's Sketchpad* construction that can be dynamically transformed in various ways, but only to

> produce different shapes in the class. For instance, the computer Parallelogram Maker can be used to make any desired parallelogram that fits on the computer screen, no matter what its shape, size, or orientation–but only parallelograms. It is manipulated by using the mouse to drag its *control points*–small circles that appear at its vertices.

Battista has developed a sequence of activities with the Shape Maker microworld that he claims "encourage students to pass through the first three van Hiele levels–from the visual, to the descriptive-analytic, and into the abstract relational." (1998b) He describes this sequence as follows:

> In initial activities, students use Shape Makers to make their own pictures, then to duplicate given pictures. These activities encourage students to become familiar with the movement possibilities of the Shape Makers viewed as holistic entities. Students are then involved in activities that require more careful analysis of shapes – unmeasured Shape Makers are replaced by Measured Shape Makers that display instantaneously updated measures of angles and side lengths. Students are guided to find and describe properties of shapes. Finally, students are involved in classification by comparing the sets of shapes that can be made by each Shape Maker. (1998b)

Providing students with ready-made script-tools (in *Sketchpad*) or macros (in Cabri) that students can use in the ways described by Battista, is one way of overcoming the constraints of prior knowledge mentioned above. Given such tailor-made microworlds within dynamic geometry environments, teachers in the middle grades can involve their students in activities that could help their progression to the higher levels of thinking in geometry, as recommended by the new Principals and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) in the USA.

The new *Standards* in the USA also recommend that middle grades students develop and apply their understanding of spatial transformations and symmetry to investigate and interpret geometric figures. The *Standards* also recommend students investigate composition of transformations, forming and testing conjectures as a prelude to proving geometric relations in the high school. Dynamic geometry environments provide a medium in which the making and testing of conjectures becomes a laboratory science. The following example is an illustration of how students might investigate composition of transformations in the plane.

Finding a single transformation that does the same as 2 reflections. In Figure 4 above, students could try to find a single transformation that would move the first stick figure onto the third figure. They could reason that the figures are facing the same direction, so a translation might work. They could draw a segment and designate it as a translation vector. They could then translate the first stick figure by this vector and test to see if its image coincides with the third stick figure. If it does not, they could manipulate their vector segment until the two images did coincide. They might then make a conjecture concerning the two mirror lines and the translation vector. They could then test this conjecture by changing the position of the two mirror lines and making the necessary adjustment in their translation vector. Measurements of distances between mirrors and length of the vector could also be taken to quantify their conjecture. A similar investigation with non-parallel (intersecting) mirror lines could lead to conjectures relating rotation about a point to reflection across two intersecting mirrors.

Creating Escher-like Tessellations. The transformational symmetries of figures can be used to produce tiling patterns and artistic tessellations in the style of M.C. Escher. Middle grades students find this artistic application of mathematics particularly interesting and motivating. Dynamic software such as *TesselMania!*® (Lee, 1997) provide students with a means of directly altering geometric shapes so that they will tessellate under specific transformations. The altered shape is then automatically replicated and transformed through an animation process that results in the tessellation. Properties of the tessellation can be explored and the original shape can be decorated using a paint program built into the software. Figure 5 illustrates a tessellation of a quadrilateral using "rotation about the midpoints of each side" to form the altered shape (a man's head). This altered quadrilateral is then tessellated using rotations about the midpoints of each side, combined with translations along each diagonal.

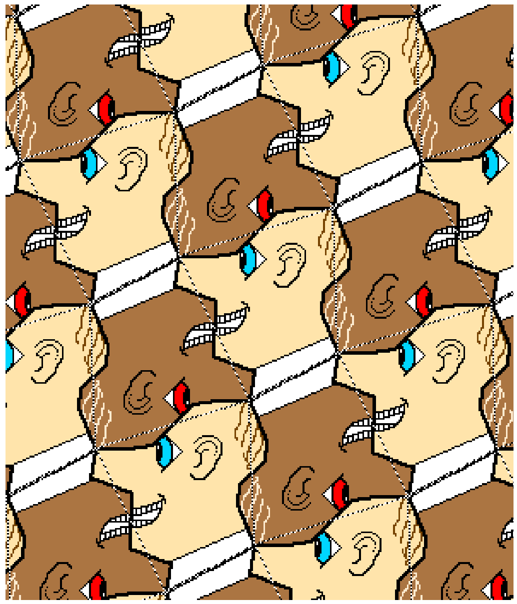


Figure 5: Tessellation of a man's head using *TesselMania!*

Implications for Teaching and Learning in the Secondary School

At the secondary level dynamic geometry environments can (and should) completely transform the teaching and learning of mathematics. Dynamic geometry turns mathematics into a laboratory science rather than the game of mental gymnastics, dominated by computation and symbolic manipulation, that it has become in many of our secondary schools. As a laboratory science, mathematics becomes an investigation of interesting phenomena, and the role of the mathematics student becomes that of the scientist: observing, recording, manipulating, predicting, conjecturing and testing, and developing theory as explanations for the phenomena.

The teacher intending to take advantage of this software, and change mathematics into a laboratory science for her students, faces many challenges. As Balacheff & Sunderland (1994) point out, the teacher needs to understand the "domain of epistemological validity" of a dynamic geometry environment (or microworld). This can be characterized by "the set of problems which can be posed in a reasonable way, the nature of the possible solutions it permits and the ones it excludes, the nature of its phenomenological interface and the related feedback, and the possible implication on the resulting students' conceptions." (p. 13) Such knowledge can only be obtained over a long period of time working with the software both as a tool for one's own learning as well as a tool for teaching mathematics. There are resources, however, that teachers can turn to. The publication "Geometry Turned On" (King and Schattschneider, 1997) provides several examples of successful attempts by classroom teachers to integrate dynamic geometry software in their mathematics teaching. Michael Keyton (1997) provides an example that comes closest to that of learning mathematics as a laboratory science. In his Honors Geometry class (grade 9) he provided students with definitions of the eight basic quadrilaterals and some basic parts (e.g. diagonals and medians). He then gave them three weeks to explore these quadrilaterals using *Sketchpad.* Students were encouraged to define new parts using their own terms and to develop theorems concerning these quadrilaterals and their parts. Keyton had used this activity with previous classes without the aid of dynamic geometry software. He states:

> In previous years I had obtained an average of about four different theorems per student per day with about eight different theorems per class per day. At the end of the three-week period, students had produced about 125 theorems… In the first year with the use of *Sketchpad*, the number of theorems increased to almost 20 per day for the class, with more than 300 theorems produced for the whole investigation. (p.65)

Goldenberg and Cuoco (1998) offer a possible explanation for the phenomenal increase in theorems generated by Keyton's students when using *Sketchpad.* Dynamic geometry "allows the students to transgress their own tacit category boundaries without intending to do so, creating a kind of disequilibrium, which they must somehow resolve." (p. 357) They go on to reiterate a point made by de Villiers (1994), that "To learn the importance and purpose of careful definition, students must be afforded explicit opportunities to participate in definition-making themselves." (Goldenberg and Cuoco, 1998, p. 357)

Keyton's activity with quadrilaterals stays within the bounds of the traditional geometry curriculum but affords students the opportunity to create their own mathematics within those bounds. Other educators have used dynamic geometry as a catalyst for reshaping the traditional curriculum. Cuoco and Goldenberg (1997) see dynamic geometry as a bridge from Euclidean Geometry to Analysis. They advocate an approach to Euclidean geometry that relates back to the "Euclidean tradition of using proportional reasoning to think about real numbers in a way that developed intuitions about continuously changing phenomena." (p. 35) This approach involves locus problems, experiments with conic sections and mechanical devices (linkages, pin and string constructions) that give students experience with "moving points" and their paths.

Both Cabri II and *Sketchpad* have the facility to trace the path of points, straight objects and circles. The locus of a moving point can be constructed as an object. Points can move freely on such constructed loci. These features enable the user to create direct links between a geometrical representation of a changing phenomenon and a representation of the varying quantities involved as a coordinate graph. As an example, consider the investigation of the area of a rectangle with fixed perimeter. Figure 6 shows a *Sketchpad* sketch in which the perimeter, length AB, height BC and area of the rectangle ABCD have been measured. A point has been plotted on *Sketchpad's* coordinate axes using the measures of AB and area of ABCD as (x, y). The trace of this point can be investigated as the length AB of the rectangle is changed by direct manipulation of vertex A. In Figure 6, the locus of point (x, y) as the length of base AB changes has been constructed. The rectangle with maximum area can be found by experiment to be when length and height are approximately equal (see Figure 7). The fact that the measures of base and height are not exactly the same in Figure 7 should lead to an interesting discussion, and a need to "prove" by algebraic means that the maximum area will, in fact, be when AB = BC.

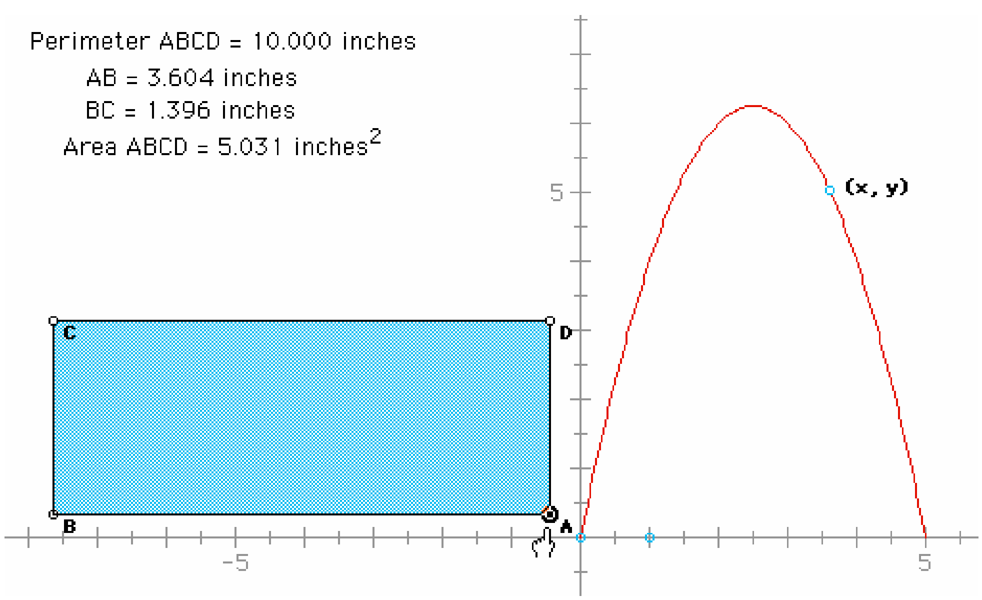


Figure 6: Plotting base against area of fixed perimeter rectangle

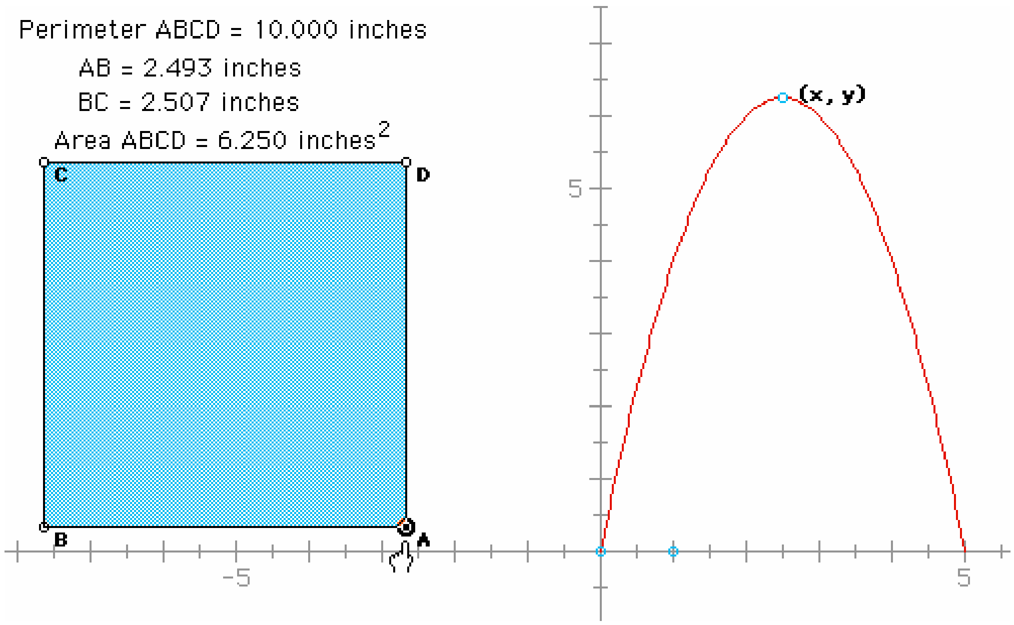


Figure 7: Rectangle with maximum area

Proof in Dynamic Geometry

The above example of finding a solution in dynamic geometry by experiment is analogous to finding roots of a polynomial using a graphing calculator. The solution can be found but the students still have a need to prove that the solution is valid. In the case of the rectangle with maximum area there is a need to prove that the conjecture (or hypothesis) that, for any rectangle with fixed perimeter, the maximum area will be achieved when the rectangle becomes a square. Manipulating rectangle ABCD in the sketch (moving vertex B will change the perimeter) can give convincing evidence that the generalization is indeed true. There is a danger here that students may regard this "convincing evidence" as a proof. Michael de Villiers (1997, 1998, 1999) has addressed this concern through a thorough analysis of the role and function of proof in a dynamic geometry environment. De Villiers expands the role and function of proof beyond that of mere verification. If students see proof only as a means of verifying something that is "obviously" true then they will have little incentive to generate any kind of logical proof once they have verified through their own experimentation that something is always so. De Villiers suggests that there are at least five other roles that proof can play in the practice of mathematics: explanation, discovery, systematization, communication, and intellectual challenge. He points out that the conviction that something is true most often comes *before* a formal proof has been obtained. It is this conviction that propels mathematicians to seek a logical *explanation* in the form of a formal proof. Having convinced themselves that something must be true through many examples and counter examples, they want to know *why* it must be true. De Villiers (1999) suggests that it is this role of *explanation* that can motivate students to generate a proof:

> When students have already thoroughly investigated a geometric conjecture through continuous variation with dynamic software like Sketchpad, they have little need for further conviction. So verification serves as little or no motivation for doing a proof. However, I have found it relatively easy to solicit further curiosity by asking students *why* they think a particular result is true; that is, to challenge them to try and *explain* it. (p. 8)

The following example from my own class of pre-service secondary mathematics teachers illustrates the explanatory function of a proof when solving a problem using *Sketchpad.*

<u>The Power Plant Problem</u>. A power plant is to be built to serve the needs of three cities. Where should the power plant be located in order to use the least amount of high-voltage cable that will feed electricity to the three cities? If the three cities are represented by the vertices of a triangle, ABC, then this problem can be solved by finding a point with minimum sum of distances to all three cities. In exploring this situation in *Sketchpad* students can measure the three distances from an arbitrary point P and the three vertices, A, B and C of the triangle. They can then sum these distances and move P around to find a location with minimum sum. When such a location appears to have been found, students can make conjectures concerning relations among P and the three vertices. Many students conjectures have been to see if any of the known triangle centers satisfy the minimum sum requirement (e.g. incenter, centroid or cirumcenter). Some of these may well appear to work for certain triangles, but not for others. Eventually, some students will notice that the angles formed by the point P and each pair of vertices appear to be the same. Measurements would indicate that they are all close to 120 degrees.

Having discovered a possible invariant in the situation, students then look for a way to construct a point that subtends 120 degrees with each pair of vertices. Various construction methods arise. One way is to construct an equilateral triangle on two sides of the triangle ABC and then construct the circumcircles of these equilateral triangles. Where the circumcircles intersect will subtend 120 degrees with each side of the triangle (see Figure 8).

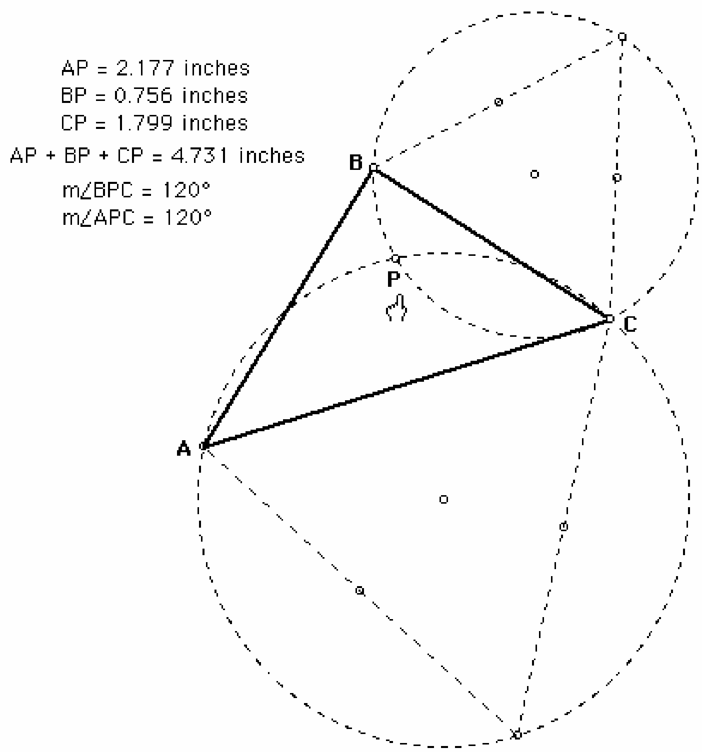


Figure 8: Constructing the location of the power plant, P.

After the students have successfully located the position of the power plant and found a way of constructing that position, I ask them to explain *why* this point provides the minimum sum of distances to each vertex of the triangle formed by the three cities. This question challenges them to find a way of proving that their constructed point P must be the minimum point (at least for triangles with no angle greater than 120!). This proves to be a difficult challenge for my students but one they are willing and eager to engage. The proof that I find the most satisfying and explanatory is one that makes use of the fact that the shortest distance between two points is along a straight path between the two points. The proof involves a rotation of segments AP, AB and BP about vertex A by 60 degrees (see Figure 9).

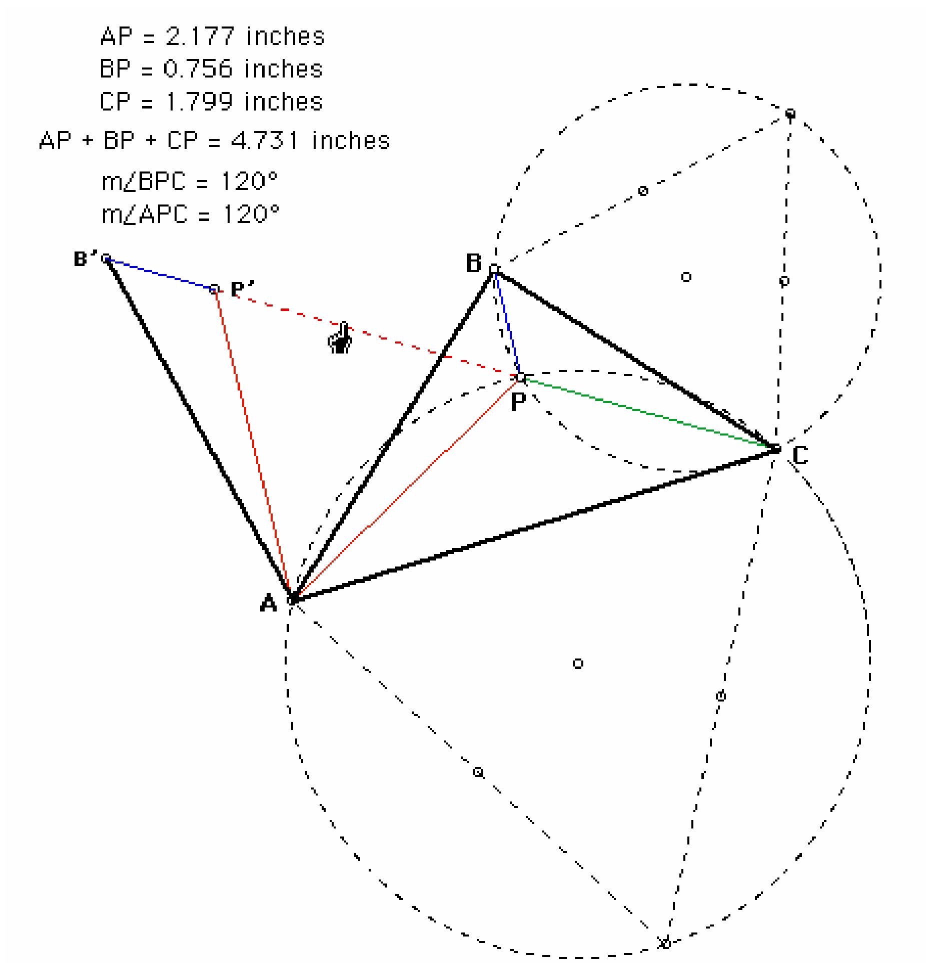


Figure 9: Rotation of ABP about A by 60˚ to form AB'P'

As rotation preserves length, AP' is congruent to AP and B'P' is congruent to BP. Thus AP'P is an isosceles triangle with an angle of 60˚ between the congruent sides. As base angles of an isosceles triangle are equal, and angle sum of any triangle is 180, the base angles must also be 60˚. Thus triangle AP'P is equiangular, and, therefore, equilateral. Thus P'P is congruent to AP.

Thus by the above reasoning, the path B'P'PC is equal in length to the sum of the distances BP, AP and PC. The path B'P'PC will have a minimum length if, and only if, the path is a straight path, as the shortest distance between two points (B' and C) lies on a straight path. Rotation preserves the shapes of figures. Thus the angle relationships within triangle AP'B' are the same as in triangle APB. In particular, when angle APB = 120˚, angle AP'B' = 120˚ and thus B'P'P will be 180˚ - a straight angle. Also, when angle APC = 120˚, angle P'PC will also be a straight angle. Thus B'P'PC will lie on a straight path when (and only when) P subtends angles of 120˚ with each side of the triangle ABC. Thus, this is the condition that provides the minimum sum of distances from P to the three vertices of the triangle ABC.

The above argument appears logical and rigorous as well as explanatory. It, therefore comes as a surprise to most students to learn that the power plant should be built in the center of city B (rather than at P) when the angle ABC is greater than 120˚! This "exception" to what they have just proved leads to an investigation of the implicit assumptions in their proof (e.g. that P is in the interior of triangle ABC). The rotation used in the above proof also gives rise to an alternative construction for finding the location of P: Draw lines connecting the outer vertex of each equilateral triangle to the opposite vertex of the original triangle. Where these lines intersect will be the location of point P, also known as the *Fermat* point.

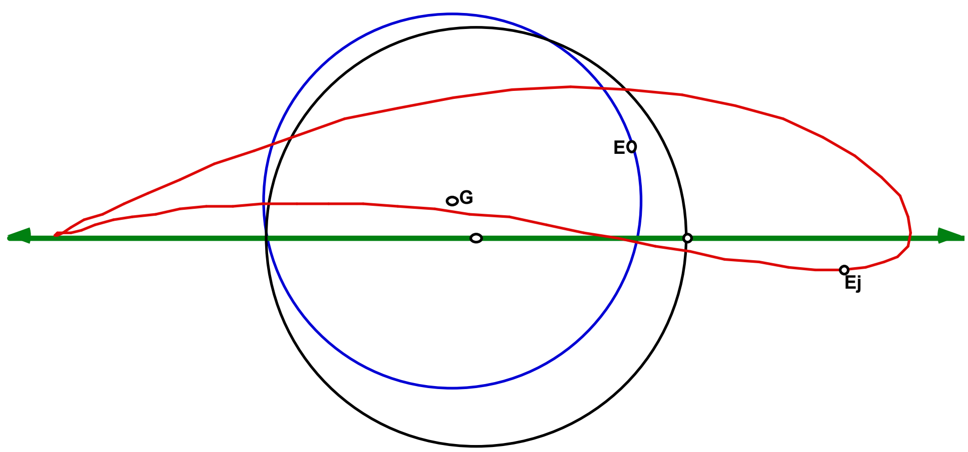
Implications for Teaching and Learning at the College Level

While the above example was taken from my course with pre-service secondary teachers of mathematics, I regard it as an appropriate problem to pose to secondary students working with dynamic geometry technology. Geometry teaching and learning at the college level can also be enriched through the use of this technology. Hampson (1997) describes a beginning course in geometry at college for entering freshmen in a British teacher education institution. He used dynamic geometry software as a medium of exploration throughout his course. He students were able to explore topics such as conics and projective geometry as dynamic phenomena to be investigated, generating their own theorems as well as discovering classic ones such as the theorems of Pappus and Desargues.

Parks (1997) suggests an alternate classification of isometries in the plane made possible in a dynamic geometry medium. All isometries can be uniquely identified by their *orientation preserving* property and the nature of any *fixed points* under the transformation (points that transform to themselves). Any isometry transformation in the plane can then be identified through an investigation of *the orbit* of the transformation under iteration. For instance, if the orbit of two rotations about different points in the plane results in a circular path then there is one fixed point: the center of that circular path, and the isometry is a rotation (as two rotations would be orientation preserving). If the orbit resulted in a straight path then there would be no fixed point and the isometry would be a translation.

King (1997) provides examples of how an exploration of similarity transformations using dynamic geometry software can lead to alternative methods of construction and proof of classic theorems. Menelaus's theorem, concerning the product of the ratios of parts of each side of a triangle formed by a line intersecting all three sides (extended), is one such example. By composing similarity transformations with isometries, spiral growth can be investigated.

In Olive (1997) I describe how *Sketchpad* can be used to investigate the Joukowski transformation of points in the complex number plane. I apply this transformation to a circle in the complex plane to produce an airfoil shape (see Figure 10).



The red curve is the result of applying the Joukowski transformation: z -> z + 1/z to the blue circle relative to the black unit circle and the green axis. Move or resize the blue circle to design your own airfoil. You can also move the point on the red curve to change the airfoil.

Figure 10: The Joukowski Airfoil

The Joukowski transformation uses *inversion in a circle* followed by reflection in the real axis to produce the point 1/z from point z (see Olive, 1997, pp. 169-176 for the mathematical details). The ability to actually construct an inversion transformation opens up many new avenues of exploration for the college student. Non-Euclidean geometries can be modeled and explored visually as well as theoretically. The Poincaré disc model for hyperbolic geometry can be constructed in *Sketchpad,* along with script tools for drawing hyperbolic segments, rays, lines and circles. Hyperbolic angles also can be measured using a script tool.

Figure 11 illustrates some properties of hyperbolic geometry that would be very difficult to visualize in any other medium.

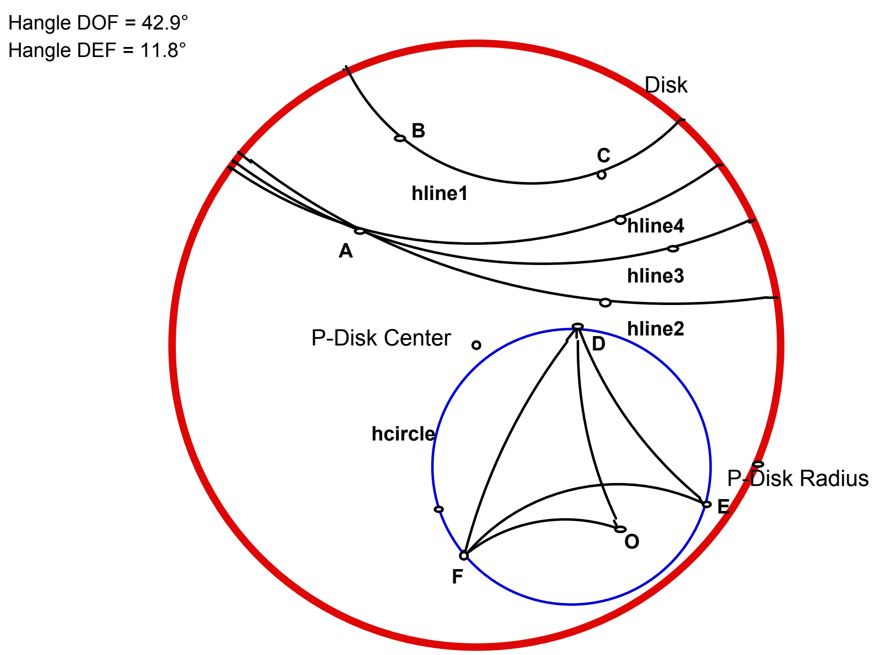


Figure 11: The Poincaré Disk model of Hyperbolic Geometry

In Figure 11, three hyperbolic lines have been constructed through point A parallel to the hyperbolic line through points B and C, thus demonstrating the fundamental difference between hyperbolic and Euclidean geometry. Two hyperbolic triangles have been constructed on the same chord DF of the hyperbolic circle with center O. Triangle DOF connects the chord with the center of the circle. Triangle DEF has all three vertices on the circumference of the circle. The measures of hyperbolic angles DOF and DEF illustrate how the angle at the circumference is NOT half the angle at the center of a hyperbolic circle, as it is in Euclidean geometry. See Dwyer and Pfiefer (1999) for example explorations with the Poincaré disk using *Sketchpad.*

Schumann and Green (1994) provide alternative approaches to geometry using the *Cabri-Geometre* software that can be used at both the high-school and college levels. They emphasize *theorem-finding* through the activity of varying geometrical figures dynamically. They also look at angle theorems as *invariance properties,* and make extensive use of the loci of varying points under manipulation as alternative approaches to difficult construction tasks.

The set of 20 problems they present at the end of their book would challenge many college mathematics students. The following exploration is based on one of these problems concerning the *Arbelos* of Archimedes (see Figure 12).

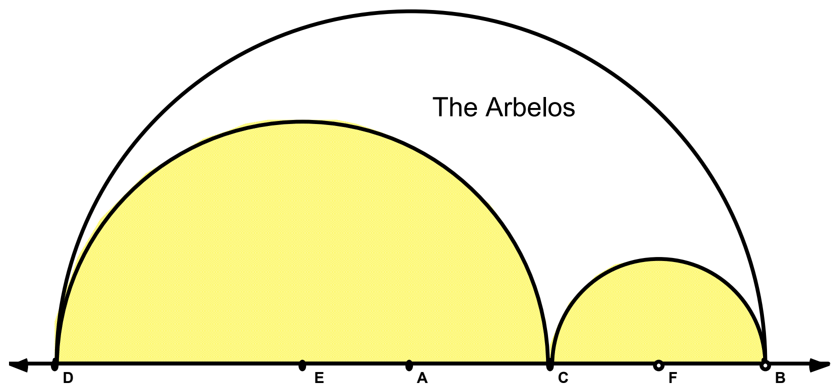


Figure 12: The Arbelos of Archimedes

In Figure 12, the two shaded semi-circles (with centers at E and F) are constructed on the diameter of the largest semi-circle with center at A. The two shaded semicircles are tangent to one another at C and tangent to the outer semi-circle at D and B. The Arbelos is the unshaded region bounded by all three semi-circles, so named because of its resemblance to the shoemaker's knife of ancient Greece. The problem is to construct a circle inside the Arbelos that is tangent to all three given semi-circles.

Using *Sketchpad* I started my exploration of this problem by drawing a circle inside the Arbelos so that it *appeared* tangent to all three semi-circles. I then constructed tangent lines at the apparent points of tangency and lines through the centers of each of the semi-circles (see Figure 13). My strategy was to vary the point C that defined the diameter of the two inner semi-circles, readjust the tangent circle and see if I could find any relations that were invariant. I made several measurements within the various triangles that are formed in Figure 13. I looked at ratios of sides, especially in triangles that should be similar. I found a surprising relation between two ratios that did NOT appear to belong to similar triangles: the ratios AB/AC and FM/FB appeared to remain approximately equal under variance of point C and the readjustment of the tangent circle. Using this possibility, I CONSTRUCTED point M by dilating point B about center F by the ratio AB/AC, as FM=FB.AB/AC if the equality of ratios holds true.

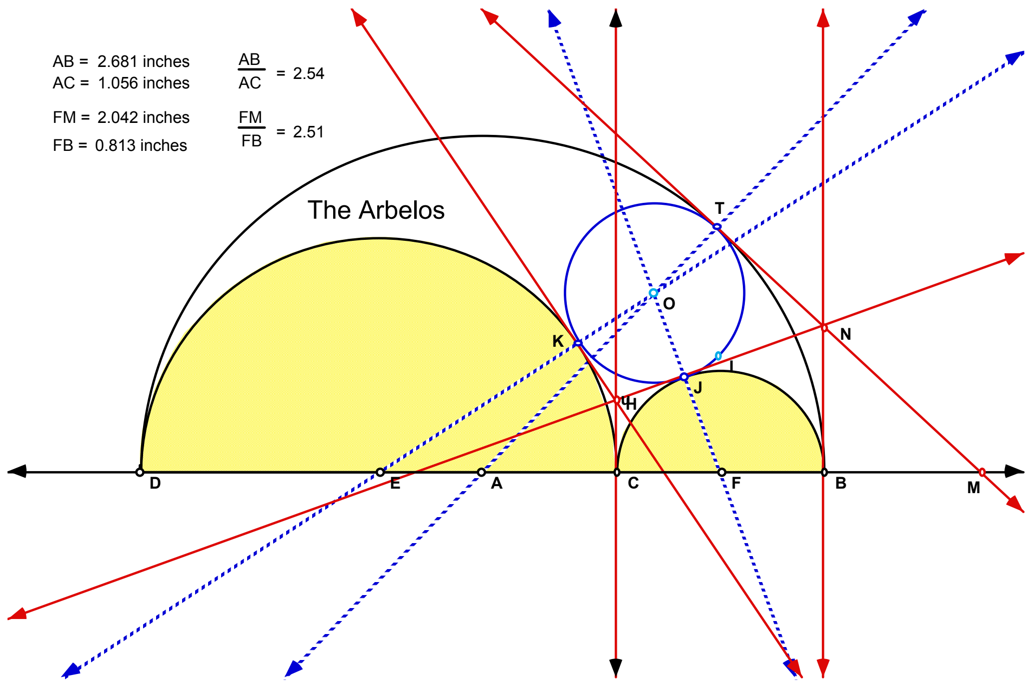


Figure 13: Tangent lines and center lines constructed on the Arbelos

Having constructed the location of point M (the foot of the common tangent to the outer semi-circle and my inner circle) I constructed a circle with diameter AM to find the point of tangency, T in Figure 13. Using the line through A and T, I constructed the tangent at T as the perpendicular line to AT at T. This tangent line (of course) passed through point M. In order to construct the center of my inner circle, I needed one more tangent line. Figure 13 indicates that the tangent line at point B intersects tangent TM at a point (N) coincident with the intersection of the common tangent at point J with semi-circle center F and my inner circle. [This observation gives rise to an interesting property that turns out to be true for any three circles that are tangent to one another: The three tangents at the three points of tangency of the three circles will intersect in a single point. I leave the proof of this relation as an exercise for the reader!] Using this relation among the three possible tangents, I constructed a circle with diameter FN to find the point of common tangency, J. Where the line FJ intersects AT gives me the center of my inner circle, O (see Figure 14).

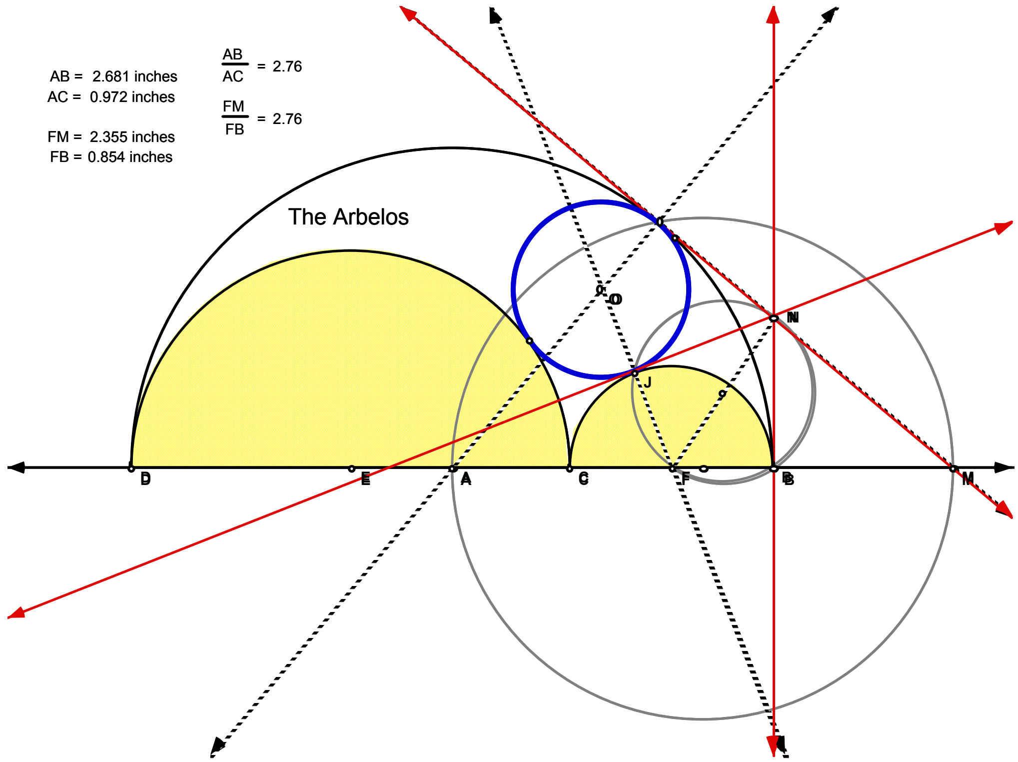


Figure 14: Construction of the Circle Tangent to all three Semi-Circles.

Moving the arbitrary point C confirms that the above construction works for all points C between A and B. I was now faced with the challenge of *explaining* why this construction works. I am close to a solution using triangle similarities but have not yet found a complete proof that does not make assumptions based on the given construction. In my explorations I did discover another surprising identity: The diameter of the inner tangent circle is equal to the distance of its center from the diameter of the outer semi-circle! This identity holds for all C between A and B.

The above exploration is an example of how dynamic geometry technology can lead to *Theorem Finding* and motivate a journey of *Theorem Proving* at the college level. Hofstadter (1997) tells a compelling story of theorem finding and proving with *Sketchpad* from a research mathematician's point of view, in his *discovery and dissection of a geometric gem.*

Concluding Comments: The Need for More Research

While there have been many personal accounts of the powerful learning that can take place when students of all ages work with dynamic geometry technology (my own included), there have been very few, well designed research projects to study the effects on learning in such environments. A group in Italy headed by Ferdinando Arzarello (Arzarello et al, 1998a) has conducted investigations of students' transitions from exploring to conjecturing and proving when working with Cabri. They applied a theoretical model that they had developed to analyse the transition to formal proofs in geometry (Arzello et al., 1998b). They found that different modalities of dragging in Cabri were crucial for determining a shift from exploration to a more formal approach. Their findings are consistent with the examples given in previous sections of this paper. The different modalities of dragging that they classified are described as:

> (i) *wandering dragging*, that is dragging (more or less) randomly to find some regularity or interesting configurations; (ii) *lieu muet dragging*, that means a certain locus *C* is built up empirically by dragging a (dragable) point P, in a way which preserves some regularity of certain figures. (p. 3)

They also describe a third modality: *dragging test,* that is used to test a conjecture over all possible configurations. I used all three modalities in my exploration of the Arbelos problem, above.

The group at the University of Grenoble in France have been conducting research studies on the use of Cabri for many years (Laborde, 1992, 1993, 1995, 1998). They have focussed both on what students are learning when working with Cabri and the constraints both students and teachers face when teaching and learning with Cabri. Laborde (1992 & 1993) and Balacheff (1994) conclude that the observation of what varies and what remains invariant when dragging elements of a figure in Cabri, helped break down the separation of deduction and construction that Schoenfeld (1988) found in his study of geometry teaching and learning. Laborde (1998) points out that it takes a long time for teachers to adapt their teaching to take advantage of the technology. She reports three typical reactions that teachers have to the perturbations caused by the introduction of dynamic geometry software into the teaching-learning situation:

- reaction alpha: ignoring the perturbation
- reaction beta: integrating the perturbation into the system by means of partial changes
- reaction gamma: the perturbation is overcome and looses its perturbing character. (p. 2)

It is only in the last stage (reaction gamma) that teachers make an adaptation in their teaching that truly integrates the technology.

The efforts at researching the effects of technology use on students' learning have been hampered by the prevalence of reactions alpha and beta. As more teachers achieve reaction gamma we have both the opportunity and the responsibility to carefully research the effects of integration of dynamic geometry technology into the teaching and learning of geometry and mathematics in general.

References

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D. & Gallino, G. (1998a). Dragging in Cabri and Modalities of Transition from Conjectures to Proofs in Geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 22).* Stellenbosch, South Africa, Volume 2, 32-39.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O.& Paola, D.. (1998b). A model for analyzing the transition to formal proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 22).* Stellenbosch, South Africa, Volume 2.

Balacheff, N. (1994). Artificial Intelligence and Real Teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (eds.), *Learning through computers: Mathematics and Educational Technology,* 131-158. Berlin: Springer Verlag.

Balacheff, N. and Sutherland, R. (1994) *Epistemological domain of validity of microworlds. The case of Logo and Cabri-géomètre*. Paper to IFIP, The Netherlands.

