EIEM 2017

encontro de investigação em educação matemática

instituto de educação universidade de lisboa

11 e 12 de novembro 2017

O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

2017

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

Livro de Atas do EIEM 2017

Encontro de Investigação em Educação Matemática

O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

Editores:

Hélia Oliveira

Leonor Santos

Ana Henriques

Ana Paula Canavarro

João Pedro da Ponte

Isabel Vale

Margarida Rodrigues

Neusa Branco

Teresa Pimentel

Local:

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

Título:

Livro de Atas do EIEM 2017, Encontro de Investigação em Educação Matemática

ISSN: 2182-0023

Editores: Hélia Oliveira, Leonor Santos, Ana Henriques, Ana Paula Canavarro, João Pedro da Ponte, Isabel Vale, Margarida Rodrigues, Neusa Branco, Teresa Pimentel

Corpo de Revisores:
Alexandra Pinheiro, Ana Barbosa, Angélica Martínez, Cristina Loureiro, Elisabete Cunha, Elvira Santos, Ema Mamede, Eugenio Lozano, Helena Martinho, Helena Rocha, Hélia Jacinto, Irene Polo-Blanco, Isabel Vale, João Pedro da Ponte, Leonor Santos, Lina Brunheira, Lina Fonseca, Lurdes Serrazina, Margarida Rodrigues, Maria João Nunes, Maria Paula Rodrigues, Nélia Amado, Neusa Branco, Paulo Dias, Rosa Ferreira, Susana Carreira, Teresa Pimentel, Teresa Neto.

Edição:
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Gabinete de Edição:
Hélia Oliveira e Nicole de Jesus

Apoios:
Universidade de Lisboa
Instituto de Educação
Fundação para a Ciência e a Tecnologia
Agrowell
Flores Romeira - Roma

Índice

TEMA DO ENCONTRO

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: PERSPETIVAS CURRICULARES

Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ulisboa.pt

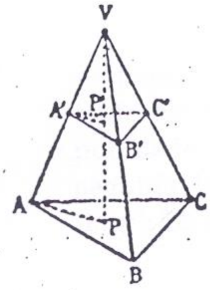
Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

A geometria tem tido ao longo das últimas décadas um tratamento curricular bastante diverso. Pensando no séc. XX, pode dizer-se que é provavelmente a área da matemática em que as opções curriculares foram variando de forma mais significativa. No início desse século, a geometria era reconhecida como uma área importante da matemática e, consequentemente, da matemática escolar. Numa Escola profundamente elitista, a matemática era então considerada como a área do saber preferencialmente adequada para desenvolver capacidades intelectuais necessárias àqueles que iriam ocupar posições de chefia. Sendo a geometria euclidiana o primeiro exemplo do processo de axiomatização, a geometria era considerada o contexto indicado para desenvolver nos alunos o raciocínio dedutivo. Esta área foi assim associada, durante anos, à prova e demonstração. A título ilustrativo, apresenta-se, de seguida, um extrato do manual escolar único[1] relativo à Geometria, 5.ª classe, correspondendo ao atual 9.º ano (figura 1).

[1] À época existia apenas um manual escolar oficialmente aprovado pelo Ministério de Educação.

Teorema

369. *Cortando uma superfície piramidal por dois planos paralelos, cada um dos quais corta tôdas as arestas dum dos ângulos sólidos, obtém-se para secções planas dois polígonos semelhantes.*



Suponhamos, para fixar ideias, que os dois planos $A B C$ e $A' B' C'$, estão ambos do mesmo lado do vértice da superfície, como se representa na figura.

As rectas $A B$ e $A' B'$ são paralelas porque resultam da intersecção de dois planos paralelos com um plano secante. Pela mesma razão são paralelos os segmentos $A C$ e $A' C'$, $B C$ e $B' C'$ e proporcionais (n.º 206) a $A B$ e $A' B'$. Os ângulos A e A', tendo os lados directamente paralelos, são iguais, o mesmo sucedendo a B e B', C e C'. Logo: as secções teem os ângulos iguais e os lados proporcionais e são por isso semelhantes (n.º 118).

c. d. d.

Figura 1. Extrato de um manual escolar anterior aos anos 70 do séc. XX[2]

Nos finais dos anos 50 do séc. XX, emerge uma mudança curricular na matemática habitualmente designada por *Movimento da Matemática Moderna* que tem grande expressão na Europa e em diversos outros países, como os Estados Unidos da América e o Canadá. As grandes finalidades do ensino da matemática passam a ser melhorar a formação científica dos quadros, dar ferramentas ao cidadão em geral para melhor compreender o mundo que o rodeia, e preparar mais adequadamente os alunos do ensino secundário para o ensino superior.

Em termos de mudança de conteúdos, e em particular com vista ao terceiro objetivo enunciado, antecede-se a introdução de novas áreas da matemática, como sejam as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a lógica matemática e probabilidades e estatística. É de fazer notar que a partir do séc. XIX se deu a criação de muitas novas áreas da matemática. Há mesmo quem afirme que o conhecimento matemático produzido neste período de tempo equivale a todo o que tinha sido desenvolvido até então. Contudo, tal não tinha tido até à data, implicações para a Matemática escolar, que se mantinha ao longo dos tempos praticamente inalterável.

No que diz respeito a abordagens de ensino, muito embora houvesse a preocupação de melhorar a aprendizagem da matemática e a sua compreensão por parte dos alunos, este

[2] Fonte: Amorim, P. (1937). *Compêndio de Geometria para as classes IV, V e VI* (7ª Edição). Coimbra: Coimbra Editora.

movimento acaba por reforçar o formalismo e simbolismo da matemática, por influência da escola *bourbakista* (que se mantém desde a crise dos fundamentos da matemática).

Pode afirmar-se que várias foram as mudanças preconizadas neste movimento que tiveram um impacto importante no ensino da geometria, mas sem dúvida um facto muito marcante foi o discurso proferido pelo matemático francês Dieudonnée, na primeira reunião de preparação da reforma curricular, que ocorreu em Royaumont, França, em 1959. Nesse discurso, o matemático defende uma nova abordagem da geometria, recorrendo ao cálculo vetorial, criando grande perplexidade na assistência. Afirma que o *slogan* "Abaixo Euclides!" resume numa frase o que pensa sobre o sentido da mudança curricular (OECE, sd). De uma abordagem marcada pela abstração, passa-se assim a uma outra igualmente marcada pela abstração e muito distanciada da nossa realidade envolvente. Em Portugal, o novo currículo surge no início dos anos 70, primeiramente a título experimental, ao nível do ensino secundário. Poder-se-á dizer que a figura mais proeminente por este processo de mudança curricular no nosso país é a do matemático José Sebastião e Silva, autor de manuais para os alunos e guias de apoio para os professores. A título ilustrativo, apresenta-se de seguida um extrato de um desses manuais escolares (figura 2).

TEOREMA. *Toda a afinidade* Φ *determina uma aplicação linear* Φ_o *(bijectiva) no conjunto dos vectores situados no domínio de* Φ.

Demonstração:

a) Seja Φ uma transformação afim de espaço $\mathcal{E}$. Então, como vimos no número anterior, Φ determina uma aplicação Φ_o de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$ segundo a fórmula:

$$\Phi_o(\overrightarrow{AB}) = \Phi(B) - \Phi(A) \quad , \quad \forall A, B \in \mathcal{E}$$

É claro que Φ_o é bijectiva, tendo-se

$$\Phi_o^{-1}(\overrightarrow{AB}) = \Phi^{-1}(B) - \Phi^{-1}(A).$$

Para simplificar a escrita, vamos pôr $\Phi_o = f$ *e omitir as setas sobre as letras* u, v,..., *o que não traz perigo de confusão.*

Consideremos dois vectores u, v quaisquer e seja $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$, $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$. Então:

$$u + v = \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad f(u+v) = \overrightarrow{A'C'}$$

e como $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = f(u) + f(v)$, vem

$$(1) \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

Em particular, se $v = -u$, tem-se $f(u+v) = f(0) = 0$ e portanto

$$(2) \quad f(u) + f(-u) = 0 \text{ ou seja } f(-u) = -f(u)$$

108

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

Consideremos agora um vector *u* e um número real *a*. Se $a = 0$ ou $u = 0$, tem-se obviamente $f(au) = af(u) = 0$. Se $a \neq 0$ e $u \neq 0$, verifica-se um dos seguintes casos:

1.º caso: a *é um número natural* n. Se $n = 1$, tem-se obviamente $f(au) = af(u)$. Se $n > 1$, tem-se

$$au = u + \ldots + u \quad (n \text{ vezes})$$

e, aplicando (1) repetidamente, vem

$$f(au) = f(u) + \ldots + f(u) \quad (n \text{ vezes}) \text{ e portanto } f(au) = af(u).$$

2.º caso: a *é um número fraccionário* > 0. Seja $a = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e ponhamos

$$v = \frac{1}{n} u$$

Então $u = nv$, $au = mv$ donde

$$f(u) = n f(v), \quad f(au) = m f(v)$$

e portanto

$$f(au) = \frac{m}{n} f(u) = a f(u)$$

(cont.)

Figura 2. Extrato de um manual escolar dos anos 70 do séc. XX[3]

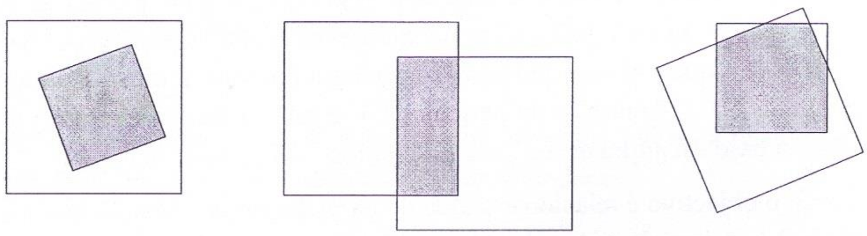
[3] Fonte: Sebastião e Silva, J. (1975). *Compêndio de Matemática*, *Curso complementar do Ensino Secundário* (3º volume). Lisboa: Edições GEP.

É nos finais dos anos 70 início de 80 que, com o descrédito deste novo movimento curricular, se equaciona uma vez mais a necessidade de repensar o currículo de matemática e, consequentemente, o que é saber geometria. Contudo, em Portugal, a necessária revisão curricular só ocorre no início dos anos 90. Neste período de tempo, o currículo de matemática vai sofrendo diversos cortes, por razões bastante diversas, como seja a sua extensão ou dificuldades de aprendizagem dos alunos em certos tópicos, perdendo toda a sua orientação de fundo.

No currículo de 1991, de um tópico de matemática remetido para segundo plano e geralmente deixado para o fim de cada ano de escolaridade, a geometria passa a ser vista como uma parte importante da Matemática escolar. Tomando como ponto de partida a intuição geométrica dos alunos, em particular a sua intuição espacial, pensa-se ser possível desenvolver a compreensão do espaço envolvente em que a criança se move. É nesta época que a investigação em educação matemática em Portugal começa a tomar expressão (Ponte, Matos, & Abrantes, 1998) e a contribuir para a continuação do processo de desenvolvimento curricular nas décadas seguintes.

No currículo de 2007, a geometria é considerada como um campo para os alunos resolverem problemas e tarefas de exploração e de investigação com desafios intelectualmente estimulantes e propiciadores do desenvolvimento do raciocínio geométrico, onde se incluem a capacidade de visualização, de formulação de conjeturas, de argumentação e de demonstração. Em particular, designamos a capacidade de visualização a que permite ao aluno criar imagens (mentais ou com suporte de papel e lápis ou da tecnologia) e usá-las de forma eficaz para descobrir e compreender a matemática. A título ilustrativo, apresenta-se de seguida um extrato de uma tarefa proposta nos materiais de apoio para o 7.º ano que acompanhavam o programa de matemática do ensino básico (figura 3.).

1. A sobreposição parcial de dois quadrados, não necessariamente com o mesmo lado, gera um polígono, exemplificado na figura pelas zonas sombreadas.



Dá exemplos de polígonos que se podem obter por sobreposição e de polígonos que não se podem obter. Mostra como podem ser obtidos.

Figura 3. Tarefa proposta nos materiais de apoio para o professor na primeira década do séc. XXI[4]

Não ficam igualmente ignoradas as potencialidades da geometria como um importante contexto para desenvolver a modelação, estabelecendo conexões com outras áreas

[4] Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo*. Lisboa: DGIDC, ME.

dentro e fora da matemática. Para que tal aconteça, há que destacar o importante apoio que o uso das diversas representações matemáticas e das suas inter-relações podem constituir no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

A investigação em educação matemática, nas últimas décadas, tem dado atenção a aspetos centrais no campo da geometria como o raciocínio espacial e a visualização. Em particular, múltiplos estudos têm-se focado no papel dos processos visuais na prova em geometria e na resolução de problemas, assim como no uso da tecnologia (Jones & Tzekaki, 2016). De facto, o desenvolvimento das novas tecnologias veio criar outras oportunidades para o trabalho escolar em geometria, favorecendo uma abordagem exploratória no estudo dos objetos geométricos e suas propriedades. Em Portugal, começa com o recurso ao LOGO.GEOMETRIA, passa pelo *The Geometer's Sketchpad* e o *Cabri-Géomètre*, e mais recentemente centra-se no Geogebra que apresenta a grande vantagem de ser um software de acesso livre. A investigação realizada na última década internacionalmente evidencia que essas tecnologias digitais têm suscitado uma variedade de estudos em diversos tópicos de geometria e sobre importantes processos matemáticos associados à prova e às definições (Sinclair et al., 2016). Se, por um lado, se observa que o trabalho em ambientes digitais na geometria tem produzido resultados prometedores quanto às capacidades de argumentação, generalização e prova (Jones & Tzekaki, 2016), por outro, constata-se que áreas fundamentais para o ensino como o desenho de tarefas e a prática do professor com tecnologia em geometria têm recebido escassa atenção da investigação (Sinclair et al., 2016).