Battista, M. T. (1998a). SHAPE MAKERS: Developing Geometric Reasoning with *The Geometer's Sketchpad.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Battista, M. T. (1998b). Computer Environments that Engender Students' Construction of Mathematical Ideas and Reasoning: A Constructivist Perspective. Paper presented at the ENC Technology and NCTM Standards 2000 Conference. Arlington VA, June 5-6.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.

Cuoco, Albert A., and E. Paul Goldenberg. (1997). Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis. In James R. King and Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry Turned On!: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 33-46.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics,* 14(1), 11-18.

de Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. In James R. King and Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry Turned On!: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 15-24.

de Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. ? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 369-394.

de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Dywer, M & Pfiefer, R. E. (1999). Exploring Hyperbolic Geometry with The Geometer's Sketchpad. *The Mathematics Teacher* 92, 7, 632-637.

Finzer, Bill, and Dan Bennett (1995). From Drawing to Construction with The Geometer's Sketchpad. *The Mathematics Teacher* 88, 5, 428-431.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph,* No. 3.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic Geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 351-368.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 3-44.

Hampson, T. (1997). Beginning geometry at college. . In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 95-104.

Hofstadter, D. R. (1997). *Discovery and dissection of a geometric gem.* In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 3-14.

Hoyles, C. & Sutherland, R. (1986). When 45 equals 60. In C. Hoyles, R. Noss & R Sutherland (Eds.)Proceedings of the Second International Conference for *Logo and Mathematics Education.* London: Department of Mathematics Statistics and Computing, University of London Institute of Education.

Keyton, M. (1997). Students discovering geometry using dynamic geometry software. In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 63-68.

King, J. (1997). An eye for similarity transformations. . In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 109-120.

King, J. & Schattschneider, D. (Eds.) (1997). *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Laborde C. (1992) Solving problems in computer based geometry environments: the influence of the features of the software. *Zentrablatt für Didactik des Mathematik*, 92(4) 128-135.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In: C. Keitel and K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, 48-67. Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer-based environment. In L. Burton & B. Jaworski (Eds.)*Technology in Mathematics Learning - a bridge between teaching and learning,* 35-68. London: Chartwell-Bratt.

Laborde, C. (1998). Factors of integration of dynamic geometry software in the teaching of mathematics. Paper presented at the ENC Technology and NCTM Standards 2000 Conference. Arlington VA, June 5-6.

Lee, K. (1997). *Tesselmania!* (computer program). Minneapolis, Minnesota: MECC.

Lehrer, R., Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 137-168.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Olive, J. (1997). Creating airfoils from circles: The Joukowski transformation. . In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 169-176.

Olive, J. (1998). Opportunities to explore and integrate mathematics with the Geometer's Sketchpad. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 395-418.

Papert, S. (1980). *Mindstorm: Children, computers and powerful ideas.* Sussex, England: Harvester.

Parks, J. M. (1997). Identifying transformations by their orbits. . In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 105-108.

Schumann, H. & Green, D. *Discovering geometry with a computer - using Cabri-géomètre.* Bromley, Kent, England: Chartwell-Bratt.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando, FL: Academic Press.

Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria

Maria Isabel Coelho
Escola EB 2/3 Serra da Gardunha - Fundão
Manuel Joaquim Saraiva
Universidade da Beira Interior - Covilhã

Introdução

Este texto é dedicado: (i) à apresentação e problematização dos resultados da investigação realizados quer em Portugal, quer nos Estados Unidos da América e Canadá, assim como nalguns países da Europa; (ii) à problematização da investigação nesta área.

Partir-se-á de uma síntese elaborada para o primeiro ponto, e procurar-se-á, em seguida, relacioná-la com o segundo, de modo a perspectivar o futuro.

Resultados de estudos já realizados

As principais referências teóricas

"Aprender Matemática é um direito básico de todas as pessoas" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 17). Entre os aspectos fundamentais para uma *literacia* matemática conta-se a resolução de problemas e, de acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989/1991), a aquisição do poder matemático envolve, entre outros aspectos, o desenvolvimento da capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente (Schoenfeld, 1991). A Geometria é uma área privilegiada para desenvolver estas capacidades, num contexto de resolução de problemas não rotineiros (Abrantes *et al.*, 1999; DGEBS, 1991a; NCTM, 1989/1991). O computador é referido sistematicamente como propiciador de potentes ambientes de ensino/aprendizagem (Laborde, 1993a,b; Laborde e Laborde, 1992; Noss, Hoyles, Healy e Hoelzl, 1994) e a Geometria como particularmente adaptada a explorar as virtualidades dos micromundos computacionais.

Ambiente de aprendizagem. Porque a aprendizagem não é uma questão meramente cognitiva, as interacções sociais têm sido estudadas no sentido de investigar a sua influência na cognição (Serrazina, 1995) e na construção do significado matemático. Como o contexto escolar joga um papel fundamental, não é possível separar a actividade, as pessoas que actuam - e respectivas interacções - e os instrumentos mediadores dessa acção (Santos e Rodrigues, 1998). O computador, segundo Pea (1993), "funciona como estrutura mediadora da actividade, organizando-a e, simultaneamente, constrangendo-a" (citado em Rodrigues, 1997, p.24). Por seu lado, Lesh (1990) considera que o computador propicia o aumento da capacidade de aquisição e compreensão de conceitos, criando espaço para o desenvolvimento de processos reflexivos.

De Corte (1992) refere que os computadores só podem ser úteis, em termos do processo de ensino/aprendizagem, se estiverem integrados em "ambientes de aprendizagem poderosos". Estes devem ter como referência "as três componentes principais de uma teoria de aprendizagem" (De Corte, 1992, p. 91): a *competência*, a *aquisição* e a *intervenção*. Um ambiente de aprendizagem poderoso será, então, aquele que permite o desenvolvimento das capacidades num determinado domínio (*competência*), a aquisição de processos de aprendizagem para se adquirir determinadas competências (*aquisição*) e a aplicação de métodos de ensino e estratégias adequadas para promover os processos de aprendizagem e desenvolvimento (*intervenção*).

Nesta perspectiva, o contexto assume importância fulcral e deverá, nomeadamente, propiciar a utilização de estratégias de aprendizagem e de resolução de problemas e reforçar a aquisição de competências metacognitivas. É neste sentido que Laborde (1997) afirma que não basta confrontar os alunos com os micromundos (entendidos como ambientes que compreendem manipulações de objectos formais, mas não fazem qualquer inferência sobre o utilizador), sendo necessárias as intervenções de ensino. De Corte (1992) salienta, ainda, a importância do ambiente se basear na natureza construtivista da aprendizagem, onde quer o professor, quer outros colegas, quer o computador poderão/deverão fornecer suporte aos alunos. Este aspecto é igualmente focado por Noss *et al.* (1994), quando referem o "computational scaffolding" como sustentáculo do desenvolvimento das ideias dos alunos e da construção do conhecimento geométrico.

A criação de contextos sociais favoráveis à aprendizagem é, ainda, uma das características de um ambiente geométrico dinâmico (*software* que permite construir e manipular figuras geométricas no ecrã do computador e que designaremos por AGD), o que parece beneficiar a aquisição de conhecimentos, dada a influência da interacção social no desenvolvimento cognitivo, incluindo a produção de provas. A descrição do contexto torna-se essencial para o estabelecimento de relações entre o ensino e a aprendizagem (Fernandes, Borralho e Amaro, 1994; Lester e Charles, 1992).

<u>Desenhos *vs.* Figuras</u>. Esboços e diagramas têm um lugar importante no ensino/aprendizagem da Geometria e facilitam a passagem gradual do concreto ao abstracto. A importância das representações externas (desenhos, gráficos, diagramas) é usualmente aceite mas cada indivíduo tem de criar uma representação mental do objecto, a figura. Os entes geométricos têm natureza dual: são encarados quer como os objectos da teoria, quer como os respectivos modelos (Junqueira, 1993; Laborde, 1993a). A figura é o significado, a representação mental, enquanto que o desenho não é mais que a respectiva representação externa, o significante (Laborde e Laborde, 1992).

A distinção entre desenho e figura é uma das alterações essenciais introduzidas pelos AGD na aprendizagem da Geometria, os quais constituem ambientes propiciadores da descoberta de propriedades e relações geométricas, através do desenvolvimento da capacidade dos alunos estabelecerem e explorarem conjecturas (Schwartz, 1992).

Os progressos que se têm verificado em termos de *software* permitem manipular as representações externas de forma reconhecidamente dinâmica. Num AGD é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas. A observação de regularidades, enquanto se processa a manipulação directa, permite a "descoberta" de propriedades e relações. Laborde (1993b) considera a necessidade da continuação de estudos com o intuito de estabelecer relações entre o movimento facultado pelo *software* e a Geometria aprendida. Também Olive (1992) salienta que as explorações desenvolvidas em ambientes computacionais dinâmicos fazem aumentar a compreensão das relações entre os conceitos geométricos e levam progressivamente o aluno a pensar de um modo mais geral e abstracto.

Visualização. Esta é entendida como a capacidade de tratar informação visual e é uma das ferramentas utilizadas na resolução de problemas geométricos (Laborde, 1993a) e que tem vindo a ser considerada como objecto de pesquisa e debate em Matemática e Psicologia (Junqueira, 1995). O movimento e a modificação dos desenhos num AGD possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e relações geométricas (Laborde, 1993a).

Os AGD funcionam como "espelhos intelectuais" (Schwartz, 1993) onde os alunos podem experimentar as suas ideias, merecendo especial destaque o *feedback* visual devolvido pela manipulação dos desenhos no ecrã do computador como apoio na resolução de problemas.

Este *feedback* visual, através da manipulação de uma construção, permite verificar visualmente uma propriedade ou uma relação ou validar uma construção como resistente à manipulação directa (arrastamentos), ou seja, legitimar uma figura associada a diferentes representações externas.

Conjectura e prova. Tradicionalmente, a demonstração, entendida como a prova formal, lógico-dedutiva (Hanna, 1996), é a única considerada válida.

Os ambientes computacionais dinâmicos têm introduzido modificações importantes na concepção de prova, na forma de encarar e fazer a demonstração. Por exemplo, nestes ambientes, os utilizadores podem generalizar as descobertas e testar a respectiva validade, através de um aliciante processo de indução (Schwartz,1993).

Numa perspectiva construtivista da aprendizagem, o processo pelo qual os alunos constróem a prova tem uma importância vital. Actualmente, na aprendizagem da Geometria encaram-se os processos de natureza indutiva como fundamentais: os aspectos intuitivos da (re)descoberta e da posterior generalização da conjectura são passos indispensáveis para uma subsequente construção da prova dedutiva.

A utilização dos AGD é facilitadora da experimentação e, através dos vários exemplos gerados, da investigação de propriedades e relações que se mantêm invariantes aos arrastamentos: "a procura de tudo o que permanece constante, no meio de tudo o que varia" (Veloso, 1995, p. 58). Desta forma, em ambientes computacionais dinâmicos, a demonstração assume-se mais como uma procura da compreensão do porquê da veracidade da proposição do que de um seu convencimento. Esta necessidade, segundo Hanna (1996), confere à demonstração uma legitimidade proveniente de si própria e não de uma autoridade externa.

Estudos com o *Supposer* (Yerushalmy e Chazan, 1990; Yerushalmy, Chazan e Gordon, 1990) apontam para a influência daquele AGD na produção de provas e, mesmo, no desenvolvimento por parte dos alunos da necessidade da prova formal ou demonstração.

Igualmente, Saraiva (1992) considerou o LOGO.GEOMETRIA [1] como um precioso auxiliar na elaboração de provas, ainda que os alunos mais fracos considerassem a veracidade das conjecturas com base em poucos casos que experimentavam. Porém, progressivamente, foram alargando o número de exemplos, o que permitiu que bastantes alunos acabassem por sentir a necessidade da demonstração.

Segundo Junqueira (1995), os AGD podem dar um contributo importante ao processo de descoberta indutiva de teoremas, enquanto que o recurso a ambientes tradicionais de papel e lápis apresenta inconvenientes para a produção de provas: morosidade na exploração de exemplos significativos e menor precisão nas medições e cálculos; não passagem, na maior parte dos casos, da fase de desenho à de figura, porque as construções resultantes são estáticas e apenas podem ser tornadas flexíveis por "imaginação mental".

Obstáculos visuais. Os desenhos, apesar dos benefícios que propiciam, também podem trazer obstáculos à compreensão da figura que representam. Yerushalmy e Chazan (1993) agrupam esses obstáculos em três categorias: (a) os diagramas são casos particulares, o que pode causar que características irrelevantes sejam tomadas como

[1] Ferramenta para desenvolver actividades em geometria. É um conjunto de procedimentos em LOGO que permite construir, relacionar e transformar, de acordo com os desejos do utilizador, objectos geométricos de diferentes tipos (rectas, ângulos, polígonos, circunferências, ...).

propriedades; (b) o uso de desenhos em posições prototípicas ou padronizadas (tal como a posição preferida horizontal - vertical) pode provocar confusão entre a representação externa e o ente geométrico; (c) a incapacidade de os alunos perceberem um desenho de diferentes maneiras. Pólya (1945/1975), ao referir-se à utilização de desenhos em problemas geométricos, alerta para que estes não devem sugerir nenhuma particularização indevida: "As diferentes partes da figura não devem exibir relações aparentes que não sejam exigidas pelo problema." (p. 84). O movimento que, através dos AGD, é possível imprimir a esses diagramas tem permitido minorar esses obstáculos que os alunos têm de ultrapassar na aprendizagem da Geometria, nomeadamente a utilização de figuras prototípicas (em posição padrão).

Usando o LOGO

Desde que Papert, em 1980, introduziu a ideia de micromundo ainda não se chegou a uma definição padronizada para este conceito (Laborde e Srässer, 1990). Assim, neste texto, consideraremos "micromundo" como um ambiente colocado à disposição dos utilizadores para realizar experiências, explorar universos particulares e descobrir-lhes as propriedades. Os micromundos geométricos que têm sido, mais frequentemente, utilizados em Portugal são o LOGO, o Geometric Supposer, o Cabri-géomètre e o Geometer's Sketchpad.

Os estudos que utilizaram o LOGO tiveram lugar em finais da década de 80 / início dos anos 90. Esta linguagem de programação foi utilizada em várias experiências pedagógicas e em vários graus de ensino. Matos (1987) ao estudar, a nível de 1º ciclo, o ambiente de aprendizagem criado por este micromundo, concluiu que "as tarefas baseadas na programação em LOGO revelam-se fortemente adaptáveis a uma escola do 1º ciclo onde já se praticava uma pedagogia centrada na diversificação de actividades e recursos de aprendizagem e na autonomia e responsabilização dos alunos" (Ponte, Matos e Abrantes, 1998, p. 93).

Neves (1988) fez um estudo comparativo, utilizando a linguagem LOGO e o utilitário de desenho GemPaint, na recuperação de alunos do 9º ano de escolaridade que, pelo menos desde o 7º ano, tinham sistematicamente classificações negativas em Matemática. A autora concluiu que houve um grande progresso nos alunos, não se registando diferenças estatisticamente significativas entre os dois grupos. Porém o grupo de alunos que utilizou o LOGO obteve resultados ligeiramente inferiores na aquisição de conceitos e levemente superiores na resolução de problemas, relativamente ao grupo que trabalhou com o GemPaint.

Saraiva (1992) utilizou o LOGO.GEOMETRIA como uma ferramenta para o estudo da Geometria vectorial e analítica, com duas turmas do 10º ano de escolaridade. Neste estudo, o autor pretendia analisar as potencialidades computacionais do LOGO.GEOMETRIA na promoção da construção de conceitos e relações matemáticas, na capacidade de formular e resolver problemas, na compreensão da necessidade das demonstrações e no desenvolvimento de novas atitudes e concepções face à Matemática. As tarefas propostas tinham uma forte componente de exploração e descoberta. O autor concluiu que o programa constituiu um estímulo para os alunos formularem e testarem conjecturas, bem como facilitou o aparecimento de estratégias de resolução de problemas. A compreensão da importância das demonstrações foi um processo com algum sucesso, embora mais lento, e passou pela acção muito forte dos professores das duas turmas – tiveram a necessidade de combater o convencimento dos alunos quanto à veracidade das suas conjecturas, pela simples verificação para um ou dois casos.

Os alunos reagiram bem a esta experiência e muitos deles afirmaram sentir-se mais apoiados nas aulas com o computador. O facto de os alunos, por vezes, experimentarem processos que não eram do conhecimento (porque não possíveis de prever) dos respectivos professores, contribuiu para que a Matemática começasse a ser vista como uma disciplina em que há vários caminhos para se chegar à resolução de um problema.

Borges (1994) utilizou aquele micromundo no ensino de conceitos geométricos a alunos do 7º ano de escolaridade, tendo comparado duas turmas com semelhante rendimento inicial em Matemática. Depois de uma delas ter trabalhado com o LOGO na unidade de Geometria, a autora concluiu que o ensino com a utilização do computador foi mais explícito, mais objectivo e a identificação de conceitos mais eficaz. Verificou uma evolução favorável da atitude dos alunos em relação à Matemática, nomeadamente no modo de encarar os erros cometidos. Quanto à aprendizagem, refere que o facto dos alunos terem passado mais tempo na construção de figuras é apontado como uma possível explicação para uma melhor consolidação dos conceitos.

Usando o Cabri-géomètre

Não conhecemos em Portugal experiências contextualizadas pelo Supposer ou pelo Geometer's Sketchpad, apesar da grande utilização que, recentemente, este último tem tido em termos didácticos.

Os estudos que referiremos a seguir foram realizados na segunda metade dos anos 90 e utilizaram um AGD como contexto e objecto de estudo: Junqueira (1995) utilizou a versão 1.6 de *Le Géomètre* e a versão 1.7 do Cabri-géomètre; esta última foi igualmente usada por Coelho (1996), enquanto que o estudo de Rodrigues (1997) se contextualizou na versão 1.6. Designaremos qualquer destas versões indistintamente por Cabri-géomètre ou CABRI, dado as diferenças serem irrelevantes para os estudos realizados.

Junqueira (1995) refere que o CABRI é "um programa amigável, que os alunos aprendem a dominar rapidamente e que permite concretizar estratégias com as características de intervenção poderosa, no sentido que De Corte (1992) dá a estes termos." (p. 42).

Coelho (1995) justifica a opção feita em relação àquele micromundo por comparação com os programas de filosofia LOGO e o Geometric Supposer: "a função repetição tem características directamente ligadas ao movimento (...) e os resultados obtidos, em diferentes estudos referentes à resolução deste problema [o de Varignon], em Euclide, Supposer e Cabri-géomètre, apontam para uma maior eficácia deste último." (p. 58).

Rodrigues (1997) aponta que o "Cabri-géomètre promove uma aprendizagem dinâmica da Geometria e possibilita de uma forma eficaz a interacção com o utilizador." (p. 112). Refere, ainda, ser este AGD "particularmente apropriado para apoiar um ensino renovado da Geometria" (p. 58), conduzindo naturalmente à necessidade de demonstração.

Apesar do modelo de van Hiele não ter sido objecto de análise em qualquer destas investigações, serviu de referencial teórico a Junqueira (1995) e Coelho (1996), dada a sua importância no desenvolvimento do raciocínio e aquisição de conhecimentos geométricos, assim como no sucesso ou insucesso na produção de provas.

O Cabri-géomètre foi utilizado por Junqueira (1995) com os alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade. O estudo compreendeu uma fase exploratória (cinco aulas, no 2º Período) e uma sequência de dezanove aulas no 3º Período. Em cada semana, duas aulas eram dedicadas ao trabalho com o computador (em pequenos grupos) e as outras duas destinadas à discussão do trabalho desenvolvido anteriormente e à apresentação de novos conceitos.

Foram analisadas estratégias de:

- Construção de conhecimentos geométricos, a partir da exploração de construções geométricas resistentes (as propriedades e relações não mudam quando se modifica o desenho por arrastamento de elementos livres e semi - livres), pesquisa essa que envolveu: (i) a realização das construções; (ii) a justificação dos processos utilizados e (iii) a investigação das construções e descoberta das propriedades das figuras.

- Compreensão dos objectos e relações geométricas, formulação de conjecturas e elaboração de argumentos indutivos e dedutivos.

A unidade “Geometria do Plano” do 9º ano (mediatriz, bissectriz e circunferência) forneceu o contexto geométrico propiciador da emergência dos processos a caracterizar, durante a realização de tarefas de natureza exploratória.

Partindo do pressuposto de que os problemas têm uma função importante na construção do conhecimento matemático, a qual pode ser potenciada se a resolução se processar num ambiente computacional dinâmico e da necessidade de se analisar o tipo de conhecimento construído pelos alunos (Laborde, 1993b), Coelho (1995) desenvolveu um estudo que teve como objectivos analisar: (i) os processos evidenciados durante a resolução de problemas e a construção de conhecimentos, no domínio da Geometria (quadriláteros e simetria), por alunos do 6º ano de escolaridade, ao utilizarem o Cabri-géomètre como ferramenta de trabalho; (ii) as interacções que estabeleceram, nomeadamente com o *software*, e o papel deste como facilitador da aprendizagem.

Envolveu seis alunos, seleccionados entre voluntários, mediante critérios previamente estabelecidos, de modo a formar três grupos: “Bons” (Grupo A), “Médios” (Grupo B) e “Fracos” (Grupo C), tendo, no final do estudo, contrastado mais especificamente os processos do melhor do grupo A com o mais fraco do Grupo C (selecção por caso extremo). O estudo desenvolveu-se em duas fases: a de ensino e a da experiência (onde foi feita a recolha de dados). A primeira teve como objectivo familiarizar os alunos com a resolução de problemas, contextualizada no (e contextualizadora do) Cabri-géomètre e que os alunos conseguissem uma primeira representação do domínio dos quadriláteros, a partir dos triângulos, transformados pela simetria com eixo sobre um dos seus lados. Para o efeito, Coelho (1995) construiu propostas de trabalho, que designou por "tarefas-problema" (p. 11), entendidas como "problemas abertos" (Arsac., Germain e Mante, 1988) de "processo/conteúdo" (Fonseca, 1995).

Também com a utilização do Cabri-géomètre, Rodrigues (1997) leva a cabo uma investigação que teve como finalidade analisar a construção do significado matemático, pelos alunos, em interacção social, focando a utilização do computador em actividades de construção geométrica, equacionando e comparando os seguintes aspectos: (i) relação entre o sentido conferido à Matemática e o mundo experencial dos alunos; (ii) o papel do computador como instrumento mediador dos processos de raciocínio; (iii) a relação entre as interacções sociais e a construção do significado matemático.

Neste estudo, a recolha de dados teve lugar durante a unidade "Lugares Geométricos" a qual estava integrada no Projecto da Área-Escola de uma turma do 8º ano e envolveu quatro estudantes, trabalhando em grupo. Nas aulas que envolviam computador, dividiam-se em dois subgrupos.

Os três estudos têm em comum uma abordagem qualitativa das questões enunciadas e as investigadoras agiram simultaneamente como professoras, utilizando o método de observação participante.

Junqueira (1995) e Coelho (1996) contrataram com os alunos intervenientes nos respectivos estudos a necessidade de manterem a resistência das construções - estas não se podiam desmanchar quando do arrastamento de objectos livres ou semi-livres. Os objectos livres são os que se obtêm através do Menu Criação: podem deslocar-se livremente por todo o ecrã do computador, daí o serem também designados por objectos de base ou elementos de grau dois; os objectos semi-livres são "pontos construídos sobre objecto" (Menu Construção) o que tem como consequência o apenas se poderem mover sobre esses objectos (linhas), donde lhes vem igualmente a designação de objectos de grau um. No CABRI existe, ainda, um terceiro tipo de pontos, os pontos fixos (ou de grau zero) que não são alvo de arrastamento; a sua deslocação no ecrã apenas advém da manipulação directa de elementos livres e semi - livres.

A figura 1 (Junqueira, p. 118) evidencia a necessidade da utilização destes três tipos de pontos na construção de um rectângulo.

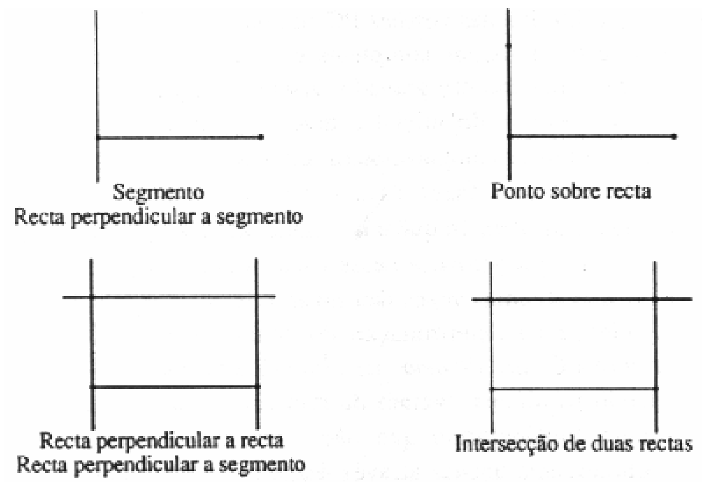


Figura 1 - Na construção de um rectângulo utilizam-se os três tipos de pontos do Cabri-géomètre

Foi na fase de ensino que Coelho (1996) introduziu a resistência das construções. Junqueira (1995) refere que "A regra de resistência ao arrastamento obrigava-os a imaginar um *processo de construção* que tivesse subjacente uma descrição da figura em termos das suas propriedades e não apenas na sua aparência" (p. 98).

Tanto Junqueira (1995) como Coelho (1996) referem, nos seus estudos, terem observado algumas dificuldades na selecção / utilização destes três tipos de pontos, especialmente na primitiva *Intersecção de dois objectos*.

Ambas mencionam, ainda, a dificuldade de trabalho com a *Recta paralela*, sendo esta primitiva incluída por Junqueira (1995) nas *anti visuais*, isto é, aquelas que podem provocar dificuldades de visualização:

> "As dificuldades na construção de rectas paralelas terão levado os alunos a optar por construir rectas perpendiculares, o que foi possível em muitos casos."
> (p. 120).

Facto semelhante foi observado por Coelho (1996) quando constatou muito maior facilidade no problema de construção do rectângulo a partir dos pontos médios de lados opostos do que em problema semelhante de construção do paralelogramo obliquângulo:

> "**Eles**: - Achamos a perpendicularidade mais fácil.
>
> **Nós**: - Porquê?
>
> **Nuno**: - Porque vemos logo o ângulo, vemos logo que o ângulo é recto e com o paralelismo não vemos o ângulo.
>
> (p.120)

Nesta sequência, Coelho (1996) assinala que um dos alunos (o Nuno) utiliza por três vezes, numa frase curta a palavra "vemos", o que lhe parece traduzir a importância do *feedback* visual.

Para análise da realização de construções geométricas, considerou Junqueira (1995) três categorias (aparência das construções, percursos de construção e construções resistentes).

Na primeira é referida, entre outras, a preferência por exemplos prototípicos das figuras, o que é, igualmente, salientado por Coelho (1996), especialmente no início do estudo, sendo principalmente utilizada a posição preferida horizontal/vertical:

> "A Catarina ao abrir BRECTANG exclamou:
>
> - Este rectângulo está tão torto!" (pag. 111)

Todavia, a influência da manipulação manifestou-se, nos dois casos, numa diminuição significativa de exemplos prototípicos.

Os percursos de construção foram classificados por Junqueira (1995) em quatro categorias: construções que se desmancham; construções que se desmancham, depois resistentes; construções resistentes com ensaios; construções resistentes sem ensaios. A maioria das construções realizadas seguiu o segundo processo, sendo os alunos ajudados pela professora ou pelo *feedback* devolvido pela manipulação. No entanto, até ao final da intervenção, um número significativo de alunos continuou a realizar construções que se desmanchavam

No estudo de Coelho (1996) identificam-se percursos de características semelhantes, não tendo, no entanto, procedido àquela categorização por não ser objectivo do seu estudo. Todavia, podem tirar-se conclusões análogas - na fase de ensino, os alunos começam por fazer desenhos, passando gradualmente, por tentativas, a construções resistentes. Mesmo no final da fase da experiência, continuaram a verificar-se construções do segundo tipo, fornecendo o *feedback* visual as escoras necessárias à passagem do desenho a figura.

Nestes dois estudos, a visualização exerceu dois papéis na procura de processos para obter construções resistentes: o de controlador, que levava os alunos a aperceber-se da incorrecção das construções; e o de explorador, que levava os alunos a experimentar ideias até conseguir resolver o problema em causa (Junqueira, 1995).

No estudo desenvolvido por Junqueira (1995), os alunos, a partir do momento que encontravam um processo de construção (sendo esses processos, muitas das vezes, repetições de procedimentos anteriores bem sucedidos que Junqueira designa por *guiões*), mostravam-se, quase sempre, tão seguros do produto que não sentiam a necessidade de verificar a construção final.

De forma semelhante, Rodrigues (1997) afirma que, quando os alunos estão certos da veracidade das conjecturas que formulam, não sentem necessidade de as testar e que a validação é sentida como dispensável pelos alunos, quando a mesma não corresponde a um motivo pessoal ou a um motivo social. Parece-lhe possível inferir dos resultados do estudo que quando a motivação para a prova se situa num nível teórico, não basta observar os múltiplos exemplos gerados pela manipulação para que ocorra uma generalização.

Resultado diferente obteve Coelho (1996), visto que a verificação do resultado se tornou uma constante da resolução de todos os problemas. Os alunos, por arrastamento, produziam vários desenhos para verificar as invariâncias do produto final. Por outro lado, as sucessivas verificações que faziam durante a fase de execução, permitiam-lhes ter a verificação "quase" feita, quando chegavam ao resultado. No entanto, a frequência de manipulações decrescia do grupo A até ao grupo C. A estes chegava-lhes, frequentemente, um arrastamento para considerarem o resultado verificado. Coelho (1996) sugere que os alunos que efectuavam mais arrastamentos (e mais orientados) estariam provavelmente num nível de van Hiele mais elevado, cruzando este resultado com o facto de serem os mesmos que mais facilmente estabeleciam propriedades e relações:

> "Os alunos do grupo A (...) começaram a efectuar arrastamentos para transformar o paralelogramo em losango e em rectângulo, sem que tivessem sido solicitados a efectuar tais procedimentos." (p. 151)

A figura 2 (Coelho, 1996, p. 162) traduz a "árvore de família" esboçada pelos alunos do grupo A, depois de terem estabelecido, através da resolução de um problema, a classificação lógica dos quadriláteros:

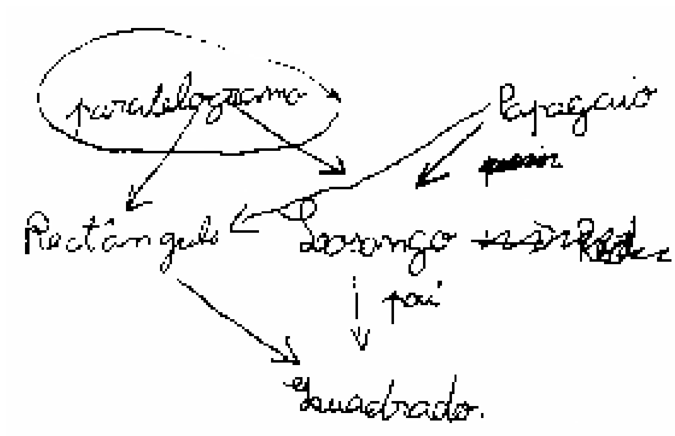


Figura 2 - Árvore de família dos paralelogramos e dos papagaios

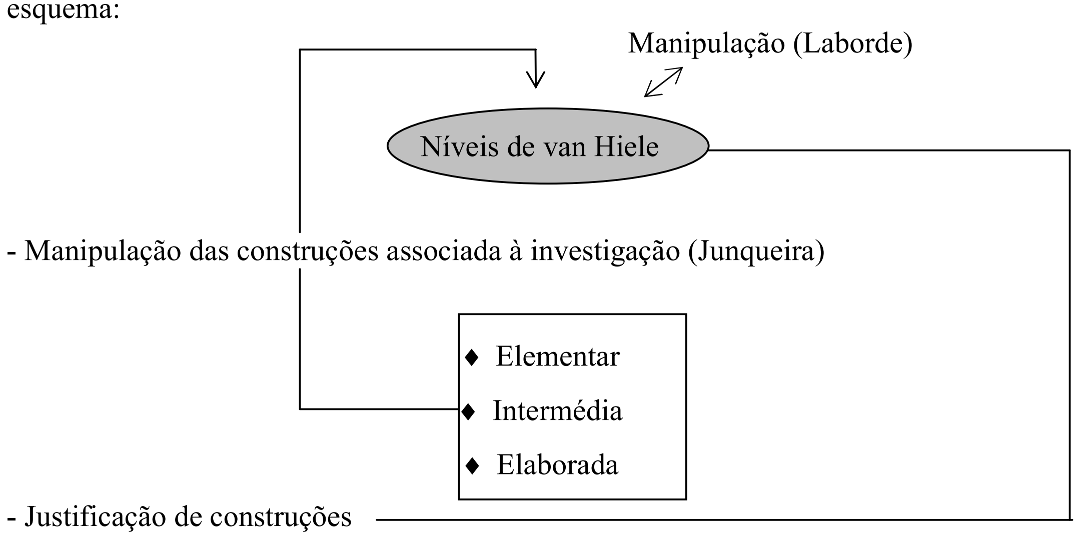
Outro dos objectivos do estudo de Junqueira (1995) era a justificação de construções geométricas. A autora pretendia que os alunos descrevessem e explicassem as suas construções e concluiu que "para a grande maioria dos alunos (...) a justificação das construções foi um tipo de actividade em que se lhes depararam alguns obstáculos" (p. 192). No entanto, alguns alunos melhoraram a sua *performance* através da primitiva *Histórico*, que possibilitava "rever a sequência de objectos geométricos que tinham utilizado em cada construção" (p. 171).

Para além do *Histórico* que os alunos utilizavam frequentemente para justificarem/recordarem determinada construção, Coelho (1996) sugeriu a consulta do *Jornal de Sessão*, o qual permitia rever todos os passos (*fotografias*) efectuados, por ordem cronológica. Esta funcionalidade era principalmente utilizada, no final de cada sessão, quando os alunos eram levados a reflectir sobre a mesma. Revelou-se, igualmente, importante como um protocolo automático para análise posterior.

Na investigação de construções geométricas pretendia-se, segundo Junqueira (1995), que, através da manipulação, os alunos pesquisassem novas relações invariantes e formulassem conjecturas sobre a figura induzidas a partir da observação.

A autora considera a análise dos dados referentes a esta etapa menos fundamentada, por razões inerentes ao próprio estudo. Destaca ainda que a fronteira entre os três tipos de actividades (realização, justificação e investigação de construções) nem sempre foi nítida, tendo definido quatro tipos de manipulação das construções a que fez corresponder uma classificação de "Elementar", "Intermédio" e "Elaborado", fundamentando-se na opinião de Laborde (1993a; 1993b) em que a interacção entre a visualização e o conhecimento geométrico dos alunos os conduz a interpretar o *feedback* fornecido pelo *software* em diferentes níveis conceptuais. Junqueira (1995) reconhece que "nos três níveis anteriores nota-se que, progressivamente, a aparência visual cede lugar ao conhecimento geométrico na verificação da validade das construções e na sua exploração" (pag. 218). Nestes níveis de manipulação notam-se características dos três primeiros níveis de van Hiele. Igualmente, algumas das justificações apresentadas pelos alunos, no estudo de Junqueira (1995), apontam para um desenvolvimento de raciocínio geométrico inserido num dos três primeiros níveis de van Hiele.

Estes resultados expressos por Junqueira (1995) e Coelho (1996) estão de acordo com a existência de uma relação entre os arrastamentos e os níveis de van Hiele, tal como sugerido por Laborde (1993a, b): o modo como se processa a manipulação do desenho está relacionado com os níveis de van Hiele. Esta interpretação é sintetizada no seguinte esquema:



O aluno mais “fraco” do estudo de Coelho (1996), aquele que só construiu conhecimentos muito rudimentares relacionados com a medida, revelava uma percepção essencialmente estática da Geometria, embora usasse, algumas vezes, a manipulação, a qual parece ser necessária para “que as pré-ideias se vão clarificando” (Rodrigues, 1997, p. 200). Por seu lado, os alunos que, no estudo de Coelho (1996), mais progrediram em termos da resolução de problemas e da construção de conhecimentos geométricos, utilizavam frequentemente a manipulação directa. A tabela 1 (Coelho, 1996, p. 211) pretende resumir os principais aspectos em que se fez sentir a influência da manipulação directa:

	Grupo A (Bons)	**Grupo B (Médios)**	**Grupo C (Fracos)**
Verificação de passos intermédios	Muito frequente	Muito frequente	Muito frequente
Verificação da condição	Muito frequente	Muito frequente	Pouco frequente
Generalização da solução	Sempre	Sempre	Pouco frequente
Exploração de propriedades e relações	Muito frequente	Muito frequente	Pouco frequente
Exploração das simetrias	Frequente	Pouco frequente	Nunca
Classificação de quadriláteros	Muito frequente	Quando solicita-dos	Nunca

Tabela 1 - Utilização da manipulação directa

Rodrigues (1997) refere nem sempre terem os alunos explorado as potencialidades dinâmicas do Cabri:

> “E essa exploração intencional dinâmica teria, provavelmente, contribuído para que o Tiago tivesse uma maior compreensão das propriedades da mediatriz.” (p. 240)

Reconhece que, no início de determinada actividade, as alunas faziam uma “utilização estática do Cabri” (p. 241). Posteriormente, tanto o incitamento da investigadora para a exploração dinâmica do Cabri como a natureza da proposta de trabalho, conduzem a que uma das alunas faça "pela primeira vez, nessa aula, um arrastamento intencional e de sua iniciativa" (p. 244).

A figura 3 (Rodrigues, 1997, p. 247) traduz as duas fases (inicial e final) do arrastamento do vértice superior, mantendo-se inalterados os objectos matemáticos que não lhe são dependentes (base e respectiva mediatriz):

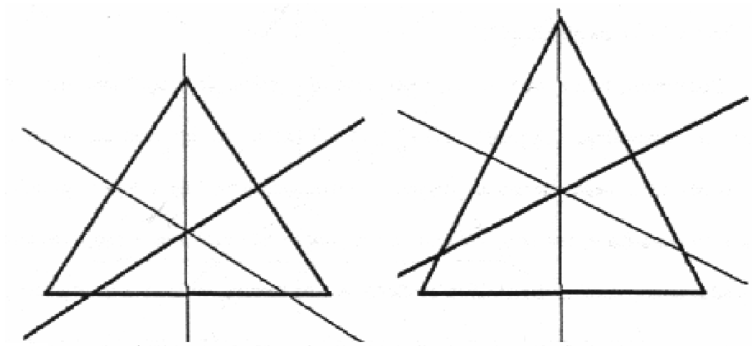


Figura 3 - **As duas fases (inicial e final) do possível arrastamento do vértice superior**

A apropriação pela aluna das potencialidades dinâmicas do Cabri levou-a "à formulação de uma conjectura, baseada em experiências dinâmicas mentais mediadas pelo computador" (p. 245). A investigadora, face a este resultado, considera que tanto o seu incitamento como as características da proposta funcionaram como mediadores culturais e cognitivos.

Coelho (1996) investigou os processos evidenciados pelos alunos durante a resolução de problemas, tendo o Cabri-géomètre sido utilizado como ferramenta auxiliar. Concluiu que os processos são diferentes, variam de grupo para grupo, havendo, no entanto, certa semelhança entre os utilizados pelos grupos A e B.

Ela constatou, ainda, que para os alunos fracos a interpretação do enunciado constituiu a fase crítica da resolução dos problemas.

Os processos relativos à elaboração de um plano revelaram-se, em parte, característicos da segunda fase de Pólya (1945/1975), tendo, especialmente, no início do estudo os alunos partido para a execução sem terem feito qualquer plano ou com um plano insuficiente. Coelho interroga-se, relevando da possível influência do contexto:

> "Se não podemos afirmar que as características do CABRI tenham tido uma influência evidente nos processos da segunda fase de Pólya, também não

> queremos deixar de nos interrogar se algumas estratégias não poderão ter sido induzidas pelas possibilidades de recurso a repositórios de informação, como ficheiros base e de trabalho?" (p. 233)

Verificou, também, que, na maior parte das vezes, as fases de planeamento e de execução eram intercaladas: os alunos delineavam uma parte da tarefa, utilizavam o Cabri como um "espelho intelectual", onde construíam, experimentavam, corrigiam (se necessário), utilizando frequentes estratégias de tentativa e erro, continuavam a planear, testavam a eficácia do planeado, através da execução que, num AGD, se torna muito mais rápida e precisa do que num ambiente de papel e lápis (o *feedback* visual terá funcionado como imagem devolvida por um espelho). Afigura-se que os alunos, depois de confirmarem a eficácia do planeado, se sentiam mais confiantes para continuarem a organização do plano, cuja validade voltava a ser testada através da execução e, assim, até chegarem à solução, numa "estratégia de tentativa e erro globalizante", onde as outras estariam incluídas.

Também, segundo Rodrigues (1997), ao invés de estabelecer um plano sequencial de acções, os alunos vão manipulando os objectos matemáticos, fazendo experiências e é à medida que vão actuando que se apropriam dos objectos matemáticos.

> "Digamos que existe uma relação estreita e indissociável entre o pensamento, a compreensão, e a interacção física com o rato e o olhar sobre o ecrã. Os alunos pensam *com* o computador" (p. 202)

Haverá, assim, a considerar uma compreensão prática, em conjunção com as acções irreflectidas dos alunos sobre os objectos matemáticos, evidenciada no modo como os objectos são manipulados. Estas acções conferem um sentido pessoal a esses objectos ligados ao contexto empírico e só depois se desenvolve uma compreensão teórica, de natureza reflexiva e consciente, pela qual eles efectuam generalizações (Rodrigues, 1997).

Coelho (1996) crê terem os alunos revelado processos algo diferentes dos relatados na revisão da literatura, relativamente à terceira e quarta fases de Pólya. Na fase de execução foram notórios os procedimentos de tentativa e erro, especialmente por parte dos alunos "médios" e "fracos". No entanto, a verificação dos resultados intermédios e da solução foi característica do trabalho dos grupos. A evidência fornecida aponta que esta alteração, em relação aos processos normais, esteja relacionada com as características dinâmicas do *software* (ver tabela 1).

Tal regularidade não foi encontrada a nível da verificação da condição e generalização da solução. No entanto, Coelho (1996) crê poder afirmar que a manipulação directa teve repercussões positivas na generalização da solução, que se verificou nos grupos A e B (ver tabela 1), e que esta generalização foi suficiente para estes alunos, atendendo ao nível de van Hiele em que provavelmente se encontrariam.

No estudo de Rodrigues (1997), e como anteriormente referimos, esta incentivou as alunas a fazer arrastamentos com o rato, face à emergência de uma delas se mostrar motivada para a prova. No entanto, depois de as alunas terem observado, após vários arrastamentos, que as mediatrizes se encontravam sempre num ponto (figura 3), a motivação para a prova persiste, perguntando uma das alunas: "Agora como é que a gente prova?" (p. 235). As necessidades cognitivas da aluna não se encontravam num nível empírico, antes requeriam um nível superior de teorização. No entanto, as respostas de todos os outros grupos de trabalho situaram-se no nível de experimentação feito com o Cabri.

Coelho (1996) afirma que parece terem as características dinâmicas do Cabri-géomètre influenciado positivamente a construção de conhecimentos (propriedades, relações e classificação de quadriláteros), quer os necessários para resolver determinada tarefa, quer os que os alunos exploravam livremente, dadas as características abertas das tarefas propostas. No entanto, apenas os alunos dos grupos A e B conseguiram estabelecer relações que designavam como "propriedades entre figuras" (p.232). Outro aspecto curioso: a classificação de quadriláteros era abordada pelos alunos daqueles grupos em termos de "parentescos" (p. 233), escorados pela manipulação directa, e que materializavam em árvores de família, como a da figura 2.

As interacções entre os elementos dos grupos (especialmente A e B) eram frequentes. Este comportamento afigura-se como positivo na resolução das tarefas, tanto no que concerne à construção de conhecimento geométrico como à utilização do *software*.

Os alunos revelaram um grande empenhamento nas tarefas, tendo respondido, no inquérito final (Coelho, 1996), que "Gostei tanto de resolver os problemas como de trabalhar com o Cabri-géomètre" (p. 363), o que contrariava a opinião expressa, no primeiro debate, pela maioria dos alunos de que se tinham oferecido para a experiência por causa dos computadores.

Para Junqueira (1995) os alunos mostraram, em geral, mais interesse pelas aulas com o computador, privilegiaram as actividades de construção e deixaram para o fim as que exigiam justificações.

Rodrigues (1997) entende que os padrões das interacções, existentes entre os alunos, entre a professora e os alunos, e com o computador, parecem ter um papel fundamental na negociação dos significados matemáticos. Identificou que os alunos revelavam maior interesse na realização das tarefas com recurso ao computador, que a rapidez proporcionada e a apresentação cuidada dos trabalhos eram valorizados na cultura da sala de aula.

Conclusões

Em 1998, Ponte *et al.* afirmavam que:

> "… (apesar do reduzido número de estudos) a investigação tem confirmado as grandes potencialidades educativas tanto de um ambiente computacional do tipo do *Logo* como de um *software* dinâmico para o ensino da geometria." (p. 97)

Embora o número de estudos publicados e publicitados em Portugal, nomeadamente a partir de 1995, continue a ser muito reduzido, eles confirmam aspectos já considerados por aqueles autores, tais como: (i) as grandes potencialidades educativas da utilização dos AGD no ensino da Geometria; (ii) a subordinação da tecnologia à criação de ambientes de aprendizagem poderosos; (iii) e, para um maior aproveitamento (e conhecimento) das potencialidades das tecnologias, a necessidade de poder contar-se com períodos de trabalho prolongados no tempo.

As investigações de Junqueira (1995), Coelho (1996) e Rodrigues (1997) realçam, igualmente, que o trabalho em AGD tende a criar uma atitude positiva dos alunos em relação à Matemática e a desenvolver neles uma certa autonomia.

O CABRI confirmou-se, para estas autoras, como um *software* amigável e fortemente interactivo que os alunos aprendem a dominar facilmente, revelando o máximo das suas potencialidades educativas, quando é utilizado numa perspectiva dinâmica, e conduzindo à necessidade de demonstração. Os aspectos ligados ao movimento são especialmente realçados nos trabalhos de Junqueira (1995) e Coelho (1996), ao passo que Rodrigues (1997) conclui que os alunos nem sempre exploraram, intencionalmente, estas potencialidades do *software*.

A visualização dos invariantes neste AGD suscitou nos alunos a elaboração de conjecturas. E, ainda, exceptuando o estudo de Coelho (1996), o convencimento da respectiva veracidade, nem lhes ocorrendo, na maior parte das vezes, a necessidade de as testar, porque os alunos não as encarariam como meras hipóteses mas, sim, como explicações de carácter matemático, das quais não teriam quaisquer dúvidas. Para Rodrigues (1997) a motivação para a prova matemática está presente na pesquisa dos fundamentos teóricos dessa verdade e/ou na discussão das diferentes ideias matemáticas. Assim, a importância dada pelos alunos à justificação e à prova formal apresenta-se como um processo mais complexo, exigindo mais tempo e uma atenção especial ao papel assumido pelo professor.

Por seu lado, Coelho (1996) constatou que os alunos faziam sistematicamente a verificação do resultado para fazerem a testagem das conjecturas que formulavam. Procediam através de sucessivos arrastamentos, tendo a autora observado que o número (e intencionalidade) dos arrastamentos era variável, decrescendo do grupo dos "Bons" até ao dos "Fracos", e sugerido uma possível relação com os níveis de van Hiele. Também Junqueira (1995) detectou características daqueles três primeiros níveis no modo como os alunos procediam à manipulação directa. A maneira como se processam os arrastamentos estará, assim, relacionada com aqueles níveis, tal como expresso por Laborde (1993a).

Estes estudos questionam, ainda, uma possível ligação do modelo de van Hiele ao raciocínio geométrico em interacção com o AGD, quer no que respeita à justificação das construções (Junqueira,1995), quer à construção de conhecimentos, a partir da resolução de problemas (Coelho, 1996).

As estratégias de tentativa e erro permitidas pelo *software*, e muito observadas no estudo de Coelho (1996), permitiram que, gradualmente, os alunos passassem do desenhado ao construído, isto é, deixassem, na generalidade, as primitivas de puro desenho para obterem construções resistentes aos arrastamentos. Também Junqueira

(1995) observou diferentes percursos, desde as “construções que se desmancham” até às “resistentes sem ensaios”. Apesar de, até ao final das intervenções, se ter observado a coexistência de construções que se desmancham com resistentes, puderam as autoras constatar que o *feedback* visual exerceu um importante papel na passagem de desenho a figura e que terá contribuído para os alunos se inserirem em estruturas mais profundas da Geometria, visto a resistência à manipulação directa os ter obrigado a processos de construção sustentados nas propriedades das figuras.

A preocupação revelada por todos os alunos em obterem construções resistentes enquadra-se na afirmação de Laborde (1993b), quando refere que os alunos, depois de algum trabalho com o Cabri-géomètre, abandonam as construções baseadas em primitivas de puro desenho e são capazes de produzir desenhos resistentes aos arrastamentos, não sendo, porém, possível concluir que tenham construído o conceito de figura geométrica.

O balanço positivo destes três trabalhos não se ficará apenas a dever às especificidades de um *software* que se revela particularmente dinâmico mas a todo um contexto de ensino/aprendizagem, com realce para as interacções estabelecidas entre professores, alunos e o próprio AGD (elemento mediador na construção do conhecimento matemático), aos modelos didácticos ensaiados e às características exploratórias das tarefas propostas.

Neste sentido ressalta, com maior profundidade do estudo de Rodrigues (1997), a importância das interacções sociais na evolução e aprendizagem dos alunos, constituindo um factor a considerar na construção do significado matemático.

Utilizando as expressões de Junqueira (1995), os estudos que descrevemos “iluminaram preferencialmente certos fenómenos”, descrição que terá, inevitavelmente, sofrido a influência das nossas concepções e deixado “na sombra ou mesmo na obscuridade” (p. 237), resultados importantes daquelas investigações.

Apesar das limitações do nosso texto, podemos, todavia, concluir:

(i) da necessidade de estudos envolvendo ambientes geométricos dinâmicos serem realizados em períodos de tempo mais dilatados, em que possam ser materializadas todas as suas vantagens;

(ii) que a resolução de problemas e exploração de construções em AGD podem constituir estratégias poderosas para a aprendizagem da Geometria, desde que inseridas em poderosos contextos de aprendizagem, entendidos como o conjunto de inter-relações que se estabelecem entre alunos, professores e *software* educativo.

(iii) que a utilização do CABRI (ou do Geometer's Sketchpad), como micromundo(s) onde os alunos possam construir conhecimentos e desenvolver capacidades de resolução de problemas, deverá ser uma das actividades a desenvolver a nível da sala de aula, aproveitando as suas enormes potencialidades dinâmicas, em relação a trabalhos exploratórios em Geometria.

A posteriori

Apresentamos, em seguida, algumas questões surgidas após a elaboração do texto acima apresentado e que reflectem parte do trabalho desenvolvido, durante o encontro, no grupo "As Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria". Elas resultaram dos pressupostos de que i) *desenho* é uma representação externa e *figura* é uma representação mental do objecto; ii) *visualização* é a capacidade de tratar a informação visual; iii) os *AGD* são como *espelhos intelectuais* (pode experimentar-se, pode receber-se um *feedback* visual, a partir da manipulação de uma construção, podendo verificar-se visualmente uma propriedade ou uma relação, podendo levar-nos à legitimação de uma figura associada a diferentes desenhos); iv) *micromundo* é o ambiente colocado à disposição dos utilizadores para realizar experiências, explorar universos particulares e descobrir-lhes propriedades; e v) o computador deve estar subordinado ao ambiente de aprendizagem.

As questões que surgiram foram as seguintes:

1ª. Que relações podemos encontrar entre o movimento facultado pelos AGD e a Geometria aprendida?

2ª. Que obstáculos visuais poderão ser minorados pela utilização dos AGD?

3ª. Que limitações existem para os AGD (os AGD não substituem tudo o que já existia antes; é importante que os alunos trabalhem a três dimensões, que mexam, que manipulem modelos, que desenhem, que escrevam e que digam o que pensam, pois não devemos assumir que os alunos têm as mesmas representações que nós temos)?

4ª. A utilização dos AGD poderá levar à reformulação dos níveis de van Hiele?

5ª. A passagem da representação externa (desenho) à construção significará uma aproximação à representação interna (figura)?

6ª. Que impacto é que a tecnologia, nomeadamente os AGD, pode ter nas alterações curriculares no ensino básico e secundário, quanto à visualização, demonstração e construção de conceitos?

Assim, as discussões deste grupo de trabalho não apresentaram respostas definitivas, antes procuraram conduzir a novas questões, concordando com o que, em 1995, no âmbito de um estudo sobre o papel das tecnologias em Matemática, afirmaram Kaput e Thompson. Fazendo eco da preocupação destes (e de outros autores), hoje, no ano 2000, "Ano Mundial da Matemática", consideramos a pesquisa sobre o impacto da tecnologia no ensino/aprendizagem da Matemática como uma (urgente) questão em aberto.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: ME.

Arsac, G., Germain, G. e Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Lyon: IREM de l' Université Claude Bernard.

Borges, C. (1994). *A linguagem LOGO no ensino-aprendizagem de conceitos geométricos no 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Aveiro).

Coelho, M. I. P. (1996). *O Cabri-géomètre na resolução de problemas. Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias de informação. *Educação e computadores*, pp.89-159. Lisboa: ME - GEP.

DGEBS (1991a). *Programa de matemática - Organização curricular e programas, Ensino Básico 2º Ciclo* (I). Lisboa: INCM, EP.

DGEBS (1991b). *Programa de matemática - Plano de organização do ensino- -aprendizagem, Ensino Básico 2º Ciclo* (II). Lisboa: INCM, EP.

DGEBS (1991c). *Programa de matemática - Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino Básico 3º Ciclo* (II). Lisboa: INCM, EP.

Fernandes, D., Borralho, A. e Amaro, G. (1994). Processos de resolução de problemas: Revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação. *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*, pp.35-63. Lisboa: IIE.

Fonseca, L. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: Concepções e processos utilizados* (Tese de mestrado - não publicada). Universidade do Minho.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, *vol. I*, pp. 21-34. Valência: Universidade de Valência.

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. *Quadrante, 2* (1), pp. 63-78.

Junqueira, M. M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos - Um estudo no 9º ano de escolaridade* (Tese de mestrado). Lisboa: APM.

Kaput, J. J. e Thompson, P. W. (1995). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), pp. 676-684.

Laborde, C. (1993a). The computer as part of learning environments: the case of geometry. In C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: mathematics education and technology,* pp. 48-67. Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1993b). Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-géomètre. In B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the conference technology in mathematics teaching 93*, pp. 39-52. Birmingham: University of Birmingham.

Laborde, C. (1997). La géométrie et les figures dynamiques à l'écran de l'ordinateur. Passages d'un monde à l'autre. In A. M. Boavida, A. Domingos, J. M. Matos e M. Junqueira (Eds.), *Aprendizagens em Matemática*. Lisboa: SEM / SPCE.

Laborde, C. e Laborde, J. M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice*, pp. 177-192. Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, J. M. e Strässer, R. (1990). Cabri-géomètre: A microworld of geometry guided discovery learning. *International Reviews on Mathematical Education - Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 90* (5), pp. 171-177.

Lesh, R. (1990). Computer-based assessment of higher order understandings and processes in elementary mathematics. In G. Kulm (Ed.), *Assessment of higher order thinking in mathematics*, pp. 81-110. Washington, DC: AAAS.

Lester, F. K e Charles, R. I (1992). A framework for research on problem-solving instruction. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice*, pp. 1-15. Berlin: Springer-Verlag.

Matos, J. F. (1987). *A natureza do ambiente de aprendizagem criado com a utilização da linguagem LOGO no ensino primário e as suas implicações na construção do conceito de variável.* (provas de aptidão pedagógica e capacidade científica, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto MINERVA, DEFCUL.

National Council of Teachers of Mathematics (1989/1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM / IIE.

Neves, M. A. (1988). *O computador na recuperação em geometria de alunos do 9º ano* (tese de mestrado). Lisboa: Projecto MINERVA, DEFCUL.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L. e Hoelz, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An exploratory study with Cabri-géomètre. In J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education (III),* pp. 360-367. Lisboa: Program commitee of the 18th PME conference.

Olive, J. (1992). *Examples explorations with the Geometer's Sketchpad.* Cominicação apresentada no 7th International Congress on Mathematical Education. Canada: Quebeque.

Papert, S. (1980). *Mindstorm: Children, computers and powerful ideas*. England: Harvester.

Pólya, G. (1945/1975). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares.* Lisboa: IIE.

Rodrigues, M. M. T. (1997). *A aprendizagem da matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (Tese de mestrado). Lisboa: APM

Santos, E. e Rodrigues, M. (1998). O computador na sala de aula. In APM, *Actas do ProfMat 98*, pp. 157-166. Lisboa: APM.

Saraiva, M. (1992). *O computador na aprendizagem da geometria. Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade* (tese de mestrado). Lisboa: Projecto MINERVA, DEFCUL.

Schoenfeld, A. (1991/1993). *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?* Tradução de um artigo publicado na revista ZDM 91/1. Lisboa: FCUL.

Schwartz, J. L. (1992). A caixa mágica newtoniana. *Educação e computadores*, pp.219--226. Lisboa: ME - GEP.

Schwartz, J. L. (1993). A personal view of the Supposer: Reflections on particularities and generalities in educational reform. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy e B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?*, pp. 3-15. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Serrazina, M. L. (1995). Ensinar / aprender matemática. In APM, *Actas do ProfMat 95*, pp. 33-41. Lisboa: APM.

Veloso, E. (1995). Software dinâmico: uma abordagem estimulante no ensino da geometria. In APM, *Actas do ProfMat 95*, pp. 53-64. Lisboa: APM.

Yerushalmy, M. e Chazan, D. (1993). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy e B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?*, pp. 26-56. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yerushalmy, M., Chazan, D. e Gordon, M. (1993). Posing problems: One aspect of bringing inquiry into classrooms. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy e B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?*, pp. 117-142. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria

Gisélia Correia Piteira

EB 2,3 Rui Galvão de Carvalho – Açores

João Filipe Matos

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Resumo

O ambiente em que a Geometria é explorada influencia de formas diferentes a apropriação de saberes. Aprender Geometria com papel, lápis, régua e compasso é diferente de aprender recorrendo a materiais manipuláveis, que por sua vez é diferente de aprender recorrendo a ambientes computacionais de aplicações dinâmicas, como o Geometer's Sketchpad. Estes libertam-nos de tarefas mecânicas e rotineiras, de construção, medição e cálculos, deixando espaço para um trabalho dinâmico e activo na Geometria (Laborde, 1998).

Este artigo pretende apresentar e discutir algumas conclusões intercalares de uma investigação em curso, cujo objectivo parcelar é compreender as potencialidades dos ambientes dinâmicos de geometria como mediadores para a aprendizagem dos alunos. Neste trabalho, tendo por base um estudo de carácter interpretativo, foi analisada a actividade matemática de uma turma do 8º e do 9º ano, em aulas em que trabalharam a Geometria usando o Sketchpad.

Princípios Teóricos

No trabalho que conduziu ao presente artigo partiu-se de alguns princípios teóricos na perspectiva da Teoria da Actividade:

- O da sala de aula de matemática como um sistema de actividade, no sentido de Engeström (1998). Na ideia de actividade está que um sujeito não age individualmente no mundo que o rodeia, mas que ele faz parte de um colectivo, de um sistema de relações sociais, sendo a sua actividade intelectual localizada na prática diária que envolve a sua prática social. Assim, Engeström conceptualiza um modelo de actividade como um sistema, formado por três elementos (o sujeito, o objecto e a comunidade), com relações mútuas de mediação entre eles.

- Um indivíduo nunca age directamente com o meio ambiente. A relação entre este e um objecto do ambiente é mediada por artefactos (Wertsch, 1991). Quem leva a cabo uma acção é um indivíduo ou indivíduos numa situação concreta e os meios mediadores empregues nessa situação. Assim, uma actividade contém sempre vários artefactos, facilitadores ou limitadores, que intrinsecamente nos ligam ao mundo. Os artefactos podem ser instrumentos, signos, linguagem, sistemas de contagem, técnicas mnemónicas, sistemas algébricos, diagramas, mapas, que, entre outros, medeiam a actividade e são criados pelas pessoas para controlar o seu próprio comportamento (Wertsch, 1991; Kuutti, 1996; Nardi, 1996).

Mediador significa não algo que está entre a interacção do sujeito e o objecto, mas aquilo que dá poder no processo de transformação dos objectos, que o torna significativo, 'algo' com o qual se pensa.

- O conhecimento está localizado nos diferentes elementos do sistema de actividade, sendo partilhado, negociado e apropriado nas interacções entre esses elementos e com os artefactos mediadores (Nardi, 1996).
- O significado matemático é produto de um processo social, situado em actividades/tarefas e dependente dos recursos interactivos à disposição dos sujeitos (Meira, 1996). A construção de significados não depende apenas da interacção social, mas também da relação que o sujeito estabelece com os artefactos usados e com conhecimentos anteriores.
- A tecnologia, como os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD), podem ser artefactos mediadores para a aprendizagem da geometria (Kuutti, 1996; Noss e Hoyles, 1996).

Falo em ADGD, não em Ambientes Dinâmicos de Geometria (ADG), nem em Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), por considerar que este termo define melhor o tipo de *software*. Se por um lado é um tipo especial de aplicação que cria acção entre a *interface* e o utilizador, por outro, torna dinâmica a forma de abordar e trabalhar a geometria euclidiana.

Metodologia

Tendo por base o campo teórico da Teoria da Actividade pretendeu-se compreender a actividade matemática dos alunos na sala de aula, quando é mediada por ambientes dinâmicos de geometria dinâmica e o papel dessa actividade na tomada de consciência geométrica.

Não foi objectivo fazer comparações entre os grupos de alunos estudados com outros alunos com as mesmas características, frequentando aulas de outro tipo, nem generalizar a outros ambientes de aprendizagem. O estudo pretendeu ser particular, descritivo e sempre que possível interpretativo, procurando desenvolver e aprofundar o conhecimento da actividade dos alunos com ADGD, valorizando a sua compreensão e explicação, adoptando-se, assim, uma investigação de carácter qualitativo.

Atendendo aos objectivos do estudo e tendo por unidade de análise 'os alunos em actividade', foram recolhidos dados num grupo de alunos de uma turma do 8º ano (em três sessões) e noutro grupo de uma turma do 9º ano (em quatro sessões), pertencentes a duas escolas diferentes da cidade de Lisboa, em aulas onde os alunos estavam a estudar temas da geometria, usando o *Sketchpad.*

Os dados recolhidos foram baseados na observação directa, registos de vídeo e numa entrevista semi-estruturada a cada elemento do grupo de alunos. Foram utilizados também, para posterior análise, os documentos produzidos pelos alunos, gravados em disquete e o historial das suas construções, também gravado em disquete.

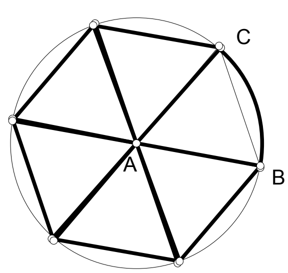
Resultados

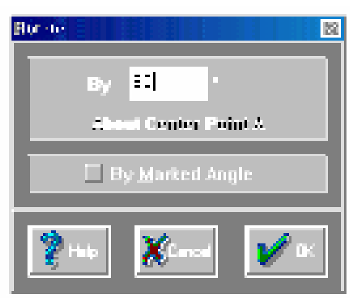
Neste artigo, para ilustrar os resultados e conclusões, serão apresentados dois excertos dos dados recolhidos numa sessão do grupo do 9º ano. A análise prende-se apenas com um dos objectivos do estudo: compreender as potencialidades dos ambientes dinâmicos de geometria dinâmica como mediadores para a aprendizagem dos alunos.

O tema da sessão era as rotações, que ainda não haviam sido trabalhado nas aulas teóricas. No decurso da resolução da proposta de trabalho entregue nesta sessão, decorrem momentos em que os alunos, mais concretamente a Júlia e a Rita, desenvolvem um processo de compreensão do assunto das rotações, a partir do menu do *Sketchpad*. O objectivo era investigar a rotação de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência. A Júlia lê a proposta de trabalho e procura que Rita participe, incentivando-a a trabalhar directamente com o computador, dado que esta não gostava. Procura ainda ajudar a colega a compreender o que vai fazendo, explicando-lhe os diferentes passos.

> **Júlia** – Continuando ... Coloca o ângulo a medir *60. (Lê na ficha e faz*). ... Olha! (*Para a Rita*). Marquei o A como centro de rotação. .... Faz (*Lê na ficha*). ... Ah, agora faz tu um bocadinho. Na outra vez fizeste a ficha. (*Para a Rita*).
> **Rita** – Não, não. *(Mas a Júlia empurra-lhe o rato para a sua mão*).
> **Júlia** – Eu digo-te. Faz uma rotação de 60 graus, para isso selecciona o triângulo e o ponto. (*Lê na ficha*). Vá. Selecciona o CAB, que é o triângulo. Agora, vai ao menu *transform*, *rotate*.
> **Rita** – Carrego.
> **Júlia** – Sim. ... Agora quantos graus é que ele pede? 60 graus, não é? (*Escreve no teclado*). Vá *Ok*. ... *About center A*. Este é o centro da rotação (*e aponta no ecrã*).
> **Rita** – Este é o centro da rotação?
> **Júlia** – Não, o A, é que é. Este (*aponta*) é o centro da rotação. (*Ligeira pausa*) ... Este, este e este vão fazer o tal. (*E mexe no rato*). Agora, *construct*, *segment*.
> **Rita** – Vão fazer um hexágono!

É visível que o facto de o menu da rotação para ficar activo ser necessário indicar o centro de rotação e objecto e depois nesse menu vir indicado que o objecto vai rodar com centro no ponto indicado e com amplitude do ângulo que for escrito, ajudou a Júlia a pensar em como seria a rotação e que figura iria dar. Por outro lado, o facto de a Júlia ter exemplificado no ecrã, mexendo o rato, qual era o ponto centro de rotação e onde estavam os pontos imagens da rotação, ajudou a Rita a visualizar que a rotação de vários triângulos ia dar um hexágono. Este aspecto é evidente nas suas conclusões da ficha de trabalho:





Conclusões:

- Ao rodar 60º o triângulo equilátero obtive um triângulo idêntico com um lado comum ([AC]) ao objecto que o gerou.

- Para obter um hexágono devo fazer sucessivas rotações de 60º, mantendo como centro de rotação o ponto A, que é o centro da circunferência, formando os vários triângulos equiláteros que compõem um hexágono regular.

A professora tinha dado uma ficha de apoio explicativa, com exemplos ilustrativos, das características das rotações. Como ainda havia tempo, a Júlia incentivou a Rita a experimentar fazer aqueles exemplos.

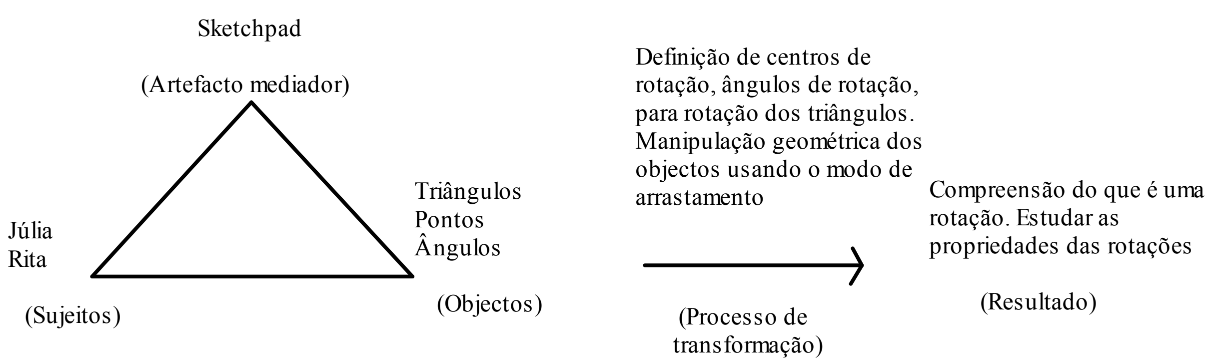
> **Júlia** – ... Agora, carrega num ponto. Faz um ponto aqui fora, para centro da circunferência, (*abana a cabeça*) centro da rotação.
>
> **Rita** – Então, não vai ficar um ângulo.
>
> **Júlia** – E assim, este triângulo vai rodar segundo o centro neste ponto. Tens de seleccionar onde queres pôr o centro. Onde é? ... Não, *transform*, *center*, esse. Agora podes pôr a letra, que é para a gente saber que é o *E*. Pronto. Agora, vais aquele, que é o ponto centro da rotação. O *E* já está seleccionado, agora seleccionas os outros três pontos. Pronto, *transform*. *Rotate*. Mas eles pedem 120 graus. Vamos por aqui *(e escreve*) *OK*. Agora marcas com este (*aponta no ecrã*) os pontos. ... Agora se reparares, o *A* está aqui, o *B* aqui e o *C* aqui. (*Aponta no ecrã*).
>
> **Rita** – Ah! Mas ficou com os mesmos ângulos?
>
> **Júlia** – Ficou com os mesmos pontos e os mesmos ângulos. Rodou assim (*apontou no ecrã*).
>
> **Rita** – Mas nós não pusemos 120?
>
> **Júlia** – Pusemos, por isso é que ele rodou assim e ficou aqui. (*E apontou*).
>
> **Rita** – Ah, já percebi.

Parece que quando a Rita questiona a Júlia por ao marcar um ponto exterior ao triângulo como centro de rotação, não ficar com um ângulo, significa que ela estava a associar mentalmente as figuras anteriormente construídas, em que o centro de rotação era definido por um ângulo ao centro, que ela via a sua amplitude. Nesta situação, sem circunferência e sem um ângulo, com lados marcados era-lhe confuso como ia ser feita uma rotação. Mas com a explicação gestual da Júlia e com o texto da janela do programa em relação às rotações, que refere a letra do centro de rotação, o ângulo de rotação, ela compreendeu. O diálogo leva a crer que a Rita também esperava que os ângulos da imagem do triângulo fossem de 120 graus. Só quando a Júlia disse que puseram 120 graus por isso ele tinha rodado da forma que indicou no ecrã e ficou com os mesmos pontos e ângulos, apontando onde estavam o A, B e C, é que a Rita ficou esclarecida, que os 120 graus era o ângulo de rotação.

Conclusões

O ADGD como Artefacto

De acordo com Engeström (1998), na estrutura de uma actividade podemos identificar os sujeitos, que agem sobre objectos, num processo de transformações recíprocas até atingirem determinados resultados. Nos presentes exemplos, a Júlia e a Rita foram sujeitos agindo sobre triângulos quer inscritos em circunferências, quer simplesmente livres no plano. Através do *Sketchpad*, os alunos definiram novos objectos, pontos que serviram para centros de rotação, ângulos de rotação e transformaram os objectos iniciais através de rotações, com o objectivo final de compreenderem o que era uma rotação (resultado). Com leitura em Engeström (1998), esta actividade pode ser esquematizada da seguinte forma:



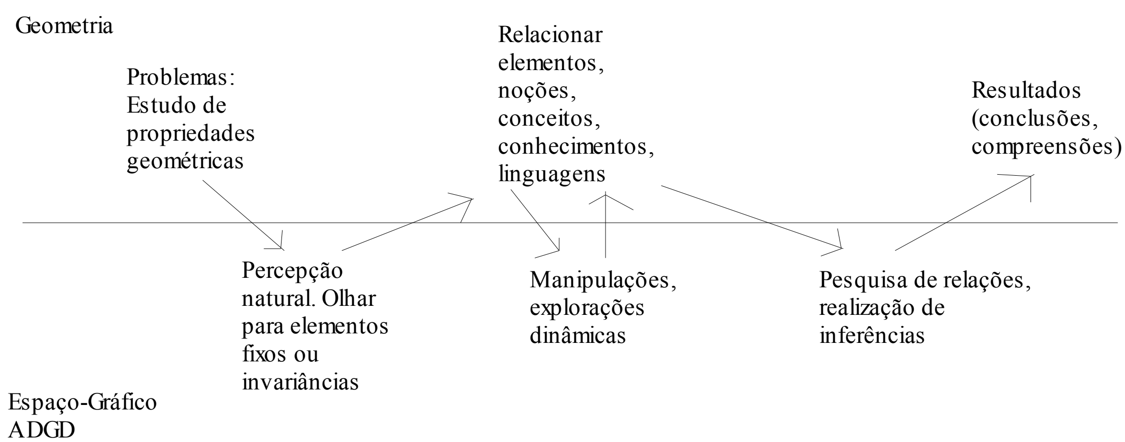
Na sua acção, os alunos agiram com o ADGD *Sketchpad*, que lhes serviu de artefacto mediador, constituindo um meio facilitador da actividade, na medida em que deu poder aos alunos no processo de transformação dos objectos (Kuutti, 1996). Neste ambiente dinâmico enquadram-se as construções realizadas, o *feedback* dado pela possibilidade de arrastamento (Laborde, 1997, 1998), que permite rápida e vivamente a exploração de diferentes construções da mesma figura (Laborde, 1993, 1997), definindo novos ângulos, novos arcos, novas medidas, etc. e os próprios menus da construção, que obrigaram a que os alunos, em determinadas situações, tivessem de pensar como construir novas figuras, avaliar o que tinham construído e pensar sobre as conclusões a obter. Estes aspectos do ADGD foram ferramentas importantes que ajudaram os alunos a trabalhar e transformar os objectos geométricos, até chegarem a conclusões sobre as propriedades e relações geométricas.

Certamente se os alunos não tivessem o *Sketchpad*, teriam estudado as propriedades das rotações de outra forma, mas, com o programa, eles viram que só era possível efectuar rotações, se antes tivessem criado o centro da rotação e seleccionado o objecto e posteriormente definido um ângulo para rotação. Eles tinham de pensar quais os elementos necessários para fazer uma rotação, tinham de pensar no que era uma rotação.

Neste sentido, os dados levam a acreditar que quando os alunos usam o ADGD para pensarem em objectos e propriedades geométricas, a sua actividade é mediada de forma particular por essas ferramentas (Wertsch, 1991). Os alunos quando questionados nas entrevista também foram dessa opinião.

<u>Processos de Resolução de Situações Geométricas</u>

Com leitura nos trabalhos de Laborde e Laborde (1992), sobre os passos que os alunos seguem na resolução de uma situação geométrica, posso referir que os alunos deste trabalho seguiram fundamentalmente dois: i) primeiro, a percepção natural das construções, olhando para os seus elementos fixos ou invariantes; ii) segundo, a pesquisa das relações invariantes e a realização de inferências em relação à informação visual anterior. Neste segundo passo, foi importante a influência, estímulo e questionamento das professoras e o trabalho e reflexão no grupo de alunos. Estes passos não são unilaterais, mas obedecem, tal como verificado nos trabalhos de Laborde (1997), a uma sequência de idas e voltas entre o mundo dos objectos teóricos (Geometria) e o espaço gráfico (de representação dos objectos teóricos), neste caso os ADGD. Os alunos partiam de problemas, que consistiam em estudar propriedades e relações geométricas de determinados objectos ou transformações (campo da geometria). Para chegar a esses resultados, eles representavam os objectos (triângulos, pontos, circunferências, ...) nos ADGD e neste manipularam, exploraram e estudaram-nos de forma viva, primeiro numa percepção natural (ponto i) e posteriormente numa pesquisa consciente de relações (ponto ii), indo buscar conscientemente ou não, elementos, noções, conceitos, conhecimentos anteriores para relacionar, ao campo da geometria, até chegarem às respostas aos seus problemas iniciais. As questões das propostas de trabalho, os questionamentos das professores, a conversa entre os elementos do grupo para tirar dúvidas ou seguirem os guiões de trabalho, ajudaram neste segundo ponto. Estes processos podem ser esquematizados da seguinte forma:



Notou-se ainda que durante a resolução das propostas de trabalho os alunos sentem necessidade de utilizar uma linguagem matemática rigorosa, nas suas construções. Era-lhes mais fácil compreender as discussões se tivessem as suas construções matematicamente rigorosas e completas, isto é, sentiram necessidade de utilizar formalmente a linguagem matemática, dando letras aos pontos e falando usando essa linguagem. Ao resolverem os problemas, os alunos envolviam-se quer em perceber as relações entre os objectos geométricos quer em especificar essas relações na elaboração das conclusões e relatórios. Nestes usavam a terminologia que observavam no ecrã ou a que fazia parte dos menus do *Sketchpad*. O ADGD apresentava-se assim como contendo elementos da linguagem a partir dos quais os alunos podiam falar e reflectir (Noss e Hoyles, 1996). Esta especificação dos elementos da linguagem matemática contribui, segundo os estudos com ADGD de Jones (1997), para a compreensão matemática e consequentemente aprendizagem matemática.

<u>Obstáculos dos ADGD para a Resolução das Situações Geométricas</u>

O artefacto nem sempre dá poder no processo de transformação do objecto, podendo ser também limitador nesse processo. Notou-se que a falta de domínio da ferramenta *Sketchpad* pode ser um obstáculo à resolução dos problemas matemáticos colocados. Os alunos devem conhecer minimamente as funções dos menus, para construírem mais rapidamente novos objectos e estudá-los. Também aconteceu algumas imperfeições nas medições, causadas pela escala de aproximação do próprio programa, sendo um obstáculo na interpretação das construções por parte dos alunos.

Por outro lado, houve uma situação em que a possibilidade de arrastamento das figuras, característica dos ADGD (Laborde e Laborde, 1992), constituiu um obstáculo à interpretação das propriedades geométricas das figuras. Nesta os alunos fizeram uma reflexão de um triângulo em relação a uma recta e disseram que a imagem obtida não era geometricamente igual, porque "agarraram" nela e quando colocaram em cima da figura objecto estas não coincidiram ponto por ponto, à semelhança com o que faziam quando tinham figuras desenhadas em papel (embora neste caso, pudessem voltar espacialmente as figuras de forma a verificarem se coincidiam). Foi necessário a intervenção da professora para estimular e levar os alunos a interpretarem esse *feedback*.

O ADGD como uma Janela para a Aprendizagem em Geometria

Os alunos com o *Sketchpad* trabalharam a geometria. Construíram pontos, circunferências, triângulos, definiram centros de rotação, objectos para rotação, realizaram rotações e fizeram medições. Os alunos utilizaram o *Sketchpad* como ferramenta, isto é, não com o fim de o explorarem, mas para *com ele* trabalharem a geometria e para *através dele* pensarem em conceitos, propriedades, relações geométricas. Através dos objectos construídos, do arrastamento, dos menus que só se accionavam se seleccionado o centro e o objecto para rotação, observaram as imagens de rotação, fizeram novamente medições para ver as propriedades geométricas, entre outras explorações. A Rita percebeu, por exemplo, que para fazer a rotação definia o centro, este 'piscava' e depois indicava o ângulo para rodar. Olhando para a imagem do triângulo inicial a rodar, imaginou que a rotação contínua desse triângulo daria um hexágono.

Por outro lado, no segundo caso, a Rita percebeu o que significava ângulo de rotação e que o valor da sua amplitude não interferia com o valor das amplitudes dos ângulos internos do triângulo, quando a sua colega lhe explica com a linguagem dos menus e apontando, fazendo um gesto de rotação, como a figura tinha rodado e onde ficavam os novos pontos. A Rita disse "Ah, já percebi". Ela 'viu e compreendeu' (King e Schattschneider, 1997).

Assim, o *Sketchpad* foi usado para pensar em geometria. No sentido de Wertsch (1991) e Noss e Hoyles (1996), o *Sketchpad* foi usado como uma janela para a aprendizagem dos alunos envolvidos na acção, ajudando-os a pensarem nos conceitos, propriedades e relações geométricas. Com ele as alunas falaram e pensaram em geometria e ao mesmo tempo a Júlia ao estar a ajudar a Rita a compreender as rotações, tinha de clarificar as suas próprias compreensões, pensar sobre elas, para as expor, tomando consciência do que ela e a sua colega sabiam e se tinham dúvidas. Através do ADGD os sujeitos da acção, tomam consciência do que cada um pensa e expressam pensamentos (Nardi, 1996). Este aspecto dos ADGD ajudarem na tomada de consciência geométrica foi referido pelos alunos nas entrevistas. Segundo estes, o aspecto visual das construções no ecrã do ADGD, assim como o facto de observarem propriedades, verificando para vários desenhos da mesma figura, levava-os a pensar e tirarem conclusões.

Construção de Significados Geométricos e Tomada de Consciência

Em determinadas situações verificou-se que os alunos resolveram as propostas de trabalho/guiões usando o menu que para eles fazia mais sentido para as levarem a cabo, criando dessa forma um contexto significativo para a actividade. Os alunos no decurso da actividade procuraram encontrar significado para a resolução das propostas de trabalho, construindo figuras, fazendo medições e arrastando as figuras de forma a verificarem padrões ou variâncias entre as relações geométricas. Assim, o instrumento que utilizaram na prática, o *Sketchpad*, que lhes permitiu fazer observações e manipulações de forma bastante rápida, ajudou-os, no sentido de Jones (1998), Meira (1996) e Laborde (1997), a construírem as suas compressões sobre o assunto em estudo.