Em síntese, pode afirmar-se que nos últimos 70 anos a geometria escolar tem vindo a sofrer marcantes mudanças no que respeita aos seus objetivos e modos de ensinar e simultaneamente constituído um vasto campo de estudo pela diversidade de perspetivas e questões pertinentes que se levantam, quer na sua aprendizagem, quer no seu ensino, quer ainda na formação de professores. São estes temas que merecem particular destaque no Encontro de Investigação em Educação Matemática, subordinado ao tema *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, realizado no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, nos dias 11 e 12 de novembro de 2017, e de que a presente publicação dá conta.

Esta publicação inclui três secções. A primeira apresenta a primeira conferência plenária do encontro, proferida por Michael De Villiers, Universidade de Stellenbosch, África do Sul, intitulada *Some Reflections on the Van Hiele Theory of Learning Geometry*. Neste artigo, o autor revisita a Teoria de Van Hiele e evidencia questões importantes que emergem desta teoria para o desenho de tarefas com recurso a contextos de geometria dinâmica, bem como para futura investigação sobre o papel da demonstração e da hierarquização dos níveis preconizados por Van Hiele.

Esta mesma secção apresenta o texto da segunda conferência plenária, proferida por Ángel Gutiérrez, Universidade de Valência, Espanha, intitulada *Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático. Teoría y práctica*. Neste artigo, o autor apresenta investigação focada no ensino da geometria de alunos de diferentes níveis de escolaridade essencialmente dotados em matemática, em particular no seu desenvolvimento das capacidades de generalização e de visualização. Partindo de referenciais teóricos para analisar as respostas dos alunos a problemas desafiantes para este grupo de alunos, fundamenta uma proposta metodológica que permite desenvolver, por progressivos níveis de exigência cognitiva, atividades associadas ao raciocínio geométrico.

Tomando por base a investigação internacional e nacional entretanto desenvolvida, o Grupo de Discussão 1 foca-se no *Ensino e aprendizagem da geometria*. Nesta segunda secção da presente publicação podem encontrar-se os textos das intervenções presentes neste grupo assim como um texto de abertura da autoria das suas dinamizadoras, Isabel Vale (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo) e Teresa Pimentel (Escola Secundária de Santa Maria Maior, Viana do Castelo).

A terceira secção é dedicada ao Grupo de Discussão 2, subordinado ao tema *Formação de professores em ensino da geometria*. Para além de um texto introdutório ao tema, da autoria das dinamizadoras do grupo, Margarida Rodrigues (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa) e Neusa Branco (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém), podem encontrar-se nesta secção os textos das intervenções realizadas neste grupo de discussão.

Esperamos que esta publicação, que faz um ponto da situação da investigação portuguesa atual sobre o *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, completada com os contributos de dois reconhecidos investigadores em educação matemática a nível internacional, em particular no ensino e aprendizagem da geometria, possa inspirar e impulsionar a continuação da investigação nesta área.

Referências

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense Publishers.

Organisation Européenne de Coopération Économique (sd). *Mathématiques nouvelles*. OCDE.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Sinclair, N., Bussi, M. B., de Villiers, M., Jones, K. et al. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education, 48*(5), 691-719.

CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS

REVISITING THE VAN HIELE THEORY

Michael de Villiers

Mathematics Education, University of Stellenbosch, South Africa

profmd1@mweb.co.za

Abstract: This paper gives a review of research on the Van Hiele Theory over the past 30 years, and highlights some important issues regarding theoretical implications for specifically designing learning activities in dynamic geometry contexts, as well as issues for further research such as the role of proof and hierarchical class inclusion.

Keywords: Van Hiele theory, dynamic geometry, levels of thinking, conceptual structuring.

Introduction

The Van Hiele theory originated in the respective doctoral dissertations of Dina van Hiele-Geldof and her husband Pierre van Hiele at the University of Utrecht, Netherlands in 1957. While Pierre's dissertation mainly tried to explain why pupils experienced problems in geometry education (in this respect it was **explanatory** and **descriptive**), Dina's dissertation was about a teaching experiment and in that sense is more **prescriptive** regarding the ordering of geometry content and learning activities of pupils. The most obvious characteristic of the theory is the distinction of five discrete thought levels in respect to the development of pupils' understanding of geometry.

The main reason for the failure of the traditional geometry curriculum was attributed by the Van Hieles to the fact that the curriculum was presented at a higher level than those of the pupils; in other words they could not understand the teacher nor could the teacher understand why they could not understand! Although the Van Hiele theory distinguishes between five different levels of thought, we shall here only focus on the first four levels as they are the most pertinent ones for secondary school geometry. The general characteristics of each level can be described as **Visual Recognition**, **Analysis of Properties**, **Ordering**, and **Deduction**.

Note that in a certain sense the transition from Level 1 to Level 2 involves a transition from an inactive-iconic handling of concepts to a more symbolic one, to use Bruner's familiar concepts. More simply put, the attainment of Level 2 involves the acquisition of the technical language by which the properties of the concept can be described. However, the transition from Level 1 to Level 2 involves more than just the acquisition of language. It involves recognizing certain new relationships between concepts and the refinement and renewal of existing concepts.

For a student to progress from Level 1 to Level 2 regarding a particular topic (e.g. the quadrilaterals), a significant re-arrangement of relationships and a refinement of concepts have to occur. There is therefore far more in this transition than merely a verbalization of intuitive knowledge; the verbalization goes together with a restructuring of knowledge. This restructuring must first occur before students can start exploring the logical relationships between these properties at Level 3.

Level 3 also represents a completely different network of relations than Level 2. Where the network of relations at the Level 2 involves the *association of properties* with types of figures and relationships between figures according to these properties, the network of relations at the Level 3 involve the *logical relationships* between the properties of figures. The network of relations at the Level 3 no longer refer to concrete, specific figures, nor do they form a frame of reference in which it is asked whether a given figure has certain properties. The typical questions that are asked at Level 3 are whether a certain property follows from another, or can be deduced from a particular subset of properties (in other words whether it could be taken as a definition or is a theorem) or whether two definitions are equivalent.

The network of relations for the First and Second thought levels are therefore quite different from the Third (Van Hiele, 1973, p. 90):

> The reasoning of a logical system belongs to the Third Level of thought. The network of relations, which is based on a verbal description of observed facts, belongs to the Second Level of thought. These two levels have their own networks of relations where the one is distinct from the other: one either reasons in the one network of relations or in the other.

The primary and middle school geometry curriculum

In South Africa we still have a geometry curriculum heavily loaded in the senior secondary school with formal geometry, and with relatively little content done informally in the primary school. (E.g. little similarity or circle geometry is done in the primary school). On average, pupils' performance in the South African matric (Grade 12) geometry was far worse than in algebra. Why?

The Van Hiele Theory supplies an important explanation. For example, research by De Villiers and Njisane (1987) showed that about 45% of pupils investigated in Grade 12 in KwaZulu had only mastered Level 2 or lower, whereas the examination assumed mastery at Level 3 and beyond! Similar low Van Hiele levels among secondary school pupils have been found by Malan (1986), Smith and De Villiers (1990) and Govender (1995). In particular, the transition from Level 1 to Level 2 posed specific problems to second language learners, since it involves the acquisition of the technical terminology by which the properties of figures need to be described and explored. This requires sufficient time, which is not available in the presently overloaded secondary curriculum.

It seems clear that no amount of effort and fancy teaching methods at the secondary school will be successful, unless we embark on a major revision of the primary school geometry curriculum along Van Hiele lines. The future of secondary school geometry thus ultimately depends on primary school geometry!

In Japan for example pupils already start off in Grade 1 with extended tangram, as well as other planar and spatial, investigations (e.g. see Nohda, 1992). This is followed up continuously in following years so that by Grade 5 they are already dealing formally with the concepts of congruence and similarity; concepts that are only introduced in Grades 8 and 9 in South Africa. Similarly in Taiwan where geometry is started early, it is reported in a study by Wu and Ma (2006) that 28.3% of Grade 6 learners were already at Van Hiele 3, whereas the same percentage of learners at Van Hiele Level 3 in South

Africa, only occurred in Grade 11 (De Villiers & Njisane, 1987; De Villiers, 1987). More recently, Feza and Webb (2005) found that only 5 out of 30 (16.7%) Grade 7 learners interviewed in South Africa, had reached Van Hiele Level 2. It seems no wonder that in international comparative studies in recent years, Japanese and Taiwanese school children have consistently outperformed school children from South Africa, as well as other countries.

Although the recent introduction of tessellations in South African primary schools is to be greatly welcomed, many teachers and textbook authors do not appear to understand its relevance in relation to the Van Hiele theory. Although tessellations have great aesthetic attraction due to their intriguing and artistically pleasing patterns, the fundamental reason for introducing it in the primary school is that it provides an intuitive visual foundation (Van Hiele 1) for a variety of geometric content, which can later be treated more formally in a deductive context.

For example, in a triangular tessellation pattern such as shown in Figure 1, one could ask pupils the following questions:

(1) identify and colour in parallel lines

(2) what can you say about angles *A*, *B*, *C* , *D* and *E* and why?

(3) what can you say about angles *A*, *1*, *2*, *3* and *4* and why?

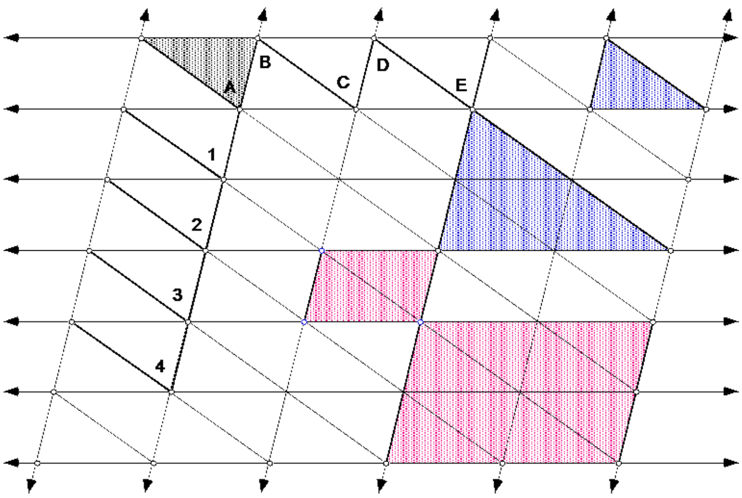


Figure 1. Visualization

In such an activity pupils will realize that angles *A*, *B*, *C*, *D* and *E* are all equal since a half turn of the grey triangle around the midpoint of the side *AB* maps angle *A* onto angle *B*, etc. In this way, pupils can be introduced for the first time to the concept of "*saws*" or "*zig-zags*" (alternate angles). Similarly, pupils should realize that angles *A*, *1*, *2*, *3* and *4* are all equal since a translation of the grey triangle in the direction of angles *1*, *2*, *3* and *4* consecutively maps angle *A* onto each of these angles. In this way, pupils can be introduced for the first time to the concept of "*ladders*" (corresponding angles). Pupils should further be encouraged to find different saws and ladders in the same and other tessellation patterns to improve their visualization ability.

Since each tile has to be identical and can be made to fit onto each other exactly by means of translations, rotations or reflections pupils can easily be introduced to the concept of congruency. Pupils can also be asked to look for different shapes in such tessellation patterns, e.g. parallelograms, trapezia and hexagons. They could also be encouraged to look for larger figures with the *same shape*, thus intuitively introducing them to the concept of *similarity* (as shown in Figure 1 by the shaded similar triangles and parallelograms).

Tessellations also provide a suitable context for the analysis of the properties of geometric figures (Van Hiele 2), as well as their logical explanation (Van Hiele 3). For example, after pupils have constructed a triangular tessellation pattern as shown in Figure 2, one could ask them questions like the following:

(1) What can you say about angles *A* and *B* in relation to *D* and *E*? Why? What can you therefore conclude from this?

(2) What can you say about angles *F* and *G* in relation to angles *H* and *I*? Why? What can you therefore conclude from this?

(3) What can you say about line segment *JK* in relation to line segment *LM*? Why? What can you therefore conclude from this?