Atendendo a Meira (1996), o significado matemático produzido pelos alunos, tanto do 8º, como do 9º ano, foi não só inerentemente social, dependente das interacções entre os alunos em cada grupo e situado na acção sobre a resolução da proposta de trabalho, como intimamente dependente dos recursos interactivos presentes em cada acção, ou seja dependente do ADGD *Sketchpad*. A construção de significado matemático pelos alunos foi produzida na sua actividade, crescendo na forma como estes agiram uns com os outros, com as professoras e com o ADGD, relacionando conhecimentos novos com anteriores (Noss e Hoyles, 1996). Gradualmente foi também sendo feita a clarificação de ideias, com ponto alto no registo das conclusões, para o 9º ano e elaboração dos relatórios, para o 8º ano, onde os alunos tiveram que reflectir sobre a sua acção, discutindo entre si o que escrever. A elaboração do relatório fez com que eles pensassem e reflectissem sobre a sua acção, tomando consciência dos passos seguidos, figuras e relações geométricas obtidas. Por outro lado, no registo das conclusões, no caso do 9º ano, os alunos, procuravam fazê-lo utilizando um discurso que fosse perceptível para quem lia e para eles próprios. Assim, principalmente a Rita e a Júlia discutiram bastante o que escrever, o que as levava a clarificar e tomar consciência da sua acção aquando da resolução das propostas de trabalho, ajudando-as a estruturar o seu pensamento.

Estes resultados levam-me a supor, de acordo com Vygotsky (1925, referido por Nardi, 1996), que a tomada de consciência das propriedades e relações geométricas esteve relacionada com os recursos cognitivos à disposição dos alunos, como o *Sketchpad*, em alguns casos as professoras e noutros alguns elementos dentro do grupo de alunos.

Referências

Engeström, Y. (1998). *The activity system* [On-line]. Disponível: Internet Directório: www.helsinki.fi/ Ficheiro: ~jengestr/activity/6bO.htm

Jones, K. (1997). Children learning to specify geometrical relationships using a dynamic geometry package. Em E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3* (pp. 121-128). Lahti, Finlândia: University of Helsinki.

Jones, K. (1998). *Student interpretations of a dynamic geometry environment* [On-line]. Disponível: Internet Directório: www-cabri.imag.fr/ Ficheiro: EIAH/CLaborde/Documents/Jones/jones.html

King, J., & Schattschneider, D. (1997). Preface: Making geometry dynamic. Em J. King, & D. Schattschneider (Eds*.), Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. ix-xiv). Washington, EUA: The Mathematical Association America.

Kuutti, K. (1996). Activity theory as a potential framework for human-computer interaction research. Em B. Nardi (Ed*.), Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction* (pp.17-44). Cambridge, EUA: The MIT Press.

Laborde, C. (1997). La géométrie et les figures dynamiques à l' écran de l' ordinateur: Passages d'un monde à l'autre. Em A. M. Boavida, A. Domingos, J.M. Matos, & M. Junqueira (Eds.), *Aprendizagens em matemática* (pp. 5-19). Lisboa, Portugal: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching /learning of geometry in a computer-based environment. Em C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp. 113-121). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C., & Laborde, J.- M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 177-192). Berlin, Alemanha: Springer – Verlag.

Meira, L. (1996). Students' early algebraic activity: Sense making and the production of meanings in mathematics. Em L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 377-384). Valencia, Espanha: Universidade de Valencia.

Nardi, B. (1996). Activity Theory and human-computer interaction. Em B. Nardi (Ed*.), Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction* (pp. 7-16). Cambridge, EUA: The MIT Press.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind: A socio-cultural approach to mediated action*. Hertfordshire, EUA: Harvester Wheatsheaf.

Proof and Its Classroom Role: A Survey

Gila Hanna

Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto

Introduction

There has been a recent upsurge in papers on the teaching and learning of proof: Between 1990 and 1999 the leading journals of mathematics education published over one hundred research papers on this topic. This in itself is an indication that proof remains a prominent issue in mathematics education.

Some of this lively discussion of proof has to do with its very raison d'**ê**tre. This is not surprising, since certain developments in both mathematics and mathematics education have called into question the role of proof. Let me start, then, by stating categorically that proof is alive and well in mathematical practice, and that it continues to deserve a prominent place in the mathematics curriculum. One of our key tasks as mathematics educators, however, is to understand the role of proof in teaching, so that we can enhance its use in the classroom.

Proof is an important part of mathematics itself, of course, and so we must discuss the function of proof in mathematics with our students, pointing out both its importance and its limitations. But in the classroom the key role of proof is the promotion of mathematical understanding, and I hope to persuade you that our most important challenge is to find more effective ways of using proof for this purpose.

Over a number of years I had been asking myself what role proof ought to play in mathematics education. I found I had to look at the philosophy, the history and the pedagogy of mathematics, and then at the ways in which technology can help make proof a more effective part of the mathematics curriculum. When I had sorted out some of the conflicting opinions on what proof really is and what role it ought to play in the curriculum, I wrote *Rigorous proof in mathematics education,* which in essence was a critique of the view of proof adopted by the "new math" movement of the 1950s and 1960s, and in particular of its emphasis on rigour. Then, through a closer examination of mathematical practice, I came to the further conclusion that even in the eyes of practising mathematicians rigorous proof is secondary in importance to understanding. It became clear to me that a proof, valid as it might be in terms of formal derivation, actually becomes legitimate and convincing to a mathematician only when it leads to real mathematical understanding.

Mathematical understanding

Mathematics teachers are well aware that the term "mathematical understanding" is elusive. This is not surprising, because the concept is a topic of discussion among practising mathematicians as well. Yet most mathematicians do share the view that a proof is most valuable when it leads to understanding, helping them think more clearly and effectively about mathematics (Rav, 1999; Manin, 1992, 1998; Thurston, 1994). That is, mathematicians see proofs not only as syntactic derivations (sequences of sentences, each of which is either an axiom or the immediate consequence of preceding sentences by application of rules of inference). Rather, they see a proof as primarily conceptual, with the specific technical approach being secondary. A proof is the "mathematician's way to *display the mathematical machinery* for solving problems and to *justify* that a proposed solution to a problem is indeed a solution"(Rav, 1999, p. 13).

Rav suggests we think of proofs as "a network of roads in a public transportation system, and regard statements of theorems as bus stops". A somewhat similar metaphor is expressed by Manin (1992) when he says that "Axioms, definitions and theorems are spots in a mathscape, local attractions and crossroads. Proofs are the roads themselves, the paths and highways. Every itinerary has its own sightseeing qualities, which may be more important than the fact that it leads from A to B."

These metaphors speak directly to mathematics education, where the teaching of proof is important precisely for its "sightseeing" qualities. Clearly students should be taught the nature and standards of deductive reasoning, so that they can know when a result has or has not been established. But proof can make its greatest contribution in the classroom only when the teacher is able to use a genuinely explanatory proof, one that conveys understanding. Later in this paper I will discuss this type of proof further and provide some examples.

The functions of proof

It is useful, when attempting to set out the role of proof in the classroom in a systematic fashion, to consider the whole range of functions which proof performs in mathematical practice. Proof in the classroom would be expected to reflect all of them in some way. But these functions are not all relevant to learning mathematics in the same degree, so of course they should not be given the same weight in instruction (de Villiers, 1990; Hersh, 1993).

As mentioned above, mathematicians clearly expect more of a proof than justification. As Manin (1977) pointed out, they would also like it to make them wiser. This means that the best proof is one that also helps understand the meaning of the theorem being proved: to see not only *that* it is true, but also *why* it is true. Of course such a proof is also more convincing and more likely to lead to further discoveries. A proof may have other valuable benefits as well. It may demonstrate the need for better definitions, or yield a useful algorithm. It may even make a contribution to the systematization or communication of results, or to the formalization of a body of mathematical knowledge.

The following is a useful model of the functions of proof (Bell, 1976; de Villiers, 1990; Hanna and Jahnke, 1996):

- *verification* (concerned with the truth of a statement)
- *explanation* (providing insight into why it is true)
- *systematisation* (the organisation of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems)
- *discovery* (the discovery or invention of new results)
- *communication* (the transmission of mathematical knowledge)
- *construction* of an empirical theory

- *exploration* of the meaning of a definition or the consequences of an assumption
- *incorporation* of a well-known fact into a new framework and thus viewing it from a fresh perspective

Such a richly differentiated view of proof is the product of a long historical development. Just as it has taken mankind a long time to reach such a high level of sophistication, so must every student entering the world of mathematics start with the fundamentals. In the classroom, the fundamental question that proof addresses is “why?”. In the educational domain, then, it is natural to view proof first and foremost as explanation, and in consequence to value most highly those proofs which best help to explain.

In this paper I will first explore at greater length the role of proof in mathematics education, and provide some justification for its importance in the curriculum and in particular for its usefulness in promoting understanding. As background, I will look at some of the difficulties in teaching proof, as illuminated by classroom research. I will then go on to discuss heuristics and exploration as possible challenges to the importance of proof in both mathematics and mathematics education. Secondly, I would like to examine in some detail three opportunities for the more effective teaching of mathematics in general and proof in particular. The first is the use of proofs which are explanatory, the second is the use of visual representations, often with the help of technology, and the third is the use of arguments from physics in mathematical proofs.

Research on the teaching of proof

Recent studies at the high school level and above have shown that understanding mathematical proof and proving remains a challenge for many students. In one such study, Chazan (1993) found that, despite specific instruction designed to foster their understanding of the strengths and limitations of empirical evidence versus deductive proof, some students still viewed empirical evidence as the same as mathematical proof, while others saw proof as no more than evidence about a property of one particular diagram.

A study by Coe and Ruthven (1994) concluded that students' proof strategies, despite explicit instruction, remained predominantly inductive and empirical as opposed to deductive. A group of advanced-level students aged 16 to 19 had followed a reformed secondary mathematics curriculum, designed to engage them more fully in the self-generation of mathematical knowledge, with a particular emphasis on proof. The students who participated in the study were aged 17 and had reached the end of their first year under the new curriculum. They were interviewed with the aim of exploring their general conceptions of proof, their views of the functions of proof, and their views on insight and understanding. Though most of the students stated that the function of proof is to ensure the certainty of what is proved, few were able to explain why rules or patterns occur, and fewer yet were able to use deductive proof strategies.

Moore (1994) examined the cognitive difficulties that university students who were majoring in mathematics or mathematics education experience in learning to develop formal proofs. His analysis identified three major sources of difficulty for the students: (a) conceptual understanding, (b) mathematical language and notation, and (c) getting started on a proof. Moore concluded that most post-secondary students have difficulty with formal proof and that, though the students had learned to do proofs in the course and had acquired some notion of the purpose of proof, they were still "not ready to use proof and deductive reasoning as tools for solving mathematical problems and developing mathematical knowledge" (p. 264).

Balacheff (1991) notes that high school students often do not gain an appreciation for the role of proof as a tool for establishing the validity of a statement and conveying that validity to others. His investigations also show, however, that one cannot fully address this shortfall by requiring students to work together on an agreed solution to a problem, since social behaviours then come into play and influence the mathematical processes. In the adversarial environment that often develops in such circumstances, students do not want to lose face by admitting their errors in front of their peers, or are reluctant to acknowledge the correctness of an opposing group's solution. Balacheff also notes that students tend to frame their solutions in a format they expect to be acceptable to peers and teacher. Their aim is then to produce what is in their mind an acceptable solution, not to produce knowledge. He concludes that “in some circumstances social interaction might become an obstacle, when students are eager to succeed, or when they are not able to coordinate their different points of view, or when they are not able to overcome their conflict on a scientific basis” (p. 188).

Corroboration of these findings comes from a study by Healy and Hoyles (1998) which came to the conclusion that we are a long way from understanding how students acquire proof. The study found that most Year 10 students are unable to use the procedures of deductive proof in their arguments. Healy and Hoyles went on to suggest that to influence classroom practice it is not enough to focus on student and teacher, but that it is also critical to take into account the wider influences of curriculum organization. The curriculum challenge is to design situations that help construct a coherent conception of proof, that is, to create opportunities for students to engage in geometrical arguments, conjectures and generalizations, as well as to devote more time to the writing of formal proofs.

Hoyles’ recommendations were echoed by Dreyfus and Hadas (1996). They point to dynamic geometry programs as one way to increase the willingness and ability of students to investigate, generalize and conjecture. In an observation consistent with Chazan’s research, however, they note that such computer programs do not necessarily strengthen the understanding of proof, and can even lead students to difficulties in distinguishing between empirical evidence and proof. Nevertheless, Dreyfus and Hadas outline “how the empirical approach can be used as a basis for creating didactic situations in which students actually require proofs” (p. 2). They recommend that teachers choose situations and construct activities “in such a manner as to effectively lead students up to the surprise and to the feeling that there is something to explain or prove” (p. 11). They base this on the view that one of the cognitive difficulties posed by proof is that students fail to see a need for proof, much less recognize its explanatory and convincing roles.

Heuristics vs. proof

Some educators, concerned for the effective allocation of valuable classroom time, maintain that in the competition for classroom focus the topic of proof should take second place to heuristics. They believe that they have to make a choice between developing investigative and problem-solving skills, which in their opinion make mathematics look “useful,” “enjoyable,” and more of “a human activity,” and instilling the ostensibly less useful and enjoyable skills needed to construct proofs (Simon and Blume, 1996; Simpson, 1995). They would seem to see proof as a chore, and as an impediment to understanding rather than as a route to it.

Simpson (1995) differentiates between “proof through logic”, which emphasizes the formal, and “proof through reasoning”, which involves investigations. The former is “alien” to students, in his view, since it has no connection with their existing mental structure, and so can be mastered only by a minority. He believes that the latter appeals to the “natural” learner, however, because it embodies heuristic argument, and so is accessible to a greater proportion of students.

Other educators, in expressing the view that deductive proof need no longer be taught, have focussed not only on reasoning, but also on justification. Their belief is that heuristic techniques are more useful than proof in developing skills even in justification, where proof might have been expected to have enjoyed the advantage. Their argument is that much of what parades in the classroom as the teaching of proof is actually the rote learning of mathematical proofs, devoid of any educational value. They see a more significant educational role for investigation, exploration and informal justification, all of which make use of intuition and yet are more likely than proof, in their view, to engender mathematical insight and even technical fluency. Accordingly they would support cultivating a perception of mathematics as a science that stresses heuristics and the inductive approach. This view has found expression in the NCTM *Standards* (1989) and the British National Curriculum (Noss, 1994).

The NCTM Standards

By the time the *Standards* was published by the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) in the United States, the concept of proof had all but disappeared from the curriculum (Greeno, 1994) or shrunk to a meaningless ritual (Wu, 1996). The NCTM did not seek to reverse this situation in the curriculum as a whole. It even proposed a shift in the teaching of geometry, the traditional stronghold of proof in the United States, recommending that less emphasis be given to two-column proofs and to Euclidean geometry as an axiomatic system.

On the other hand, the *Standards* did propose greater emphasis on the testing of conjectures, the formulation of counterexamples and the construction and examination of valid arguments, as well as on the ability to use these techniques in the context of non-routine problem solving. There are even two topics, among the seven recommended for greater attention, which have a distinct flavour of proof: (1) short sequences of theorems, and (2) deductive arguments expressed orally and in sentence form (pp. 126-127).

But the NCTM's strategy for the reform of the mathematics curriculum stopped short of mathematical proof as such. Its approach was to stress motivation and "heuristic argument." As a result the *Standards* failed to exploit the potential of proof as a teaching tool. Nor did this document reflect mathematical practice, where heuristic arguments, important as they are in discovery and understanding, are no substitute for proof.

British National Curriculum

Proof has lost ground to heuristics in the United Kingdom as well. Noss (1994) observed that "some educators are convinced that proof in the curriculum is a barrier to investigative and creative activity, and that it is inherently opposed to the spirit of exploration and investigation which has permeated the UK mathematics curriculum for much of the recent past." (p. 6).

The London Mathematical Society, the Institute of Mathematics and its Applications and the Royal Statistical Society reacted to this tendency in a joint paper published in October, 1995. Addressing the British mathematics curriculum from primary school through university, the paper expressed concern for what it termed “a changed perception of what mathematics is in particular of the essential place within it of precision and proof” (quoted in Barnard et al., 1996, p. 6), and also criticised schools for failing to prepare students adequately for university mathematics.

This statement from the three professional bodies prompted the editors of *Mathematics Teaching* to invite a number of people to discuss the issue of proof in mathematics and to publish their remarks under the title *Teaching Proof* (Barnard et al, 1996). The extreme viewpoint was perhaps that of Jonathan MacKernan, who deplored “proofs of the ghastliness required by today’s academic journals,” and went so far as to ask, “So, do we really need proof at all? Especially in schools? ... Why on earth can't we — the overwhelming majority — simply be allowed to accept that something is intuitive, or very probably true, or just simply obvious?” (p. 16).

The views of mathematicians: A recent debate

It is instructive to examine what some mathematicians have had to say about the relative importance of heuristics and proof in mathematics. Jaffe and Quinn (1993), while acknowledging that the use of rigorous proof had been a blessing to mathematics, bringing “a clarity and reliability unmatched by other sciences,” identified a trend “toward basing mathematics on intuitive reasoning without proof” (p. 1). They attributed this trend to the influence of the less rigorous standards of reasoning commonly employed in the physical sciences. In reaction to it, they suggested that two distinct types of mathematical endeavour, employing different types of justification, be accorded legitimacy, but that they be clearly distinguished. In their proposal, mathematical results based upon speculative and intuitive reasoning or upon the examination of test cases would be referred to as “theoretical mathematics,” while the label “rigorous mathematics” would be applied to the results of what has traditionally been regarded as proper mathematics, in which theorems are proven rigorously.

The editors of the *Bulletin of the American Mathematics Society* (1994) invited a number of prominent mathematicians to respond to Jaffe and Quinn's paper, receiving a long contribution from Thurston (1994) and fifteen shorter ones (Atiyah *et al*, 1994). Most of the respondents rejected the idea of recognizing a separate, speculative branch of mathematical activity. James Glimm expressed the general feeling best, perhaps, when he wrote that if mathematics is to cope with the "serious expansion in the amount of speculation" it will have to adhere to the "absolute standard of logically correct reasoning [which] was developed and tested in the crucible of history. This standard is a unique contribution of mathematics to the culture of science. We should be careful to preserve it, even (or especially) while expanding our horizons" (p. 184).

There was agreement that intuition, speculation and heuristics are very useful in the preliminary stages of obtaining mathematical results. Indeed, Schwartz (Atiyah et al., 1994) proposed that mathematicians abandon the old bias that dictates that only rigorous results are accepted for publication, preferring to see scholars "sometimes acting as rigorous mathematicians (if possible), sometimes writing heuristic papers (if rigorous methods do not work)" (p. 199). But all agreed that it is imperative to make a clear distinction between a correct proof and a heuristic argument, and that the validity of mathematical results ultimately rests on proof.

Exploration vs. proof

The availability in the classroom of software with dynamic graphing capabilities has given a new impetus to mathematical exploration, and in particular has brought a welcome new interest in the teaching of geometry. Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991) and Cabri Geometry (1996), for example, help students understand propositions by allowing them to perform geometric constructions with a high degree of accuracy. This makes it easier for them to see the significance of propositions. Students can also easily test conjectures by exploring given properties of the constructions they have produced, or even “discover” new properties. The Sketchpad workbook discusses exploration under seven headings, most of them not part of the traditional geometry curriculum: Investigation, Exploration, Demonstration, Construction, Problem, Art and Puzzle (1992, p. 3).

Dynamic software has the potential to encourage both exploration and proof, because it makes it so easy to pose and test conjectures. But unfortunately the successful use of this software in exploration has lent support to a view among educators that deductive proof in geometry should be abandoned in favour of an entirely experimental approach to mathematical justification. Mason (1991), for example, maintains that with dynamic software one can check a large number of cases or even, “by appeal to continuity, an infinite number of cases”, and concludes that “truth will be ascribed to observations made in a huge range of cases explored rapidly on a computer” (p.87).

An example will show how the capabilities of dynamic software could move some to question the need for analytical proof. Suppose a student wants to “prove” the theorem that in any triangle the perpendicular edge bisectors intersect at a single point. The student could, on paper, construct a triangle and its three perpendicular bisectors and show that this is true. But carrying out this construction with Cabri Geometry or Geometer’s Sketchpad has an important advantage. It allows the student to grab a point on the triangle and pull the triangle over the screen in such a manner that it changes its shape. As this is done, the perpendicular bisectors are continuously redrawn correctly. This shows the student that the three perpendicular bisectors still intersect at a single point, called the circumcentre of triangle, no matter what the shape of the triangle (Figure 1). The procedure is at least equivalent to drawing a large number of triangles on paper, or imagining that one had drawn them.

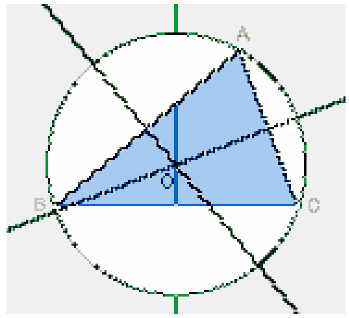


Figure 1: Circumcentre

Such a powerful feature provides the student with strong evidence that the theorem is true (and reinforces the value of exploration in general in giving students confidence in a theorem). It helps the student form a mental image (Mason, 1991). It would only be natural if the student were to jump to the conclusion that this exploration is entirely sufficient to establish that the perpendicular bisectors always intersect in a single point. Perhaps less understandable, however, is that some educators have leapt to the same conclusion, misinterpreting the power of computers in demonstration as an indication that proof is no longer a central aspect of mathematical theory and practice.

What we really need to do, of course, is not to replace proof by exploration, but to make use of both exploration and proof. This is not a new issue. Exploration was an important facet of mathematics long before computers were invented, and has traditionally not been seen as inconsistent with the view of mathematics as an analytic science or with the central role of proof. Exploration and proof have been and remain complementary.

This is clear, first of all, when one considers that mathematical exploration itself, with or without the aid of a computer, makes much use of deductive reasoning, the very foundation of proof. Polya (1957) has discussed the role of deductive reasoning in exploration and problem solving in some detail. He points out that to solve a problem is to find the connection between the data and the unknown, and to do this one must use what he calls a “heuristic syllogism,” a kind of reasoning that uses deduction, in addition to circumstantial, inductive and statistical evidence.

In the second place, it is a simple fact that, while exploring and proving are separate activities, they reinforce each other. They are both part of the overall problem-solving process and both are needed for success in mathematics. Exploration leads to discovery, while proof is confirmation. Exploration of a problem can lead one to grasp its structure and its ramifications, but cannot yield an explicit understanding of every link. Thus exploration can lead to conclusions which, though precisely formulated, must remain tentative. Though the truth of a proposition may seem apparent from exploration, it still needs, as Giaquinto (1994) points out, “demonstrable justification”. Only a proof, by providing a derivation from accepted premises, can provide this.

The classroom challenge is to use the excitement and enjoyment of exploration to motivate students to supply a proof, or at least to make an effort to follow one supplied by the teacher. One reason is that exploration does not reflect the totality of mathematics, because mathematicians aspire to a degree of certainty that can only be achieved by proof. A second reason is that students should come to understand the first reason: As most mathematics educators would still agree, students need to be taught that exploration, useful as it may be in making and testing conjectures, does not constitute proof.

Proof as explanation

Clearly the main function of proof in mathematics is the validation of propositions. Proof provides a level of confidence in a mathematical statement which no other means of justification can offer. A proof may perform a number of significant incidental functions as well, however. It may contribute, for example, to the discovery of other mathematical truths, to the systematization of a body of results, and to the communication of mathematical knowledge (de Villiers, 1990). But the most important additional function of proof is that of explanation or clarification. The best proof, even in the eyes of practising mathematicians, is one that not only establishes the truth of a theorem but also helps understand it. Such a proof is also more persuasive and thus more likely to be accepted.

Scholars pointed out the importance of clarification, as distinct from mere justification, as early as the 17th century. Arnauld and Nicole, who studied Euclid in great detail, are an example (Barbin, 1988). Though these two scholars had tremendous admiration for Euclid's work, they thought it appropriate to formulate a number of criticisms in their book *La logique ou l'art de penser* (1674; republished 1965). They saw it as a significant flaw that the *Elements* deal more with proofs that convince than with proofs that clarify (*éclairent*). They used the term "clarify" to mean showing *why* a theorem is true and "convince" to mean demonstrating *that* it is true, and thus their distinction is the same as that made above between explanation and justification.

Barbin shows that Lamy, another 17th century geometer, also made the distinction between *convaincre* and *éclairer* in a work published in 1683. Lamy even advises students to make sure the proof of a proposition provides a clarification before they accept it as true. Proofs that clarify, he adds, proceed from definitions through deductions to the conclusion in *a clear way.* In this way they differ from proofs such as *reductio ad absurdum*, which justify a proposition by deriving an evident absurdity from its negation; such a proof may well convince us that the proposition is true, but can shed no light on why this is so. Lamy also devotes an entire book to the methodology of proof, in which for some propositions he presents two proofs, one that merely convinces and one that also provides clarification (Barbin, 1988, p. 600).

Another view of proof as explanation is that of the ancient Chinese mathematicians. Until Greek axiomatics reached China, mathematicians proceeded there unconcerned with deductive proof. For them a proof consisted of "any explanatory note which serves to convince and to enlighten" (Siu, 1993, p. 346). These explanatory notes took various forms, consisting of a balanced use of arguments, heuristic reasonings and dissections of diagrams known as proofs without words. A very famous proof of this kind is the use of dissected squares to prove the Pythagorean theorem. Because the Chinese mathematicians were concerned with the explanatory power of their proofs, as opposed to verification, they often devised several different proofs for the same theorem.

Figure 2 shows a proof of the Pythagorean theorem by the dissection method as adapted from the *Chou pei suan ching* (Nelsen, 1993).

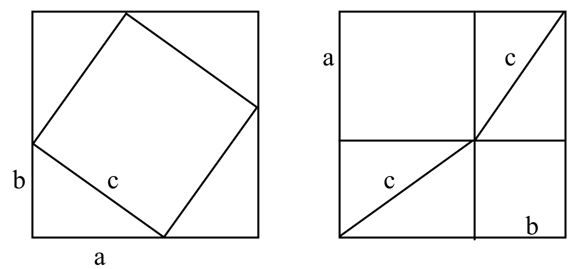


Figure 2: The Pythagorean theorem

An insight into what distinguishes an explanatory proof is Steiner's definition (1978) that such a proof must make "... reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the results depend on the property" (p. 143). Closely related to Steiner's definition is the concept of "*inhaltlich-anschaulicher Beweis"*. Wittmann and Müller (1990) use this term to characterize a proof in which "[the] method of demonstration calls upon the meaning of the term employed, as distinct from abstract methods, which escape from the interpretation of the terms and employ only the abstract relations between them".

Two examples will illustrate this point. To prove that the three angle bisectors of a triangle meet at a single point, the incentre of the triangle, one normally makes use of the defining property that an angle bisector is the locus of all points equidistant from the edges of the angle (see Figure 3). Similarly, to prove that the three perpendicular edge bisectors meet at a single point, one makes use of the defining property that a perpendicular bisector is the locus of all points equidistant from the end points of its edge. These proofs are thus explanatory in Steiner's sense, in that they make "reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem". In the classroom they have been found to be both convincing and illuminating, helping students see why the theorems must be true.

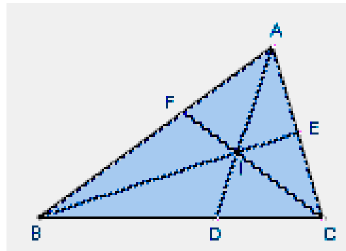


Figure 3: Incentre

We have seen that mathematicians have long preferred or even insisted upon proofs that also explain. What is important for practising mathematicians is even more important in the classroom. Where students are studying propositions that are known to be true, the main function of proof is obviously that of explanation. For teachers, then, there are great advantages to be gained by using explanatory proofs, as Hanna (1990) has discussed in some detail.

Of course one cannot always find an explanatory proof for every theorem one wishes to present in the classroom, much less a proof that flows directly from the properties of the terms involved. In many mathematical subjects some theorems need to be proved using contradiction, mathematical induction or other non-explanatory methods. It so happens, however, that geometry enjoys a special position in this regard, in that most of its proofs are explanatory. In geometry textbooks it is quite rare to see a proof that makes use of non-explanatory arguments such as *reductio ad absurdum* or mathematical induction.

Visualization and visual proofs

A number of mathematicians and logicians are now investigating the use of visual representations, and in particular their potential contribution to mathematical proofs. In the last decade or so such investigations have gained in scope and status, in part because computers have increased the possibilities of visualization so greatly. Such studies are being pursued at many places, such as the Visual Inference Laboratory at Indiana University and the Centre for Experimental and Constructive Mathematics (CECM) at

Simon Fraser University in British Columbia. At most of these institutions, the departments of philosophy, mathematics, computer science and cognitive science cooperate in research projects devoted to developing computational and visual tools to facilitate reasoning.

Researchers who recommend the use of visual representations in mathematics and mathematics teaching realize, of course, that misleading diagrams abound. Brown (1999) has presented some of the well-known examples of diagrams that might lead to error. This fact alone, however, does not give reason to believe that visualization does not have promise for investigation and teaching.

A key question raised by the intensified study of visualization is whether, or to what extent, visual representations can be used, not only as evidence for a mathematical statement, but also in its justification. Diagrams and other visual aids have long been used to facilitate understanding, of course. They have been welcomed as heuristic accompaniments to proof, where they can inspire both the theorem to be proved and approaches to the proof itself. In this sense it is well accepted that a diagram is a legitimate component of a mathematical argument. Every mathematics educator knows that diagrams and other visual representations are also an essential component of the mathematics curriculum, where they can convey insight as well as knowledge. They have not been considered substitutes for traditional proof, however, at least until recently. Today there is much controversy on this topic, and the question is now being explored by several researchers.

According to the mathematician George Francis (1996), for example, the fact that more and more mathematicians turn to computer graphics in mathematical research does not obviate the need for rigour in verifying the knowledge acquired through visualization. He does recognize that “the computer-dominated information revolution will ultimately move mathematics away from the sterile formalism characteristic of the Bourbaki decades, and which still dominates academic mathematics”. But he adds that it would be absurd to expect computer experimentation to “replace the rigour that mathematics has achieved for its methodology over the past two centuries”. For Francis, visual reasoning is clearly not on a par with sentential reasoning.

Other researchers have come to similar conclusions. Richard Palais (1999), for example, is a mathematician at Brandeis University who has been working on a mathematical visualization program called 3D-Filmstrip for more than five years. He reports on his use of computers to model mathematical objects and processes, where he defines a process as "an animation that shows a related family of mathematical objects or else an object that arises by some procedure naturally associated to another object" (p. 650). He observes that visualization through computer graphics makes it possible not only to transform data, alter images and manipulate objects, but also to examine features of objects that were inaccessible without computers. Palais concludes that visualization can directly show the way to rigorous proofs, but he stops short of saying that visual representations could be accepted as legitimate proofs in themselves.

Peter Borwein and Loki Jörgenson of CECM, as well, have examined the role of visualization in reasoning in general and in mathematics in particular. The two questions they posed to themselves were: "Can it contribute directly to the body of mathematical knowledge?" and "Can an image act as a form of 'visual proof'?" They answer both these questions in the positive, though they would insist that a visual representation meet certain qualifications if it is to be accepted as a proof.

Borwein and Jörgenson cite the many differences between the visual and the logical modes of presentation. Whereas a mathematical proof, as a sequence of valid inferences, has traditionally been presented in sentential mode, a visual representation purporting to constitute a "visual proof" would be presented as a static picture. They point out that such a picture may well contain the same information as the traditional sentential presentation, but would not display an explicit path through that information and thus, in their opinion, would leave "the viewer to establish what is important (and what is not) and in what order the dependencies should be assessed".

For this reason these researchers believe that successful visual proofs are few and far between, and tend to be limited in their scope and generalizability. They nevertheless concede that a number of compelling visual proofs do exist, such as those published in the book *Proofs without words* (Nelsen, 1993). As one example, they present the following heuristic diagram, which proves that the sum of the infinite series 1/4 + 1/16 + 1/64 + ... = 1/3 (See Figure 4).

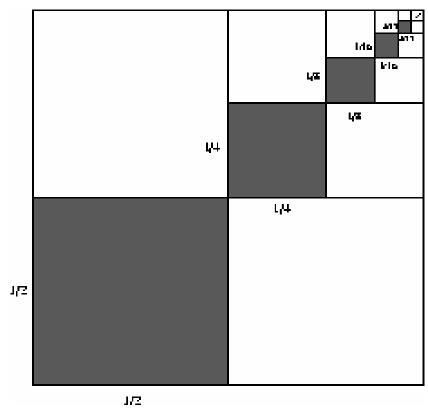


Figure 4: A simple "visual proof"

of $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{3}$

Borwein and Jörgenson suggest three necessary (but not sufficient) conditions for an acceptable visual proof:

- Reliability: That the underlying means of arriving at the proof are reliable and that the result is unvarying with each inspection
- Consistency: That the means and end of the proof are consistent with other known facts, beliefs and proofs
- Repeatability: That the proof may be confirmed by or demonstrated to others

One might wonder whether these criteria would not apply to proofs in general, not only to visual ones. One might also object that the first criterion in particular, lacking as it does a definition of "reliable means", does not provide sufficient specific guidance in separating acceptable from unacceptable visual proofs. Indeed, Borwein and Jörgenson make no claim to have answered this question definitively. Nevertheless, they would assign to visual reasoning a greater role in general in mathematics, and believe that some visual representations can constitute proofs.

For other researchers, too, the idea that visual representations are no more than heuristic tools is a dogma that needs to be challenged. Barwise and Etchemendy (1991, 1996) sought ways to formalize diagrammatic reasoning and make it no less precise than traditional deductive reasoning. They acknowledge that the age-old notion of proof as a derivation, consisting of a sequence of steps leading from premises to conclusion by way of valid reasoning, and in particular the elaboration of this notion in modern mathematical logic, have contributed enormously to progress in mathematics. They claim, however, that the focus on logical structures and sentential reasoning has led to the neglect of many other forms of mathematical thinking, such as diagrams, charts, nets, maps, and pictures, that do not fit the traditional inferential model. They also argue that it is possible to build logically sound and even rigorous arguments upon such visual representations.

These two researchers proceeded from what they call an informational perspective, building upon the insight that inference is “the task of extracting information implicit in some explicitly presented information” (Barwise and Etchemendy, 1996, p. 180). This view leads to a criterion for the validity of a proof in the most general sense: “As long as the purported proof really does clearly demonstrate that the information represented by the conclusion is implicit in the information represented by the premises, the purported proof is valid”(p.180). The authors go on to point out that whenever “there is structure, there is information”, and that a visual representation, which may be highly structured, can carry a wealth of information very efficiently. Because information may be presented in both linguistic and non-linguistic ways, they conclude that strict adherence to inference through sentential logic is too restrictive, inasmuch as sentential logic applies solely to linguistic representations.

The question is how to extract the information implicit in a visual representation in such a manner as to yield a valid proof. Barwise and Etchemendy show examples of informal derivations, such as the use of Venn diagrams, and suggest that perfectly valid visual proofs can be built in a similar fashion upon the direct manipulation of visual objects. Unfortunately, as they point out, the focus on sentential derivation in modern mathematics has meant that little work has been done on the development of protocols for derivation using visual objects, so that there is much catching up to do if visual proof is to realize its considerable potential.

Though the view of these researchers is that proof does not depend on sentential representation alone, they do not believe that visual and sentential reasoning are mutually exclusive. On the contrary, much of their work has been aimed at elaborating the concept of "heterogeneous proof". Building upon this position, Barwise and Etchemendy (1991) have developed *Hyperproof,* an interactive program which facilitates reasoning with visual objects. It is designed to direct the attention of students to the content of a proof, rather than to the syntactic structure of sentences, and teaches logical reasoning and proof construction by manipulating both visual and sentential information in an integrated manner. With this program, proof goes well beyond simple inspection of a diagram. A proof proceeds on the basis of explicit rules of derivation that, taken as a whole, apply to both sentential and visual information.

Using arguments from physics

To the extent that proof was discussed outside the educational context, it has been from an internal perspective, i.e. with a focus on its function within mathematics. But proof can also be looked at from an external perspective, with a focus on one of its important external aspects: the relationship between physics and mathematical proof. Jahnke (1978) and Winter (1983) argued that mathematical proof should not be seen as a turning away from observation and measurement, but rather as a guide to an intelligent exploration of real phenomena. Subsequently, Hanna and Jahnke (1999) posed a twofold question: What is the potential role of arguments from physics within mathematical proof, and how should this role be reflected in the classroom?

The first part of this question has to do with mathematics itself. The close cooperation between mathematicians and theoretical physicists has led to a heightened awareness of the many benefits that mathematics derives from physics (Jaffe and Quinn, 1993). In a paper on the phenomenology of proof, Rota (1997) maintains that the benefits of this close association are to be seen in mathematical proof in particular. Mathematicians often remain dissatisfied with proofs that, though they establish without a doubt that a theorem is true, provide no insight as to why it is true. Physical concepts and models can make an important contribution to understanding in such cases, and can even help mathematicians devise purely mathematical proofs of a more explanatory nature.

In addition, an argument from physics may well form an integral part of a mathematical proof. This has a long tradition, in fact. When a purely mathematical proof of a theorem proves elusive or awkward, mathematicians have often found that the introduction of concepts and arguments from physics yields a straightforward proof. A famous example is Archimedes' use of the law of the lever for determining volumes and areas. Another equally famous example, from the calculus of variations, is the so-called Dirichlet principle, which asserts the existence of certain minimal surfaces as solutions of certain boundary value problems. In the 19th century, Dirichlet and Riemann took this theorem to be obvious for physical reasons. Weierstraß later criticized the use of the principle, however, forcing mathematicians to look for a purely mathematical proof. This was quite hard to achieve, but in the end the effort led to considerable progress in the calculus of variations (Monna, 1975).

The second part of the question relates to mathematics education. In looking at the potential use of arguments from physics within mathematical proofs, the ideas of Winter (1978) and Polya (1954), who have dealt directly with the role of arguments from physics in the classroom, are a good point of departure. Their basic idea is that one can apply a complex law of physics in a mathematical proof just as if it were a mathematical theorem. As mentioned, there are precedents for this in mathematics itself.

As an example of this approach, one might first mention the construction of the Fermat point of a triangle, where the object is to find the point X with the smallest sum of distances to three given points A, B, C. (Figure 5) An application would be the optimal location of a electricity generating station supplying three cities.

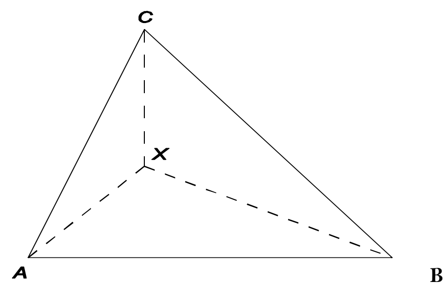


Figure 5: Fermat Point

The most elegant method is to model the triangle by a physical system consisting of a perforated horizontal plate and weighted ropes passing through the perforations, as shown in Figure 6 (Polya, 1954). (The system can also be thought of as a vertical one, with weighted ropes passing over rollers fixed to a wall.)

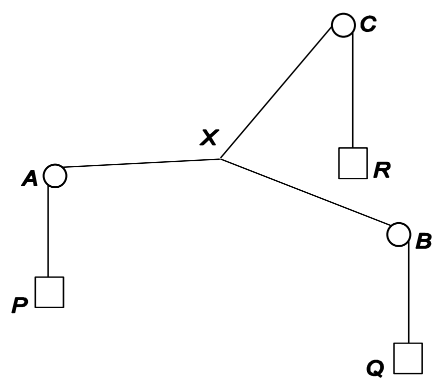


Figure 6: Polya's solution

$$AP + BQ + CR = \text{max, which implies } \mathrm{AX} + BX + CX = \text{min.}$$

Thus the point X solves the Fermat Problem.

Similarly, some theorems of elementary geometry, such as the Varignon theorem that the midpoints of the sides of a quadrangle are the vertices of a parallelogram, can be proved most easily by applying the laws of the lever or the notion of centre of gravity. The centre of gravity S with weight 4 can be arrived at in two ways: from the partial centres of gravity of AB and CD, and from those of BC and DA. The joining lines intersect at their mid-points, and thus form the diagonals of a parallelogram (see Figure 7).

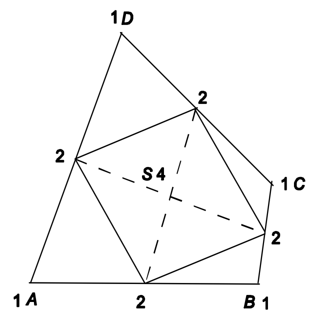


Figure 7: Varignon

Another example is the demonstration that the centre of gravity of a triangle is the point at which the medians meet. In triangle ABC in Figure 8 the point A', the midpoint of BC, is the centre of gravity of BC. That is, the two weights W at points B and C can be taken as acting through the centre of gravity of BC at point A' with weight 2W. Then the centre of gravity of the median AA', which has weight 2W at point A' and weight W at point A, is a point that divides the median AA' in the ratio 2:1. A similar argument would show that the centre of gravity must lie on the median BB' and on the median CC'.