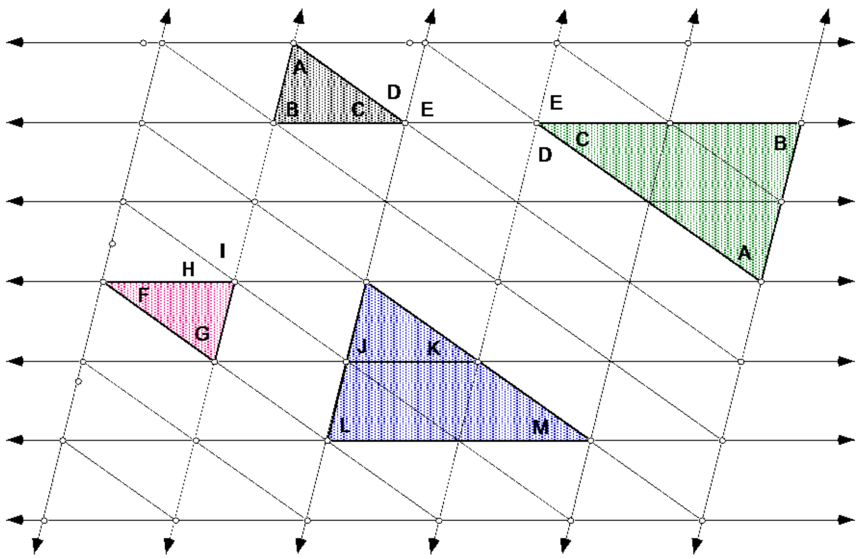


Figure 2. Analyzing

In the first case, pupils can again see that angle *A* = angle *D* due to a saw being formed. Also angle *B* = angle *E* due to a ladder. It is then easy for them to observe that since the three angles lie on a straight line, that the sum of the angles of triangle *ABC* must be equal to a straight line. They can also observe that this is true at any vertex, as well as for any size triangle or orientation, thus enabling generalization. In the second case, the exterior angle theorem is introduced and in the third case, the midpoint theorem. Such analyses are clearly just a short step away from the standard geometric explanations (proofs); all they now need is some formalization. In Figure 3 the three levels are illustrated for the discovery and explanation that the opposite angles of a parallelogram are equal.

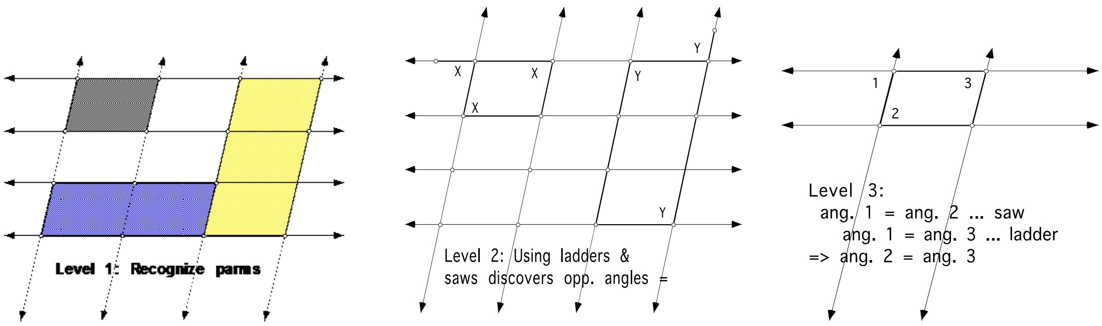


Figure 3. Three levels

Conceptual structuring

A very important aspect of the Van Hiele theory is that it emphasizes that informal activities at Levels 1 and 2 should provide appropriate "*conceptual substructures*" for the formal activities at the next level. Though different, this idea is somewhat similar to the idea of instructional *scaffolding* promoted by Wood, Bruner and Ross (1976).

Teachers often let their students measure the angles of a triangle with a protractor, and then let them add the angles (usually disregarding ‘deviations’ as due to experimental error) to ‘discover’ that they always add up to 180°.

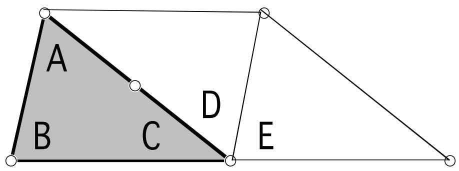


Figure 4. Using transformations to discover

However, from a Van Hiele perspective this is entirely inappropriate as it does not provide a suitable conceptual substructure in which the eventual logical explanation (proof) is implicitly embedded. In comparison, an activity with cardboard tiles or *Sketchpad* like the following from De Villiers (2003) provides such a substructure. For example, translate a triangle *ABC* by vector *BC*, and rotate triangle ABC around the midpoint of *AC* (see Figure 4). Let the students notice through dragging that the three angles at *C*, *D*, and *E* always form a straight line. Then ask students what they can say about angles *A* and *B* in relation to angles *D* and *E* in terms of the transformations carried out. Since angle *B* maps on to angle *E* by the translation, and angle *A* maps to angle *D* by the half-turn, angles *B* and *A* are equal to angles *D* and *E*, respectively. Clearly this provides a much more appropriate conceptual structure for an eventual explanation (proof) than simply letting students measure some angles of triangles.

Similarly, the activity of measuring the base angles of an isosceles triangle is conceptually inappropriate, but folding it around its axis of symmetry lays the foundation for a formal proof later. The same applies to the investigation of the properties of the quadrilaterals. For example, it is conceptually inappropriate to measure the opposite angles of a parallelogram to let pupils discover that they are equal. It is far better to let them give the parallelogram a half-turn to find that opposite angles (and sides) map onto each other, as this generally applies to all parallelograms and contains the conceptual seeds for a formal proof.

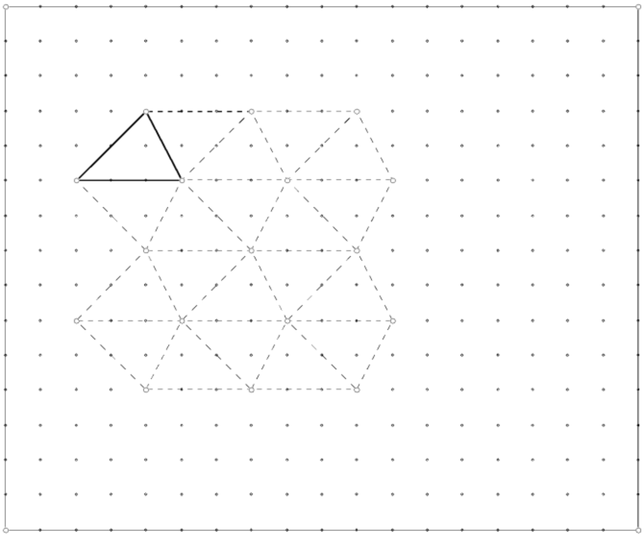


Figure 5. Using grids to produce tessellations

Recently I had a conversation with a teacher who quickly dismissed a fellow teacher's introduction to tessellations who first let his pupils pack out little cardboard tiles. This teacher felt that it produced untidy patterns, was ineffective and time consuming, and that one should just start by providing pupils with ready-made square or triangular grids and show them how they can then easily draw neat tessellation patterns (see Figure 5). Although such grids are a useful and effective way of drawing neat patterns, it is conceptually extremely important for pupils to at least have some experience of physically packing out tiles, i.e. rotating, translating, reflecting the tiles *by hand* (or at the very least with the aid of dynamic geometry software, illustrating or animating the underlying transformations).

The first problem is that it is possible to draw tessellation patterns on such grids without any clear understanding of the underlying isometries by which they can be created, which in turn are conceptually important for analyzing the geometric properties embeded in the pattern, and eventually for formalizing them into proofs.

More importantly, according to Bruner this *enactive* level, where the child manipulates materials like tiles directly, is a fundamental **prerequisite** (just as in the Van Hiele theory), for the *iconic* level, where the child now begins to deal with mental images of objects and no longer needs to manipulate them directly.

Defining and classifying

Traditionally most teachers and textbook authors have simply provided students with ready-made content (definitions, theorems, proofs, classifications, and so on) that they merely have to assimilate and regurgitate in tests and exams. Traditional geometry education of this kind can be compared to a cooking and bakery class where the teacher only shows students cakes (or even worse, only pictures of cakes) without showing them what goes into the cake and how it is made. In addition, they're not even allowed to try their own hand at baking!

Mathematicians and mathematics educators alike have often criticized the direct teaching of geometry definitions with no emphasis on the underlying process of defining. The well-known mathematician Hans Freudenthal (1973, pp. 416-418) also strongly criticized the traditional practice of the direct provision of geometry definitions as follows:

> ... the Socratic didactician would refuse to introduce the geometrical objects by definitions, but wherever the didactic inversion prevails, deductivity starts with definitions.
>
> ... most definitions are not preconceived but the finishing touch of the organizing activity. The child should not be deprived of this privilege ... Good geometry instruction can mean much - learning to organize a subject matter and learning what is organizing, learning to conceptualize and what is conceptualizing, learning to define and what is a definition. It means leading pupils to understand why some organization, some concept, some definition is better than another.

Just knowing the definition of a concept does not at all guarantee understanding of the concept. For example, although a student may have been taught, and be able to recite, the standard definition of a parallelogram as a quadrilateral with opposite sides parallel, the student may still not consider rectangles, squares and rhombi as parallelograms, since the students' concept image of a parallelogram is that not all angles or sides are allowed to be equal.

According to the Van Hiele theory understanding of formal, textbook definitions only develops at Level 3, and that the direct provision of such definitions to students at lower levels would be doomed to failure. In addition, if we take the constructivist theory of learning seriously (namely that knowledge simply cannot be transferred directly from one person to another, and that meaningful knowledge needs to be actively (re)-constructed by the learner), students ought be engaged in the activity of defining and allowed to choose their own definitions at each level. This implies allowing the following possible kinds of meaningful definitions for a rectangle at each Van Hiele level:

Van Hiele 1

Visual definitions; for example, a rectangle is a figure which looks like this (draws or identifies a quadrilateral with all angles 90° and two long and two short sides).

Van Hiele 2

Uneconomical definitions; for example, a rectangle is a quadrilateral with opposite sides parallel and equal, all angles 90°, equal diagonals, half-turn-symmetry, two axes of symmetry through opposite sides, two long and two short sides, etc.

Van Hiele 3

Correct, *economical* definitions; for example, a rectangle is a quadrilateral with two axes of symmetry though opposite sides.

Hierarchical *versus* Partition Definitions

Though children at an early age are capable of understanding class inclusions like "cats and dogs are animals", it appears substantially more difficult to accomplish with geometric figures. Generally, students' spontaneous definitions at Van Hiele Levels 1 and 2 as shown above would also tend to be *partitional*; in other words, they would not allow the inclusion of the squares among the rectangles (by explicitly stating two long and two short sides). In contrast, according to the Van Hiele theory, definitions at Level 3 are typically *hierarchical*, which means they allow for the inclusion of the squares among the rectangles, and would not be understood by students at lower levels.

In traditional instruction children are mostly introduced to rectangles, rhombi, parallelograms, etc. as '*static geometric objects*'. For example, a rectangle might be introduced by comparison to the shape of a door or a static picture in a book, but a door or a picture in a book cannot be transformed into a square (unless parts are cut off). So the concept rectangle is from the start introduced as a concept completely disjoint from a square. Unfortunately this partition classification schema then becomes entrenched and fossilized over time, and appears very resistant to change.

The conceptual difficulty of geometric class inclusion was already shown by Mayberry (1981) who found that only 3 out of 19 preservice mathematics teachers indicated squares also as rectangles on a sheet of some given quadrilaterals. Though valid criticism can be raised against some of questions used by Mayberry, as well as by Usiskin (1982) to evaluate hierarchical thinking, since given a set of different quadrilaterals, students might just mark the most general quadrilateral (e.g. a general parallelogram) when asked to mark it, simply *not knowing or realizing the intention* of the question was that all the special cases (e.g. rectangles, rhombi & squares) had to be marked as well.

In research conducted by De Villiers and Njisane (1987) with 4015 students from KwaZulu (South Africa) with some modified questions for evaluating hierarchical thinking (see Figure 6 for an example), some small improvement was observed. Nonetheless, it was found that very little progress occurred in their hierarchical thinking from Grade 9 to Grade 12, only ranging from 0.5% to 5.1% success with a 50% criterion on test items evaluating hierarchical thinking. This contrasts starkly with Van Hiele 3 proficiency levels in one-step and two-step deductions that respectively improved from 2.5% and 0.2% in Grade 9 to 63.3% and 42.6% in Grade 12. More recent findings by Atebe and Schäfer (2008) with a group of Nigerian and South African similarly showed that class inclusions of quadrilaterals among the investigated group from Grades 10-12 were almost completely absent.

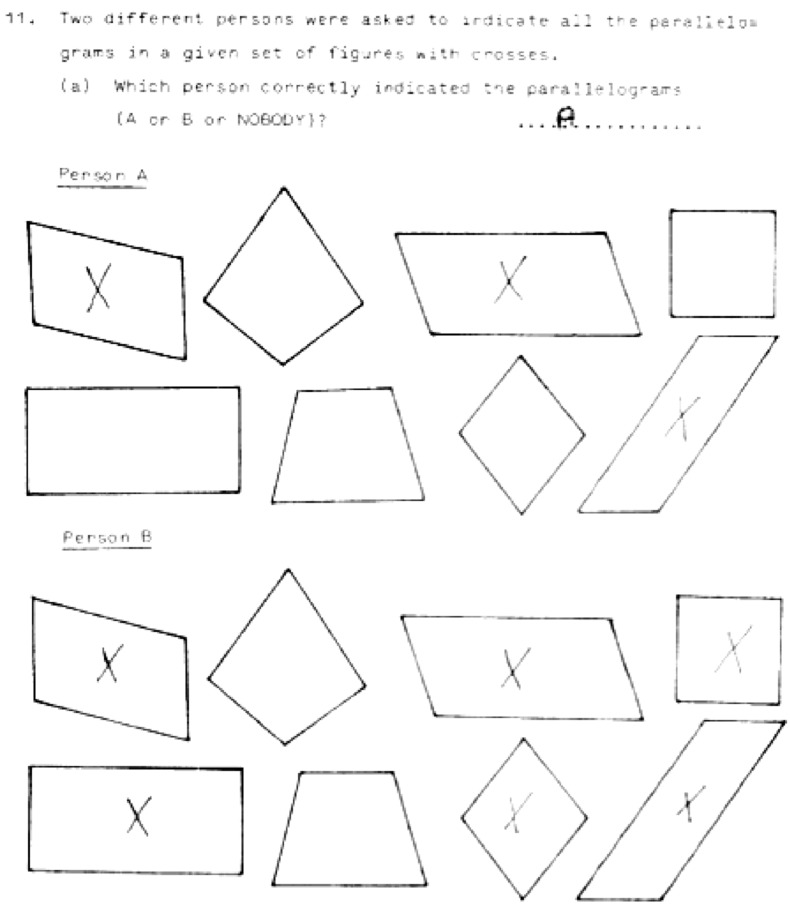


Figure 6. Testing class inclusion

Formal Van Hiele Level 3 definitions in textbooks are often preceded by an activity whereby students have to compare in tabular form various properties of the quadrilaterals, designed with the intention to assist students to see that a square, rectangle and rhombus have all the properties of a parallelogram, and that they therefore could be viewed as special cases. However, research reported in De Villiers (1994) shows that many students, even after doing tabular comparisons and other activities, if given the opportunity, still preferred to define quadrilaterals in *partitions*. (In other words, they would for example still prefer to define a parallelogram as a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel, but not all angles or sides equal).

For this reason, it seems that students should be allowed to formulate their own definitions irrespective of whether they are partitional or hierarchical. By then discussing and comparing in class the relative advantages and disadvantages of these two different ways of classifying and defining quadrilaterals (both of which are mathematically correct), students may be led to realize that there are certain advantages in accepting a hierarchical classification. For example, if students are asked to compare the following two definitions for the parallelograms, they might realize that the former is more **economical** than the latter:

hierarchical: A parallelogram is a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel.

partitional: A parallelogram is a quadrilateral with both pairs of opposite sides parallel, but not all angles or sides equal.

Clearly, partitional definitions are longer since they have to include additional properties to ensure the exclusion of special cases. Another advantage of a hierarchical definition for a concept is that all theorems proved for that concept then automatically apply to its special cases. For example, if we prove that the diagonals of a parallelogram bisect each other, we can immediately conclude that it is also true for rectangles, rhombi and squares. If however, we classified and defined them partitionally, we would have to prove separately in each case, for parallelograms, rectangles, rhombi and squares, that their diagonals bisect each other. Clearly to reproduce all these proofs is clearly very uneconomical. It seems clear that unless the role and function of a hierarchical classification is meaningfully addressed in class, many students will have difficulty in understanding why their intuitive, partitional definitions are not used.

Engaging students in defining geometric concepts like the quadrilaterals also provide valuable opportunity for students to learn how to construct counter-examples to incomplete or wrong definitions that they may come up with. For example, to be able to show that "*a kite is a quadrilateral with perpendicular diagonals*" is an incomplete definition to finding a quadrilateral with perpendicular diagonals that is not a kite.

One common difficulty students have in producing correct counterexamples to incomplete definitions is that they often try to refute a definition with a special case. For example, for the incorrect definition "*a rectangle is any quadrilateral with congruent diagonals*," some students will provide a square as a counterexample. But obviously a square is not a valid counterexample, because a square *is* a rectangle.

Therefore, students should already have developed a sound understanding of a hierarchical (inclusive) classification of quadrilaterals before being engaged in formally defining the quadrilaterals themselves (Casa & Gavin, 2009; Craine & Rubenstein, 1993). This development can be fostered by using interactive geometry software, figures created with flexible wire, or paper-strip models of quadrilaterals. Indeed, working with a group of five Grade 6 students using flexible wire and paper strip models, Malan (1986) found that they all were eventually able to successfully make hierarchical class inclusions of the quadrilaterals. In addition, he found that the language used for describing class inclusions was an important factor (e.g. calling a square a *special* rectangle).

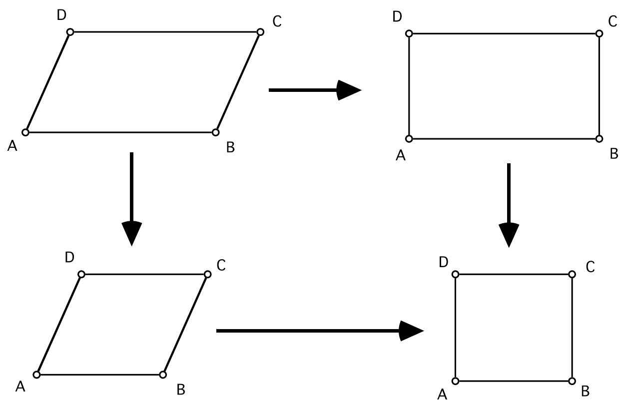


Figure 7. Dynamic transformation of parallelogram

Specifically, the dynamic nature of geometric figures constructed in dynamic software like *Sketchpad* may make the acceptance of a hierarchical classification of the quadrilaterals far easier at lower Van Hiele levels. For example, if students construct a quadrilateral with opposite sides parallel, then they will notice that they could easily drag it into the shape of a rectangle, rhombus or square as shown in Figure 7. In fact, it seems quite possible that at least some students would be able to accept and understand this even at Van Hiele Level 1 (Visualization), but further research into this particular area is needed. It is quite possible too that students' difficulties with hierarchical class inclusion is largely the result of traditional instructional practices, something already observed by Mayberry (1981:8) when she wrote: "It is conceivable that the observed levels are an artifact of the current curriculum or the instruction given to the students …".

The author has developed an experimental Java applet at http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/quadclassify.html where the most common quadrilaterals are not introduced via formal definition, but simply introduced visually. Through guided dragging it is envisaged that a child at Van Hiele 1 may, for example, more easily develop a *dynamic concept image* of a rectangle as one that can change into a square when all its sides become equal. Teachers and researchers are invited to try out these activities and any feedback or reports are most welcome.

Construction and measurement

It should first be pointed out that certain kinds of construction activities (with dynamic geometry software or by pencil and paper) are inappropriate at Van Hiele Level 1. For example, someone was recently overheard at a conference commenting that she was unpleasantly dismayed at how difficult young children found the task of constructing a "*dynamic*" square with *Sketchpad*. However, if the children were still at Van Hiele Level 1, then it is not surprising at all—how can they construct a square if they do not yet know its properties (Level 2) and that some properties are sufficient and others not (that is, know the logical relationships between the properties—Level 3)?

In fact, at Van Hiele Level 1 it would appear to be far more appropriate to provide children with ready-made sketches of quadrilaterals in dynamic geometry software, which they can then easily manipulate and first investigate visually. Next, they could start using the measure features of the software to analyze the properties (and learn the appropriate terminology) to enable them to reach Level 2. Only then would it be appropriate to challenge them to construct such dynamic quadrilaterals themselves, thus assisting the transition to Level 3.

In other words, students who are predominantly at Van Hiele Level 2 cannot yet be expected to logically check their own descriptions (definitions) of quadrilaterals, but they should be allowed to do so by accurate construction and measurement. For example, students could evaluate the following attempted descriptions (definitions) for a rhombus by construction and measurement as shown in Figure 8:

(1) A rhombus is a quadrilateral with all sides equal.

(2) A rhombus is a quadrilateral with perpendicular, bisecting diagonals.

(3) A rhombus is a quadrilateral with bisecting diagonals.

(4) A rhombus is a quadrilateral with one pair of adjacent sides equal and both pairs of opposite sides parallel.

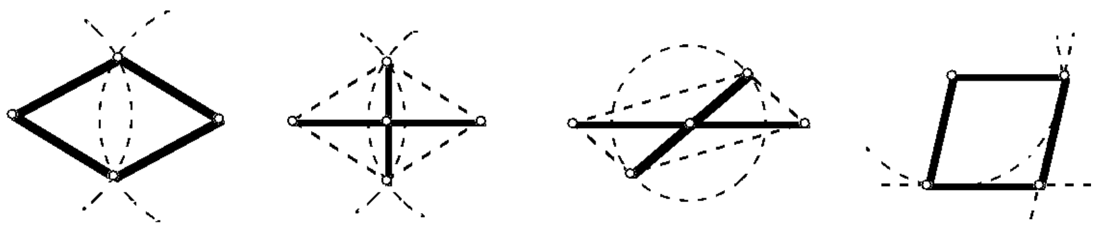


Figure 8. Construction and measurement

In the first example, students should construct a quadrilateral so that all four sides are equal, and then could notice that the diagonals always bisect each other perpendicularly, irrespective of how they drag it. This clearly shows that the property of "perpendicular bisecting diagonals" is a consequence of their constructing "all four sides equal." On the other hand, such testing also clearly shows when a description (definition) is incomplete (contains insufficient properties), as in the third example above.

Conceptually, constructions like these are extremely important for assisting the transition from Van Hiele Level 2 to Van Hiele Level 3. It helps to develop an understanding of the difference between a *premise* and *conclusion* and their *causal* relationship; in other words, of the logical structure of an "*if-then*" statement. For example, statement 4 could be rewritten by students as: "**If** a quadrilateral has one pair of adjacent sides equal and both pairs of opposite sides parallel, **then** it is a rhombus (that is, has all sides equal, perpendicular bisecting diagonals, and so on)". Smith (1940) reported marked improvement in students' understanding of "*if-then*" statements after letting them make constructions to evaluate geometric statements as follows:

> Pupils saw that when they did certain things in making a figure, certain other things resulted. They learned to feel the difference in category between the relationships they **put** into a figure - the things over which they had control - and the relationships which **resulted** without any action on their part. Finally the difference in these two categories was associated with the difference between the **given** conditions and **conclusion**, between the if-part and the then-part of a sentence.

Proof Phases in Geometry Education

According to the Van Hiele theory, for learning to be meaningful, students should become acquainted with, and explore, geometry content in phases which correspond to the Van Hiele Levels. A serious shortcoming of the Van Hiele theory, however, is that there is no explicit distinction between different possible functions of proof. For example, the development of deductive thinking appears first within the context of *systematization* at Van Hiele Level 3 (Ordering). Empirical research by De Villiers (1991) and Mudaly and De Villiers (2000) seem to indicate, however, that the functions of proof such as *explanation*, *discovery* and *verification* can be meaningful to students outside a systematization context, in other words, at Van Hiele Levels lower than Van Hiele Level 3, provided the arguments are of an intuitive or visual nature; for example, the use of symmetry or dissection.

From experience, it also seems that a prolonged delay at Van Hiele Levels 1 and 2 before introducing proof actually makes introducing proof later as a meaningful activity even more difficult. Examples of more fully developed proof and defining activities are available in De Villiers (2003, 2009). Defining quadrilaterals also provide an excellent context for introducing and developing students' understanding of necessary and sufficient conditions as discussed and illustrated in De Villiers et al (2009).

Concluding comments

The hierarchical, fixed order of progression through the Van Hiele levels (i.e. a pupil cannot be at level *n* without having passed through level *n-1*) have been statistically confirmed using Guttman analysis by several studies, for example, Mayberry (1981), Usiskin (1982) and De Villiers (1987). A comparative study by Smith and De Villiers (1989) of the Usiskin (1982) test and the University of Stellenbosch (1984) test further confirmed not only the hierarchical nature of the first three levels, but indicated that better classifications of students' thinking levels were obtained when more varied questions and more 'open-ended' items are used.

Pegg and Davey (1989) did a comparative study of the Van Hiele theory and the SOLO Taxonomy and found the descriptors of the latter more accurately described the geometric thinking levels of students. It is, however, still an open moot point whether such an achieved gain in 'accuracy' is worthwhile with the increased complexity of the Solo Taxonomy.

More research needs to be done on how using dynamic geometry software can enhance, or perhaps even impair, the development of geometric thinking. The use of dynamic geometry software with an experimental group of Malaysian students is reported in Idris (2009) to have contributed to them achieving higher Van Hiele levels than a control group who were taught traditionally without access to dynamic geometry.

A main concern of geometry education around the world is the continued poor level of geometric thinking among teachers themselves, and until this problem is adequately addressed, very little progress in the quality of geometry instruction is likely to be achieved. For example, Van Putten (2008) found in a post-test, that only 45% of pre-service FET (grades 10-12) teachers had reached Van Hiele Level 3 (though there was significant improvement from the pre-test).

Traditionally, the development of 'proof ability' is seen to occur from Van Hiele 3 Level onwards. Moreover, the Van Hiele model sees proof mainly as a means of 'verification', and it remains an open research question whether or not other functions of proof such as 'explanation' can be utilized and developed earlier at the visual and analytic Levels 1 and 2 respectively (see for example Mudaly & De Villiers, 2000; De Villiers, 2004). Can more explanatory visual-dissection proofs and arguments by symmetry (line, rotational, point) be developed and understood earlier by children?