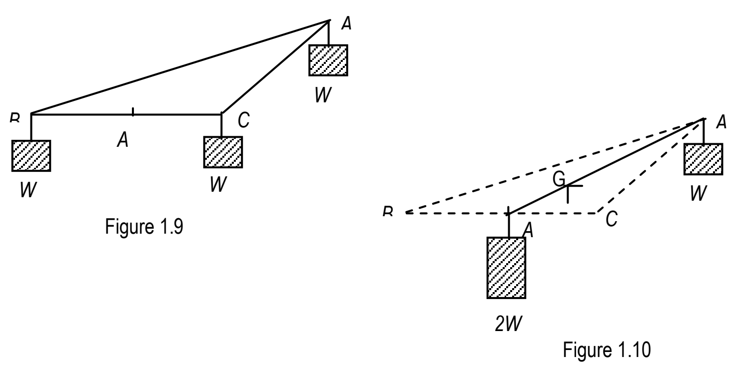


Figure 8: Centre of gravity of triangle ABC

A final example is the mean value theorem of differential calculus. If the derivative of a function is interpreted as the velocity at a given instant, then the mean value theorem follows directly from the observation that a car going from A to B must have had, at least at one point, the mean velocity as its actual velocity.

Such applications of physics do much more than illustrate a theorem. By introducing productive concepts, they make possible a more satisfactory proof of the theorem, and one that, on the basis of an isomorphism between the mathematical and the physical constructs, is no less rigorous. (In this they differ from what has come to be referred to as "experimental mathematics," which in its essence consists of generalizations from instances.)

For a mathematician, the use of concepts and arguments from physics is primarily a way to create a more elegant proof. But such a proof may also be illuminating in different ways. It may reveal the essential features of a complex mathematical structure, provide a proof that can be grasped in its entirety (a holistic version, as opposed to an elaborate and almost incomprehensible mathematical argument), or point out more clearly the relevance of a theorem to other areas of mathematics or to other scientific disciplines.

If such broader benefits are invaluable to the practising mathematician, they clearly have great potential for promoting understanding among students. Unfortunately this potential is not being exploited, because concepts and arguments from physics have not been integrated into the classroom teaching of proof to any great extent and certainly not in any organized way. This is not surprising, since there is no body of research on this topic to provide guidance and tools for teachers and curriculum developers. A research project in progress (Hanna and Jahnke, 1999) may provide such much needed data on the implementation of these ideas in the classroom.

Educational aspects

From an educational aspect, the potential role of arguments from physics in the classroom raises two tightly linked issues: How can the actual role of arguments from physics in mathematical practice best be reflected in the curriculum, and how can such arguments best be used to promote understanding?

To address the first issue, one would have to examine the epistemology of mathematics implied by much of present classroom practice, and compare it with the somewhat different accounts of the nature of mathematics that are implicit in the practice of mathematics itself or espoused by mathematicians and philosophers of mathematics.

These differences of epistemology are important. For example, students are often taught that the angle sum theorem for triangles is true in general only because it has been proven mathematically. Because it ignores the fact that measurements have shown this relationship to hold true for real triangles as well, this practice implies a very specific and limited view of the nature of mathematics and its relationship to the outside world. Students do not share this view, however; they bring to the classroom the belief that geometry has something to say about the triangles they find around them. In this they may unwittingly be closer than the curriculum to the broader view of the nature of mathematics held by most practising mathematicians. For this reason it should come as no surprise to educators when students misinterpret the assertion that mathematical proof is sufficient in geometry to mean that empirical truth can be arrived at by pure deduction.

The second issue is the use of proof for promoting understanding. Students being introduced to mathematical proof come to the classroom with preconceived notions and complex epistemological uncertainty. Educators need to understand both much better than they do today. When shown the proof of a theorem, for example, students quite often ask for empirical testing, even though they say they have understood the proof. From a purely mathematical viewpoint such a request seems quite unreasonable, and teachers usually take it as an indication that the students did not really understand what a mathematical proof is. From the viewpoint of a theoretical physicist, however, the request is quite natural; no physicist would accept a fact as true simply on the basis of a theoretical deduction. Thus a consideration of the role of mathematical proof in theoretical physics may well shed light on the way in which students view proof.

Keeping in mind the viewpoint of the theoretical physicist is also useful in other situations: when analysing how students approach proof while using dynamic geometry software such Cabri Geometry or the Sketchpad, which allow explorative work similar to experimental physics, or when attempting to work out how teachers might best cope with questions that are created in students' minds by the use of concepts and arguments from physics in mathematical proofs.

To conclude, I have tried to show that the key role of proof in the classroom is the promotion of mathematical understanding and that explanatory proofs, visual representations and arguments from physics present opportunities for a more effective teaching of mathematics in general and of proof in particular.

Acknowledgment

Preparation of this paper was supported in part by NATO under a Collaborative Research Grant, and by the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada.

References

Arnauld & Nicole. (1965). *La logique ou l'art de penser*. Paris: P.U.F.

Atiyah, M., *et al.* (1994). Responses to "Theoretical mathematics": Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 178-207.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen. (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*, 175-192. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique: Significations épistemologiques et questions didactiques. *Bulletin de l'A.P.M.E.P., 366*, 591-619.

Barnard, T., *et al.* (1996). Teaching proof. *Mathematics Teaching,* 155, 6-39.

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. In W. Zimmerman & S. Cunninghan (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics,* 9-24. Washington: The Mathematics Association of America.

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1996). Heterogeneous logic. In G. Allwain & J. Barwise (Eds.), *Logical reasoning with diagrams*, 179-201. New York: Oxford University Press.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educaation Studies in Mathematics 7*, 23-40.

Borwein, P. & Jörgenson, L (1997).Visible structures in number theory. In http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/node3.html.

Brown, J. R. (1999). *Philosophy of mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*. London: Routledge.

Cabri Geometry II (computer software). (1996). Texas Instruments Incorporated.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal, 2*(1), 41-53.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Dreyfus, T. & Hadas, N. (1996). Proof as an answer to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, International Reviews on Mathematical Education, 96*(1), 1-5.

Giaquinto, M. (1994). Epistemology of visual thinking in elementary real analysis. *British Journal for the Philosophy of Science, 45*, 789-813.

Greeno, J. (1994). Comments on Susanna Epp's chapter. In Schoenfeld A. (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving,* 270-278. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Francis, G. (1996). Mathematical visualization: Standing at the crossroads. In http://www.cecm.sfu.ca/projects/PhilVisMath/vis96panel.html.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE Press.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.). *International handbook of mathematics education*, 877-908. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the twenty-third conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 3, 73-80. Paris: PME.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics.* London: Institute of Education, University of London.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Jackiw, N. (1991). *The geometer's sketchpad* (computer software). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Jaffe, A. & Quinn, F. (1993). "Theoretical mathematics": Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 29*(1), 1-13.

Jahnke, H. N. (1978). Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Materialien und Studien des IDM, Bd.10, Bielefeld: IDM

Manin, Yu. (1977). *A course in mathematical logic*. New York: Springer-Verlag.

Manin, Yu. (1992). Contribution in panel discussion on 'The theory and practice of proof', 1. *Proceedings of the seventh international congress on mathematical education (Montreal, Canada)*.

Manin, Yu. (1998). Truth, rigour, and common sense. In H. G. Dales & G. Oliveri (Eds.), *Truth in mathematics,* 147-159. Oxford: Oxford University Press.

Mason, J. (1991). Questions about geometry. In D. Pimm & E. Love (Eds.), *Teaching and learning mathematics: A reader,* 77-99. London: Holder & Stoughton.

Monna, A. F. (1975). *Dirichlet's principle: A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis.* Utrecht: Oosthoek, Scheltema & Holkema.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249-266.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Commission on Standards for School Mathematics.

Nelson, R.B. (1993). *Proofs without words*. Washington: The Mathematics Association of America.

Noss, R. (1994). Structure and ideology in the mathematics curriculum. *For the learning of mathematics, 14*(1), 2-10.

Palais, R.S. (1999). The visualization of mathematics: Toward a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS, 46*(6), 647-658.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* New York: Doubleday.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(3), 5-41.

Rota, G-C. (1997). The phenomenology of mathematical proof. *Synthese, 3*(2), 183-197.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. *Conference proceedings: Justifying and proving in school mathematics*, 39-46. London: Institute of Education, University of London.

Siu, Man-Keung (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Lui Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 345-357.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies, 34*, 135-151.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177.

Winter, H. (1978). Geometrie vom Hebelgesetz aus -- ein Beitrag zur Integration von Physik- und Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Der Mathematikunterricht* 24, 5, 88-125.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik* 1, 59 - 95.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Ed.), *Mathematik-Didaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin: Cornelsen, 237-257.

Wu, H. (1996). The mathematician and the mathematics education reform. *Notices of the American Mathematical Society*, *43*(12), 1531-1537.

Demonstração – uma questão polémica

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
Rita Bastos
Escola Secundária Artística António Arroio

Em português de Portugal, quando falamos de demonstração, geralmente estamos a referir um tipo de prova matemática, elaborada segundo regras bem definidas e aceite numa determinada comunidade. Mas recentemente, na literatura portuguesa sobre educação matemática, deparamo-nos também com outras designações como *prova rigorosa*, simplesmente *prova*, *demonstração formal*, etc. No panorama internacional este problema agudiza-se. A literatura francófona recorre a *preuve* e *démonstration*, sendo que alguns autores distinguem uma da outra. Os autores anglófonos só dispõem do termo *proof*, mas alguns distinguem *mathematical proof* e *formal proof*. Como se ainda não bastasse esta dificuldade, encontrámos para conceitos associados ao de demonstração uma variedade enorme de termos que correspondem a outras tantas conceptualizações. Decidimos adoptar a palavra *demonstração* para traduzir *proof* sempre que considerámos ser esse o seu sentido. As questões conceptuais ligadas com os aspectos linguísticos constituíram as maiores dificuldades com que nos deparámos ao elaborar este texto, dificuldades estas que devem ser tomadas em conta na sua leitura e discussão.

Dentro da grande quantidade de ideias sobre demonstração, o seu ensino e a investigação neste campo, veiculadas por matemáticos e educadores matemáticos, a nossa preocupação foi identificar e destacar aquelas que nos parecem mais significativas e com maiores potencialidades para o desenvolvimento da investigação sobre o ensino da geometria e para o desenvolvimento curricular. Sendo um assunto muito rico, sobre o qual tem havido muita discussão ao nível da investigação matemática internacional, optámos por elaborar um texto que contrapõe ideias e levanta questões.

O que é a demonstração em Matemática, em Geometria? Da perspectiva dos matemáticos à perspectiva dos educadores matemáticos

Questões de verdade/validade em matemática

A demonstração tem estado sempre ligada à validação das ideias matemáticas. Em fases anteriores encarada como verdades absolutas, nos dois últimos séculos com perspectivas relativas.

A verdade em matemática é hoje assumida como um conceito relativo, embora nem sempre tenha sido assim. Foi na geometria que esta ideia se tornou mais forte com a invenção das geometrias não-euclidianas. Davis e Hersh (1986/90) referem muito claramente estas ideias no seu livro *Descartes Dream*:

> A posição de Eric Temple Bell, no princípio dos anos 30, é muito interessante e eu gostava de a descrever. Bell era um matemático distinto e um historiador da matemática. Era também um pouco romancista e escreveu romances de ficção científica. Em 1934 escreveu um livro notável, chamado *A busca da Verdade*. Agora parece muito desactualizado, mas eu acho que Bell falava pelo conjunto dos matemáticos dos anos 20 e 30. Aqui está a forma como eu resumo o seu livro:
>
> 1. A matemática é um instrumento criado pela mente.
> 2. Não tem relação com os absolutos metafísico ou teológico.
> 3. "A certeza desapareceu e não há esperança no seu regresso" (Esta é uma citação directa.)
> 4. A matemática não pode estabelecer a verdade.
> 5. A matemática contribui para grandes marcos na história das ideias.
>
> A primeira é a ideia de medida. Bell situa-a por volta de 4000 a.C.. A segunda é a noção de demonstração e esta situa-a por volta de 500 a.C.. Também diz, de passagem, que as demonstrações são as cadeias que amarram a razão humana há 2300 anos. A terceira grande ruptura foi o aparecimento das geometrias não euclidianas em 1826, e a quarta foi a descoberta recente das lógicas multivalentes, das quais ele esperava tremendos avanços novos para que a matemática crescesse. (p. 210)

Segundo Hanna (1990) o formalismo desenvolveu-se para eliminar a necessidade de recorrer à evidência intuitiva e ao julgamento humano, por serem ambos vistos como fontes potenciais de erros graves. Dentro do formalismo, a verdade de uma afirmação reside apenas nos axiomas e na consistência interna do próprio sistema. Avançando pela história do formalismo esta investigadora chega a Gödel que mostrou, em 1931, que a formalização de uma teoria não garante o estabelecimento definitivo da sua consistência e que, além disso, num sistema formal consistente há sempre teoremas que não podem ser demonstrados.

A ilusão trazida pelo formalismo de que era possível definir todas as regras para o estabelecimento da verdade, foi desmoronada pelo próprio formalismo e introduziu grandes controvérsias dentro da comunidade matemática sobre a questão da demonstração.

> Não deveria existir nenhum desacordo acerca da demonstração matemática. Todo a gente olha com inveja a suposta unanimidade dos matemáticos; mas de facto existe uma controvérsia consideravelmente grande na matemática. Os matemáticos puros negam as demonstrações dos matemáticos aplicados, enquanto que os lógicos, por sua vez, repudiam as dos matemáticos puros. Os logicistas desprezam as demonstrações dos formalistas e alguns intuicionistas rejeitam com desdém as demonstrações de logicistas e formalistas. (p. 21)
>
> Imre Lakatos (1987), *¿Que es que lo que prueba una prueba matematica?*

Esta controvérsia tem originado discussões e desenvolvimentos interessantes na comunidade matemática, que podemos situar no âmbito da filosofia da matemática. Embora não seja nossa intenção entrar nesse campo, procurámos identificar algumas ideias de matemáticos, que têm trazido implicações para a educação matemática, neste domínio da demonstração.

Demonstração formal e demonstração usual dos matemáticos

Afinal de contas aquilo que se muitas vezes se defende como isento, neutro, objectivo, com regras universais, não é. Davis e Hersh (1981/95, p. 53-54) fazem uma boa caricatura das contradições que surgem quando se questiona a demonstração.

Aluno – Professor, o que é uma demonstração matemática?

Matemático Ideal (M.I.) – Não sabe isso? Em que ano está?

Aluno – No 3º ano da licenciatura.

M.I. – Incrível! Demonstrações são aquilo que me tem visto fazer no quadro três vezes por semana durante três anos! Uma demonstração é isso.

Aluno – Desculpe, professor, devia ter explicado. Estou em filosofia, não estou em matemática. Nunca frequentei a sua cadeira.

M.I. – Ah! Bem, nesse caso… teve alguma matemática, não teve? Conhece a demonstração do teorema fundamental do cálculo… ou a do teorema fundamental da álgebra?

Aluno – Já vi raciocínios em geometria e em álgebra a que chamavam demonstrações. No entanto, não queria exemplos de demonstrações, mas sim uma definição. Se assim não for, como posso saber que demonstrações estão certas?

M.I. – Bem, isso foi tudo esclarecido pelo lógico Tarski, creio, e por alguns outros, talvez Russel ou Peano. De qualquer maneira, o que se faz é escrever os axiomas da teoria numa linguagem formal com uma dada lista de símbolos ou alfabeto. Escreve-se então a hipótese do teorema no mesmo simbolismo. Depois mostra-se que é possível transformar as hipóteses, passo a passo, aplicando as regras da lógica, até chegar à conclusão. Isso é que é uma demonstração.

Aluno – A sério? É espantoso! Tive cálculo elementar e cálculo avançado, álgebra elementar e topologia e nunca ninguém fez isso.

M.I. – Ah, é claro que nunca ninguém realmente o faz. Nunca mais acabava! Mostra-se apenas que isso seria possível e isso chega.

Aluno – Mas nem isso se parece com o que vi fazer nas aulas ou com o que constava dos livros das cadeiras. Portanto, os matemáticos não fazem demonstrações!

M.I. – É claro que fazemos! Se um teorema não é demonstrado, não vale nada.

Aluno – O que é então uma demonstração? Se é uma coisa com uma linguagem formal e regras de transformação, então nunca ninguém demonstra nada. É preciso conhecer as linguagens formais e a lógica formal antes de fazer uma demonstração matemática?

M.I. – Claro que não! Quanto menos se souber, melhor. São tudo tolices abstractas, de qualquer maneira.

Aluno – Então o que é realmente uma demonstração?

M.I. – Bem, é um raciocínio que convence alguém que entenda do assunto.

Aluno – Alguém que entenda do assunto? Então a definição de demonstração é subjectiva; depende de certas pessoas. Antes de poder decidir se algo é uma demonstração sou obrigado a decidir quem são os peritos. Que tem isso a ver com demonstrar coisas?

M.I. – Não, não. Não há nada de subjectivo nisto. Toda a gente sabe o que é uma demonstração. Leia alguns livros, frequente umas aulas com um matemático competente e vai perceber.

Aluno – Tem a certeza?

M.I. – Talvez não lhe suceda se não tiver nenhuma aptidão para isso. Também pode acontecer.

Aluno – Então o professor decide o que é uma demonstração e, se eu não aprender a decidir da mesma maneira, o professor decide que não tenho aptidão.

M.I. – Quem mais poderá decidir se não eu?

Afinal há outros aspectos envolvidos na forma como os matemáticos validam as suas descobertas. William Thurston é um matemático que tem um entendimento dinâmico da compreensão matemática e que nos dá um testemunho sobre essas questões. Ele argumenta que a demonstração é uma actividade que faz parte da construção da matemática e como tal proporciona avanços na compreensão da própria matemática. O aspecto de validação de resultados existe, mas nem por isso a formalização é uma prática comum dos matemáticos:

> Deveríamos reconhecer que as demonstrações humanamente compreensíveis e humanamente verificáveis que actualmente fazemos são as mais importantes para nós, e que elas são muito diferentes da "demonstração formal".
> Actualmente, as demonstrações formais são inacessíveis e em grande parte irrelevantes: temos bons processos humanos para verificar a validade matemática. (1994, p. 171)

Parece-nos que vários matemáticos reconhecem, sobre a questão da validação dos resultados matemáticos, a existência de aspectos de aceitação social e de poder ("Quem mais poderá decidir se não eu?"). O que nos leva a afirmar que a confiança matemática é em grande medida um fenómeno social e que são os matemáticos que definem as suas regras de aceitação:

> A fiabilidade (dos teoremas produzidos) não resulta principalmente do facto de os matemáticos verificarem formalmente os argumentos formais; resulta do facto de os matemáticos pensarem cuidadosamente e criticamente acerca das ideias matemáticas. (Thurston, p.171)

> Considero a demonstração como uma forma de discurso. É uma maneira de falar própria da matemática e de ser reconhecido por tradição. Uma demonstração é um sinal de que realmente se é um matemático. (…)
>
> Penso que é útil pensar nos matemáticos como promotores, consciente ou inconscientemente, de algumas regras de higiene matemática. Uma grande parte do que se diz sobre demonstração, rigor e formalização é realmente sobre medidas sanitárias e higiene e sobre o que significa ser um matemático "puro".
>
> (Wheeler, p. 3)

Muitos educadores matemáticos foram mais longe, desenvolvendo estas ideias:

> O programa de rigor sistematizado por Euclides, dizem, não é, nem nunca foi, seguido rigidamente na produção em matemática (…) donde a aceitação de um resultado, entre os que produzem matemática, ser mais um processo social de negociação de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir cego das regras impostas pela proposta formal. (Garnica, 1996, p.37).

Estas ideias de negociação e aceitação apresentadas por Garnica vão beber ao trabalho de Gila Hanna, que distingue a demonstração formal da demonstração aceitável, e estas da demonstração no contexto da matemática escolar (1990, p. 6):

> Demonstração formal: a demonstração como conceito teórico da lógica formal (ou meta-lógica), que pode ser encarado como o ideal do qual a prática matemática apenas se aproxima.
>
> Demonstração aceitável: a demonstração como conceito normativo que define o que é aceitável para os matemáticos profissionais.
>
> O ensino da demonstração: a demonstração como uma actividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias que vale a pena tornar conhecidas dos alunos.

Para além da identificação destes aspectos sociais da demonstração praticada pelos matemáticos, outros educadores chamaram a atenção para determinações históricas (Douek,1998) e culturais da demonstração, nomeadamente para a forma como a própria língua modela o conceito (Ballacheff, 1999). Mas a questão não é pacífica, mesmo entre os educadores matemáticos. Para Raymond Duval (1998), na demonstração é o raciocínio dedutivo formal que prevalece e que ele afirma não ter nada em comum com o raciocínio discursivo natural utilizado noutros contextos:

> Em geometria, o raciocínio com vista à demonstração requer duas condições críticas:
> 1. o uso de *proposições*, em que cada uma tem à partida um *estatuto teórico*: axioma, definição, teorema, hipótese, conjectura, etc.
> 2. utilizar *apenas* teoremas, axiomas ou definições para cada passo que se avança em direcção à conclusão.

Duval reconhece três níveis de organização no raciocínio dedutivo: global, local e micro. Distingue os processos discursivos naturais dos processos discursivos teóricos característicos do raciocínio dedutivo, afirmando que neste último "as proposições estão ligadas de acordo com o seu estatuto" e que esta organização "funciona por substituição de proposições como num cálculo e não por associação ou oposição como no discurso natural."

Actividade de demonstrar e demonstração como produto

Uma questão que tem sido levantada por muitos autores e que tem grandes implicações em termos de ensino da geometria, é o da distinção entre a actividade matemática e os produtos dessa actividade. No que diz respeito à demonstração, Polya (1954/90) afirma:

> A matemática é vista como uma ciência dedutiva (demonstrative science). Embora este seja apenas um dos seus aspectos. A matemática acabada, apresentada de uma forma acabada, aparece como puramente dedutiva, consistindo apenas em demonstrações. Embora a feitura de matemática se pareça com a feitura de qualquer outro tipo de conhecimento humano. Temos de conjecturar um teorema antes de o demonstrar; temos que supor a ideia da demonstração antes de nos preocuparmos com os detalhes. Temos de combinar observações e seguir analogias; temos de experimentar e voltar a experimentar. O resultado do trabalho criativo de um matemático é um

> raciocínio dedutivo, uma demonstração; mas a demonstração é descoberta por raciocínio plausível, pela especulação (guessing). Se a aprendizagem da matemática reflecte, em alguma medida, a invenção matemática, tem de haver lugar para a especulação, para a inferência plausível. (p.vi)

Imre Lakatos (1972/82) também realça a distinção entre produtos e processos, mostrando como os primeiros escondem e até dão uma visão falseada da actividade que lhes deu origem:

> A metodologia euclideana desenvolveu um certo estilo necessário de apresentação. Referir-me-ei a ele como "estilo dedutivista". Este estilo começa com o enunciado de uma lista penosa de *axiomas*, *lemas* e/ou *definições*. Os axiomas e as definições parecem com frequência artificiais e mistificadoramente complicados. Nunca nos foi dito como surgiram essas complicações. A lista de axiomas e definições é seguida por *teoremas* cuidadosamente expressos. Estes estão carregados de condições pesadas; parece impossível que alguém os tenha alguma vez deduzido. Ao teorema segue-se a *demonstração*.
>
> (…)
>
> No estilo dedutivista, todas as proposições são verdadeiras e todas as inferências são válidas. A matemática apresenta-se como um conjunto sempre crescente de verdades eternas e imutáveis, em que os contra-exemplos, as refutações ou a crítica não têm lugar. O tema em estudo reveste-se de um ar autoritário, ao começar com uma exclusão disfarçada de monstros, com definições geradas por demonstração e com o teorema completamente desenvolvido, assim como ao suprimir a conjectura original, as refutações e a crítica da demonstração. O estilo dedutivista esconde a luta e oculta a aventura. Toda a história se desvanece, as sucessivas tentativas de formulação do teorema durante o procedimento probatório ficam condenadas ao esquecimento, enquanto o resultado final se exalta no estado de infabilidade sagrada.

Rejeitando em parte a ideia de Duval de que a demonstração não tem nada em comum com a argumentação, Nadia Douek (1998) defende que:

> Demonstrar e argumentar, como processos, têm muitos aspectos comuns, tanto do ponto de vista epistemológico como cognitivo, apesar de existirem diferenças significativas entre demonstração e argumentação como produtos socialmente situados.

Demonstração que valida e demonstração que explica ou que contribui para a compreensão da matemática

Para muitos autores, matemáticos ou educadores, a função de validação usualmente atribuída à demonstração não é a única, e para alguns não é sequer a mais importante. Davis e Hersh (1981/95, p.149) põem o foco no facto da demonstração promover a produção de conhecimento:

> A demonstração cumpre simultaneamente vários objectivos. Ao ser exposta ao escrutínio e à análise crítica de uma nova plateia, a demonstração passa por um processo constante de revalidação. A exposição incessante esclarece erros, ambiguidades e equívocos. (…)
>
> Na melhor das hipóteses, a demonstração aumenta o entendimento ao revelar o âmago da questão. A demonstração sugere nova matemática. O principiante aproxima-se da criação de nova matemática ao estudar demonstrações.

Referindo-se, como exemplo desta ideia, à controvérsia gerada pela demonstração pouco convencional do teorema das quatro cores, Thurston (1994, p. 162) afirma:

> Eu interpreto a controvérsia como tendo pouco a ver com dúvidas que as pessoas pudessem ter acerca da veracidade do teorema ou da correcção da demonstração. Mais propriamente, ela reflectiu um desejo permanente de *compreensão humana* que se viesse acrescentar ao conhecimento de que o teorema é verdadeiro, através de uma demonstração.

Também Lakatos (1976/82) defende a abordagem heurística, que contrapõe à abordagem dedutivista:

> Como já foi referido, o estilo dedutivista separa as definições geradas por demonstração das suas "demonstrações-antepassadas" e apresenta-as isoladamente de um modo artificial e autoritário. Oculta os contra-exemplos globais que conduziram à sua descoberta. Pelo contrário, o estilo heurístico põe esses factores em evidência e faz finca-pé na situação problemática: faz finca-pé na "lógica" que deu à luz o novo conceito.

Para Hanna (1990) esta é uma questão essencial a ter em conta no ensino da geometria. Ela refere alguns estudos sobre demonstração no currículo, realizados na década de oitenta, que deram grande ênfase ao conceito de demonstração como *argumentação convincente*, com o objectivo de ter em conta o papel da demonstração como meio de comunicação, e em reconhecimento dos processos sociais que têm um papel tão importante na aceitação de um novo resultado pelos matemáticos. Argumenta, no entanto, que os educadores deveriam preocupar-se essencialmente com a demonstração como argumentação que deve ao mesmo tempo validar e explicar. Hanna debruça-se sobre o conceito de demonstração como explicação e defende que sempre que possível é preferível apresentar este tipo de demonstração aos alunos. “Uma demonstração que prova e uma demonstração que explica, são ambas demonstrações legítimas”. A diferença está em que “uma demonstração que prova só mostra *que* um teorema é verdadeiro”, enquanto “uma demonstração que explica mostra também *porque* é que um teorema é verdadeiro”. Uma demonstração que prova pode apoiar-se só em regras de sintaxe enquanto que uma demonstração que explica deve utilizar raciocínios baseados em ideias matemáticas. Para Hanna nem todas as demonstrações têm o poder de explicar:

> Abandonar as demonstrações que não explicam em favor das (igualmente válidas) que explicam não tornaria o currículo menos reflector da prática da matemática aceite. (…) os matemáticos, incluindo os que recorrem a métodos puramente sintáxicos, estão na realidade mais interessados na mensagem por trás da demonstração do que na sua sintaxe, e encaram o aspecto mecânico de demonstração como necessário mas, feitas as contas, como um aspecto menos significativo da matemática. (p. 12)

Mas nem todos os matemáticos estarão de acordo com este ponto de vista. Wheeler (1990) não vê a demonstração como criadora de conhecimento:

> … é nas definições que encontramos os vectores da matemática: estas são as coisas que escolhemos definir desta maneira porque elas têm futuro, levam-nos a algum lugar, porque podemos fazer algumas coisas com elas. A demonstração, quando está pronta, acabou-se. (p. 2)

No entanto, Barbeau (1990) rebate este argumento com contra-exemplos:

> Euler é um exemplo particularmente forte de alguém que dava diversas demonstrações para um mesmo resultado. (…)
> Qual a razão desta tendência, de continuar agarrado a um resultado que deveria estar estabelecido de uma vez por todas? Eu acredito que a verdadeira intenção do investigador seja a de estabelecer não só a correcção do resultado, mas também a sua significância. Não chega acreditar no resultado, também é preciso ficar convencido que vale a pena conhecê-lo. (p. 26)

Contributos das TI para a discussão sobre a demonstração

O computador introduz nesta discussão contributos que importa referir. Por um lado porque permitiu demonstrar resultados cuja demonstração há muito tempo era procurada (por exemplo, o Teorema das quatro cores, a conjectura de Kepler). Por outro porque proporciona ambientes favoráveis à exploração matemática e à descoberta de novos resultados. É esta última perspectiva que traz novas oportunidades e novas formas de encarar a demonstração na educação matemática.

Hofstadter (1997) descreve uma experiência pessoal em que estudou, com o auxílio de um programa de geometria dinâmico, pontos especiais de um triângulo. À medida que vai referindo os resultados que foi encontrando, e acerca dos quais não tinha dúvidas quanto à validade, graças ao ambiente dinâmico em que estava a trabalhar, ele reflecte sobre o próprio papel da demonstração e sobre os desafios para que a vontade de compreensão dos resultados encontrados o arrastou:

> O grau de certeza e confiança que isto (a exploração no computador) nos dá é absolutamente espantoso. Evidentemente que não é uma demonstração, mas de algum modo, argumento eu, esta espécie de contacto directo com o fenómeno é ainda mais convincente do que uma demonstração, porque nós realmente vemo-lo acontecer ali mesmo à frente dos nossos olhos. Nada disto significa que eu não deseje uma demonstração. No fim de contas, as demonstrações são ingredientes críticos do conhecimento matemático, e eu gosto tanto delas como qualquer outra pessoa. Eu só não sou um dos que acredita que a certeza venha *só* através de demonstrações. (p. 10)

Ao longo da descrição que faz das suas descobertas percebe-se que Hofstadter, embora convencido da sua validade, continua a investigar para procurar compreendê-las. E esta pesquisa é de tal forma intensa e rica, do ponto de vista matemático, que ele afirma com alguma surpresa:

> … a minha própria personalidade saudou um programa de computador para explorar matemática, e sentiu que ele permite ter visões da verdade geométrica, atitude esta que seria um bocadinho menos bem aceite por um matemático tradicional. (p. 13)

O prazer da descoberta que é evidente ao longo do artigo foi de tal modo importante para o autor, que nem a dúvida sobre a originalidade das descobertas o ensombrou.

Esta mesma ideia é desenvolvida por De Villiers (1997), ao referir a relação dos alunos com a demonstração quando desenvolvem actividades investigativas com recurso ao computador:

> Apesar da maior parte dos alunos parecer não precisar de mais nada para ter convicções quando exploram conjecturas em ambientes geométricos dinâmicos como o *Cabri* ou o *Sketchpad*, não é difícil estimular a sua curiosidade perguntando-lhes *por que* é que eles pensam que um determinado resultado é verdadeiro. Desafia-os tentar *explicá-lo*. Os alunos rapidamente admitem que a verificação indutiva/experimental apenas confirma; não esclarece nem contribui para uma compreensão satisfatória. Eles parecem desejar então procurar argumentos dedutivos como uma tentativa de explicação, mais do que uma verificação. (p. 23)

Esta observação de De Villiers é consistente com a de Hanna quando distingue as demonstrações que explicam das que só validam. Como a própria autora refere, os computadores vieram acentuar esta diferença. Mas se por um lado permitiram efectuar mais demonstrações que só validam, sem nada acrescentar à compreensão das situações matemáticas, por outro vieram proporcionar, também aos alunos, oportunidades de descobrir resultados que precisam de ser demonstrados para serem melhor compreendidos.

Porquê a demonstração no ensino da geometria?

Tradicionalmente, nos currículos portugueses, é na geometria que se dá ênfase à demonstração. Mas colocam-se as questões: há alguma razão para se trabalhar a demonstração no currículo de matemática? Haverá razões para que a demonstração apareça quase exclusivamente na geometria?

Segundo Duval (1998), o discurso dedutivo característico da matemática e o discurso argumentativo utilizado na linguagem natural, têm características cognitivas muito diferentes. Um dos problemas do ensino está em confundir os dois tipos de comportamentos – ingénuo (naïve) e matemático - que correspondem a formas de raciocínio diferentes:

> Para raciocinar é necessário que os alunos descubram como se organiza o raciocínio dedutivo e porque é que ele não funciona da mesma forma que uma argumentação ou uma explicação em outras áreas do conhecimento (geologia, botânica, química, mecânica, história). Esta organização não está realmente visível nas expressões da linguagem natural. Mas é com as expressões da linguagem natural que o aluno pode tomar consciência desta organização específica e deste processo. Esta é a condição para distinguir raciocínio dedutivo teórico de outras formas de raciocínio. E não há nada formal nesta aprendizagem. (p. 50)

Seguindo esta linha de argumentação, Raymond Duval defende que:

> … a geometria, mais do que outras áreas da matemática, pode ser usada para descobrir e desenvolver diferentes formas de raciocínio. Este deve ser um objectivo essencial do ensino da geometria. Mas ainda é preciso conseguir uma prática mais compreensiva e equilibrada dos processos cognitivos subjacentes. Isto quer dizer que são necessárias situações específicas de aprendizagem para a diferenciação e coordenação dos diversos tipos de processos de visualização e de raciocínio. (p. 51)

Esta perspectiva levanta o problema da transferência, que é questionado por Hanna (1998):

> (…) A demonstração em geometria é vista como uma preparação para o raciocínio lógico (Suydam, 1985). Espera-se que os alunos adquiram não só um certo grau de

> competência na compreensão e na construção de demonstrações, mas também um "domínio rigoroso do raciocínio em geral" (N.C.T.M., 1989).
> Infelizmente os poucos estudos relevantes mostram que a maioria dos alunos de geometria não atingem um domínio adequado da própria demonstração. (Fischbein, 1982; Martin Harel, 1989; Senk, 1985). Além disso, nenhuma investigação convincente confirmou a hipótese de que uma dedicação a demonstrações matemáticas resulta numa transferência da aprendizagem na forma de capacidades de aplicar hábitos de raciocínio em outras áreas do currículo. (p. 5-6)

Outro tipo de razões apontadas para o ensino da matemática, baseiam-se em argumentos de natureza histórica e cultural. Assim, a geometria seria ensinada como o paradigma da dedução e portanto da matemática, contribuindo para o conhecimento da natureza da matemática e da actividade dos matemáticos, ao longo do tempo e nas várias culturas.

Segundo Bussi & Boero (1998):

> Hoje, encaramos a geometria como uma parte da actual cultura científica, como uma actividade especializada dos matemáticos e como uma componente cultural básica fundamental das classes intelectuais nas sociedades modernas. Assim, a geometria pode proporcionar às pessoas tradicionalmente cultas alguns padrões de raciocínio ('rigor matemático') e dar-lhes algumas ideias que enquadram a reflexão em experiências intelectuais (por exemplo, o infinito). (p. 56)

É neste sentido que Gila Hanna (1990) defende que a demonstração no ensino da geometria deve ser encarada como uma actividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias que vale a pena tornar conhecidas dos alunos, para promover a compreensão da matemática.

Outros educadores têm encontrado potencialidades no ensino da demonstração, sendo quase todos os exemplos em geometria, apesar de não ser explicitada nenhuma razão para isso. Para Nicolas Balacheff a demonstração na sala de aula é um instrumento de negociação da verdade, uma necessidade de validação numa perspectiva social. Esta necessidade surge muitas vezes naturalmente quando há resultados experimentais obtidos pelos alunos e permite devolver o problema da validade aos próprios alunos. Numa experiência realizada por Balacheff referida por Junqueira (1996, p. 71):

> Este autor propôs uma sequência em que começou por solicitar aos vários grupos de alunos de uma turma que medissem e somassem as amplitudes dos ângulos de vários triângulos. Perante os diferentes valores obtidos pelos grupos, a demonstração (tradicional) do teorema apareceu como um meio de pôr toda a turma de acordo sobre o resultado.

Mas Wheeler (1990) coloca alguns obstáculos a esta ideia de negociação na sala de aula, contrapondo características da demonstração enquanto processo social na comunidade matemática, e duvida até da pertinência do ensino da demonstração:

> … falámos da demonstração como um processo social, uma negociação. (…) É um processo que acontece num tempo determinado, e pessoas diferentes tomam parte em diferentes partes da negociação, que não é necessariamente frente a frente. Em geral não é uma negociação frente a frente. Por isso, uma tentativa de a modelar na sala de aula é terrivelmente artificial, e não funcionará porque a negociação a que nos referimos é algo que necessita duma quantidade de tempo considerável para se realizar, e é feita por diferentes grupos de pessoas com interesses diferentes, e não por um grupo de pessoas dentro de uma sala de aula, todas a trabalhar no mesmo problema ao mesmo tempo.
>
> (…)
>
> Penso que é óbvio que a demonstração será sempre difícil na sala de aula de matemática, porque não aparece aí por nenhuma outra razão aparente que não seja a de imitar a actividade dos matemáticos. Nunca ninguém parou para pensar se é apropriada para a sala de aula ou, em caso afirmativo, que tipo de demonstrações seriam adequadas. (p. 3)
>
> (…)… é um programa terrivelmente sofisticado. Não admira que não seja muito bem ensinado, e que todos os alunos tenham dificuldade em apanhá-lo. Nunca ninguém analisou a dificuldade disto tudo, e a maior parte dos professores não estão conscientes de todas as exigências cognitivas da demonstração. (p. 4)

A razão de "imitar a actividade dos matemáticos" no ensino é apresentada como relevante e fundamentada por Eduardo Veloso (1998):

> Não é necessário ter frequentado a escola e ter feito demonstrações na disciplina de Matemática para saber raciocinar perfeitamente.

> Devemos portanto procurar noutro lado a justificação para a importância que devemos dar às demonstrações e em geral ao raciocínio dedutivo na disciplina de Matemática.
> Do nosso ponto de vista, julgamos que essa importância está associada aos próprios objectivos do ensino da matemática. Na realidade, se um dos objectivos principais do ensino da matemática nos ensinos básico e secundário é permitir aos alunos adquirir uma compreensão viva do que é a matemática, incluindo a sua relevância, evolução histórica e características no momento presente – é indispensável que os alunos experimentem e interiorizem o carácter distintivo da matemática como ciência, ou seja a natureza do raciocínio dedutivo e mesmo a estrutura axiomática das suas teorias.
> Com efeito, a matemática não é uma ciência experimental. As suas teorias e as "verdades" que elas afirmam – que têm um carácter relativo – não se constróem nem se comprovam pela repetição de experiências, mas pela demonstração. Como afirma algures Bourbaki, "depois dos gregos, quem diz matemática diz demonstração".

Assumindo esta ideia de que sem demonstração não há ensino da matemática, uma das razões que pode levar a privilegiar a geometria para ensinar a demonstração é que "uma quantidade notável deste assunto pode ser introduzida e continuada de modo aproveitável com uma quantidade mínima de estudo formal anterior. Neste sentido, a geometria difere grandemente de outras partes da matemática actual …" (Malkevitch, 1991, p. 2). Mas será assim tão pacífica a ideia de que o ensino da demonstração em matemática deve ser privilegiado em geometria?

Como e quando a demonstração no ensino da geometria?

O facto de formularmos esta questão desta maneira implica desde logo que assumimos como nossa a posição de que a demonstração tem um lugar insubstituível no ensino da geometria. Estamos conscientes de que essa posição é questionável.

Dos vários entendimentos do que é uma demonstração e dos porquês do seu ensino em geometria, decorrem necessariamente *comos* e *quandos* diferentes. A investigação tem dado alguns contributos para responder a estas questões, mas não identificámos grandes linhas consensuais ou modelos conceptuais geralmente assumidos. Além disso, as investigações mais recentes e o recurso aos computadores têm trazido novos elementos para esta reflexão.

Limitámo-nos por isso a seleccionar algumas ideias que nos pareceram mais significativas e que podem dar melhores contributos para uma discussão.

Richard Lehrer & Thomas Romberg (1998) têm procurado, nas investigações que têm levado a cabo, "identificar ideias matematicamente importantes e desenvolver tarefas e instrumentos que tornem essas ideias acessíveis às crianças" (p. 63). Trabalhando com professores do primeiro ciclo e com currículos sistematicamente reformulados à luz dos resultados que vão obtendo com as crianças, concluíram que:

> Os alunos debateram-se com o conceito filosófico de indução, e concluíram que não podiam ter a certeza de que uma generalização era verdadeira testando apenas alguns exemplos. Acreditamos que raciocinar acerca dos limites da indução (…) estabelece uma plataforma para a demonstração como forma de argumentar. (p.70)

Estes trabalhos levam-nos a defender, seguindo a linha defendida por Polya de que o raciocínio plausível precede a demonstração, que o ensino da demonstração deve estar presente em todos os níveis de ensino. Muito embora seja necessário compreender melhor os modelos de raciocínio dos alunos em situações que de algum modo envolvem ou estão relacionadas com a demonstração.

Battista & Clements (1995) procuraram em Piaget, e na sua teoria do desenvolvimento cognitivo, contribuições para melhor compreender os processos de aprendizagem relacionados com a demonstração e, consequentemente a altura apropriada de a trabalhar com os alunos. Estes autores atribuem a Piaget a ideia de que o progresso das crianças através dos estádios, e o surgimento da necessidade de validação, devem-se ao choque do confronto do nosso pensamento com o dos outros, que produz a dúvida e o desejo de demonstrar… A demonstração seria o resultado de argumentar.

Muitos autores têm-se baseado no modelo dos níveis de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio geométrico sob a influência de um currículo escolar para abordar a questão da demonstração.

> Níveis de van Hiele (adaptado de Battista & Clements, 1995, p. 50)
>
> 1º. Visual – Os alunos pensam nas formas geométricas em função da sua aparência como um todo (no sentido de gestalt), após terem contactado com algumas.

> 2º. Descritivo/analítico – Os alunos raciocinam com base na experiência; estabelecem propriedades das figuras por observação, medição, representação e construção de modelos. Identificam formas pelas suas propriedades.
> 3º. Abstracto/relacional – Os alunos pensam logicamente. Podem estabelecer definições abstractas, distinguir condições necessárias de condições suficientes e, eventualmente, apresentar argumentações lógicas.
> 4º. Dedução formal – os alunos pensam formalmente ao interpretar proposições geométricas logicamente. São capazes de construir demonstrações originais.
> 5º. Rigor matemático – Os alunos pensam formalmente acerca dos sistemas matemáticos e não só dentro deles. Podem analisar as consequências de manipular axiomas e definições.

De Villiers (1987, referido em Battista & Clements) argumenta que para os alunos dos níveis 1 e 2 a demonstração não faz sentido, uma vez que não duvidam da validade das suas observações empíricas. Van Dormolen (1977, idem) afirma que no nível 1 as conclusões referem-se aos casos particulares observados por isso não necessitam da demonstração. No nível descritivo/analítico as conclusões referem-se a conjuntos de objectos análogos, mas são obtidas a partir de casos específicos. Senk (1989, idem) defende que um programa orientado para a demonstração requer pelo menos o nível 3 de van Hiele:

> Em resumo, tanto Piaget como a teoria de van Hiele sugerem que os alunos devem passar pelos níveis mais baixos do pensamento geométrico antes de atingirem os mais elevados e que esta passagem toma uma quantidade considerável de tempo. A teoria de van Hiele sugere que o ensino deve ajudar os alunos a progredir gradualmente nos níveis mais baixos do pensamento geométrico *antes* de começar um estudo da geometria orientado para a demonstração. (Battista & Clements, p. 50)

Estes autores fazem uma revisão de literatura sobre a demonstração no currículo de geometria (*secondary school*) e adiantam algumas recomendações:

> O currículo deve exigir que os alunos expliquem e justifiquem as suas ideias. Deve encorajar os alunos a refinar o seu raciocínio, levando-os gradualmente a compreender as limitações das justificações visuais e empíricas de modo que eles descubram e comecem a usar algumas das componentes críticas da demonstração. (...) A

> demonstração é apropriada apenas na medida em que os alunos a podem usar como uma forma de justificar ideias poderosas. (p. 51)

Esta ideia de que a demonstração deve partir da actividade dos alunos está presente na maior parte dos autores. De Villiers (1996/99) utiliza uma metáfora significativa para criticar o ensino tradicional da geometria e enfatizar a distinção entre processos e produtos da actividade:

> O ensino tradicional da geometria pode ser comparado a uma aula de culinária e pastelaria, em que o professor só mostra aos alunos os bolos (ou pior ainda, imagens de bolos) sem lhes mostrar os ingredientes e como se fazem. Além disso, nem sequer são autorizados a experimentar a sua própria maneira de cozinhar.

Em vez da demonstração que é apresentada como um produto acabado, De Villiers (1997) propõe a demonstração como uma parte da actividade matemática que os alunos devem experimentar, e argumenta que os programas de geometria dinâmica são recursos adequados a esta actividade:

> Apresentar aos alunos a função fundamental da demonstração como explicação e descoberta exige que desde muito cedo eles sejam iniciados na arte de formular problemas e que lhes sejam proporcionadas oportunidades suficientes de exploração, conjectura, refutação, reformulação e explicação (…). Os programas de geometria dinâmica encorajam fortemente este tipo de raciocínio. Eles são poderosos como meio de verificação de conjecturas verdadeiras e também muito valiosos na construção de contra-exemplos para conjecturas falsas. (p. 23)

Além disso, De Villiers propõe a negociação como uma componente social importante na actividade de demonstrar:

> Devemos ser bastante honestos dizendo aos alunos que nós, como matemáticos, muitas vezes provamos resultados simplesmente pelo desafio intelectual envolvido. Não devemos aparentar uma falsa vontade de obter certezas. Devemos procurar dar mais atenção aos aspectos de comunicação da demonstração negociando com os nossos alunos critérios de aceitação da evidência, explicações e/ou argumentos. Como qualquer um, com alguma experiência na investigação actual, poderá testemunhar, a

> sistematização do papel da demonstração (organização de uma série de resultados de uma forma estritamente axiomático-dedutiva), é apropriada só em estádios muito avançados e deve estar completamente excluída em qualquer introdução à demonstração. (p. 23)

Também Garnica (1996), referindo outros autores, enfatiza a importância das interacções sociais na aprendizagem da demonstração:

> Yackel e Cobb (1994) seguem a proposta de retomada à ênfase no raciocínio matemático, conforme ditada pelo National Council of Teachers of Mathematics, apoiando a utilização das provas explicativas de Hanna (1989a, 1990). Nesse contexto, sugerem que as provas desenvolvidas em sala de aula devem ter um carácter de interacção social, o que pode ser basicamente traduzido como sendo o método de levar os alunos a compartilhar métodos de solução, respostas, pensamentos e caminhos por eles encontrados em exposições orais perante a sala, afirmando que 'mesmo generalizações não-articuladas e injustificadas são produtivas para o aprendizado'.

Mas a demonstração no currículo não deverá ser um fim em si. Uma das perspectivas é que o raciocínio dedutivo tem um papel fundamental na resolução de problemas geométricos (Jones, 1998); a outra perspectiva é que a demonstração é um aspecto essencial na organização da geometria. Veloso (1999), referindo Freudenthal, propõe as axiomáticas locais como "um meio de fazer compreender aos alunos o carácter axiomático das teorias matemáticas" (p. 21)

> (…) a conveniência de proceder a *pequenas organizações locais da geometria*; isto significa que em vez de se pretender apresentar ao aluno uma (pseudo) organização global da geometria, um sistema axiomático completo, o que deve ser proporcionado aos alunos são experiências de organização local, em que um pequeno número de resultados conjecturados por eles sejam, por meio de curtas deduções, interligados logicamente. (Veloso, 1998, p.27)

Também Celia Hoyles e Keith Jones (1998) procuram contributos para esta discussão, colocando algumas questões relacionadas com a introdução de ambientes dinâmicos no ensino da geometria e na aprendizagem da demonstração:

> A introdução de ambientes geométricos dinâmicos virá melhorar a situação (compreensão da demonstração) – ou, pelo contrário, tornará ainda mais difícil a transição entre demonstração informal e formal, em matemática? Até que ponto as abordagens inovadoras de ensino com o computador ajudarão os alunos a desenvolver estruturas conceptuais para a demonstração e a apropriarem-se desta como um meio para iluminar ideias geométricas? Ou serão os computadores utilizados para substituir qualquer necessidade de demonstração? (p. 121)

Estes autores avançam alguns resultados de estudos, realizados por si ou por outros investigadores, e que têm procurado respostas para estas questões:

> A qualidade da análise dos alunos sugere que o uso de programas de geometria dinâmica, como o *Cabri*, acompanhados de tarefas adequadas, podem proporcionar oportunidades para que desenvolvam bases para uma apreciação mais completa da natureza e propósito da demonstração matemática. (p. 124, sublinhado nosso)
>
> Deste modo, acreditamos que podemos desenvolver uma apreciação flexível dos papéis da demonstração que incluem iluminação, descoberta e comunicação, paralelamente com os de verificação e rigor. (p. 124)

Ao mesmo tempo que a investigação que estes autores têm levado a cabo nos aponta caminhos favoráveis, embora dependendo de muito trabalho por fazer, alertam-nos para caminhos perversos que o ensino pode tomar:

> No entanto, já há uma tendência notável para utilizar estas poderosas ferramentas dinâmicas de geometria, no sentido de reconhecer padrões, gerar casos, medir comprimentos e ângulos, simplesmente obter dados. Esta abordagem orientada para a recolha de dados, se não formos cuidadosos, permite-nos passar ao lado de todo o conteúdo matemático importante que o domínio geométrico é capaz de oferecer. Em particular, o caminho da demonstração como explicação ou verificação corre o risco de se tornar ainda mais problemático.

Caminhos para a investigação sobre a demonstração no ensino da geometria

Na comunidade portuguesa de educadores matemáticos é praticamente inexistente a investigação sobre a demonstração no ensino da geometria. Há apenas referências muito ténues e à margem dos problemas de investigação, em Saraiva (1992), Belchior (1994) e Junqueira (1995). Isso significa que a maior parte do trabalho está por fazer, ainda mais se entendermos haver aspectos culturais importantes a ter em conta neste tópico.

Em nosso entender, e seguindo as preocupações de alguns investigadores, o desenvolvimento da problemática da demonstração no ensino poderá seguir as seguintes vias:

- desenvolvimento curricular, nomeadamente organização do currículo, qualidade das tarefas e recursos (De Villiers; Hoyles & Jones; Lehrer & Romberg; …)
- processos de pensamento dos alunos – aspectos cognitivos (Duval; Douek; …), sociais (Balacheff; De Villiers; …) e culturais (Bussi & Boero; Balacheff; …)
- papel e formação dos professores (Lehrer & Romberg; Garnica; …)
- natureza do saber matemático e matemática escolar (Hanna; Douek; …)

Temos consciência que este é um texto inacabado, incompleto em muitos sentidos, mas sobretudo no que diz respeito à última parte. Esperamos que a discussão provocada e os contributos dos professores e investigadores presentes venham a contribuir para a construção de um documento útil ao desenvolvimento da investigação sobre a demonstração no ensino da matemática.

Referências

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, 18, p. 147 – 176.

Balacheff, Nicolas (1999). Pour un questionnement ethnomathématique de l'enseignement de la preuve. La lettre de la preuve. http://www.cabri.net/Preuve.

Barbeau, E. (1990). Three Faces of Proof. *Interchange*, Vol. 21, nº.1, p. 24 – 27.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, vol. 88, nº. 1, p.48 – 54.

Belchior, M.C. (1994). Níveis de pensamento geométrico e atitudes face à geometria e ao seu ensino de futuros professores. Tese de mestrado - Universidade do Minho. Não publicada.

Bussi, M.B. & Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in contexts. *Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 52 – 62. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1986/1990). *Descartes' Dream – The World According to Mathematics*. England: Penguin Books.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981/1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Villiers, Michael (1997). The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections. *King, J. et al. (eds) - Geometry Turned On - Dinamic Software in Learning*, p. 15 – 24. USA: MAA.

De Villiers, Michael (1996/1999). The Future of Secondary School Geometry. *La lettre de la Preuve*. http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98/deVilliers98.html

Douek, Nadia (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. First CERME international conference. *La lettre de la preuve*. http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/Douek/Douek98.html

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et aprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 233 – 261.

Duval, Raymond (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 37 – 52. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Garnica, A.V.M. (1996). Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: Um levantamento. *Quadrante*, vol. 5, nº. 1, p. 29 – 60.

Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996). Proof and Proving. *A. J. Bishop et al. (eds), International Handbook of Mathematics Education*, p. 877 – 908. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21/1, p. 6-13.

Hanna, G. (1998). Proof as Explanation in Geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 20, p. 4 – 13.

Hofstadter, Douglas R. (1997). Discovery and dissection of a geometric gem. *King, J. & Schattschneider, D. (eds) Geometry Turned On*, p. 3 – 14. USA: MAA.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. *Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 121 – 128. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jones, K. (1998). Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. *Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 78-83. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos*. Tese de mestrado. Lisboa: APM (edição fotocopiada).

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, vol. 5, nº. 1, p. 61 – 108.

Lakatos, Imre (1976/1982). *Pruebas y refutaciones - la logica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lakatos, Imre (1987). Que es lo que prueba una prueba matemática?. *Matemáticas, ciencia y epistemologia*, p. 91 – 102. Madrid: Alianza Universidad.

Lehrer, R. & Romberg, T. (1998). Springboards to Geometry. *Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 62-71. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Malkevitch, Joseph (1991). Geometry: Yesterday, Today, and Tomorrow. *Malkevitch, J. (ed.), Geometry's Future*, p. 1 – 13. USA: COMAP, Inc.

Saraiva, M. (1992). *O computador na aprendizagem da geometria. Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Projecto Minerva, FCUL.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 30, nº 2, p. 161 – 177.

Veloso, E. (1999). Ensino da Geometria: ideias para um futuro melhor. *Veloso et al (eds), Ensino da Geometria no virar do milénio*, p. 17-32. Lisboa: Departamento de Educação da FCUL.

Veloso, Eduardo (1998). *Geometria - Temas Actuais*. Lisboa: IIE.

Wheeler, D. (1990). Aspects of Mathematical Proof. Interchange, Vol. 21/1, p. 1 – 5.

Réplica a “Demonstração – uma questão polémica”, de Cristina Loureiro y Rita Bastos

Enrique de la Torre
Universidade da Coruña

En primer lugar, mi agradecimiento por la invitación para participar en este encuentro y debatir sobre la geometría, su enseñanza y su aprendizaje. Quiero mencionar también la colaboración prestada por mis compañeros Mª. Lluisa Fiol, de la Universidad Autónoma de Barcelona y Moisés Coriat, de la Universidad de Granada.

Hacer una réplica a este texto ha sido una labor comprometida. El trabajo de Cristina y de Rita es un profundo análisis sobre la complejidad de la demostración que tiene el valor de desvelar la polémica y no esconderla, para que así queden expuestas a la luz las distintas maneras de aproximarse y enfrentar los problemas. La demostración queda como un problema abierto, al que no podemos pretender cerrar. Personalmente pienso que los problemas cerrados son feos, no tienen demasiado interés porque nos privan de la posibilidad de intervenir y de considerar las matemáticas como algo vivo, que se relaciona con cada uno de los que participan en ella, y así el mismo problema admite diferentes soluciones puesto que las personas que entran a formar parte de ese problema matemático lo modifican, lo personalizan, adquiriendo una realidad nueva.

La demostración en geometría es una cuestión cambiante a lo largo de los tiempos y percibida de diferentes formas según quienes sean las personas que la ponen en cuestión. Por ello aquí sólo pretendo hacer algunas anotaciones al texto presentado por Cristina y Rita, que nos hagan reflexionar sobre la demostración cuando se aborda desde el terreno de la educación.

En primer lugar quisiera hacer referencia al papel que las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas tienen en la construcción de la sociedad. Ese papel nos lleva a considerar la responsabilidad de la educación matemática como parte de la educación obligatoria que toda persona recibe. Esa responsabilidad en la consecución de los objetivos generales y primarios de la educación ha de ser compartida por todas las materias y por las distintas cuestiones en cada una de ellas. Por lo tanto, considero que el papel de la demostración en geometría, o en matemáticas, no puede ser ajeno a los objetivos generales de la educación. Si en nuestras clases hablamos de 'demostración' no es para 'ayudar' o 'contribuir' o 'beneficiar' a la geometría, sino a la educación, o bien para ayudar a la geometría de modo que ésta contribuya a los fines educativos. Por todo esto, ya desde un principio me sumo a la tesis de las autoras acerca de que la demostración ha de tener como objetivo la explicación, más que la validación.

Pienso que nuestro problema más importante es cómo hacer consciente al estudiante de la necesidad de hablar de 'prueba' o 'demostración' y de los diferentes niveles de rigor. Se puede decir que es una dificultad semejante a la del aprendizaje de los primeros números, pues cuando se analiza la cuestión didácticamente (en las clases de formación de profesorado) el estudiante ya se olvidó de esa dificultad y es difícil retomarla y volver a sentirla. Pero en este caso la cuestión tiene más dificultades, porque mientras en el aspecto numérico simplemente se trata de ser consciente de la dificultad olvidada, aquí se tiene que ser consciente de la 'dificultad de probar', y además de la 'dificultad de sentir la necesidad de probar'. Podríamos decir que la mayor parte de las veces se habla de demostración antes de que el estudiante sienta la necesidad de demostrar.

Demostración - Formalismo

Como educadores matemáticos, hemos de afrontar con prudencia la idea de 'formalismo' en demostración. Aún sin ponernos a pensar qué entendemos por formalismo en un momento determinado, el hacer hincapié en la necesidad de un formalismo al hablar de demostración podría contribuir a seguir creando en la mente de nuestros estudiantes la idea de que las matemáticas son siempre ciertas e inmutables, y todo lo que se puede reducir a modelos matemáticos será cierto.

¿Por qué no tomar la demostración con más libertad? Como una construcción mental que se puede 'representar', contar, comunicar, simbolizar, pero que permita y facilite la reflexión y la discusión (para aprender).

G. Hanna (1996, PME 20) dice "... el uso de la prueba en la clase es realmente antiautoritaria", ya que muestra a los estudiantes que ellos pueden razonar por sí mismos, que no necesitan acatar la autoridad. Pero esto es cierto cuando se comprende la necesidad de 'probar'. Ahí también Hanna rechaza las ideas de los que están en contra de las demostraciones porque 'resaltan la idea de que la matemática es infalible' y 'resalta la idea de que la matemática es una ciencia *a priori*'. Pienso que los argumentos para rebatir esas concepciones son válidos cuando nos enfrentamos a demostraciones realizadas en un entorno donde se comprende la necesidad de probar, donde se comprende el sentido y las limitaciones de una demostración y cuando 'ya' se tiene formada una opinión de lo que es la matemática (con sus limitaciones y certezas). Pero las demostraciones que se presentan en la enseñanza obligatoria no son demostraciones de algo que 'mañana puede ser corregido', ni de hechos o teoremas que se han 'comprobado' antes. Además, podemos estar plenamente de acuerdo con lo que dice Hanna, lo que deberíamos añadir es que hay que tener en cuenta que esas objeciones (que Hanna rechaza) pueden parecer, ser reales, en alguna clase o en algún estudiante. Y al abordar una demostración, hacerlo con el 'temor y temblor' de que se puede estar transmitiendo un mensaje adicional (o alterado) no pretendido. Por ello es fundamental siempre, en toda la enseñanza, la existencia de diálogo, debate, comunicación, para que los 'mensajes no pretendidos' salgan a la superficie, y los errores también.

Es completamente apropiado el párrafo de Davis y Hersh que transcriben las autoras y, aunque resulten cuestiones conocidas para todos, no estaría de más que lo releyésemos siempre antes de comenzar una clase de matemáticas. Nos lleva a la subjetividad de la demostración, a la subjetividad de hacer matemáticas, pues de eso se trata en las clases, con los estudiantes, de buscar que ellos se comprometan en la tarea de hacer, de construir matemáticas, y los teoremas o resultados a los que lleguen estarán inmersos en su concepción de lo que son las matemáticas. Pienso que en ese diálogo de Davis y Hersh tenemos la mejor definición de demostración: "un raciocinio que convence a alguien que entiende del asunto", con toda su carga de subjetividad, y en la que aparecen tres palabras, raciocinio, convencer y asunto, que aluden a tres aspectos esenciales en la demostración, de cualquier modo que se aborde:

- Raciocinio: el recurso a la razón, a la reflexión, al hecho de 'argumentar' de la manera que se considere apropiada.
- Convencer: la cuestión es que una demostración se presenta a alguien, aunque sea a uno mismo; para ratificar o modificar su modo de entendimiento.
- Asunto: existe la necesidad obvia de fijar, delimitar, un terreno en el que tiene lugar la demostración.

Creo que la demostración debe tener un grado de formalización ajustado al momento. Idealmente, eso debería bastar. Por ejemplo, para 'justificar' la suma de los ángulos de un triángulo, considero más apropiado (desde el momento en que se conoce la medida de un ángulo llano) hacer recorridos 'reales' sobre el perímetro de un triángulo y observar cuánto se gira, comparándolo con la medida de los ángulos interiores. A partir de ahí, las deducciones y las generalizaciones a otros polígonos serán el resultado de una reflexión y organización adecuada del trabajo realizado.

Actividad de demostrar y demostración como producto

Si nos preocupa la educación, deberemos pensar en cada momento en cómo tener en cuenta la distinción entre la actividad de demostrar y la demostración como producto. Hemos de reflexionar a qué le damos más importancia en las clases de matemáticas, cual es el objetivo de hablar de demostración en ellas. Detrás de esto está nuestra concepción de la enseñanza de las matemáticas, nuestra concepción de la educación y nuestra concepción de la sociedad. Es un momento (me refiero al momento de hablar de una demostración particular en la clase de matemáticas) para reflexionar sobre lo que se pretende con la enseñanza de las matemáticas en ese nivel o momento determinado.

Estas cuestiones se traducen también en nuestro punto de vista sobre la manera de abordar la demostración matemática en una clase de 'didáctica de la matemática' para futuros profesores de primaria o de secundaria. La demostración de un resultado matemático o de un hecho o conjetura tiene por objeto reafirmar nuestra creencia o percepción, para eliminar la posibilidad de que el hecho sea aislado y no se repita. Pensamos que siempre existe la necesidad de justificar los hechos y para ello sólo podemos recurrir a lo que ya conocemos y dominamos (a no ser que la importancia de la necesidad de probar nos justifique el conocer más).

Distinguiendo entre producto y proceso, la cita de Lakatos es muy acertada: "..el estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura". Es una posibilidad para mostrar cómo se construye la matemática, qué problemas y dificultades se plantean y se plantearon, para sacar a la luz la 'construcción humana' de las matemáticas, su invención y arbitrariedad algunas veces, ¿no sería bueno, entonces, introducir la historia de las matemáticas en el currículum de matemáticas de una manera más formal, como un hecho fundamental?

Contribución de la Tecnología Informática a la discusión sobre demostración

¿Realmente el ordenador permite demostrar? ¿Cómo lo hace? Utilizamos el ordenador para dibujar y para escribir, ¿qué dibujamos o escribimos para que 'eso' sea una demostración? Es decir, ¿por qué los dibujos en un ordenador 'demuestran'? Creo que, puesto que estamos en un entorno educativo, podríamos decir más bien lo siguiente: el ordenador proporciona ambientes favorables para la exploración, y eso debería conducir a una demostración.

En el ordenador los dibujos parecen más convincentes que en otro tipo de demostración. ¿Cómo afecta esto a la educación? ¿Nos llega así? ¿A qué edad, a qué nivel? ¿Lo completamos con actividades sin ordenador? ¿El ordenador es un sustituto o es indispensable?

Lo que hemos de reconocer es que el empleo de algún programa de geometría dinámica no siempre será de ayuda para la demostración, si estamos mirando la demostración desde una óptica 'educativa'. Por ejemplo, la 'demostración' de que los ángulos interiores de un triángulo siempre suman lo mismo, nos la puede estropear el programa informático, pues al pedirle que nos calcule la medida de los ángulos y sume, siempre responderá 180º, por lo que puede parecer superfluo intentar ya 'otra' demostración. Sin embargo, para la localización del 'punto de Fermat' (el punto de un triángulo que minimiza la suma de distancias a los vértices) y para averiguar sus propiedades es de una gran ayuda el disponer del Cabri o del Geometer's Sketchpad.

¿Por qué la demostración en la enseñanza de la geometría?

Si hacemos referencia a los dos tipos de discurso, deductivo y natural, que menciona Duval (1998). ¿Deberíamos, en educación matemática, integrar los dos tipos de raciocinio (de discurso), utilizar un discurso argumentativo natural en las aulas de matemáticas? ¿Se puede hacer? ¿No significaría eso aceptar como demostraciones las meras comprobaciones o visualizaciones?

Aún defendiendo la necesidad del rigor y de un lenguaje apropiado a las matemáticas, éste no puede entrar en conflicto con el lenguaje natural (salvo que estemos en el terreno de la investigación universitaria), como sucede con la disyunción 'o', inclusiva o exclusiva; el 'existe uno' o 'existe sólo uno', etc. Ese lenguaje 'natural' debe recuperarse para la clase de matemáticas, construyendo una ampliación del lenguaje natural, con las palabras que se precisen y que es necesario perfilar, en el momento necesario, buscando el objetivo de incardinar la realidad matemática en la realidad cultural y social de los estudiantes.

Pienso que, ante una demostración, o ante la necesidad de confirmar o validar un hecho o conjetura, deberíamos preguntarnos: ¿es apropiada la demostración?, ¿qué tipo de demostración debo abordar?, ¿para qué quiero demostrar? Esas son las preguntas, el modo de hacer la demostración vendrá después, de modo 'natural'. La demostración es difícil, pero en el aula puede aparecer como una manera de dar razones, de explicar, de ver los fundamentos y en qué nos basamos para conjeturar y adivinar.

Estoy plenamente de acuerdo con la conclusión de Hanna (1998) acerca de que ninguna investigación confirmó que una dedicación a las demostraciones matemáticas condujera a una transferencia de capacidades para razonar en otras áreas. Las demostraciones en matemáticas, en geometría, no pueden ser "para desarrollar el conocimiento", tienen que tener como meta la materia (las matemáticas), y por lo tanto, la contribución de esta materia a la educación. El estudio de la demostración se ha de supeditar a los fines que tenemos previstos para la matemática.

¿Cómo y cuando la demostración en la enseñanza de la geometría?

Echo de menos una referencia a las diferentes fases o niveles por los que pasa la prueba o demostración. Considerando los niveles de Van Hiele, nunca llegaríamos a conseguir que los alumnos llegasen a hacer demostraciones originales, pues el nivel de 'deducción formal' se alcanza en una etapa posterior a la secundaria. Aunque no creo que sea bueno tomar una teoría al pie de la letra, ésto sí debe hacernos pensar en la dificultad de comprender una demostración y en la dificultad de comprender la necesidad de una demostración o la necesidad de su rigor.

Esto es en cierto modo lo que concluyen las autoras, Cristina y Rita, cuando afirman que "la demostración debe partir de la actividad de los alumnos". Se trata de enfrentarse a la tarea de demostrar como parte de una actividad matemática. Existe la necesidad de experimentar la demostración, no considerarla como un producto acabado.
Aquí creo que residen en gran medida las potencialidades de la tecnología informática.

Referencias

Duval, R. (1998). *"Geometry from a cognitive point of view*", en Mammana, C. & Villani, V. (eds) - *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 37 – 52. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1996) *"The ongoing value of Prof.*", en Puig, L.-Gutiérrez, A., "*Proceedings of he 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education"*. Valencia

Hanna, G. (1998). "Proof as Explanation in Geometry". *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 20, p. 4 – 13.

Nelsen, R.B. (1993) "Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking, Classroom resource materials/number 1", The Mathematical Association of America, Washington.

Metáforas corpóreas na base do conhecimento matemático. O caso do ângulo

José Manuel Matos

FCT, Universidade Nova de Lisboa

"Ângulos são espinhos de uma roseira"

James

Frequentemente todos os que se interessam pelo ensino e pela aprendizagem da Matemática confrontam-se com a pergunta "o que é *saber matemática*"? E, normalmente, a resposta é dada em termos de acções que os alunos têm de saber fazer: resolver problemas ou equações, analisar gráficos de funções, efectuar uma demonstração, etc. *Saber matemática* é operacionalizado em termos de comportamentos observáveis, processos ou produtos, que o aluno deve executar. Por vezes, a resposta é também dada em termos de outros elementos bem mais intangíveis. Os programas de Matemática aprovados em 1991, por exemplo, incluíam uma rúbrica denominada "Atitudes", sendo, no entanto, ainda hoje um tópico de discussão o de discernir se estas atitudes fazem parte do *saber matemático*.

Para além desta leitura didáctica, curricular, do saber matemático, existe uma outra prévia a esta e igualmente importante, que me interessa aprofundar neste local. Trata-se de compreender os modos como o saber matemático está mentalmente organizado, isto é, como tornamos inteligível o ramo do saber que designamos por matemática. Aparentemente, existem múltiplas respostas a esta questão. Dois exemplos extremados vêm ao de cima, a matemática é um saber mecanizado — várias análises ao estado das aprendizagens se referem ao resultado do ensino como a aprendizagem de uma colecção de rotinas —, ou a matemática é um conhecimento organizado por uma estrutura lógica.

Com este texto, pretendo contribuir para aprofundar o conhecimento do que é o saber matemático, argumentando que é possível relacionar os conceito matemático básico com intuições, a que chamarei *esquemas imagéticos*, com origem no mundo sensório-motor, que nascem de interacções corpóreas primordiais com o meio envolvente. E é a partir destes esquemas que são construídos os conceitos matemáticos parte através do desenvolvimento de interpretações intersubjectivamente partilhadas, parte através de novas intuições, novos esquemas imagéticos, ou construções mentais mais complexas a partir destes.

O ponto de partida para esta reflexão vai ser o conceito de ângulo. Trata-se de um conceito matemático simultaneamente elementar e complexo, e, acredito, suficientemente rico para permitir aprofundar alguns aspectos importantes.

Investigando ângulos

O que é um ângulo? Ângulos parecem ser um objecto geométrico complexo. Uma revisão de ângulos na história da Matemática (Matos, 1990/91) revelou, na matemática contemporânea, um leque variado de definições de ângulo não-isomorfas, de par com um desacordo em relação a pontos básicos, nomeadamente, saber se um radiano é uma unidade de medida. Ângulos são igualmente um objecto matemático com variantes, onde alguns tipos específicos, como o ângulo de contingência, foram esquecidos pela matemática contemporânea. Algumas investigações sobre a aprendizagem deste conceito também revelou que os alunos apresentam distintas concepções de ângulo (Close, 1981; Mitchelmore, 1998).

Se o panorama geral do conceito de ângulo parecia garantir o interesse no seu estudo em contexto escolar, restava o problema de escolher um paradigma adequado. Decidi estudar os ângulos como uma “coisa no mundo”, segundo a perspectiva que a psicologia e a linguística, a segunda mais do que a primeira, têm usado para estudar os usos que grupos de indivíduos atribuem a palavras específicas e relacioná-los com hipotéticas estruturas mentais associadas a estes usos. A perspectiva de pensamento corpóreo que vem sido proposta por George Lakoff e por Mark Johnson surgiu aqui como um paradigma adequado. Os ângulos poderiam ser assim entendidos como algo a que uma cultura (a escolar ou a matemática) atribuem significados e que integra as suas práticas linguísticas comuns. Entendida deste modo, seria possível entender os modos como a micro-cultura da aula de Matemática integra uma nova categoria, a categoria *ângulos* no seu património. Eventualmente, seria interessante estabelecer uma relação entre a origem dos conceitos de matemática em contexto escolar e a origem dos conceitos provenientes da matemática formal, consensualmente associados aos usos e costumes dos matemáticos profissionais. O primeiro objectivo deste trabalho será, pois, caracterizar a estrutura conceptual do conceito de ângulo.

Este objectivo, no entanto, não me pareceu suficiente. Saber matemática não é apenas um conhecimento da estrutura de uma categoria — no caso vertente, conhecer os diversos tipos de ângulo, ou as suas componentes. Aprender matemática requer igualmente a capacidade de produção de um tipo de conhecimento elaborado, generalizado. Por exemplo, no caso dos ângulos é necessário relacionar propriedades de diversos tipos de ângulo ou utilizar o conceito de ângulo para estabelecer propriedades geométricas mais gerais. Para estudar este aspecto recorri à teoria de van Hiele, que permite caracterizar bastante bem os diferentes graus de complexidade presentes nas aprendizagens da geometria. Um segundo objectivo deste trabalho foi assim o de estudar a complexidade assumida por alguns aspectos do pensamento geométrico.

A parte empírica deste trabalho foi realizada com alunos e professores de quatro turmas, duas do 4º ano e duas do 5º de uma escola dos Estados Unidos durante o ano de 1988. Diversos professores dessa escola estavam envolvidos com um projecto de desenvolvimento curricular para o ensino da geometria desde o pré-primário até ao 6º ano levado a cabo pela University of Georgia e no qual participei. Durante o ano escolar observei todas as aulas das quatro turmas estudadas em que os ângulos foram trabalhados ou, em particular nas turmas do 5º ano, as aulas nas quais foram aprofundados conceitos que estavam relacionados com ângulos, nomeadamente propriedades de figuras geométricas que os envolviam. Foram realizados testes a todos os alunos dessas turmas e entrevistas semi-estruturadas a 16 desses alunos[1].

Este texto compõe-se de duas partes. Na primeira resumirei os pontos essenciais de um dos paradigmas utilizados neste trabalho. Numa segunda responderei ao primeiro objectivo e caracterizarei a categoria de ângulos, tal como ela existia para os participantes no estudo. O modo como esta categoria se foi complexificando à medida que decorria o processo de ensino, bem como uma problematização das consequências dos resultados deste trabalho em diversos aspectos da investigação em Educação Matemática serão abordados noutros trabalhos.

---

[1]Detalhes podem ser encontrados em Matos (1999).

A natureza corpórea do pensamento

"A mente é inerentemente corpórea. O pensamento é sobretudo inconsciente. Os conceitos abstractos são, em grande medida, metafóricos" (Lakoff e Johnson, 1999, p. 3).

É deste modo que George Lakoff e Mark Johnson resumem no seu último trabalho as três descobertas da ciência cognitiva que, segundo eles, alteram radicalmente os modos como entendemos o pensamento racional, com consequências fundamentais para todas as áreas do conhecimento que se preocupam com a racionalidade. Desde há vinte anos, com a produção do seu primeiro trabalho conjunto (*Metaphors we live by*, 1980), chamando a atenção para importância dos aspectos metafóricos na racionalidade, que estes dois autores têm vindo elaborar o campo que se veio a denominar de *cognição corpórea*[2]. Alguns anos mais tarde produzem dois outros trabalhos, que desenvolvem as suas perspectivas em áreas paralelas: Mark Johnson, filósofo de formação, escreve *The body in the mind* (1987) no qual é aprofundado o papel desempenhado pela corporalidade no estabelecimento de significados, na imaginação e na razão; George Lakoff, linguista de raiz, produz o livro *Women, fire, and dangerous things* (1987) efectuando uma síntese notável da investigação linguística, psicológica e antropológica sobre os modos de classificação. Estes trabalhos, e outros que entretanto os completaram, suscitaram uma corrente de investigações, cujas implicações filosóficas são aprofundadas no seu último trabalho conjunto, *Philosophy in the flesh. The embodied mind and its challenge to Western thought* (1999).

Esta nova perspectiva tem uma das suas origens em trabalhos desenvolvidos por Eleanor Rosch que estudou as formas como classificamos objectos comuns[3]. Em vez de estudar os modos humanos de classificação usando categorias que ela denominou de *clássicas* (por exemplo, o "triângulo vermelho"), procurou-se estudar os modos como são usadas *categorias naturais*, isto é, conceitos designados por palavras em línguas naturais. A investigação destas últimas categorias mostrou, por exemplo, que são contínuas e não discretas, pois não são necessariamente compostas de combinações de atributos mais

---

[2]*Embodied cognition*, na sua denominação anglo-saxónica.

[3]Excelentes revisões do conjunto do trabalho de Rosch sobre a categorização podem ser encontradas em Gardner (1985) e em Lakoff (1987).

simples, e que alguns dos seus elementos são considerados melhores representantes da categoria do que outros. Um exemplo bem estudado foi a categoria de aves (não a que resulta de uma classificação zoológica, mas a que é utilizada na linguagem comum). As investigações realizadas mostraram que as pessoas têm ideias fortes sobre o que é um membro típico desta classe e sobre o grau em que um determinado animal é ou não uma ave. Por exemplo, um melro é uma ave típica, um *protótipo* de ave, mas a galinha ou a avestruz não. Investigações sobre múltiplas categorias revelou a existência de efeitos prototípicos em praticamente todas elas, mesmo naquelas em que as pessoas investigadas estavam dispostas a aceitar a existência de condições necessárias e suficientes de pertença, como é o caso dos números pares ou ímpares (7 é um número ímpar típico).

Eleanor Rosch chamou a atenção para outros aspectos da estrutura da categorização. Referindo-se a diversas investigações que estudaram os modos como certas culturas categorizam categorias comuns, usuais, da sua experiência, propôs o conceito de *nível básico*, o nível de classificação no qual mais facilmente aprendemos, recordamos ou memorizamos nomes (Mervis e Rosch, 1981). No campo “mobília”, o nível básico é representado por “cadeira”, “mesa”, “cama”, etc. O nível *super-ordenado* será “mobília” ou “móveis” e o *sub-ordenado* por “cadeira de baloiço”, por exemplo.

As categorias de nível básico diferenciáveis das categorias super-ordenadas por aspectos que se relacionam com os nossos corpos, cérebros e mentes, nomeadamente, através de imagens mentais, da percepção gestáltica, de programas motores e da estrutura de conhecimento. O nível básico é caracterizado pelo menos por quatro condições:

1. É o nível mais alto no qual uma única imagem mental pode representar toda a categoria. Pode-se ter uma imagem de uma cadeira, mesas, camas, mas não de mobília.
2. É o nível mais alto no qual os membros da categoria têm formas globais perceptualmente semelhantes. Reconhece-se um carro ou cadeira pela sua forma em geral, mas não há forma geral para mobília ou veículo.
3. É o nível mais alto no qual uma pessoa usa acções motoras semelhantes para interagir com membros da categoria. Temos programas motores para interagir com cadeiras, mas não com mobília.

> 4. É o nível no qual a maior parte do nosso conhecimento está organizado. Basta notar que sabemos mais sobre carros do que sobre veículos, e sabemos muito menos sobre categorias subordinadas, a não ser que sejamos um perito.

Isso explica que este nível seja nomeado e compreendido mais rapidamente pelas crianças, que entre mais cedo na linguagem, tenha os fonemas primários mais curtos e seja identificado mais facilmente. Este nível também tende a ser usado em contextos em que não há uma indicação explícita de qual o nível mais apropriado.

Como conclusão do conjunto dos seus trabalhos, Rosch questionou a visão clássica da categorização que afirma que os modos pelos quais classificamos são arbitrários, e as categorias definidas por condições necessárias e suficientes, possuindo assim estruturas homogéneas com fronteiras bem definidas. Propôs, pelo contrário, que as categorias no mundo real têm uma estrutura bem mais complexa com fronteiras difusas e tendem a interpenetrar-se[4]. Diversos autores propuseram explicações para estes resultados e o contraste entre elas pode ser analisado em Smith e Medin (1981) e, especialmente, em Lakoff (1987). Pela sua relevância para o objecto deste texto, centrar-me-ei apenas nas propostas de Lakoff e de Johnson para esta problemática.

Recordemos as três proposições que iniciaram esta secção, pois elas condensam a explicação que Lakoff e Johnson vão propôr para os efeitos prototípicos e de nível básico detectados nos estudos sobre categorização. Com elas, os dois autores querem sublinhar a sua convicção de que a razão não é imaterial, sem relação com o corpo, mas provem da natureza dos nossos cérebros, dos nossos corpos e da nossa experiência corporal. A razão não é "universal" no sentido em que não é parte da estrutura do universo. É universal, no entanto, enquanto capacidade partilhada universalmente por todos os seres humanos. A razão não é completamente consciente, mas principalmente inconsciente. Não é puramente literal, mas sobretudo metafórica e imaginativa. A razão não é desapaixonada, mas emocionalmente comprometida (1999).

Segundo os dois autores, os nossos conceitos estão estruturados internamente e uns em relação com os outros porque existem, e são compreendidas, experiências corporais pré-conceptuais. Existem dois tipos de estrutura pré-conceptual: uma estrutura de nível básico e

---

[4]Um aprofundamento das consequências da distinção entre estes dois tipos de categorias pode ser encontrada em Matos (1991).

uma estrutura cinestésica imagético-esquemática (que iremos designar seguidamente por modelos imagético esquemáticos). Depois os conceitos abstractos e o raciocínio abstracto são baseados na experiência corpórea através de projecções metafóricas do físico para o abstracto e pela projecção de categorias de nível básico em categorias subordinadas e superordinadas.

Propõem eles que organizamos o nosso conhecimento através de estruturas que vão denominar de *modelos cognitivos idealizados*:

> Os seres humanos compreendem o seu mundo através de modelos cognitivos idealizados para os tipos de entidades, eventos e situações que encontram na experiência diária. Estudos empíricos recentes em semântica do léxico mostraram que as palavras não correspondem directamente a estados de coisas no mundo, mas são antes definidas pelo seu papel em modelos idealizados de situações, que são estruturas holísticas denominadas "enquadramentos". As palavras adquirem significado através do papel que desempenham em enquadramentos. Um campo semântico de palavras é um grupo de palavras definido em relação a diferentes papéis num único enquadramento (por exemplo, "comprar", "vender", "bens", "preço" são definidas em relação a um acontecimento comercial geral, para o qual temos um enquadramento "troca comercial"). Uma única situação no mundo pode ser enquadrada de modos diferentes, e muitas vezes mutuamente inconsistentes. Quando os enquadramentos têm uma estrutura que se desenrola no tempo, são chamados "cenários" ou "guiões". E quando eles caracterizam a nossa compreensão comum de como algo funciona no mundo, são chamadas "teorias comuns". (…) Os enquadramentos são *imaginativos*, não apenas porque são modelos idealizados que não existem objectivamente "no mundo", mas também porque são definidos parcialmente por esquemas imagéticos e metáforas experienciais (Johnson, 1997, p. 155, ênfases no original)[5].