Lastly, it seems one of the major outstanding research problems on the Van Hiele theory is the issue of hierarchical thinking (class inclusions). Is partition thinking the consequence of traditional geometry teaching strategies, and could hierarchical thinking be developed earlier at Van Hiele levels 1 and 2 through various strategies and using tools such as dynamic geometry software?

References

Atebe, H.U. & Schäfer, M. (2008). “As soon as the four sides are all equal, then the angles must be 90°”. Children’s misconceptions in geometry. *African Journal of Research in Science, Mathematics & Technology Education*, *12*(2), 47-66.

Bruner, J.S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.

Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31-48.

Casa, T.M. & Gavin, M.K. (2009). Advancing Elementary School Students’ understanding of quadrilaterals. In T. Craine & R. Rubenstein (2009). *Understanding Geometry for a Changing World* - 71st Yearbook (pp. 205-219), Reston, VA: NCTM.

Craine, T.V. & Rubenstein, R.N. (1993). A Quadrilateral Hierarchy to Facilitate Learning in Geometry. *Mathematics Teacher*, *86*, 30–36.

De Villiers, M.D. & Njisane (1987). The Development of Geometric Thinking among Black High School Pupils in KwaZulu (R.S.A.). In *Proceedings of the Eleventh PME-conference* (Vol. 3, pp.117-123), Montreal, July 1987.

De Villiers, M.D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele Theory: Some critical comments*. University of Stellenbosch: RUMEUS. (Available from: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHieleCritique-87.pdf)

De Villiers, M.D. (1991). Pupils’ needs for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras*, *26*, 18-27. (Available from: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/needs.pdf)

De Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18. (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/classify.pdf)

De Villiers, M.D. (1998). To teach definitions or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of PME 22* (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch: PME. (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/define.htm)

De Villiers, M.D. (2003). *Rethinking Proof with Sketchpad 4*. Key Curriculum Press, USA.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers’ understanding of proof. *The International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *35*(5), 703-724. (Available from http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vanhiele.pdf)

De Villiers, M. (2009). *Some Adventures in Euclidean Geometry*. Lulu Publishers. (Available for purchase as PDF from: http://www.lulu.com/content/7622884

De Villiers, M., Govender, R. & Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. In T. Craine & R. Rubenstein (2009). *Understanding Geometry for a Changing World*- 71st Yearbook (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Feza, N. & Webb. P. (2005). Assessment standards, Van Hiele levels, and grade seven learners’ understandings of geometry. *Pythagoras*, *62*, 36-47.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education* monograph series (Vol. 3). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Govender, M. (1995). *Pupils' proof-writing achievement in circle geometry*. Unpublished B.Ed. dissertation, University of Durban-Westville.

Govender, R. & De Villiers, M. (2003). Constructive Evaluation of Definitions in a Dynamic Geometry Context. (2003). *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, *7*(1), 41-58. (Available online at http://mathnet.kaist.ac.kr/mathnet/kms_tex/980829.pdf).

Gutierrez, A., Pegg, J. & Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proving abilities in 3-dimensional geometry. In *Proceedings of the 28th PME Conference*, (Vol. 2, pp. 511-518). Bergen, Norway: PME.

Hoffer, A. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher, 74* (January), 11- 18.

Idris, N. (2009). The impact of using Geometer's Sketchpad on Malaysian students' achievement and Van Hiele geometric thinking. *Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 94-107.

Mayberry, J.W. (1981). *An Investigation of the Van Hiele levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers*. Unpublished doctoral dissertation, Univ. of Georgia, Athens.

Malan, F.R.P. (1986). *Onderrigstrategieë vir die oorgang van partisie denke na hierargiese denke in die klassifikasie van vierhoeke: enkele gevallestudies.* [Teaching strategies for the transition of partition thinking to hierarchical thinking in the classification of quadrilaterals.] (Internal report no. 3). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Research Unit of Mathematics Education (RUMEUS).

Mudaly, V. & De Villiers, M. (2000). Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. *Pythagoras*, *52* (August), 20-23. (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf)

Nixon, E.G. (2002). *An investigation of the influence of visualization, exploring patterns and generalization on thinking levels in the formation of concepts of sequences and series.* Unpublished Masters thesis. Pretoria: UNISA.

Nixon, E.G. (2005). *Creating and learning abstract algebra: Historical phases and conceptual levels*. Unpublished DPhil Dissertation. Pretoria: UNISA.

Nohda, N. (1992). Geometry teaching in Japanese school mathematics. *Pythagoras, 28*, April, 18-25.

Pegg, J., & Davey, G. (1989). Clarifying level descriptors for children's understanding of some basic 2-D geometric shapes. *Mathematics Education Research Journal, 1*(1), 16- 27.

Sáenz-Ludlow, A. & Athanasopoulou, A. (2007). Investigating properties of isosceles trapezoids with the GSP: The case of a pre-service teacher. In D. Pugalee, A. Rogerson, & A. Schinck (Eds), *Proceedings of the 9th International Conference:*

Mathematics Education in a Global Community, (pp. 577-582). University of North-Carolina, September 7-12, 2007. (Available from: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_SaenzLudlow-AthanasopoulouPaperEdit.pdf)

Smith, E. & De Villiers, M. (1989). A comparative study of two Van Hiele testing instruments. *Poster presented at the 13th International Conference of PME*, Paris. (Available from: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHiele-test-comparison.pdf)

Smith, R. R. (1940). Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. *The Mathematics Teacher*, *33*, 99-134, 150-178.

The Mathematical Association of South Africa (1978). *South African Mathematics Project: Syllabus Proposals*. Pretoria: MASA. (Now Wits: AMESA).

University of Stellenbosch (1984). *Levels of thinking in geometry: Tests 1 & 2*. Unit for Research in mathematics Education, Researchers: P.G. Human & M.D. de Villiers. (Respectively available at:
http://www.scribd.com/Geometry-Levels-of-Thinking-Test-1-1984/d/30882207
http://www.scribd.com/doc/30882101/Geometry-Levels-of-Thinking-Test-2-1984

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Final report of the CDASSG Project. Chicago: Univ. of Chicago.

Van Hiele, P.M. (1973). *Begrip & Inzicht*. Muusses: Purmerend.

Van Putten, S. (2008). *Levels of Thought in Geometry of Pre-service Mathematics Educators according to the van Hiele Model*. Unpublished Master's thesis, University of Pretoria. (Retrieved 26 May 2010 from: http://upetd.up.ac.za/thesis/available/etd-05202008-130804/unrestricted/dissertation.pdf)

Wood, D., Bruner, J.S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Psychology and Psychiatry*, *17*.

Wu, D. & Ma, H. (2006). The distribution of Van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In J. Novotna et al. (Eds.), *Proceedings of PME 30*, (Vol 5, pp. 409-416). Prague: PME.

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA A ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO: TEORÍA Y PRÁCTICA

Ángel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia (España)
angel.gutierrez@uv.es

Resumen: La enseñanza a estudiantes con talento matemático en los grupos ordinarios de clase presenta varios retos para los profesores, tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria. El principal de ellos es cómo organizar la enseñanza para atender las necesidades específicas de estos estudiantes. Las diversas áreas de las matemáticas escolares (aritmética, geometría, álgebra, etc.) son contextos en los que los estudiantes pueden desarrollar diferentes capacidades matemáticas. La geometría es adecuada para desarrollar las capacidades de generalización y visualización, entre otras. En este contexto, presento resultados de investigaciones llevadas a cabo para diseñar, experimentar y evaluar problemas de geometría que ayuden a descubrir y entender contenidos geométricos o a desarrollar las capacidades mencionadas antes y que sean adecuados para todos los estudiantes de la clase pero que sean también cognitivamente exigentes para los estudiantes con talento matemático. Describiré los marcos teóricos que nos permiten evaluar las respuestas de los estudiantes, las estrategias de diseño de este tipo particular de problemas y algunos resultados de investigaciones experimentales que estamos desarrollando en mi grupo de investigación.

Palabras clave: actividades matemáticas ricas, demanda cognitiva, generalización en geometría, talento matemático, visualización.

Introducción

Los sistemas educativos de numerosos países, entre ellos España, identifican a un estudiante como *superdotado* cuando obtiene al menos 130 puntos en un test estandarizado de cociente intelectual (CI). Pero también hay estudiantes que no llegan a obtener un CI de 130 puntos pero destacan en un área específica, por ejemplo las matemáticas. En español, se les suele denominar estudiantes con *altas capacidades matemáticas* o con *talento matemático*. Voy a utilizar ambos términos como equivalentes para referirme, en el contexto escolar, a los estudiantes que poseen un razonamiento matemático claramente superior al de los estudiantes ordinarios de su edad o grado escolar. En relación con el término *talento matemático*, quiero resaltar que todos los estudiantes tienen talento matemático, mayor o menor, si bien lo utilizaré, como se hace en la literatura de didáctica de las matemáticas, para referirme a los estudiantes cuyo talento matemático es notablemente elevado en relación con el de sus compañeros.

La investigación didáctica nos ofrece descripciones de características diferenciadoras de los estudiantes con talento matemático respecto de sus compañeros (Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Miller, 1990; Ramírez, 2012). Algunas de estas características, relacionadas con los objetivos de este texto, son la facilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas, la capacidad de generalización y de transferencia de conocimientos, la habilidad para desarrollar razonamiento abstracto, la habilidad para resolver problemas de manera flexible, creativa y original y, por supuesto, el gusto por resolver problemas que les supongan un reto.

La enseñanza de la geometría tiene algunas características diferenciadoras respecto de otras áreas de las matemáticas. Una de ellas está relacionada con el uso de representaciones visuales de los conceptos, propiedades y relaciones geométricos, en forma de objetos manipulables, figuras impresas o representaciones en ordenadores; esto hace que la capacidad de visualización sea una herramienta necesaria para la comprensión y el aprendizaje de conceptos y relaciones así como para la resolución de problemas geométricos. Otra característica diferenciadora es que la geometría sigue siendo el principal contexto matemático escolar para aprender a generalizar y demostrar.

La investigación didáctica ha prestado también atención a la relación entre capacidad de visualización y talento matemático, pudiendo observarse que diferentes autores han presentado resultados discrepantes. Krutetskii (1976), al describir los estilos de pensamiento matemático *analítico*, *visual* o *geométrico* y *armónico* y observar los estilos preferidos por los estudiantes con talento matemático, llegó a la conclusión de que estos estudiantes eran mayoritariamente de los tipos analítico y armónico. Presmeg (1986a) analizó los datos de Krutetskii y los resultados de sus propios experimentos (estudiantes de últimos grados de Educación Secundaria) para explicar por qué los estudiantes con talento matemático casi nunca eran visualizadores.

Otros estudios han obtenido resultados contrarios: Van Garderen (2006) observó (en estudiantes de 6.º grado y de Educación Secundaria elemental) que los estudiantes con talento matemático utilizaban la visualización con más frecuencia, y en formas más sofisticadas, que los otros estudiantes al resolver problemas, si bien las diferencias con los estudiantes medios no resultaron estadísticamente significativas. Análogamente, Escrivá (2016) planteó a estudiantes de 6.º grado de Primaria problemas que requieren el uso intensivo de la visualización y observó que todos los estudiantes cuyos resultados en la resolución de estos problemas mostraban su alta capacidad de visualización se encontraban entre los que obtenían mejores calificaciones en matemáticas, si bien otros estudiantes que también obtenían las mejores calificaciones mostraron una capacidad media en el uso de la visualización y dificultades para resolver algunos problemas. Diezmann y Watters (2000) afirmaron que existen muchos ejemplos de matemáticos destacados que poseen una alta capacidad de visualización y que han logrado avances importantes en las matemáticas gracias a esta capacidad. Por lo tanto, una buena capacidad de visualización puede ser un rasgo del talento matemático.

Presmeg (1986a) señaló que un objetivo importante de investigación didáctica debía ser el diseño de instrumentos adecuados para evaluar la capacidad de visualización de los estudiantes. En esta línea, el estudio de Webb, Lubinski y Benbow (2007) llegó a la conclusión de que es necesario incluir el uso de visualización entre los criterios para identificar a estudiantes con talento matemático, cosa que hicieron Rojas, Jiménez y

Mora (2009) y Escrivá (2016) al tratar de identificar características del talento matemático observando las respuestas de estudiantes a problemas de visualización.

El análisis de las publicaciones que tratan la relación entre visualización y talento matemático parece mostrar que la cantidad de estudiantes con talento matemático que prefieren usar el razonamiento analítico aumenta al pasar de Primaria a Secundaria elemental, a Secundaria superior y a la universidad. Un motivo sugerido por estas publicaciones es la creciente exigencia por los profesores de respuestas abstractas y formales (por tanto, de tipo analítico), si bien Stylianou (2001) sugirió que esta tendencia a rechazar el razonamiento visual estaba modificándose, incluso en la universidad.

En este texto me centraré en presentar investigaciones[1] que estamos desarrollando en la Universidad de Valencia sobre el aprendizaje por estudiantes con talento matemático de Primaria y ESO de contenidos geométricos escolares y de las capacidades de generalización y visualización. Presentaré casos de diseño de actividades escolares adecuadas para la enseñanza a grupos completos de clase, que incluyen tanto a estudiantes ordinarios como a estudiantes con talento matemático, y de respuestas a dichas actividades de estudiantes con talento matemático. También presentaré los marcos teóricos utilizados en esas investigaciones.