O conceito de *guião* tinha sido antes avançado por Roger Schank e Robert Abelson que os definiram como sequências coerentes de acontecimentos esperados pelo indivíduo, e que o envolvem, quer como participante, quer como observador.

---

[5]Foram efectuadas as seguintes opções: *states of affairs* foi traduzido por estados de coisas, *frames* por enquadramentos, *scripts* por guiões e *folk theories* por teorias comuns.

Cada modelo cognitivo idealizado é um todo complexo estruturado, um gestalt que estrutura um espaço mental e Lakoff caracterizou quatro tipos destes modelos: imagético-esquemáticos, metafóricos, metonímicos e proposicionais.

Os *modelos imagético-esquemáticos*, e que denominarei *esquemas* daqui por diante, já foram referidos atrás e são estruturas experienciais básicas, primitivas, pré-conceptuais, que são uma consequência da natureza das capacidades biológicas humanas e da experiência de funcionar num ambiente físico e social. Existem envolvendo todos os nossos modos perceptuais (visual, táctil, olfativo, auditivo, etc.) e não são apenas estruturas fixas ou imagens, mas antes padrões dinâmicos das nossas interacções em vários ambientes.

Um exemplo destes esquemas, proposto por Johnson (1987), está relacionado com as nossas experiências corporais básicas de contenção ou delimitação física, e que se designa pelo *esquema do contentor*. Tomamos como um dado adquirido que o nosso corpo é um contentor tri-dimensional para dentro do qual introduzimos coisas (comida, água, ar) e para fora do qual outras coisas saem (desperdícios, sangue, ar). Conhecemos não só esta vivência interna, como também existem na nossa vida outras experiências de contenção envolvendo delimitações físicas: entramos e saímos de casas, quartos, carros, manipulamos objectos colocando-os dentro e fora de contentores, etc. Em cada um destes casos existem organizações espaciais e temporais repetíveis, isto é, são típicos esquemas de contenção física. Estas experiências constituem a base da dualidade *dentro*/*fora*.

Mas qual a importância cognitiva de modelos como o do contentor, que os faz passar para além de uma experiência preceptiva básica? Johnson e Lakoff argumentam que eles constituem a base da racionalidade, estruturando e organizando as nossas experiências e a compreensão, especialmente através de um mecanismo cognitivo, a projecção metafórica. Posto de outro modo, propõem, tal como afirmei no início desta secção, que o "conhecimento abstracto é essencialmente metafórico". Afirmações como "isso não cabe no meu argumento", "deita cá para fora os teus problemas", ou "o seu pensamento saiu e vagueou pelo espaço" usam metáforas relacionadas com o esquema do contentor. A primeira usa a metáfora de que *as teorias são contentores*, as duas outras a metáfora de que *a mente é um contentor*. Estes são, pois, exemplos de um segundo tipo de modelo cognitivo idealizado, os modelos metafóricos, que são aplicações de um modelo num domínio noutro domínio. O uso da metáfora *as teorias são contentores*, relaciona o domínio das nossas experiências pré-conceptuais de contenção (o esquema do contentor) com um outro domínio abstracto, o do agrupamento de ideias em todos que denominamos teorias. Esta metáfora, por exemplo, permite-nos falar das “limitações”, “restrições”, “alargamentos”, “grau de abertura”, “solidez”, etc. em relação a sistemas conceptuais. Ainda está bem presente a metáfora “F. é gelatina política” que atingiu os seus fins precisamente através do uso do modelo metafórico *uma ideologia política é um corpo sólido*, baseado, em última análise, no esquema do contentor.

Os dois últimos tipos de modelos cognitivos idealizados têm menos importância para este texto e serão apenas brevemente mencionados. Um é constituído pelos *modelos metonímicos*, nos quais uma parte de um modelo, ou um seu aspecto, é tomada como representando a sua totalidade. Um exemplo é a frase *Lisboa ajuda Timor*, onde Lisboa é tomada para representar a totalidade do país. O último tipo de modelo cognitivo é constituído pelos modelos proposicionais, que se aproximam das descrições características das categorias clássicas, especificando os seus elementos, as suas propriedades, e as relações entre eles.

Estes modelos cognitivos idealizados são semelhantes aos “esquemas” propostos por David Rumelhart — estruturas de dados para representar os conceitos genéricos armazenados na memória —, ou aos “modelos culturais” ou “representações sociais” propostas por Roy D’Andrade e Serge Moscovici, respectivamente — esquemas cognitivos intersubjectivamente partilhados por um grupo social. São, no entanto, mais abrangentes, pois conseguem explicar os efeitos prototípicos, bem como tomar em conta os efeitos de nível básico.

Esta perspectiva propõe que *compreender* não é apenas uma reflexão utilizando proposições finitas sobre uma experiência pré-existente e já determinada. Compreender é, antes, a forma pela qual temos *um mundo*, a forma como experienciamos o nosso mundo como uma realidade global. Ela rejeita, pois, a noção de que a compreensão seja fundamentalmente um processo lógico ou computacional, e igualmente a ideia de que seja apenas a conformação a uma norma social independente de uma realidade material.

A estrutura da categoria "ângulos"

Como vimos, existem dois tipos de estrutura pré-conceptual: uma estrutura de nível básico e uma estrutura baseada em esquemas. Iniciarei a caracterização da estrutura da categoria "ângulos" precisamente por estes dois aspectos e continuá-la-ei com a apresentação das suas projecções metafóricas.

O nível básico da categoria de ângulos

Tal como o nível básico de outras categorias, o nível básico de ângulos revelou-se composto por entidades com uma forma semelhante para as quais é possível formar uma imagem mental ou então para as quais é possível encontrar um padrão recorrente de acções motoras. Estão neste caso representações de ângulos rectos, agudos, obtusos, as meias voltas e as voltas inteiras. Raramente os alunos efectuaram representações de outros ângulos. Estas entidades do nível básico estavam associadas a ricas imagens mentais, nas quais, em geral, existia um lado horizontal ou vertical, ou, nalguns casos, tendo uma linha horizontal ou vertical de simetria. Os alunos preferiam ângulos convexos a côncavos e configurações com lados curvos eram reconhecidas como fazendo parte da categoria, desde que não parecesse que tinham amplitudes superiores a um ângulo recto.

Neste nível básico os ângulos *eram* as suas representações e assim era comum haver referências a ângulos "pequenos", isto é, cujo desenho era minúsculo, ou a ângulos "magros" ou "gordos" consoante o desenho ou o contexto o sugerisse.

As representações de ângulos agudos, normalmente entre 30° e 60°, e ângulos rectos, bem como as meias voltas e as voltas inteiras eram centrais neste nível básico, isto é, quando os alunos, ou os professores, se estavam a referir a ângulos em geral, eram imagens (desenhos, acções) associadas a estes ângulos que surgiam. Existiam assim uma projecção metonímica destes tipos de ângulos sobre a totalidade da categoria, o que produzia efeitos prototípicos: os ângulos obtusos, os ângulos entre 180° e 360°, e as voltas diferentes das mencionadas eram periféricos e não eram considerados tão bons exemplos da categoria de ângulos.

Os esquemas relacionados com a categoria de ângulos

A estrutura da categoria "ângulos" está representada na figura 1. A melhor forma de ler o diagrama é começar da direita para a esquerda. Na coluna mais à direita listam-se sete tipos de ângulos que podemos encontrar na matemática escolar. Tratam-se de entidades definidas explícita ou implicitamente de modos distintos. Por exemplo, o ângulo como *porção de plano* foi usado em Portugal desde a reforma da Matemática Moderna. O ângulo entendido como uma *rotação intrínseca* estava incorporado na geometria da tartaruga possibilitada pela linguagem Logo. A identificação destes tipos de ângulos foi efectuada através de uma investigação histórica e curricular (Matos, 1990/91) e inclui a *rotação externa contínua*, o *declive* e o *ângulo trigonométrico* que não fazem parte do currículo dos alunos do 5º e 6º ano. Foi detectado nesta investigação que os quatro primeiros tipos de ângulo estão associados a diversos modelos cognitivos, eles próprios provenientes de projecções metafóricas.

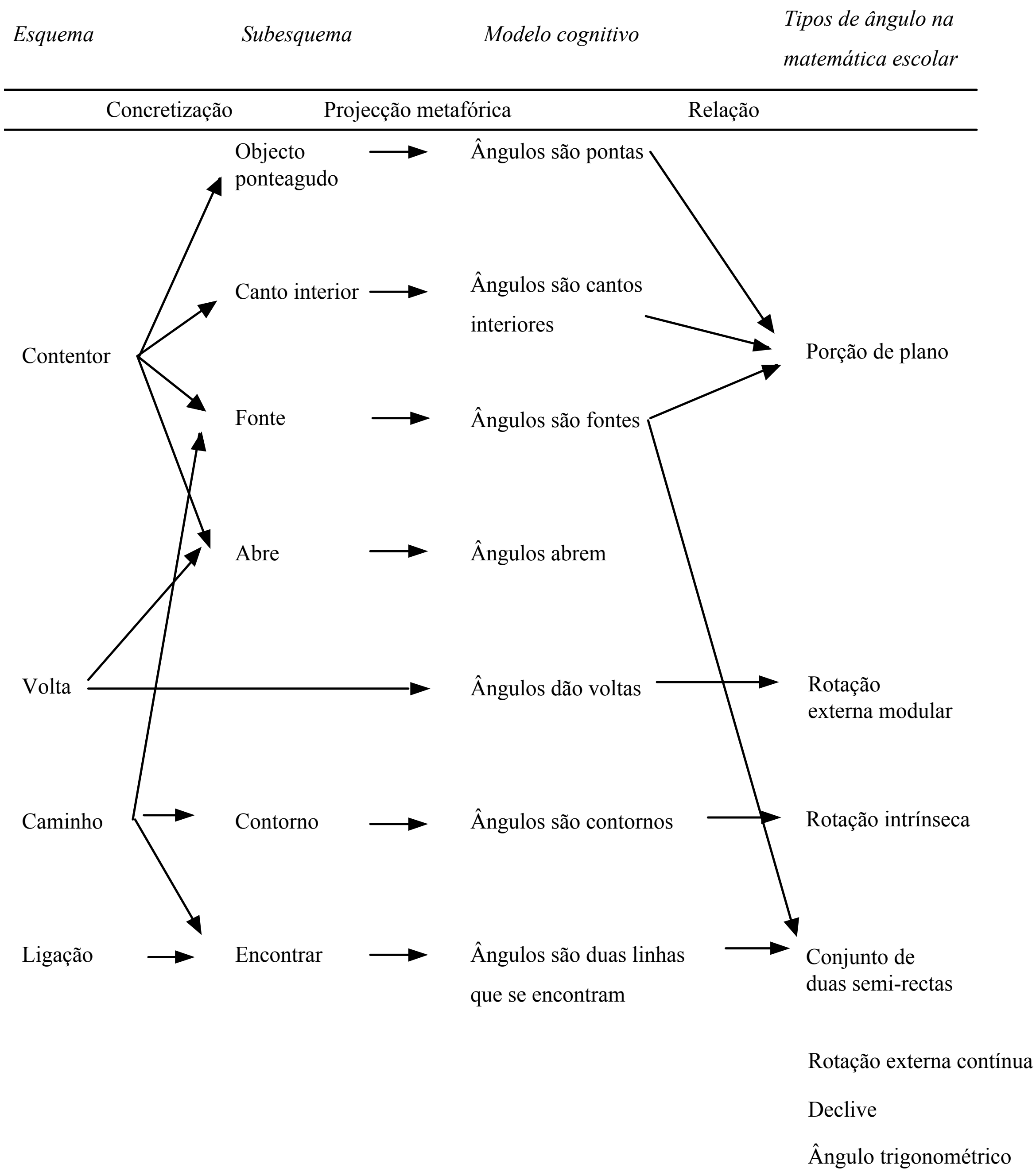


Figura 1: Estrutura da categoria "ângulos".

A segunda coluna a contar da direita descreve os sete modelos cognitivos associados a ângulos identificados a partir das entrevistas aos alunos. Todos estes modelos são metáforas (modelos metafóricos) construídas a partir de esquemas.

Finalmente, na coluna da esquerda do diagrama da figura 1 encontram-se quatro esquemas que constituem uma estrutura pré-conceptual relacionada com a categoria de ângulos: o do *contentor*, o da *volta*, o do *caminho* e o da *ligação*. Todos eles influenciam os modos como compreendemos domínios muito distintos e muito distantes do dos ângulos, ou sequer da matemática, tendo sido a maior parte deles analisada por Johnson (1987). A segunda coluna a contar da esquerda identifica seis subesquemas relacionados com estes quatro esquemas desta vez já tendo uma relação directa com os modelos cognitivos da terceira coluna.

Não discutirei em pormenor todos os elementos do quadro[6]. Apenas ilustrarei tal discussão com um exemplo. Já mencionei anteriormente o *esquema do contentor* relacionado com experiências físicas de contenção, isto é, de estar dentro de algo. Este esquema tem uma estrutura que é dada pelos seguintes elementos: a *fronteira*, o *interior* e o *exterior*. A fronteira separa o interior do exterior. É uma estrutura holística, isto é, apenas possível de ser compreendida na sua totalidade, porque as partes não fazem sentido sem o todo. Foram detectados quatro subesquemas deste esquema relacionados com a categoria de ângulos: o *objecto ponteagudo*, o *canto interior*, a *fonte* e o *abre*. O primeiro subesquema relaciona-se com experiências com contentores específicos percepcionados do exterior, no segundo os contentores são percepcionados do interior, no caso do terceiro o contentor projecta algo para o exterior, e no último existe uma mudança de estado através da qual o interior se torna acessível ao exterior. Por exemplo, experiências com contentores a partir do interior contribuem para o modelo *ângulos são cantos interiores*, e as do exterior revelam-se em diversos modelos e esquemas. Neste caso os contentores possuem atributos específicos, por exemplo partes salientes (no caso do modelo *ângulos são pontas*), são a origem que difunde substâncias (o modelo *ângulos são fontes*), ou abrem-se ou fecham-se (o modelo *ângulos abrem*). Cada um destes modelos assenta numa projecção metafórica de um subesquema particular do esquema do contentor adaptado às idiossincrasias do contentor em questão ou às transformações que o contentor suporta. Denominei cada um destes subesquemas como: *objecto ponteagudo*, *canto interior*, *fonte*, e *abre*.

---

[6]O leitor interessado pode aprofundar o tema em Matos (1999).

Um exemplo de uma projecção metafórica

Analiso seguidamente a projecção metafórica *ângulos abrem*. Diversos alunos fizeram afirmações que se enquadram neste modelo:

> "ângulos abrem";
> "abertura de um ângulo";
> "ângulos abrem como uma porta";
> estes ângulos são diferentes porque "abrem de maneira diferente".

Por vezes existiu mesmo uma argumentação mais elaborada. Bob, por exemplo, desenhou um ângulo recto e um ângulo obtuso e explicou as semelhanças entre os dois:

> Ambos começam num ponto, está a ver? Abrem no mesmo ponto [indica o segmento horizontal em cada ângulo]. Ambos começam aqui. Um deles [o recto] vai para aqui. Um deles [o obtuso] abre um bocadinho mais aqui.

Marie também usou este modelo, mas de outro modo, revelando uma outra forma pela qual os ângulos podem abrir. Com as mão ela faz o seguinte gesto (figura 2):

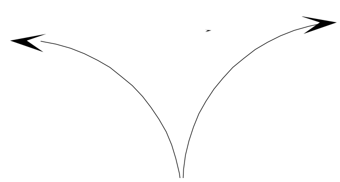


Figura 2: Gesto de Marie exprimindo a forma como um ângulo abre

O subesquema *abre*, está pois relacionado com o esquema *contentor*. Um estádio inicial (estádio 1) em que o contentor está "fechado", isto é, em que não existe comunicação entre o "interior" e o "exterior", passa-se a um estádio 2 em que esse contacto é estabelecido.

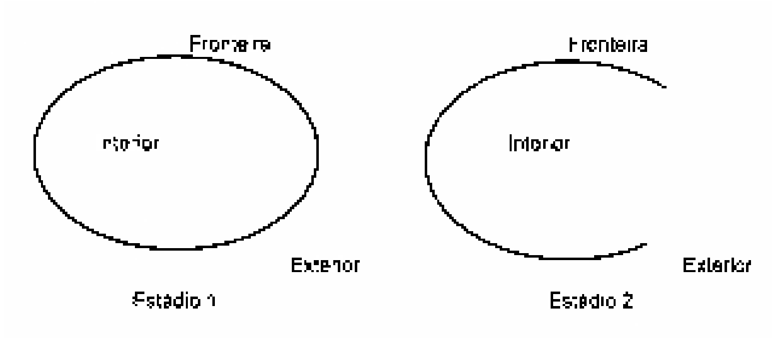


Figura 3: Os dois estádios sofridos por contentores que *abrem*

Esta modificação permite a projecção metafórica do modelo *ângulos abrem* sobre o subesquema *abre*. O quadro 1 sistematiza esta projecção metafórica conectando os elementos e as relações presentes no subesquema *abre* com os do modelo cognitivo *ângulos abrem*.

Quadro 1. Projecção metafórica do subesquema *abre*
sobre o modelo cognitivo *ângulos abrem*

subesquema *abre*	modelo *ângulos abrem*
contentor	ângulo
transformação (estádio 1 para estádio 2)	abrir
transformação (estádio 1 para estádio 2)	abrir
transformação (estádio 1 para estádio 2)	abrir
transformação pequena	abre um bocadinho
grau de abertura	abertura do ângulo
grau de abertura	ângulos abrem o mesmo comprimento
grau de abertura	ângulos abrem um bocadinho
Relações	
uma parte da fronteira muda de posição	um lado do ângulo roda

Conclusão

Recordo a frase com que iniciei este texto: “ângulos são espinhos de uma roseira”, declaração quase poética de James, aluno do 4º ano. É o paradigma desenvolvido por Lakoff e por Johnson que nos permite clarificar a estrutura da categoria “ângulos”, fazendo-nos compreender as origens e a justeza de afirmações como aquela. James estava a efectuar uma projecção metafórica entre o subesquema *objecto ponteagudo* e o modelo *ângulos são pontas*. Essa projecção permitia-lhe entender uma nova entidade, o ângulo, integrando-a na sua experiência conceptual e social anterior, neste caso, com objectos ponteagudos.

Deste trabalho ressalta essencialmente a estrutura da categoria “ângulo”, mostrando como ela possui um nível básico com ricas imagens mentais, como ela está baseada em modelos imagético-esquemáticos produzidos pela nossa interacção com diversos tipos de ambiente, e como ela é composta por (pelo menos) sete modelos cognitivos diferentes, todos eles projecções metafóricas de modelos imagético-esquemáticos. A ligação destes modelos cognitivos aos diferentes tipos de ângulo em uso na matemática escolar deixa antever a viabilidade de estabelecer uma ligação entre os conceitos matemáticos mais abstractos e experiências corpóreas humanas mais básicas.

Referências

Close, G. (1981). *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer stage.* master's thesis não publicada, Polytechnic of the South Bank, Londres.

Gardner, H. (1985). *The mind's new science. A history of the cognitive revolution*. Nova Iorque: Basic Books.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind. The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago: University of Chicago Press.

Johnson, M. (1997). Embodied meaning and cognitive science. Em D. M. Levin (Ed.), *Language beyond postmodernism. Saying and thinking in Gendlin's philosophy* (pp. 148-175). Evanston, Illinois: Northwestern University Press.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things. What categories reveal about the mind*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., e Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., e Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh. The embodied mind and its challenge to Western thought*. Nova Iorque: Basic Books.

Matos, J. M. (1990/91). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator, 1*, 4-11 e *2*, 18-25.

Matos, J. M. (1991). Após o objectivismo que mudanças para a Educação Matemática. In E. Veloso (Ed.), *ProfMat 91: Actas* (Vol. Vol. II, pp. 153-173). Lisboa: APM.

Matos, J. M. (1992). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. *Quadrante, Revista Teórica e de Investigação*, *1*, 93-112.

Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle.* Tese de doutoramento não publicada, University of Georgia, Athens.

Mervis, C. B., & Rosch, E. (1981). Categorization of natural objects. *Annual Review of Psychology*, *32*, 89-115.

Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, *16*, 265-284.

Ponte, J. P., Matos, J. M., e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Smith, E. E., e Medin, D. L. (1981). *Categories and concepts*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Rosch, E. (1973). Natural categories. *Cognitive Psychology*, *4*, 328-350.

Visualização, veículo para a educação em geometria

Conceição Costa
Escola Superior de Educação de Coimbra

Este documento deverá ser entendido como um conjunto de notas para reflexão que, embora extensas, não ambicionam de modo algum fazer uma cobertura exaustiva das questões levantadas. O artigo quer dar relevo a determinados aspectos que me parecem cruciais para a compreensão de uma educação em geometria: o poder da visualização no ensino e na aprendizagem da geometria, os diferentes significados e mecanismos relacionados com o termo "visualização", bem como as várias perspectivas existentes para abordar uma educação em geometria.

Fundamentos de um currículo em geometria

O que é a Geometria? O que há de essencial na Geometria? Quais as perspectivas sobre a educação em Geometria? Freudenthal (1973) diz-nos que questões como *o que é a geometria?* podem ser respondidas a diferentes níveis: no nível mais elevado, a geometria é uma certa parte da matemática de certo modo axiomaticamente organizada. A nível mais baixo a geometria é essencialmente compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor. Ainda insiste na importância de que a matemática quando vai ser aprendida, deveria estar intimamente ligada à realidade. “A geometria só pode ser cheia de significado se se explora a relação da geometria com o espaço experimentado”. Assim a geometria: - presta-se, à aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também “com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes”; - tem ainda a capacidade para fazer as crianças sentir a partir da necessidade lógica das suas conclusões, “a força do espírito humano, ou seja do seu próprio espírito”.

Alsina (1999, p. 65) relativamente à geometria no currículo da matemática diz:

> Não servem nem os elementos de Euclides, nem os tratados de Bourbaki, nem os livros sábios de geometria métrica, nem os mais sofisticados livros de álgebra linear. O silêncio e o esquecimento menos servem. Fazer geometria na sala de aula não é repetir a história. A geometria no ensino da matemática deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir , construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; aberta à interdisciplinariedade com as ciências e as artes; paradigma da modelização matemática; predicadora de aplicações assombrosas e relações interessantes (…) esta é a geometria com a qual nos gostaríamos de educar todos.

Malkevitch (1991) pormenoriza o significado da palavra *geometria*, dizendo que esta tem diferentes significados conforme as audiências, incluindo mesmo para subgrupos da própria comunidade matemática. Para gente leiga, a geometria é o estudo do espaço e das formas do mundo que os rodeia, e os seus conhecimentos de geometria resumem-se a material simples para classificação de formas e a uma exposição a uma geometria pseudo-axiomática, no ensino secundário.

Mais recentemente tem havido um movimento crescente procurando uma abordagem "indutiva" da geometria apoiada em parte pelo desenvolvimento de software, tal como "Geometric supposer". Esta abordagem contudo, está quase exclusivamente ligada às propriedades métricas de triângulos, quadriláteros e círculos. Para alguns, dentro da comunidade matemática, a geometria refere-se às porções da matemática que tratam da estrutura matemática do espaço, e por isso envolvem uma grande variedade de ferramentas matemáticas tais como a "teoria de operadores", as "equações diferenciais parciais" e os grupos de Lie. Outros, referem-se a geometria diferencial e a topologia de vários campos. Ainda outros pensam a geometria como um corpo de ideias que trata com estruturas geométricas discretas. Schell (1998) aponta que há muitos fios que constituem o currículo designado por geometria. Sob a égide de "geometria" podemos apontar tanto para matemáticas aplicadas como para matemáticas teóricas e podemos utilizar tanto a intuição como a axiomática. Contudo é esta grande versatilidade, tão fascinante para os matemáticos, que parece desorientar os estudantes na aprendizagem da geometria, bem como as tentativas para a ensinar, por parte dos professores. Esses tais fios não estão separados, mas interlaçam-se. Quando todos aqueles fios estão desenvolvidos, os estudantes têm um esquema denominado "geometria" fortemente tecido e os diferentes elementos podem informar-se entre si; quando qualquer dos fios falta, a estrutura não é tão estável. Estes fios incluem a visualização espacial, raciocínio dedutivo e medição, mas não se limitam a eles. Diferentes visões sobre a educação matemática perspectivam-nos também diferentes educações em geometria.

Perspectivas em educação em geometria

A educação em geometria, tal como a filosofia de educação matemática, depende de muitos factores, e pode variar de aprendizagens de geometria bem estabelecidas, tais como a euclidiana, a mais modernas geometrias de transformação ou ao desenvolvimento das próprias ideias geométricas dos alunos.

A educação em geometria pode ser abordada, diz Gravemeijer (1998), construindo o conhecimento informal dos estudantes em torno dos aspectos geométricos de situações realistas[1]. Esse conhecimento informal além de ser a base para a educação em geometria e raciocínio espacial, pode ser explicado e construído dentro da estrutura da teoria de ensino de domínio-específico da Educação Matemática Realista (EMR), abordagem desenvolvida na Holanda[2]. As características chave em EMR são: a reinvenção através da matematização progressiva, a análise fenomenológica didáctica e o uso de modelos emergentes. O princípio da reinvenção exige que seja dada ao estudante, oportunidade para reinventar a matemática, assim, quem desenvolve tal currículo, actuará como um explorador, iniciando um caminho de tarefas educativas, ao longo dos quais o processo reinvenção pode prosseguir. Gravemeijer (1998) aponta que, para facilitar o processo de reinvenção, precisamos de desenvolver problemas contextuais[3] que tomam em consideração uma grande variedade de

[1] O termo realista, refere-se à realidade, não a situações do dia a dia. Realidade nesta visão, refere-se a um conceito subjectivo: é o total de experiências e imaginação de uma pessoa. Assim, um conto de fadas pode ser realista para alguém, enquanto para esta mesma pessoa muitas situações do dia a dia não são nada realistas (Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, 1996).

[2] Desde os fins dos anos 60 e princípios dos anos 70 que este tipo de educação matemática foi desenvolvido em vários países do mundo, Hershkowitz, Parzysz, e Dormolen, (1996)

[3] Situações problemáticas do dia a dia podem evocar paradigmas de resolução de problemas, a história da

processos de solução, de preferência aqueles que indicam um caminho possível de aprendizagem da matematização progressiva. A “matematização” é uma ideia chave que assume duas vertentes: i) a formação de conceitos a partir de explorações de situações e problemas de realidade (matematização horizontal), e ii) a formalização dos aspectos matemáticos envolvidos nas situações (matematização vertical). A abordagem realista procura ter em conta esta duas vertentes, Ponte, Matos e Abrantes (1998). A matematização progressiva é uma actividade humana na qual *matematizar* é vista como um processo de organização pelo qual os elementos de um contexto são transformados em objectos matemáticos e em relações entre eles, e por isso, é consistente com a filosofia de matemática de Freudenthal. A “análise fenomenologia didáctica” é uma característica de EMR que propõe a investigação de situações onde um dado tópico matemático é aplicado, para revelar, não só o tipo de aplicações (conhecimentos) que têm de ser antecipadas no ensino, como também considerar a conveniência de tais aplicações como pontos de partida para a matematização progressiva. O terceiro princípio em EMR envolvendo “modelos emergentes”, diz respeito ao papel que estes modelos jogam como ponte entre o conhecimento informal dos estudantes e a matemática formal. Estes modelos podem ser uma situação, um esquema, uma descrição ou uma forma de notação e emergem daquelas actividades dos estudantes que os guiam para reinventar a matemática. Através deste processo a EMR propõe que o conhecimento informal dos estudantes torna-se matematicamente explícito e elaborado e serve como um ponto de lançamento para a matemática formal. Gravemeijer (1998) sustenta que esta abordagem para a educação em geometria, não só apoia a visão da matemática como uma actividade humana, mas permite sobretudo ao estudante, construir o seu conhecimento e reforçar a sua capacidade de reflectir. Gravemeijer também afirma que em geometria a abordagem por reinvenção propõe uma rotura radical com o currículo da geometria tradicional euclidiana. Simon (1997) aponta que a pedagogia do EMR, promove o desenvolvimento da matemática através da “reinvenção guiada”.

A partir de meados dos anos 70, começaram a tomar corpo as críticas ao movimento da matemática moderna, exprimindo perspectivas de sentido e conteúdo diferentes para o ensino e aprendizagem da Matemática. Reagindo aos maus resultados da reforma, surgiu um

---

matemática pode ser usada como dispositivo heurístico e processos informais de solução.

movimento pugnando pelo regresso aos métodos e conteúdos matemáticos que se praticavam antes da referida reforma e, que se foi fazendo sentir um pouco por toda a parte. Contrapondo-se a este movimento de caracter conservador, começaram igualmente a afirmar-se perspectivas alternativas, sustentando, não o retrocesso, mas a necessidade de mudança efectiva nos métodos e conteúdos do ensino da Matemática.

É nesta última perspectiva que surgiu em 1989 o documento, *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar,* do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que não pretendia ser um currículo nacional, mas sim fornecer recomendações e uma visão pela qual os conceitos matemáticos são importantes para todas as crianças aprenderem se querem assumir os lugares adequados enquanto trabalhadores e cidadãos num mundo diferente. Isto mostra não só um movimento de rejeição à situação em que se encontrava o ensino da matemática nos Estados Unidos depois dos anos da matemática moderna, como também reflecte o crescendo de interesse e de experiências de ensino da geometria que caracterizou a parte final dos anos 80. Estas *Normas* constituem pois um documento importante quer como referência, quer como elemento crítico na apreciação de propostas curriculares (Guimarães, 1990; Veloso, 1998) e tiveram grande influência tanto nos Estados Unidos e no Canadá, como noutros países, (Kilpatrick e Moura, 1999).

As *Normas* (NCTM, 1991) propõem para o caso específico da geometria para alunos de K-12, dar maior relevo aos pontos seguintes (Veloso, 1998, p. 28):

- compreensão dos objectos geométricos e suas relações e utilização da geometria na resolução de problemas;
- integração da geometria em todos os temas e em todos os anos de escolaridade;
- abordagem da geometria por intermédio das coordenadas e das transformações geométricas;
- desenvolvimento de curtas sequências de teoremas;
- argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos;
- explorações em computador de figuras bi e tridimensionais;
- geometria no espaço;
- aplicações ao mundo real e modelação.

O NCTM, recomenda ainda que se dê menos atenção a certos tópicos (por exemplo, a geometria de Euclides como sistema axiomático completo), que a geometria analítica não seja tratada como tema isolado e que sejam evitadas demonstrações em “duas colunas”. Há já um primeiro esboço de reformulação[4] destas *Normas* de 1989 que modifica um pouco a distribuição das normas e que dá ênfase ao pensamento visual e identifica como ideia importante para a matemática escolar: “a geometria e sentido espacial” dando relevo aos seguintes pontos: - análise das características e propriedades dos objectos geométricos a duas e a três dimensões; - selecção e uso de diferentes sistemas de representação, incluindo geometria das coordenadas e teoria de gráficos; - reconhecimento da utilidades das transformações e simetrias para analisar situações matemáticas; - uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas.

Uma perspectiva diferente é-nos dada por Goldenberg e outros (1998) que afirmam que durante anos, os cursos de geometria têm caído nas seguintes categorias:

- *Tentativas de réplicas fieis de Euclides*. Tendiam a ser exposições dogmáticas de matemáticas estabelecidas, usando o método axiomático; eles são cursos de definições, teoremas, prova de duas-colunas, corolários.
- *Euclides sem demonstrações*. Estes cursos seguem essencialmente o mesmo caminho dos mais formais, mas os principais resultados de geometria são geralmente enunciados em vez de derivados, e a ênfase está nas “aplicações”- muitas vezes problemas que exigem que os estudantes apliquem várias formulas de área e o teorema de Pitágoras.
- *Geometria “indutiva”*. Pomos a palavra indutiva entre aspas, porque, quando usada aqui, nada tem a ver com a indução matemática, mas refere-se só ao raciocínio do específico para o geral, tirar conclusões na base da experiência, ao “método de descoberta”.

Goldenberg e outros (1998) perspectivam-nos agora a geometria como um veículo para construir hábitos de pensamento e propõem olhar a geometria e a sua pedagogia de novas maneiras. Os professores têm que ver como os resultados em geometria se encaixam numa estrutura matemática mais geral. Os professores necessitam de adoptar a perspectiva que a

[4] (*http://www.nctm.org/standards2000/*).

obtenção de tais resultados é lenta, pois os estudantes desenvolvem conjecturas baseadas na experiência, tentam justificá-las, desenvolvem novas experiências na base do que tinham aprendido e depois refinam as suas conjecturas. Este ponto de vista envolvendo "hábitos de pensar" atira a tecnologia para um novo papel. Esta tecnologia permite o desenvolvimento de actividades que põem poder experimental nas mãos de estudantes e professores. O foco pode ser em factos (teoremas) descobertos ou em formas de pensar que conduzem à descoberta ou à compreensão de factos e ao saber que eles são factos. A direcção que a experimentação na sala de aula toma, é determinada em parte pelos materiais curriculares, mas também pela interpretação imposta pelos professores sobre esses materiais curriculares.

Connected geometry é um currículo apoiado pela National Science Foundation, criado e orientado para que o seu eixo central seja "hábitos de pensamento" (Goldenberg e outros, 1998). Esta abordagem da geometria demonstrou, tanto no nível secundário como superior, ser motivante para um grupo grande e diversificado de estudantes: aumenta a coerência que os alunos vêm na matemática; liga entre si as experiências que os alunos têm em diversos ramos desta ciência; dá relevo aos temas unificadores internos; fornece conexões entre a matemática e as outras experiências dos alunos; e traz para dentro da aula a cultura da exploração matemática. Devido ao facto de se dar relevo a hábitos de pensamento válidos em domínios tanto matemáticos como não matemáticos, esta abordagem também serve os estudantes que estão em cursos terminais e não vão prosseguir estudos técnicos especializados.

Chazan e Yerushalmy (1998) salientam o papel das experiências baseadas em computador para mudar a representação de como a matemática é feita nos cursos de geometria euclidiana tradicionais: os professores podem usar programas de construção geométrica para apoiar a inclusão de experimentação e o desenvolvimento de conjecturas para além do foco tradicional na prova geométrica e justificação. Villiers (1998) sugere que ambientes de geometria dinâmicos[5] podem contribuir para que o estudante experimente de

[5] Geometria dinâmica é uma geometria que embora derivada de Euclides, tem um número de características distintas sem paralelo na geometria euclidiana. O termo tecnologia de geometria dinâmica entrou na literatura como um termo genérico devido à sua adequação à caracterização da característica que distingue este software de outro software de geometria: arrastar (dragging). Esta característica permite ao utilizador, depois de uma construção ser feita, mover livremente certos elementos de um desenho e observar os outros elementos a responder dinamicamente às condições alteradas. Implementações deste tipo de software : Geometer´s Sketchpad, Cabri, Geometry Inventor e de forma

forma a ver a prova como uma forma de explicação em vez de verificação, pois a verificação é obtida rapidamente e de forma relativamente fácil quando os estudantes usam ferramentas de geometria dinâmica. Hershkowitz (1998) aponta que os processos de explicação são importantes, não só devido aos seus poderes pedagógicos, como também, são veículos para investigar os hábitos da mente. Olive (1998) ilustra-nos, através duma exploração dos lugares geométricos usando as características do Sketchpad, como esta ferramenta tem potencial para ajudar professores e alunos a integrar e desenvolver os seus conhecimentos de álgebra e geometria. De acordo com Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) tal integração ajudará os estudantes a relacionar a matemática e constrói de "hábitos de pensamento", o que gera poder matemático. Olive apresentou–nos ainda exemplos do uso do Sketchpad para salas de aula de "elementar – middle – high school" falando não só do potencial daquela ferramenta, como também de alguns problemas surgidos: - diferença entre "desenhar" e "construir"; - demonstrar versus provar; - problemas pedagógicos associados com a falta de experiência dos professores com Sketchpad e as reduções impostas pelo "currículo" tradicional.

A educação em geometria na escola elementar. Focando-nos agora, sobre a educação em geometria na escola elementar[6], reparamos que Clements e Battista (1992) nos dizem que os currículos usuais se centram em reconhecer e nomear formas geométricas e em usar fórmulas em medições geométricas, consistindo tais currículos numa mistura de conceitos não relacionados, sem qualquer progressão sistemática para níveis de pensamento mais elevados, embora tais níveis sejam exigidos para o desenvolvimento de conceitos sofisticados e para a resolução de muitos problemas. Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), bem como NCTM (1991) sugerem-nos que o ensino da geometria deveria começar nos primeiros anos. Também Nacional Council of Supervisors of Mathematics[7] (NCSM) dos EUA, aponta 12 áreas fundamentais de competências matemáticas que os alunos irão necessitar para desempenhar funções com eficiência, no próximo século, sendo a geometria uma dessas áreas de competência. Afirmam, em particular, que os alunos devem compreender os conceitos geométricos necessários para trabalharem eficazmente no

parcial SuperSupposer (Goldenberg e Cuoco, 1998).

[6] Isto é, a educação pré-escolar, o 1º, o 2º e o 3º ciclos do ensino básico.

[7] Esta organização agrupa educadores com funções de supervisão, apoio pedagógico, inspecção e especialistas curriculares, ligados a autoridades estaduais e locais (NCSM, 1990).

espaço tridimensional. Devem ter conhecimento de conceitos tais como: paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria. Devem também conhecer as propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos. Devem visualizar e verbalizar como os objectos se movem no mundo, usando translações, simetrias e rotações. Os conceitos geométricos devem ser explorados de modo a envolverem medições e resolução de problemas (NCSM, 1990).

Pegg e Davey (1998) dizem-nos que há uma clara divergência de opinião sobre os métodos e saídas da geometria, e consequentemente quem escreve livros de texto ou faz programas curriculares não tem concordado num conjunto claro de objectivos e apontam que existe um sentir que à geometria falta uma direcção firme e um propósito, já que para muitos professores a geometria e as relações espaciais não são considerados tópicos importantes. Ainda acrescentam que estes problemas, talvez possam ser devidos, dizem eles, a haver pouca pesquisa sobre o pensamento geométrico dos alunos, apesar dos trabalhos pioneiros feitos: por Piaget e seus colaboradores [8]; por van Hiele que reagindo às dúvidas surgidas nas formulações de Piaget e combinando com as suas próprias experiências na sala de aula, construiu em 1959, uma teoria dirigida a melhorar o ensino, organizando-o e tendo em linha de conta o desenvolvimento mental em geometria dos alunos[9].

Para van Hiele, o principal propósito do ensino era o desenvolvimento do *insight*[10] no aluno. Contrariamente ao modelo de desenvolvimento de Piaget, o modelo de van Hiele centra-se no desenvolvimento de formas particulares de ensino e não no crescimento de estruturas mentais. Daí que van Hiele sugira que na ausência de ensino sistemático, as oportunidades das crianças desenvolverem a matemática do espaço enfraquecem e para muitos extinguem-se mesmo. Lehrer e outros (1998) dizem que muitas das características relativas aos conceitos matemáticos e às capacidades mentais no raciocínio sobre o espaço, emergentes dos primeiros trabalhos investigativos de Piaget e de van Hiele não têm sido adoptados nos estudos contemporâneos. Considerando que o desenvolvimento da geometria e raciocínio espacial englobam uma larga gama de conceitos matemáticos e capacidades mentais Lehrer e outros (1998) examinaram o desenvolvimento das concepções das crianças sobre as formas euclidianas a duas e três dimensões incluindo os ângulos, as medidas de

[8] *The Child´s conception of space* (Piaget e Inhelder, 1956) e *The Child´s conception of geometry* (Piaget, Inhelder e Szeminska, 1960)
[9] O qual é descrito por uma série hierárquica de níveis, Hoffer (1981).
[10] *insight*, capacidade de actuar adequadamente com intenção numa nova situação.

comprimento e de área, e as capacidades tais como manipulação mental de imagens, desenhos e gráficos. Este estudo sugere-nos: - que as práticas curriculares correntes na escola elementar tendem a promover pouca mudança conceptual; - que diferentes facetas do raciocínio espacial se desenvolvem independentemente, daí que a sua integração espera por ensino; - e que na ausência de ensino sistemático, as oportunidades das crianças desenvolverem uma matemática do espaço definham e para muitos se extinguem[11], fazendo renascer mais tarde potenciais problemas escolares.

Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, (1996) mostram-nos dois exemplos de ensino "forma e espaço" interagindo com educação visual: - *o Projecto Agam* como um exemplo para uma "cultura" da educação visual onde se entrelaçam o desenvolvimento de uma linguagem visual com um processo de desenvolver o pensamento visual; - o exemplo do projecto *Shape and Space and Reality*[12] onde são vistas: relações dinâmicas entre objectos, bem como relações entre objectos e observador e ainda o processo de matematização destas relações. Lehrer e outros (1998), descrevem também uma abordagem para a geometria, destinada a crianças jovens, que começa com o conhecimento informal de situações, seguida pela reinterpretação matemática progressiva dessas experiências. Esta abordagem é consistente com a abordagem holandesa EMR que já referi. Experiências do dia a dia das crianças tais como olhar, andar, desenhar, construir e manipular objectos, são uma fonte rica de intuições sobre a estrutura espacial e o conhecimento informal desenvolvido durante a participação nelas, e constituem um trampolim para a geometria. Lehrer, Jacobson e outros (1998) acrescentam que é também essencial que os professores estabeleçam uma cultura de sala de aula que faça crescer a actividade do estudante em reflexão matemática e generalização, já que a compreensão do estudante da geometria depende tanto da cultura da aula como de situações matemáticas frutuosas.