Marcos teóricos

Es muy frecuente que los estudiantes con talento matemático tengan dificultades en las clases ordinarias de matemáticas porque les resultan repetitivas (ellos no necesitan practicar tanto como sus compañeros para entender un concepto o aprender un algoritmo) y sin interés (los problemas que los profesores plantean al grupo les resultan muy fáciles). Una metodología de enseñanza adecuada para el conjunto de estudiantes de una clase ordinaria, en la que hay estudiantes con dificultades de aprendizaje, medios y con talento matemático, se basa en las *actividades matemáticas ricas* (Piggott, 2011). Se trata de actividades que plantean una secuencia de cuestiones o problemas relacionados con determinados contenidos matemáticos (conceptos, propiedades, relaciones, etc.) objeto de estudio, de manera que las primeras cuestiones son muy sencillas, para que todos los estudiantes de la clase puedan resolverlas, y las siguientes cuestiones van aumentando su complejidad y profundizando en los contenidos que se están estudiando. Este aumento en la complejidad permite que los estudiantes con diferentes grados de talento matemático avancen en la resolución de las cuestiones y encuentren otras cuya resolución les resulte interesante y motivadora.

Un problema al que se enfrentan los profesores de matemáticas y los investigadores en didáctica de las matemáticas es valorar correctamente la complejidad de las cuestiones o problemas que forman una actividad matemática rica. Esta complejidad se puede hacer operativa mediante el concepto de *demanda cognitiva*, definido como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito” (Stein, Smith, Henningsen, Silver, 2009, p. 1). Smith y Stein (1998) caracterizaron cuatro *niveles de demanda cognitiva* que permiten categorizar la complejidad del razonamiento matemático necesario para que un estudiante resuelva correctamente un problema. Las características de las respuestas correspondientes a los

[1] Las investigaciones presentadas son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

niveles de demanda cognitiva son las siguientes:

Memorización: solo necesitan repetir unos datos, fórmulas o definiciones memorizados o tomados directamente del enunciado del problema.

Algoritmos sin conexiones: consisten en aplicar rutinariamente un algoritmo ya conocido o en seguir unas instrucciones sencillas presentadas en el enunciado del problema. Esta forma de resolución no necesita que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos objeto de estudio que están implícitos en el problema.

Algoritmos con conexiones: se basan en aplicar un algoritmo complejo, es decir que no se puede aplicar rutinariamente, sino que obliga a los estudiantes a decidir cómo avanzar, pues el proceso de resolución no es evidente y tiene momentos de ambigüedad. Para ello, es necesario que los estudiantes hayan descubierto y comprendido los contenidos matemáticos implícitos en el problema y que vean cómo utilizarlos durante la resolución.

Haciendo matemáticas: respuestas en las que los estudiantes realizan razonamiento complejo y creativo. Estos problemas no pueden resolverse mediante un algoritmo y requieren razonamiento abstracto; además, sus enunciados no dan pistas sobre cómo resolverlos. Los estudiantes deben tener una buena comprensión de los contenidos matemáticos implícitos en el problema para hacer un correcto uso de ellos y elegir estrategias de resolución útiles.

Los niveles de demanda cognitiva permiten analizar los enunciados de los problemas (en particular de las actividades matemáticas ricas) para decidir si están correctamente organizados y si son adecuados para los estudiantes que van a resolverlos. También son útiles para analizar respuestas reales de los estudiante a un problema, lo cual nos ayuda, en nuestras investigaciones, a diferenciar a estudiantes con más o menos talento matemático (Benedicto, 2013; Benedicto, Jaime, Gutiérrez, 2015).

De acuerdo con Gutiérrez (1996), podemos distinguir tres componentes de la actividad de visualización en matemáticas: Las *imágenes mentales*, que son el elemento básico alrededor del cual tiene lugar la actividad de visualización. Los *procesos* de creación de imágenes mentales y de análisis de esas imágenes para la generación de nuevas imágenes, de otro tipo de información (por ejemplo, representaciones externas) o para la toma de decisiones. Las *habilidades de visualización* necesarias para poder realizar con eficacia los procesos de visualización y resolver con éxito los problemas matemáticos planteados.

En nuestras investigaciones actuales, nos centramos en la identificación de las imágenes mentales y las habilidades de visualización empleadas por los estudiantes con talento matemático para resolver problemas con fuerte carga visual, en particular problemas de geometría 3d. Para el análisis de las imágenes mentales tomamos como referencia los tipos de imágenes descritos por Presmeg (1986b):

- Imágenes *pictóricas concretas*: son imágenes figurativas realistas, como fotografías en la mente.
- Imágenes de *patrones*: representan de una forma visual relaciones matemáticas abstractas.
- Imágenes de *fórmulas*: reproducen una definición, fórmula, enunciado de un teorema, etc. tal como aparece en un libro, en la pizarra, en las notas del estudiante, etc.
- Imágenes *cinéticas*: son imágenes mentales que van acompañadas por movimiento de partes del cuerpo (cabeza, manos, etc.) como ayuda para crearlas,

analizarlas o comunicarlas.

- Imágenes *dinámicas*: son imágenes en movimiento. A diferencia del tipo anterior, en estas el movimiento es mental, pues está en las propias imágenes.

Gutiérrez (1996) recogió descripciones de habilidades de visualización propuestas por varios autores y las sintetizó en las siguientes habilidades:

- La habilidad de *identificación visual* es necesaria para aislar una figura del fondo complejo en el que se encuentra.
- La habilidad de *conservación de la percepción* ayuda a reconocer que las características geométricas de un objeto (real o imagen mental) percibidas visualmente se mantienen inalteradas aunque ese objeto cambie de posición o se oculte.
- La habilidad de *rotación mental* es necesaria para visualizar configuraciones en movimiento o para generar y analizar imágenes dinámicas.
- La habilidad de *identificación de posiciones en el espacio* ayuda a reconocer características de un objeto en relación con su posición respecto del observador o de otro objeto fijo.
- La habilidad de *identificación de relaciones espaciales* es necesaria para identificar relaciones internas entre dos objetos, o entre dos partes del mismo objeto, que se mantienen invariantes aunque el observador cambie de posición.
- La habilidad de *discriminación visual* ayuda a identificar semejanzas y diferencias entre dos o más objetos.

Otra parte interesante al observar la actividad de los estudiantes es identificar sus estilos de pensamiento (analítico, visual y armónico). Eligiendo con cuidado los problemas que se plantean, es posible obtener respuestas de diferentes estudiantes al mismo problema que muestran los tipos analítico y visual. De acuerdo con Krutetskii (1976):

- El pensamiento *analítico* se caracteriza por tener muy desarrollado el razonamiento lógico-verbal y poco desarrollado el razonamiento pictórico-visual.
- El pensamiento *visual* o *geométrico* se caracteriza por tener más desarrollado el razonamiento pictórico-visual que el razonamiento lógico-verbal.
- El pensamiento *armónico* se caracteriza por tener bien desarrollados ambos tipos de razonamiento, usando uno u otro según el problema que se resuelva, pero con predominio del razonamiento lógico-verbal.

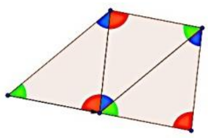
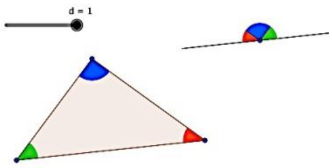
Investigación sobre aprendizaje de contenidos geométricos escolares

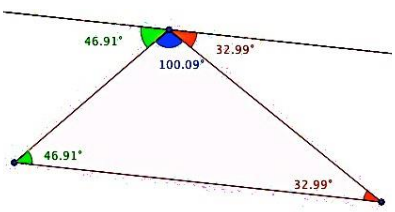
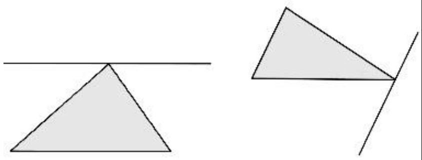
La enseñanza de la geometría en grupos que incluyen estudiantes con altas capacidades matemáticas puede hacerse en un contexto de aprendizaje por descubrimiento mediante el planteamiento de actividades matemáticas ricas. En nuestras investigaciones, nos centramos en diseñar y experimentar este tipo de actividades basadas en contenidos ordinarios, de manera que, además de enseñar los contenidos ordinarios de los libros de texto, permiten a los estudiantes con más talento matemático profundizar o ampliar el estudio del tema mientras los estudiantes medios trabajan en los contenidos curriculares ordinarios, los que tienen más talento matemático pueden lograr una comprensión más profunda. Analizaré una actividad diseñada para enseñar el valor de la suma de los ángulos de un polígono en 5.º de Primaria.

Los contenidos ordinarios del libro de texto que se usaba en el colegio donde hicimos este experimento presentan el concepto de ángulo interior de un polígono y calculan la *suma de los ángulos interiores* de triángulos y cuadriláteros. La actividad rica que diseñamos para enseñar estos contenidos incluyó, además, una aproximación a la demostración deductiva de la suma de los ángulos del triángulo, la enseñanza de la suma de los ángulos interiores de otros polígonos convexos con más lados y la obtención de la fórmula general de la suma de los ángulos interiores de un *n*-gono, mediante un proceso empírico de generalización. Las Tablas 1 y 2 presentan una síntesis de la actividad (que siempre pide justificar las respuestas) y el análisis de la demanda cognitiva requerida para la resolución de sus apartados. Benedicto (2013) ofrece una descripción más detallada de la actividad y un análisis completo.

La primera parte de esta actividad (Tabla 1) va presentando diferentes formas de verificar empíricamente que los ángulos de un triángulo suman 180º. El objetivo es acercar las formas de verificación empírica a la demostración deductiva típica (apartado 6), lo cual supone aumentar la complejidad del razonamiento que deben realizar los estudiantes para resolver correctamente la actividad, es decir, del nivel de demanda cognitiva de los apartados.

Tabla 1. Suma de los ángulos interiores de un triángulo en 5.º de Primaria (Benedicto, 2013)

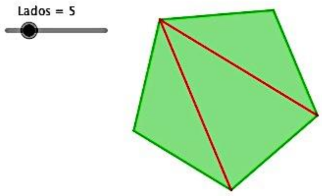
Enunciado	Demanda cognitiva
1. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Compruébalo en varios triángulos. ¿Se cumple para todos los triángulos? Justifica tu respuesta.	*Memorización* si el estudiante conoce la respuesta. *Algoritmos sin conexiones* si el estudiante no conoce la respuesta: dibuja varios triángulos, mide los ángulos y los suma.
2. ¿Cuánto suman los ángulos del triángulo? ¿Se cumple para todos los triángulos? Prueba con diversos triángulos. 	*Algoritmos sin conexiones*: el estudiante arrastra los vértices y observa que la suma de los ángulos siempre vale 180º. No necesita ser consciente de las relaciones implícitas entre los ángulos.
3. Observa el punto donde se ven los tres ángulos interiores del triángulo juntos. ¿Cuánto suman los tres ángulos? 	*Algoritmos con conexiones*: el estudiante manipula el ordenador para relacionar la suma de los ángulos con el ángulo llano. En sus respuestas a ambos apartados, debe usar esa relación.
4. Copiamos los tres ángulos del triángulo, de manera que sean consecutivos. ¿Cuánto vale su suma? Prueba con distintos triángulos. 	

Enunciado	Demanda cognitiva
5. Trazamos una recta paralela a un lado. ¿Cuánto suman los tres ángulos que tienen el vértice común? ¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo? 	*Algoritmos con conexiones*: el estudiante debe relacionar la suma de los ángulos con el ángulo llano y con los ángulos alternos internos. En su respuesta debe usar esas relaciones.
6. Explica, con la ayuda de las figuras y del apartado 5, pero sin usar el transportador, por qué la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. 	*Algoritmos con conexiones*: el estudiante se basa en la respuesta 5, para generalizarla, para lo cual necesita entender las relaciones matemáticas descubiertas empíricamente.

La segunda parte de la actividad (Tabla 2) plantea la extensión a la suma de los ángulos de cualquier polígono, basándose en la triangulación de los polígonos mediante sus diagonales desde un vértice. El objetivo es transformar los experimentos empíricos con polígonos de pocos lados en argumentos abstractos verbalizados para el polígono de 20 lados y algebrizados para el de *n* lados. Aquí también hay un aumento de la complejidad del razonamiento necesario para dar respuestas correctas al pasar al apartado 9b.

Tabla 2. Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo en 5.º de Primaria (Benedicto, 2013)

Enunciado	Demanda cognitiva
7. Traza una diagonal en un cuadrilátero. ¿En cuántos triángulos queda dividido? ¿Cuánto suman los ángulos de un cuadrilátero?	*Algoritmos sin conexiones*: el estudiante sigue las instrucciones del enunciado y utiliza el resultado aprendido en la primera parte de la actividad. No necesita ser consciente de la relación implícita entre la suma de los ángulos y la cantidad de triángulos.
8. Traza las diagonales desde un solo vértice de un pentágono. ¿En cuántos triángulos queda dividido? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un pentágono?	

<table>
<tr><th>Enunciado</th><th>Demanda cognitiva</th></tr>
<tr><td>
9. a) Observa los polígonos en el ordenador. Completa la tabla calculando la suma de los ángulos de cada polígono.


<table>
<tr><th>POLÍGONO</th><th>NÚMERO LADOS</th><th>NÚMERO TRIÁNGULOS</th><th>SUMA ÁNGULOS INTERIORES</th></tr>
<tr><td>TRIÁNGULO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>CUADRILATERO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>PENTÁGONO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>HEXÁGONO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>HEPTÁGONO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P. DE 20 LADOS</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P. DE N LADOS</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
b) ¿En cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos interiores?
c) ¿En cuántos triángulos se puede dividir un polígono general de n lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos?
</td><td>
a) Algoritmos sin conexiones: hasta el heptágono, el estudiante sólo necesita contar los triángulos y usar el resultado aprendido en los apartados anteriores. No necesita ser consciente de la relación implícita entre la suma de ángulos y la cantidad de triángulos.
b) Algoritmos con conexiones: para generalizar la relación empírica anterior al caso 20, el estudiante necesita aplicar la relación entre el número de lados del polígono y la suma de sus ángulos, pero puede prescindir de la relación con el número de triángulos.
c) Haciendo matemáticas: el enunciado no sugiere cómo hacer la generalización algebraica ni cómo justificarla. El estudiante necesita entender la triple relación entre el número de lados del polígono, la cantidad de triángulos y la suma de los ángulos del polígono. El estudiante debe mostrar su creatividad y capacidad de abstracción.
</td></tr>
</table>

Algunos profesores españoles plantean en los primeros grados de ESO actividades similares a esta, cuando sus alumnos ya tienen capacidad de generalización y manejan el lenguaje algebraico. La particularidad de nuestro experimento es que la actividad se plantea en Primaria, cuando los estudiantes ordinarios todavía no pueden hacer más que verificaciones empíricas. En los últimos grados de Primaria, todos los estudiantes pueden responder correctamente los apartados 1, 2, 7 y 8; la mayoría de estudiantes pueden responder también los apartados 3, 4 y la primera parte de la tabla de 9a; sólo los estudiantes con talento matemático de estos cursos estarán en condiciones de abordar con éxito los apartados 5, 6. Por tanto, esta actividad permite a los estudiantes ordinarios aprender los contenidos estándar del grado y a los estudiantes con talento matemático, algunos de los cuales ya utilizan el lenguaje algebraico elemental, profundizar o ampliar sus conocimientos y empezar a tomar contacto con los argumentos lógicos y con la demostración matemática. Así, todo el grupo de estudiantes resuelve la misma tarea pero los estudiantes con altas capacidades matemáticas pueden llegar más lejos.

Investigación sobre desarrollo de la capacidad de visualización

La geometría 3d es el área de las matemáticas escolares que más necesita de la capacidad de visualización. Por el mismo motivo, es un contexto muy útil para plantear actividades que ayuden a los estudiantes a mejorar su uso de las diferentes habilidades de visualización mencionadas en la sección de Marcos Teóricos, como las usadas por Escrivá (2016) que, en estos momentos, estamos desarrollando para experimentar desde 1º hasta 6º de Primaria. El objetivo de nuestra investigación es recoger datos para definir una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 2004) durante Primaria que: i) muestre diferencias entre los sucesivos grados y ii) muestre diferencias entre estudiantes con talento matemático y sus compañeros ordinarios. Las actividades de estos experimentos se basan en cubos reales, dibujados en papel y en el ordenador, para realizar manipulaciones de desarrollos planos, giros y secciones (Figuras 1 a 3).

Los diferentes tipos de actividades inducen al uso de ciertas habilidades de visualización y también permiten aplicar los pensamientos analítico y visual. Así, para resolver correctamente la actividad de la Figura 1, es necesario coordinar las figuras colocadas en varios desarrollos. Un estudiante visualizador lo hace imaginando un desarrollo cerrado formando el cubo, viendo mentalmente las posiciones de figuras que están juntas (p. ej., al cerrar el segundo desarrollo, la ballena mira a la cabeza de gato) y llevando esa relación a otro desarrollo (el primero). Un estudiante analítico prefiere resolver la actividad buscando una relación interna entre dos figuras de un desarrollo (p. ej., la tortuga está sobre la ballena y miran hacia el mismo lado) para llevarla a otro desarrollo.

Los tres desarrollos son del mismo cubo. Coloca las figuras que faltan, prestando atención a la posición de cada figura en su cara.

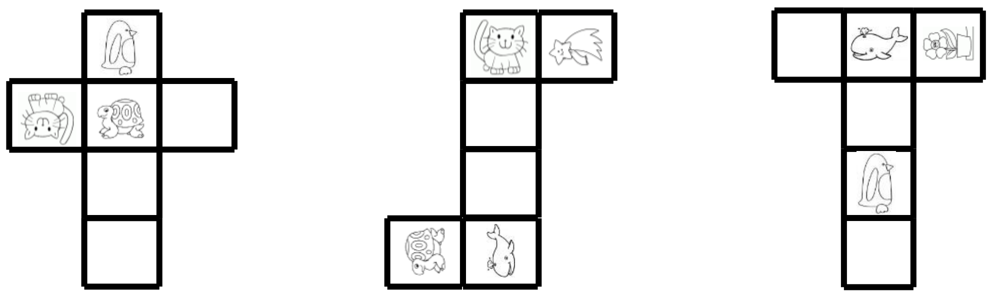


Figura 1. Actividad de desarrollos (Escrivà, 2016)

En cuanto a la actividad de la Figura 2, hemos identificado como más frecuentes una estrategia analítica consistente en emparejar dos caras (p. ej., el pato y la mariposa) y girarlas juntas y una estrategia visualizadora consistente en girar una cara (p. ej., el payaso del tercer cubo a la posición del payaso del cuarto cubo) y después hacer el mismo giro en otra cara (p. j., la rana; esto permite concluir que los cubos tercero y cuarto no son iguales).

Debajo ves fotos de varios cubos, pero se han mezclado. ¿Cuáles pertenecen al mismo cubo?

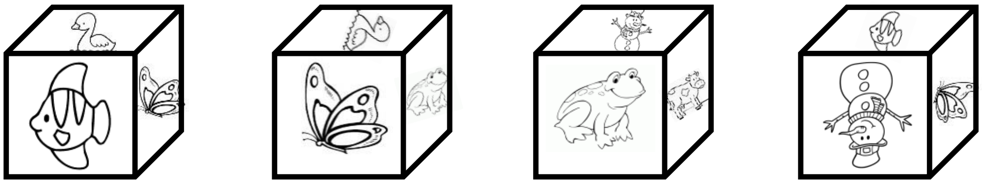


Figura 2. Actividad de giros (Escrivà, 2016)

Para resolver actividades de secciones como la de la Figura 3, es necesario poner en juego la habilidad de conservación de la percepción, ya que el cambio de posición del cubo hace que varíe la forma percibida de la sección. En estas actividades, los estudiantes también necesitan utilizar la habilidad de identificación visual, para poder aislar el polígono de la sección y para poder diferenciar, en los dibujos de cubos, entre las aristas del frente y las del fondo, pues con frecuencia los estudiantes con menos habilidad visual confunden unas con otras, lo cual les lleva a dar respuestas erróneas.

Un resultado de nuestros experimentos de enseñanza es que las habilidades de conservación de la percepción y de identificación visual parecen estar relacionadas ya que, cuando los estudiantes utilizaban eficazmente la habilidad de identificación visual (eran capaces de identificar sin error el polígono de la sección), también lo hacían con la habilidad de conservación de la percepción (eran conscientes de que el polígono de la sección no cambia de forma aunque se le vea variar al girar el cubo en la pantalla del ordenador). Sin embargo, la relación inversa no tiene por qué darse, pues había también estudiantes que mostraban un buen uso de la habilidad de conservación de la percepción pero tenían dificultades con la de identificación visual (no sabían identificar las aristas del cubo o de la sección).

Mira la sección marcada en el cubo. Dibújala en el cubo de la ficha. Después, dibuja la forma que puede tener la sección.

CUBO REAL **SECCIÓN** **FORMA DE LA SECCIÓN**

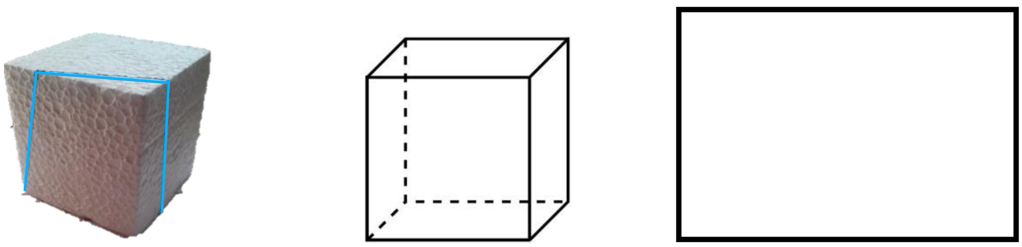


Figura 3. Actividad de secciones (Escrivà, 2016)

Para utilizar con éxito las diferentes estrategias de resolución de problemas vistas en los párrafos anteriores, es necesario emplear diversas habilidades de visualización. La Tabla 3 muestra que las habilidades más necesarias, por ser las usadas con más frecuencia en los tipos de actividades descritas en este texto, son las de identificación de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales.

Tabla 3. Habilidades de visualización más usadas en cada tipo de actividades

	Identificación visual	**Conserv. de la percepción**	**Rotación mental**	**Identif. de posic. en el espacio**	**Identif. de relaciones espaciales**	**Discriminación visual**
Desarrollos				X	X	X
Giros		X	X	X	X	
Secciones	X	X		X	X	X

Conclusiones

En este texto he presentado algunas propuestas metodológicas para la enseñanza de la geometría en clases ordinarias de Primaria cuyos estudiantes tienen una diversidad de intereses y capacidades matemáticas y entre los que hay estudiantes de talento matemático. Esta diversidad de estudiantes supone un reto para los profesores que quieren organizar una enseñanza personalizada que procure llevar a cada estudiante lo más lejos posible en su aprendizaje de las matemáticas. He presentado una propuesta metodológica basada en las actividades matemáticas ricas, formadas por una secuencia de problemas cada vez más complejos cuyo objetivo es permitir a todos los estudiantes del grupo trabajar en la resolución de los mismos problemas y avanzar en el estudio de los contenidos matemáticos tanto como puedan.

Para poder valorar la validez y calidad de las actividades matemáticas ricas, disponemos del modelo de los niveles de demanda cognitiva, que permite evaluar la complejidad del razonamiento matemático necesario para resolver correctamente un problema. He mostrado la aplicación de este modelo a una actividad rica de geometría plana que, en el contexto de 5º grado de Primaria, permite a los estudiantes con más dificultades descubrir los conocimientos básicos sobre la suma de los ángulos de los polígonos convexos mientras que los estudiantes con más talento matemático pueden avanzar hasta el descubrimiento de la relación general para un n-gono e incluso adentrarse en la exploración de los polígonos cóncavos.

El uso competente de la visualización es una ventaja, con frecuencia una necesidad, en el estudio de las matemáticas y, en especial, de la geometría. El desarrollo de esta capacidad es muy importante para el aprendizaje de la geometría espacial y, al mismo tiempo, la geometría espacial es un contexto muy adecuado para practicar y mejorar en el uso de la visualización. En este texto he presentado un modelo clásico de descripción de la actividad de visualización centrado en las relaciones entre procesos, imágenes y habilidades de visualización cuando estos intervienen en la resolución de problemas. La fusión de este modelo con los tipos de razonamiento matemático de Krutetskii constituye un marco teórico útil para organizar actividades para los estudiantes y para analizar y evaluar sus resoluciones.

Apoyado en este marco, he presentado ejemplos de actividades de geometría 3d y he analizado respuestas de estudiantes, algunos de ellos con altas capacidades matemáticas, que han participado en investigaciones experimentales llevadas a cabo por mi grupo de investigación.

Referencias

Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas* (tesis de máster de investigación). Valencia, España: Universidad de Valencia. Disponible en http://roderic.uv.es/ bitstream/handle/10550/32580/Clara 23-01-2014.pdf.

Benedicto, C., Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Diezmann, C. M., & Watters, J. J. (2000). Identifying and supporting spatial intelligence in young children. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(3), 299-313.

Escrivà, M. T. (2016). *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic* (tesis de maestría de investigación). Valencia, España: Universidad de Valencia. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/56732.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: PME. Disponible en http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent* (manuscrito no publicado). ERIC. Washington, EE.UU. Disponible en http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/ contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED321487.

Piggott, J. (2011). *Rich tasks and contexts* (manuscrito no publicado). Cambridge, G.B.: NRICH. Disponible en https://nrich.maths.org/5662.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar.

Rojas, S., Jiménez, W., & Mora, L. C. (2009). El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas. In *Actas del 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (documento electrónico sin paginación). Pasto, Colombia: ASOCOLME. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/709/1/eluso.pdf.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trayectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K., Smith, M. S., & Henningsen, M. A., Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York, EE.UU.: Teachers College Press.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: is the picture changing? In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* (vol. 4, pp. 225-232). Utrecht, Holanda: PME.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39*(6), 496-506.

Webb, R. M., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2007). Spatial ability: a neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology, 99*(2), 397-420.