Zech e outros (1998) apontam-nos uma abordagem de ensino, "ensino ancorado", situado no contexto de ambientes de situações problemáticas significativas[13] e consistente com as teorias construtivistas da aprendizagem.[14] Eles construíram 3 aventuras geométricas

[11] Ideia já defendida por van Hiele.
[12] influenciado pela educação matemática realista.
[13] situações que ajudem os estudantes (3º ciclo) e muitas vezes os professores a compreender o poder do pensamento geométrico na resolução de problemas do dia a dia.
[14] Em vez de os professores transmitirem informação que os estudantes recebem, eles deveriam dar oportunidades aos estudantes de se tornarem activamente envolvidos na construção do conhecimento (NCTM, 1991).

Jasper em que cada aventura é uma história em vídeo que cria um ambiente de aprendizagem visual para apoiar o estudante a gerar o problema, bem como a resolvê-lo. As unidades geométricas nas aventuras *Jasper* esclareciam a natureza ubíqua da geometria na arquitectura, em procurar caminhos e em medições e são concebidas para dar uma introdução à geometria em vez de um currículo geométrico completo. Depois de resolverem uma aventura *Jasper,* os alunos são encorajados a reflectir sobre as estratégias de resolução de problemas e aprofundar as suas compreensões continuando a explorar conceitos matemáticos importantes que estavam envolvidos na aventura. Toda a informação para resolver o problema está contida na história e a tecnologia permite que o estudante reveja facilmente as partes da história de forma a ter a informação necessária para resolver o problema. A modelação aparece de forma natural e serve de suporte para o conhecimento geométrico dos estudantes. Os autores retratam as aulas onde a compreensão da geometria e da medida pelos estudantes emergem quando eles consideram problemas situados e usam ferramentas electrónicas que não só ajudam a visualização como também apoiam a reflexão e a revisão.

Owens (1999) constrói uma estrutura teórica para um programa de ensino destinado aos primeiros desenvolvimentos matemáticos espaciais de crianças jovens, em que a orientação e o movimento, o reconhecimento de parte-todo e a classificação e linguagem são aspectos do pensamento visual. Simultaneamente constrói um mecanismo de avaliação da criança relativamente à estrutura de ensino. Ela sustenta que o importante é a relação entre a compreensão espacial e a visualização, pois os aspectos do conhecimento espacial acima mencionados tornam-se evidentes na forma como os estudantes respondem a tarefas. As estratégias imagéticas das crianças podem ser inferidas das suas acções e palavras. Owens (1999) considera então cinco grupos de estratégias: estratégias emergentes, estratégias perceptuais, estratégias imagéticas pictóricas, estratégias imagéticas padrão e dinâmicas e estratégias eficientes. As estratégias dizem-se *emergentes* quando os estudantes estão a começar a prestar atenção a aspectos das experiências espaciais, a manipular e explorar formas e espaço, a seleccionar formas como são mostradas ou nomeadas, e associar palavras com formas e posições. As estratégias são *perceptuais* quando os estudantes estão a prestar a atenção a características perceptuais e começam a fazer comparações, confiando no que eles podem ver ou fazer. As estratégias dizem-se *imagéticas pictóricas* quando desenvolvem imagens mentais associadas com conceitos, com uso cada vez maior da linguagem estandardizada. As estratégias chamam-se *imagéticas dinâmicas e padrão* quando os estudantes usam padrões e movimento na sua imagética mental e desenvolvem relações conceptuais. As estratégias dizem-se *eficientes* quando os estudantes começam a resolver com sucesso problemas espaciais e construções usando a imagética, a classificação, o reconhecimento da parte com o todo e a orientação.

Mesquita (1999) tem em desenvolvimento um projecto, no contexto da geometria em França, cujo principal objectivo é a valorização da geometria e espaço na escola. É centrado no espaço tridimensional e está em articulação com a geografia. Também é claramente assumida e desenvolvida uma progressão didáctica: do espaço para o plano, do plano para a linha e da linha para o ponto e as interacções entre estas entidades são passos decisivos na aprendizagem da geometria.

Parece então que as tendências contemporâneas sobre como desenvolver a compreensão do espaço e geometria sofrem uma grande influência, quer das ideias de Freudenthal sobre a educação em geometria, das *Normas* do NCTM, quer ainda das propostas de diferentes ambientes de aprendizagem que servem como pontos de partida geométricos (Gravemeijer, 1998; Lehrer e outros, 1998; Middleton e Corbett, 1998)[15]. Nos conteúdos geométricos e no desenvolvimento de ideias, parece adoptar-se uma visão ampla do que a visualização e a geometria poderiam ser e, esses conteúdos são desenvolvidos numa grande variedade de contextos. No entanto permanecem algumas questões. Deve defender-se alguma orientação unificadora do currículo? E qual? E as aplicações da matemática? E a resolução de problemas? O desenvolvimento do poder matemático tal como é definido pelas *Normas,* ou os hábitos de pensamento como Goldenberg defende ou ainda uma matemática realista sustentada por exemplo, por Gravemeijer? Quais são os efeitos da integração da tecnologia geometria dinâmica, no ensino e na aprendizagem da geometria? Na escola elementar, deve-se usar o Logo ou a geometria dinâmica? Quais os limites deste uso? A maior parte dos contextos das unidades de ensino desenvolvidos nos últimos 10 anos, reflectem as recomendações dos documentos das reformas recentes (Clements, Battista e Sarama, 1998). Contudo, essas mesmas mudanças de ensino não são triviais. Burrill (1997) falando das *Normas* oito anos após o seu aparecimento, diz que há má interpretação, confusão sobre o conteúdo bem como sobre as mensagens sobre o ensino das *Normas* por parte de

[15] ambientes que foram desenvolvidos tendo em conta a educação matemática realista

professores, pais, matemáticos, educadores em matemática e jornais. Em muitos sítios o currículo mudou, mas as práticas de ensino e avaliação não. Acrescenta que os projectos do novo currículo encontram uma necessidade crítica de incluir componentes de desenvolvimento profissional dos professores. Como devem ser essas componentes de desenvolvimento? Parece que não é ainda claro que se reconheça que "as ideias que funcionam" e as que provêm de projectos de investigação, como os mencionados acima, são elementos essenciais de mudança do professor em relação ao ensino baseado nas novas ideias sobre aprendizagem e matemática (Nelson, 1997).

Diferentes definições do conceito de visualização

A visualização está relacionada com os mais diversos ramos da matemática e é multifacetada, possuindo raízes na matemática e envolvendo aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes, (Zimmermann e Cunningham, 1991). O termo visualização tem diferentes conotações, e umas vezes está restrito à mente do aluno, outras está restrito a algum meio e ainda outras a visualização é definida como um processo para viajar entre estes dois domínios. Por exemplo, as definições seguintes de visualização, evidenciam diferentes significados ligados quer à matemática, à investigação científica, à educação matemática e à psicologia: - "visualização em matemática constitui um aspecto importante da actividade matemática onde se actua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstractas que interessam ao matemático", (Guzmán, 1996, p. 16); - "o termo visualização científica é comummente corrente par o uso da tecnologia gráfica do computador" (Cunningham, 1991, p. 67); - "visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direcções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica" (Dreyfus, 1990, p. 119); - "visualização é a relação entre imagens"[16] (Solano e Presmeg, 1995, p. 67). Estas definições porém concordam em que a visualização se foca na percepção e manipulação de imagens visuais.

Debrucemo-nos então sobre aspectos específicos, indicadores da necessidade de mais esclarecimentos neste domínio. Nemirovsky e Noble (1997) afirmam que há uma

[16] Para um outro estudo, Presmeg (1995) usou o termo visualização com o significado de "processo de construir ou usar imagens visuais, com ou sem diagramas, figuras ou gráficos".

dificuldade comum quando se trabalha com os processos de visualização que é a necessidade de saber se a imagem visual está na mente do aluno ou fora do aluno, numa folha de papel ou no ecrã do computador. A resposta à questão sobre como as representações mentais humanas são construídas e armazenadas, faz com que alguns investigadores sustentem que a forma de representação mental humana é puramente proposicional, enquanto que outros presumem que os humanos possuem dois sistemas distintos de processamento de informação: um que representa a informação verbalmente e o outro que representa a informação visualmente.

Dreyfus (1995) diz que parece que não temos espelhos nas nossas cabeças: as nossas imagens visuais contêm abstracções e variações fortemente interpretadas do que vimos; os seus elementos lógicos e pictoriais estão fortemente misturados. Assim, o conceito de imagem pode ser visto por diferentes aspectos[17], por exemplo, como uma componente importante da cognição: uma referência mental que é o produto de imaginar numa qualquer modalidade seja visual, verbal, olfactiva, auditiva ou cinestésico (Gray e Pitta [18], 1999), como uma construção mental que exibe informação visual ou espacial, (Presmeg, 1995), como representação matemática dum conceito ou propriedade, contendo informação baseada em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos, (Gutierrez , 1996). O próprio termo "visual" pode não ter só a ver com a visão, um dos cinco sentidos, mas pode referir-se também a propriedades espaciais e às suas relações. O termo "pensamento visual" aparece normalmente definido a par do termo "visualização" (Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Senechal, 1991). Por exemplo, para Senechal "visualização" significa em linguagem usual "percepção espacial" e assim é a reconstrução mental da representação de objectos a 3 dimensões e "pensamento visual" é um termo mais lato e é o que fazemos quando reconhecemos rapidamente e manipulamos automaticamente símbolos de qualquer espécie**.** Mariotti (1995) induz a distinção entre visualização, que considera trazer à mente imagens de coisas visíveis e pensamento visual, o pensar sobre coisas abstractas que originalmente podem não ser espaciais, mas que podem ser representadas na mente de alguma forma espacial.

[17] Clements (1981) sugere que o problema de definir imagética pode ser insolúvel e está ligado às teorias "figura em mente" versus proposicional.

[18] A associação de imagem mental com a concepção de "coisa ou objecto", chama a nossa atenção para uma qualidade de abstracção que vai de uma analogia mental de um objecto real a uma descrição linguística ou simbólica.

Mecanismos essenciais à construção de significados matemáticos

Einstein, por exemplo, (citado em Battista, 1994) comentava que os seus elementos de pensamento, não eram palavras, mas certos sinais e imagens mais ou menos claras que podiam ser voluntariamente reproduzidos ou combinados. Muitos matemáticos e educadores matemáticos sugerem que capacidade espacial e imagética jogam um papel vital no pensamento matemático (Battista, 1994) e para a construção de significado matemático poderemos falar de dois mecanismos essenciais: a capacidade espacial e imagética visual.

Termos tais como imagética visual e capacidade espacial estão muitas vezes ligados em estudos relacionados com as competências matemáticas na escola elementar e por exemplo Krutetski sustenta que nas suas experiências, a capacidade de visualizar relações abstractas e a capacidade para conceitos geométricos espaciais mostram uma alta correlação (referido em Pesci, 1995). A literatura sobre imagética visual e capacidade espacial tem sido desenvolvida independentemente uma da outra, apesar de entre os psicólogos ser quase de aceitação universal, que a imagética visual está necessariamente envolvida em tarefas espaciais (Clements, 1981). Para Clements, o termo capacidade espacial significa a capacidade de formular imagens mentais e de manipular essas imagens na mente enquanto que imagética visual significa uma actividade mental que percepciona um objecto quando ele não está presente, figura na mente.

Presmeg (1992) tem uma concepção mais ampla de imagética visual, pois a sua definição de imagem visual como "esquema mental que ilustra informação visual ou espacial", não especifica se é exigido a presença de um objecto. Assim não só inclui a imagética que atinge a vivacidade e a transparência de uma figura, como outros tipos de imagética que ilustram formas, configurações e padrões. A imagética é então construída como uma colecção de imagens. O poder da imagética é que pode resultar em visualização que ajuda os estudantes a criarem ligações que facilitam o construir de significado na aprendizagem da geometria (Solano e Presmeg, 1995). Presmeg identificou em alunos da escola elementar e secundária, cinco tipos de imagética em raciocínio matemático: imagética concreta, imagética de memória, imagética cinestésica, imagética dinâmica e imagética padrão. A imagética concreta pode ser pensada como "figura na mente", mas não a mesma para todos ; imagens de memória consideradas imagens de memória por fórmulas; imagética dinâmica envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem visual concreta;

imagens cinestésicas envolvem actividade muscular de algum tipo; imagética padrão é um tipo de imagética em que pormenores concretos são desprezados e puras relações ilustradas num esquema visual-espacial (Brown e Presmeg, 1993).

Owens (1999) considera a noção de visualização sinónima da noção de imagética e, para tarefas ligadas aos primeiros desenvolvimentos matemáticos e espaciais das crianças, ela identificou como visualizações notórias: imagética pictórica concreta, imagética associada com padrões, imagética dinâmica associada com movimento dentro da estrutura imagem, imagética acção envolvendo movimento de partes do corpo e imagética que envolveu o seguimento de um sucessão de procedimentos.

Gray e Pitta (1999) num estudo para investigar as formas como diferentes imagens mentais identificadas de respostas a "deixas e ligações" podem influenciar as abordagens das crianças na aritmética elementar, adoptaram a seguinte classificação para os tipos de imagética: imagens gerais, imagens específicas e imagens autobiográficas. Imagens gerais, representam um conceito sem qualquer referência a um exemplo particular ou a características do item. Imagens dizem-se específicas, quando há referência a um exemplo bem definido do conceito, sem um episódio específico. As imagens autobiográficas, são casos especiais das imagens específicas ampliadas a envolver um auto-esquema, seja aquele que envolveu o sujeito sem uma referência episódica ou com objectos pertencentes ao sujeito.

Lohman (citado em Clements, 1981) definiu capacidade espacial, como "a capacidade de gerar, reter e manipular imagens espaciais abstractas" enquanto que Mitchelmore (1976) definiu capacidade espacial como "capacidade de predizer transformações específicas de figuras geométricas dadas"; Cook (citado em Clements, 1981) diz que imagética é um tipo de capacidade espacial e descreve-a como "a formação e retenção de uma imagem que não envolve nenhum movimento da imagem, uma vez ela formada". Emmorey, Kosslyn e Bellugi (1993) referem três capacidades de imagética: gerar imagens mentais, mantê-las e rodá-las. Young (1982) diz que capacidades espaciais envolvem muitos aspectos de interpretar o nosso ambiente, tais como, interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimento ou trocas naquelas imagens. Tarte (1990) considera as capacidades espaciais como capacidades ligadas à compreensão, manipulação, reorganização ou interpretação de relações visuais, e apoia a ideia de que a capacidade espacial pode ser um indicador mais geral de uma forma particular de organizar o pensamento, na qual a nova informação vai ser ligada a estruturas do conhecimento anterior para ajudar a fazer sentido do novo material. Thurstone (citado em Kiser, 1987) indicou a capacidade visual-espacial como uma das capacidades mentais fundamentais e definiu-as como a capacidade de mentalmente manipular formas, tamanhos e distâncias na ausência de símbolos verbais ou numéricos. Lea (1990) aponta que capacidade espacial é um conjunto complexo de competências que se entrosam. Inclui aspectos de distância, direcção, percepção, movimento e relação da parte com o todo e de objectos entre si. As definições de imagética e capacidade espacial não estão completamente esclarecidas, pois umas vezes essas definições aproximam, outras distanciam-se.

Diferentes classificações de capacidades espaciais

Da diversidade de definições para o termo *capacidade espacial* resulta a não unicidade da categorização dessas capacidades espaciais. Guay e McDaniel (1977) classificaram as capacidades espaciais em de baixo e de alto nível. As capacidades de baixo nível foram definidas como exigindo a visualização de configurações de duas dimensões, mas nenhuma transformação mental dessas imagens visuais; capacidades de alto nível foram caracterizadas como exigindo a visualização de configurações tridimensionais e a manipulação mental dessas imagens visuais. McGee (citado em Tartre, 1990) distingue dois grandes tipos de capacidades espaciais: visualização e orientação pela identificação do que vai ser movido. Nas tarefas de orientação, a perspectiva das pessoa que vê o objecto é que muda ou se move; não exige mover mentalmente o objecto. Linn e Peterson (citados em Tartre, 1990, p. 216), propõem uma categorização diferente: percepção espacial, rotação mental e visualização espacial. Eles distinguiram visualização espacial das outras categorias "pela possibilidade de estratégias de múltiplas soluções". Tarefas de visualização envolvem manipulações complicadas de muitos passos para apresentação de informação espacial.

Bishop[19] (1989) definiu duas capacidades espaciais: a capacidade de interpretar informação figura l (IFI) e a capacidade de processamento visual de figuras (VP). IFI é a capacidade de ler, analisar e compreender representações espaciais de forma a obter alguns

[19] Gorgorió (1996) diz que Bishop tomando como ponto de partida a ideia que é impossível estabelecer uma definição única de capacidade espacial e tenta focar a atenção em processos de aprendizagem significativos, sugerindo que se considerem as duas capacidades espaciais: IFI e VP.

dados delas; VP é a capacidade de manipular e transformar representações visuais e imagética visual; envolve a visualização e a tradução de relações abstractas e de informação não figural em termos visuais. DelGrande (1990) sumariou as seguintes sete capacidades espaciais: coordenação visual motora, percepção da figura fundo, constância perceptual, percepção da posição no espaço, percepção das relações espaciais, discriminação visual, e memória visual como sendo relevantes para o estudo da matemática na escola elementar e da geometria em particular. Coordenação visual motora - capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. Percepção da figura fundo - acto visual de identificar uma componente específica numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos mais ou menos complexos. Constância perceptual - envolve o reconhecimento de certas figuras geométricas apresentadas numa variedade de tamanhos, formas, texturas e posições no espaço e discriminação de figuras geométricas similares. Percepção da posição do espaço-capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes. Percepção de relações espaciais - capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação com a pessoa. Discriminação visual-capacidade de identificar as semelhanças ou diferenças entre objectos. Memória visual - capacidade de relembrar objectos não visíveis e relacionar as suas características com as de outros objectos visíveis ou não. Pallascio, Talbot, Allaire e Mongeau (1989) definiram uma tipologia das capacidades espaciais num espaço geométrico, tendo como base um quadro de tripla entrada:

- na primeira entrada definiram cinco capacidades hierarquizadas: transposição, estruturação, determinação, classificação e geração;
- a segunda entrada foi definida sobre quatro níveis geométricos: topológico, projectivo, afim e métrico;
- na última entrada distingue os dois planos: perceptivo e representativo.

O significado que Pallascio, Talbot, Allaire e Mongeau (1989) deram aos elementos da tipologia por eles definida foi: *transposição* - capacidade de estabelecer as correspondências, as equivalências, e efectuar a passagem entre os diferentes modos de representação (físico, linguístico, algébrico e geométrico) e níveis geométricos; *estruturação* - capacidade de identificar as propriedades e a combinatória geométrica duma estrutura espacial;

determinação - capacidade de delimitar os elementos ou os parâmetros definidos por restrições geométricas sobre uma estrutura espacial; *classificação* - capacidade de agrupar as estruturas espaciais segundo uma escolha de propriedades ou parâmetros geométricos comuns; *geração* - capacidade de produzir ou modificar uma estrutura espacial de forma a que esta estrutura responda a certos critérios geométricos pré-determinados; *nível topológico* - corresponde principalmente ao estudo das propriedades de adjacência e de conexidade das estruturas espaciais, propriedades que são conservadas após uma ou mais deformações contínuas, tais como alongamento , encurtamento, dobragem ou torsão; *nível projectivo* - corresponde fundamentalmente ao estudo das propriedades de incidência e de planificação que são conservadas após uma projecção central; *nível afim* - corresponde principalmente ao estudo das propriedades de paralelismo e de convexidade que são conservadas após uma projecção paralela; *nível métrico* - corresponde principalmente ao estudo das propriedades de distância e angulação; *plano perceptivo* - é constituído de uma acção mental de reconhecimento das formas; *plano representativo* - é constituído de uma acção concreta de transformação de formas.

Latner e Hadar (1999) apontam também que embora não se tenham alcançado consenso sobre quais as componentes das capacidades espaciais para um ambiente onde se executam tarefas em geometria tridimensional, se podem identificar como fundamentais as seguintes: - capacidade de criar uma imagem mental de um sólido no espaço tridimensional; - capacidade de reter essa imagem mental; - capacidade de manipular uma imagem mental; - capacidade de "ver" as relações entre as várias partes de um sólido.

Se considerarmos a tipologia anteriormente mencionada das capacidades espaciais, e definida por Pallascio, Talbot, Allaire e Mongeau (1989), poderemos talvez inferir que é fundamentalmente a nível da 3ª entrada, do plano representativo, que as capacidades espaciais se entrosam com a imagética visual. Também, parece poder concluir-se das classificações e definições de capacidades espaciais feitas por Bishop, Tarte e Linn e Peterson, que estes consideravam a imagética visual fundamentalmente relacionada com imagens visuais-espaciais dinâmicas ou mais abstractas e pensam a capacidade espacial e o sentido espacial em termos de imagética. Latner e Hadar (1999) seguem também a linha de Bishop, falando das componentes das capacidades espaciais em termos de imagética. Parece também, que independentemente de se pensar as possíveis componentes de capacidades espaciais em termos de imagética ou não, essas componentes terão forçosamente de estar relacionadas com o ambiente e com as tarefas que se executam. Gorgorió (1996) identificou em alunos dos 12 aos 16 anos e para tarefas de rotação[20], três tipos de estratégias cognitivas: estratégia de estruturação, a estratégia de processamento e a estratégia de aproximação. Para estratégias de estruturação, a estratégia cognitiva dos estudantes foi considerada do ponto de vista das formas diferentes de tratar do problema, da organização mental e da fonte de informação usada para a tarefa. Para estratégias de processamento, a estratégia cognitiva dos estudantes foi considerada do ponto de vista da forma de representação mental: visual ou verbal. Para estratégias de aproximação teve–se em atenção o objecto geométrico, sendo caracterizado como sendo global ou parcial.

Parece que, apesar dos esforços feitos neste domínio pela investigação, mais clarificação é necessária relativa aos conceitos ligados ao termo *visualização*.

O poder da visualização no ensino e na aprendizagem

O provérbio "uma figura vale mais que mil palavras" caracteriza a eficácia das representações visuais externas[21]. O uso destas representações na aprendizagem e na resolução de problemas tem fornecido muitas descrições históricas de descobertas científicas e de invenção (Rieber, 1994; Wainer, 1992). Por exemplo os matemáticos usam intensamente os diagramas para resolver problemas geométricos. A visualização é geralmente considerada útil, para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática, diz Dreyfus (1991) e resume as muitas dificuldades com a visualização sentidas, pelos estudantes:

- incapacidade de ver um diagrama de diferentes maneiras;
- dificuldades em reconhecer as transformações implicadas nos diagramas[22];

[20] As tarefas espaciais executadas pretendiam desenvolver a capacidade de processamento visual, capacidade necessária para executar as operações mentais exigidas, a qual inclui: a capacidade de imaginar objectos espaciais, relações e transformações; capacidade de codificar em termos verbais ou mistos; capacidade de não só imaginar as imagens visuais de factos espaciais, mas também a capacidade de resolver as tarefas usando processos que não são meramente visuais.

[21] Miles (2000) discorda deste provérbio, pois considera a comunicação sequencial fundamental; mesmo que uma figura nos conte uma história, não se pode conversar só com figuras, uma conversa unidimensional é mais eficiente que figuras.

[22] Fischbein, citado em Dreyfus (1995), indicou que associado a todo o diagrama intervém uma estrutura conceptual e para a pessoa que não adquiriu essa estrutura conceptual o diagrama é desprovido de significado.

• interpretações incorrectas ou não convencionais de variação e co-variação em gráficos;
• falha na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura;
• falha em unir as suas visualizações com o pensamento analítico.

Muitos investigadores realçam a importância da imagética mental na construção de significado matemático (Presmeg, 1995; Wheatley e Brown, 1994). Mariotti (1995) aponta também que todos estamos conscientes do papel complexo que as imagens jogam num contexto geométrico, sendo essa complexidade expressa por um lado, na impossibilidade de introduzir um conceito geométrico sem dar exemplos, isto é desenhar figuras ou construir modelos e por outro, estes exemplos particulares do conceito, podem não ser suficientes para determinar o conceito correctamente. Parece que os aspectos estruturais das imagens visuais apoiam os processos de abstracção (Presmeg, 1986; Dreyfus, 1993). Dorfler (1991) e Wheatley e Brown (1994) apontam que o processamento imagético é central para o raciocínio matemático. Modelos poderosos de raciocínio matemático podem estar baseados em diagramas e imagética visual[23], diz Dreyfus (1993), e exemplifica com falsete (knodeling), que define como um pensamento qualitativo, rude, vago e possivelmente ambíguo que pode ser produzido nos primeiros e nos estádios intermédios para resolver um problema. Ele conjectura que no falsete se usam princípios gerais e conexões daí que se necessita de ter muitas das características que os peritos de qualquer domínio têm.

A visualização é hoje em dia considerada uma acção matemática como o cálculo ou a simbolização, quando os estudantes procuram modelos matemáticos e relações (NCTM, 1989; Senechal, 1991). A condução e a apresentação da matemática estão cada vez mais a tornar-se visuais, diz Mason (1995), devido à presença de ecrãs inteligentes conjuntamente com o reconhecimento da importância da imagens. Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) apontam duas razões porque nas ultimas décadas se fala do “renascimento da visualização”: - na vida moderna a apresentação de fenómenos mudou de tabelas e fórmulas carregadas de números e símbolos para uma apresentação visual dinâmica no monitor do

[23] Imagens mentais com uma forte componente visual.

computador[24]; - hoje em dia há mudanças na visão da matemática, pelo que a matemática é vista como uma continuada "procura de modelos"[25] e esta metáfora é seguramente visual. Senechal (1991) considera que o pensamento visual pode revolucionar a forma como se ensina a geometria, fundamentalmente deve-se repensar o papel que os modelos ou os programas de geometria dinâmica podem ter na educação geométrica a todos os níveis. Assim, a visualização de computador torna-se uma ferramenta matemática e científica e para se compreender, analisar e predizer teremos de nos envolver nalgum pensamento visual. Friedhoff e Benson (citados em Senechal, 1991) dizem que a visualização já não precisa de ser uma experiência interna solitária, já que o computador torna possível, que grupos de indivíduos, mesmo separados por grandes distâncias, colaborem em explorações visuais, sejam em esferas artísticas, de design ou científicas.

Love (1995) contudo adverte-nos que o software, ao oferecer-nos um maior controlo sobre imagética dinâmica externa pode ter como efeito o atrofiar da imagética mental interna, isto é o de pensar em termos de imagens. Também acrescenta se estivermos estado habituados a um mundo no qual a maior parte dos que aprendem a matemática sofrem por escassez de imagens pré-fabricadas, pode isto parecer um resultado pouco provável de melhoramento do ensino da geometria por computador, mas como com todas as inovações, há perdas e ganhos.

Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) ainda acrescentam outras razões para se investir no desenvolvimento do pensamento visual ao longo dos anos escolares e pré-escolares: - a visualização é uma parte essencial da inteligência humana; - o desenvolvimento visual não ocorre segundo uma abordagem linear; - uma abordagem fenomenológica para a aprendizagem das matemáticas pode dar ao estudante uma melhor compreensão do espaço e da forma; - presume-se que outras formas de aprender geometria, diferentes da abordagem euclidiana, que realcem o pensamento visual e confiem nos poderes gráficos e dinâmicos das ferramentas tecnológicas se ajustarão às exigências da nova sociedade; - porque nos movemos da visão que a matemática é uma estrutura lógica para aquela na qual a matemática é um processo de conjecturar e justificar ou refutar, ambientes

[24] Visão dos investigadores.
[25] Termo introduzido por Zimmmerman & Cunningham (1991)

experimentais para conjecturar, que envolvam o uso de objectos visuais deveriam jogar um papel importante; - na nova visão da educação matemática, os estudantes deveriam estar activamente envolvidos na situação de aprendizagem que eles criaram e aceitaram como uma situação problemática dentro da sua realidade. Apesar de parecer que os educadores matemáticos reconhecem o potencial poder do raciocínio visual, diz Dreyfus (1991), a sua implementação na sala de aula está faltando, quer porque os matemáticos ou quem desenvolve o currículo ou os professores não lhe estão a atribuir o seu completo valor ou estatuto[26], quer porque o raciocínio visual é difícil, necessitando de ser adquirido através de um trabalho reflectido e árduo. Dreyfus acrescenta ainda que modelos de raciocínio que são apropriados e úteis em diferentes situações visuais variam consideravelmente; diferentes formas de representar necessitam de ser construídas para diferentes tipos de representações visuais e cada uma abriga potencialmente problemas de aprendizagem específicos. O ensino baseado na visualização, obriga-nos a reaprender as nossas capacidades pedagógicas. Não só devemos compreender a matemática, como devemos saber como comunicar visualmente essa matemática (Cunningham, 1991). Wheatley (1997) nos seus estudos, tem encontrado que há uma forte relação entre o uso da imagética e o sucesso na resolução de problemas. Ele considera que a imagética joga aí um papel crucial. Acrescenta que a razão porque não tem sido reconhecida, é que muito do que se tem chamado matemática é a aprendizagem e o uso de regras que pouco sentido fazem aos alunos. É quando a ênfase é posta em actividades significativas, que a imagética se torna particularmente importante. Rieber (1994) aconselha-nos a ser previamente cautelosos não só, porque a visualização é um processo cognitivo grandemente influenciado pelo conhecimento anterior, podendo conduzir a conclusões erróneas[27] como também devido à forma como as pessoas desenvolvem cognitivamente a sua própria realidade, esta pode tornar-se confusa quando imersa em ambientes dominados completamente pelo visual[28].

---

[26] Senechal (1991) suspeita que o pensamento visual não é rigoroso.

[27] Rieber apresenta dois exemplos históricos: o registo de Percivall Lowell sobre os canais artificiais construídos em Marte e a viagem de Colombo ao procurar uma estrada para a China e Índia.

[28] Rieber refere-se às tecnologias como a realidade virtual.

Conclusão

Nas diferentes perspectivas de educação em geometria apresentadas neste texto, todas elas valorizam a componente visual dos aspectos matemáticos e geométricos, quer para uma compreensão cognitiva quer para uma compreensão didáctica e pedagógica da educação em geometria. A importância da visualização no processo de ensino/aprendizagem da geometria bem como a importância dos mecanismos essenciais à construção de significado matemático: a imagética e as capacidades espaciais, são realçados e mostrados cruciais. Os termos e mecanismos relacionados com *visualização* têm conotações e significados diversos, dependendo fundamentalmente do contexto, das perspectivas psicológicas, dos interesses pedagógicos e das intenções do professor. Assim, sabendo que o pensamento visual é difícil de ser desenvolvido, parece que é imprescindível que os processos cognitivos que o acompanham devam ser clarificados e tornados explícitos, para que se possa não só diminuir os problemas de aprendizagem que normalmente o acompanham como também identificar os modos de pensamento visual com que os alunos lidam.

Referências

Alsina, C. (1999). Painel "Geometria no currículo de Matemática". Em Departamento de Educ. da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa (Eds), *Ensino da Geometria no virar do milénio*, Lisboa, p. 65.

Battista, M. (1994). On Greeno´s environmental model view of conceptual domains: a spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 86-89.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 7-15.

Brown, D. e Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary shool students in a mathematical reasoning. Proceedings of PME XVII, pp. 137-144.

Burrill, G. (1997). The NCTM Standards: Eight years later. *School Science and Mathematics, 97*(6), 335-339.

Chazan, D. e Yerushalmy, M. (1998). Charting a course for secondary geometry. Em Richard Lehrer & Daniel Chazan (Eds), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 67 -90) Londres: Lawrence Erlbaum.

Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. Proceedings of the 5th Annual Conference of MERGA: Adelaide, 21-24 Maio.

Clements, D e Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. Em *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* . Nova Iorque: Macmillan.

Clements, D., Battista, M. e Sarama, J. 1998). Development of geometric and measurement ideas, Em Richard Lehrer e Daniel Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 201-226) Londres: Lawrence Erlbaum.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 67-76). Washington: MAA.

DelGrande, J. (1990) Spatial Sense. *Arithmetic Teacher*, Fev, pp. 14-20.

Dorfler, W. (1991). Meaning: images schemata and protocols. *Proceedings Fifteen PME conference*, Assisi, Volume I, pp. 17-32.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical thinking . Em P. Nesher e J. Kilpatrick. (Eds). *Mathematics and Cognition* (pp 113-134). Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education, Plenary address to PME XV, *Proceedings Fifteen PME conference*, Assisi, Volume I, p. 33-48.

Dreyfus, T. (1995).Imagery for diagrams. Em Rosamund Sutherland & John Mason (Eds), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 3-17). Nova Iorque: Springer.

Emmorey, K. Kosslyn, S., e Bellugi, U. (1993). Visual imagery and visual-spatial language: Enhanced imagery abilities in deaf and hearing ASL signers. *Cognition*, *46*, 139-181.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Goldenberg, P. e Cuoco, A.(1998). What is a dynamic geometry? Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 351 -368) Londres: Lawrence Erlbaum.

Goldenberg, P., Cuoco, A. e Mark. J. (1998). A Role for Geometry in General Education. Em R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44) Londres: Lawrence Erlbaum.

Gravemeijer, K. (1998). From a different perspective: Building on students' informal knowledge. Em R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 45-66) Londres: Lawrence Erlbaum.

Gray, E. & Pitta, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on Cognition development in elementary Arithmetic. Em O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of 23th PME conference *(Vol. 3, pp 49-56), Haifa: Israel Institute of Technology, Department of Education in Tecnology and Science.*

Gorgorió, N. (1996). Choosing a visual strategy: the influence od gender on the solution process of rotations problems. Em Luis Puig & Angel Gutiérrez (Eds.), Proceedings of 20th PME conference *(Vol. 3, pp 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática.*

Guay, R. e McDaniel, E. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children Journal for Research in Mathematics Education ?*, pp. 211-215*

Guttierrez, (1996). Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. Em L. Puig e Gutierrez (Eds.), Proceedings of 20th PME conference *(Vol. 3, pp 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática.*

Guzmán, M. (1996). El Rincon de la Pizarra*. Madrid: Ediciones Pirâmides.*

Guimarães, H. (1990). Ensino da Matemática nos anos 90 - uma leitura dos *Standards*. *Profmat, Actas*, Vol 1, pp. 11-26.

Hershkowitz, R., Parzysz, B e Dormolen, J. (1996). Space and shape. Em Alan Bishop e outros, *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 161 – 204) . Londres: Kluwer.

Hershkowitz, R. (1998). Organization and freedom in geometry learning and teaching. Em R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (p. 489-494). Londres: Lawrence Erlbaum.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, January* 74, 11-18.

Kilpatric, J. e Moura, E. (1999). Reflexões sobre os *Standards*. *Educação em matemática, 55*, 43-46.

Kiser, L. (1987). Spatial-visual ability: can computer visualization Facilitate achievement? *Educational Technology, Nov,. 36-40.*

Latner, L e Hadar, N. (1999). Storing a 3D image in the working memory. In Orit Zaslavsky (Ed.), Proceedings of 23th PME conference (Vol. 3, pp 201-208), Haifa: Israel Institute of Technology, Department of Education in Tecnology and Science.

Lea, H. (1990) Spatial concepts in the Kalahari. In Orit George Booker, Paul Cobb and Teresa Mendicuti (Ed.), Proceedings of 14th PME conference (Vol. 2, pp 259-266), México: Program Committe of the 14th PME Conference.

Lehrer, R., Jacobson, C., Thoyre, G. e Kemery, V. (1998). Developing understanding of geometry and space in the primary grades. Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 169-200) Londres: Lawrence Erlbaum.

Lehrer, R. & Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children´s reasoning about space and Geometry. Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 137-167) Londres: Lawrence Erlbaum.

Love, E. (1995).The Functions of Visualizations in Learning Geometry. Em Rosamund Sutherland e John Mason (Eds), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 125-141). Nova Iorque: Springer

Malkevitch, J. (1991). Geometry: Yesterday, today and tomorrow. Em Joseph Malkevitch (Eds.), *Geometry ´Future*, (pp. 1-13). COMAP, Inc.

Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical resoning. Em R. Sutherland e J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 97-116). Nova Iorque: Springer.

Mason, J. (1995). Mathematical Screen Metaphors. Em Rosamund Sutherland e John Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (pp. 291-308). Nova Iorque: Springer

Mesquita, A. (1999). On developing tridimensional space at school. In Orit Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of 23th PME conference* (Vol. 1, p. 298), Haifa: Israel Institute of Technology, Department of Education in Tecnology and Science

Middleton, J. e Corbett, R. (1998). Sixth -grade students´conceptions of stability in engineering contests. Em R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 249-266) Londres: Lawrence Erlbaum.

Miles, F. (2000) A Picture is worth a thousands words. http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome11/art9.htn; 13/3.

Mitchelmore, M. (1976). Cross-cultural on concepts of space and geometry. Em J. Larry Martin (Ed), *Space and Geometry*, (pp. 143-184). Georgia: The Georgia Center for the study of lesrning and teaching mathrematics and the Department of Mathematics Education, University of Georgia.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

National Council of Supervisors of Mathematics (1990). A Matemática para o século XXI. *Educação e matemática, 14,. 23-25.*

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Nelson, B. (1997). Learning about teacher change in the context of mathematics education reform: where are we going? Em E. Fennema & Barbara Scott Nelson (Eds.), *Mathematics Teachers in Transition,* (pp. 403 – 420). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Nemirovsky, R. e Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 99-131.

Olive, J. (1998). Opportunities to explore and integrate mathematics with the Geometer´s Sketchpad. Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 109-135) Londres: Lawrence Erlbaum.

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students´ learning. Em O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of 23th PME conference* (Vol. 1, pp 220-234), Haifa: Israel Institute of Technology, Department of Education in Tecnology and Science.

Pallascio, R., Talbot, L., Allaire, R. e Mongeau, P. (1989). L`incidence de l`environment sur la perception et la représentation d`objects géométriques. *Proceedings of PME XIII*, pp. 82-89.

Pegg, J. e Davey, G. (1998). Interpreting student understanding in geometry: a symthesis of two models. Em Richard Lehrer e Daniel Chazan (Eds), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 109-135) .Londres: Lawrence Erlbaum.

Pesci, A. (1995). Visualization in Mathematics and graphical mediators: an experience with 11-12 Year old pupils. Em Rosamund Sutherland & John Mason (Eds), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 33-51). NY: Springer.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1956). *The Child´s conception of space.* Londres: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B. e Szeminska, A. (1960). *The Child´s conception of geometry*. NY: Basic Books.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 42-46.

Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative racionality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 595 - 610.

Presmeg, N. (1995). Preference for visual methods: an international study *Proceedings of PME XIX*, Recife, Vol 3, pp 58-65.

Ponte, J., Matos, J. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática e Desenvolvimento Curricular* (versão de trabalho). Lisboa.

Rieber, L. (1994). Visualization as an aid to problem-solving: examples from history. EDRS, ED 373773.

Schell, V. (1998). Introduction to the Special Issue: Elements of geometry in the learning of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*(2, 3) , 1-3.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking, Em Joseph Malkevitch (Eds), *Geometry´Future*, (p. 15-21), COMAP, Inc. USA.

Simon, M. (1997). An imperative for research on mathematics teacher development. Em Elizabett Fennema & Barbara Scott Nelson (Eds), *Mathematics Teachers in Transition,* (p. 55 – 86). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Solano, A. & Presmeg, N. (1995). Visualization as a relation of images. *Proceedings of PME XIX,* Recife, Vol 3, pp 66-73.

Tartre, L. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 21, nº 3, p. 216-229.

Veloso, E. (1998). Geometria: temas actuais: materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. & Ponte, J. (1999). Introdução, Em Departamento de Educ. da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa (Eds), *Ensino da Geometria no virar do milénio*, Lisboa, PT, p. 1-5.

Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 369-394) Londres: Lawrence Erlbaum.

Young, J. (1982). Improving spatial abilities with geometric activities *Arithmetic Teacher*, Setembro, pp. 38-43.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, 21(1), pp. 14-23.

Wheatley, G and Brown, D. (1994). The construction and representation of images in mathematical activity. In João Pedro da Ponte and João Filipe Matos (Eds.), *Proceedings of 18th PME conference* (Vol. 1, pp 81), Lisboa: Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Wheatley, G (1997). Reasoning with images in mathematical activity. Em Lyn D. English (ed.), *Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images*, (281- 297). Londres: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Zech, L., e outros (1998). An introduction to geometry through anchored instruction. Em R. Lehrer e D. Chazan (Eds), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 439-463). Londres: Lawrence Erlbaum.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors´ Introduction: What is Mathematical Visualization? Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematic*s (pp 1-7). Washington: MAA.