GRUPO DE DISCUSSÃO 1

Ensino e Aprendizagem em Geometria

O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Isabel Vale

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo & CIEC

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Teresa Pimentel

Escola Secundária de Santa Maria Maior, Viana do Castelo

terpimentel@gmail.com

A importância da geometria

A geometria surgiu como uma atividade essencialmente prática, mas logo se alargou ao plano social, religioso e económico das primeiras civilizações, tornando-se presentemente um dos ramos da matemática mais bem estabelecidos e importantes, desde a robótica ao cinema, da cristalografia à arquitetura, da neurociência à própria natureza do universo. Na cultura ocidental, a geometria tem um lugar central em educação matemática. Um dos principais sucessos da geometria clássica deve-se a Euclides, ao apresentar o conhecimento geométrico dos gregos antigos sistematizado, indo mais longe do que um mero rol de factos conhecidos, e partindo de um conjunto de definições e proposições (axiomas) que através de dedução lógica permitem estabelecer uma série de resultados na forma de teoremas. Esta tem, até aos dias de hoje, constituído a base de grande parte da geometria ensinada nas escolas, permitindo desenvolver o sentido espacial dos estudantes, a intuição e a visualização, dando-lhes ferramentas intelectuais para resolver problemas práticos (JMC, 2001).

Quer no desenvolvimento da matemática nas antigas civilizações quer no desenvolvimento intelectual do ser humano, as propriedades espaciais e geométricas do meio físico foram as primeiras ideias matemáticas a surgir. No início da escolaridade as crianças já possuem muitos conceitos rudimentares de forma e espaço que constituem a base do conhecimento geométrico e do raciocínio espacial que deve ser desenvolvido ao longo dos anos. A geometria não só constitui um meio de descrever, analisar e compreender estruturas no mundo à nossa volta, mas também proporciona uma experiência matemática que complementa e apoia o estudo de outros temas como o número e a medida. Assim, a geometria oferece ferramentas poderosas para representar e resolver problemas em todas as áreas da matemática, noutras disciplinas escolares e em aplicações quotidianas não sendo deste modo de admirar que ocupe um lugar central em matemática e em todo o currículo escolar (NCTM, 2012).

Mais do que tudo, a geometria é parte integrante da nossa experiência cultural e de vários aspetos da vida, tocando a nossa sensibilidade visual, estética e intuitiva. Lida com problemas atraentes, interessantes e surpreendentes que apelam a uma forte capacidade visual, o que permite a crianças e adultos ter prazer na criação de desenhos e padrões que exibem elementos geométricos. Como resultado, pode ser um tópico que capta o interesse dos alunos, sobretudo aqueles para quem outras áreas da matemática são fonte para descontentamento, desinteresse e falhas em vez de excitação e criatividade, e nesse sentido pode conduzir a que mais alunos tenham sucesso em matemática (Jones, 2002). Deste modo parece que, em consequência, a geometria deveria ser um dos ramos da matemática mais fáceis de ensinar e aprender, mas não é o que se verifica genericamente. Há um conjunto considerável de trabalhos de investigação teóricos e empíricos sobre o ensino e aprendizagem da geometria (e.g. Duval, 1998; Jones & Mooney, 2003) que nos permitem avançar com algumas possíveis respostas. O problema pode dever-se a uma forte ênfase na linguagem descritiva e definições, mesmo que relativamente informais, em detrimento da resolução de problemas geométricos, o que pode resultar para o aluno numa progressão limitada em geometria durante os seus estudos escolares (Clements, 2003; Jones & Mooney, 2003). Por outro lado, como refere Del Grande (1990), a geometria tem sido difícil para os alunos devido à ênfase nos aspetos dedutivos e à negligência das capacidades espaciais subjacentes adquiridas durante as atividades de manipulação, que são pré-requisitos necessários para obter uma compreensão e domínio dos conceitos geométricos posteriores. Outra das dificuldades menos óbvias no ensino de geometria reside nas abstrações que fazemos – ilustramos objetos geométricos (por exemplo um eixo de reflexão) através de desenhos e diagramas, mas nenhum dos objetos pode ser visível, exceto no nosso "olho mental". Estes aspetos tendem a tornar a geometria um tema exigente para ensinar, de modo a apresentar o conteúdo aos alunos de uma forma estimulante e envolvente, que leve à compreensão, o que implica que deve ser feita uma escolha criteriosa sobre o que incluir no currículo e como o desenvolver (Watson, Jones & Pratt, 2013).

Ideias-chave no ensino e na aprendizagem da geometria

Uma definição mais recente de geometria é a atribuída ao matemático Christopher Zeeman: "A geometria compreende os ramos da matemática que exploram a intuição visual (o mais dominante dos nossos sentidos) para evocar teoremas, compreender uma prova, inspirar conjeturas, perceber a realidade e ter uma visão global" (Royal Society / JMC, 2001, p.12). Esta definição engloba o que pode ser pensado como a dupla natureza da geometria, na medida em que salienta, por um lado, uma das suas componentes mais práticas e relacionadas com a realidade, e por outro, uma área importante da teoria matemática. Isto significa, também, que a geometria pode ser vista ao nosso redor, sendo amplamente utilizada em arte, design, arquitetura, engenharia, etc.; mas, por outro lado, é um campo teórico que permite que geómetras e outros matemáticos, juntamente com cosmólogos e outros cientistas, trabalhem com objetos hipotéticos no espaço n-dimensional, usando, entre outras coisas, técnicas de visualização matemática com computadores potentes (Watson *et al.*, 2013).

O estudo da geometria contribui para ajudar os alunos a desenvolver as capacidades de visualização, pensamento crítico, intuição, perspetiva, resolução de problemas, conjeturas, raciocínio dedutivo, argumentação e prova. As representações geométricas podem ser usadas para ajudar os alunos a entender outras áreas da matemática: frações e multiplicação em aritmética, as relações entre os gráficos de funções e representações gráficas de dados em estatística.

Um aspeto que não pode ser esquecido presentemente é que o rápido avanço da tecnologia significa que os cidadãos agora e no futuro irão interagir com uma enorme variedade de formas e imagens exibidas em ecrã. Estas podem ser exigências ao nível do trabalho, ou apenas associadas ao lazer. Por conseguinte, a geometria tem um papel a desempenhar no desenvolvimento da cidadania, permitindo que os alunos interpretem, manipulem, controlem e criem essas imagens. O potencial das TIC constitui um apoio no ensino e a aprendizagem da geometria oferecendo boas oportunidades para desenvolver o raciocínio geométrico, desde a linguagem de programação (e.g. Logo; Scratch) às aplicações de geometria dinâmica (e.g. Cabri, Cinderela, Geogebra, Geometer's Sketchpad) que introduziram novos potenciais na sala de aula (Watson *et al*., 2013). Em particular as imagens visuais, sobretudo as que podem ser manipuladas no ecrã do computador, convidam os alunos a observar para fazer conjeturas e generalizações.

Nesta sequência, torna-se importante definir alguns conceitos básicos. De acordo com Zimmermann e Cunningham (1991) considera-se visualização como o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. Do mesmo modo, considera-se, de acordo com Clements e Battista (1992), o raciocínio espacial como o conjunto de processos cognitivos pelos quais as representações mentais dos objetos, relações e transformações espaciais são construídas e manipuladas. Embora as representações visuais tenham sido subestimadas por várias décadas, houve nos últimos tempos um ressurgimento do interesse pela visualização pois pode proporcionar algo mais profundo em matemática do que apenas o uso de fórmulas e, assim, contribuir para uma visão mais ampla da matemática. A visualização tem sido frequentemente citada como um processo na aprendizagem matemática, reconhecida como uma componente do raciocínio, profundamente envolvida com a resolução de problemas e até com a prova (e.g. Presmeg, 2014; Rivera, 2011; Vale & Pimentel, 2016; Zimmerman & Cunningham, 1991). Tanto o raciocínio espacial como a visualização desempenham papéis vitais, não apenas na própria geometria e na educação em geometria, mas também, de forma mais ampla, em matemática e em educação matemática (Jones, 2001; Presmeg, 2014).

Para ensinar a geometria de forma mais eficaz e dar uma certa coerência às tarefas de sala de aula, Jones (2002) sugere que é útil que no ensino se tenham presentes três ideias que considera ideias-chave em geometria: 1) *Invariância* – Klein revolucionou a geometria, ao apresentá-la como o estudo das propriedades de uma configuração que são invariantes sob um determinado grupo de transformações. Algumas proposições de invariância são, por exemplo, o teorema de Thales; o teorema que estabelece que num triângulo a soma dos ângulos internos é 180°. Não é fácil para os alunos detetar invariantes. O uso de *software* de geometria dinâmica pode ser muito útil a este respeito; 2) *Simetria* – a simetria não é apenas uma ideia-chave em geometria, mas em toda a matemática, embora seja na geometria que tem a sua ligação mais óbvia. A simetria pode ser pensada como uma transformação de um objeto matemático que deixa alguma propriedade invariante. É frequentemente usada para tornar os argumentos mais simples e geralmente mais poderosos. Um exemplo na geometria plana é que todas as propriedades essenciais de um paralelogramo podem surgir a partir do facto de que um paralelogramo tem simetria de meia volta em torno do ponto de interseção das diagonais; e 3) *Transformação* – a transformação permite aos alunos desenvolver conceitos amplos de congruência e semelhança e aplicá-los a todas as figuras. Por exemplo, as figuras congruentes estão sempre relacionadas, quer seja por reflexão, por rotação, por translação ou por reflexão deslizante. Estudar transformações pode permitir que os alunos percebam que os gráficos do seno e do cosseno são congruentes. E também que todas as parábolas são semelhantes porque podem ser mapeadas uma na outra. As transformações também desempenham um papel importante na arte de muitas culturas através de frisos, pavimentações e rosáceas.

Abordagens de ensino mais efetivas encorajam os alunos a reconhecer conexões entre diferentes formas de representação de ideias geométricas e entre geometria e outras áreas da matemática. De facto, como referem vários autores (e.g. NCTM, 2014; Stylianou, 2010; Tripathi, 2008), é importante a utilização de múltiplas representações de modo flexível na compreensão de conceitos, pois só temos uma imagem holística de um conceito quando olhamos para essa ideia a partir de diferentes perspetivas. Consequentemente é de grande importância garantir que os professores tenham o conhecimento, capacidades e recursos necessários para interpretar os objetivos do currículo (Watson *et al*., 2013).

Ao planear o ensino e aprendizagem da geometria deve garantir-se nos primeiros anos o entusiasmo dos alunos, proporcionando-lhes oportunidades para que investiguem ideias espaciais e resolvam problemas da vida real. É importante que os alunos raciocinem e argumentem, ao mesmo tempo que desenvolvem e testam conjeturas sobre relações geométricas. Os alunos mais novos gostam de argumentar, só precisam é de ser ensinados a como argumentar eficazmente. E a geometria oferece muitas oportunidades para adquirir experiência com a argumentação e prova matemática (Silver, 2000). Progressivamente os alunos devem ser encorajados a usar descrições, conceitos e justificações para desenvolver as capacidades de raciocínio e a confiança necessária para seguir os diferentes passos de uma linha de raciocínio, para construir uma prova geométrica ou para resolver um problema.

Finalizamos com as palavras de Atiyah (2001):

> (...) a intuição ou a perceção espacial é extremamente poderosa e é por isso que a geometria é realmente uma parte tão poderosa da matemática - não só para coisas que são obviamente geométricas, mas mesmo para coisas que não são. Tentamos colocá-las em forma geométrica porque isso nos permite usar a intuição. A intuição é a nossa ferramenta mais poderosa (...) (p. 658).

As comunicações no grupo

Este grupo constitui-se como um fórum de apresentação e discussão de diferentes trabalhos, cinco comunicações orais e quatro pósteres, que se apresentam de seguida, realizados sobre o ensino e a aprendizagem da geometria, com uma distribuição bastante equilibrada em termos de níveis de ensino.

As duas comunicações, de Pinheiro, Carreira e Amado e de Jacinto e Carreira, incidindo sobre o 3.º ciclo, discutem a importância dos AGD no desenvolvimento da visualização e do raciocínio geométrico, e ainda nos modelos conceptuais desenvolvidos durante a atividade de resolução e expressão de problemas.

A comunicação, de Rodrigues e Serrazina, aborda os conhecimentos sobre propriedades de figuras mobilizados por alunos do 3.º ano e suas ligações aos níveis de van Hiele. As duas comunicações que se seguem dizem respeito ao pré-escolar. A comunicação oral de Nunes e Rodrigues relata um estudo que procura compreender o uso da visualização espacial na resolução de problemas geométricos. A comunicação de Loureiro, Castro e Pereira discute as relações 3D-2D no desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial numa perspetiva interdisciplinar.

O póster, da autoria de Martínez, Fernández e Roanes, diz respeito à busca de melhores formas de estruturação de conteúdos geométricos na organização curricular através das conexões entre conteúdos. O póster de Gregório e Oliveira baseia-se numa experiência de ensino de geometria com alunos do 2.º ciclo e realça os processos de justificação utilizados. Já o póster de Vale e Barbosa discute as potencialidades de uma experiência de ensino baseada numa *Gallery Walk* na resolução de problemas geométricos por futuros professores do 1.º e 2.º ciclos. Por fim, o trabalho de Balinha e Mamede procura conhecer as ideias das crianças sobre figuras geométricas.

A partir dos trabalhos apresentados levanta-se um conjunto importante de questões: 1. O que se pretende com a inclusão da geometria no currículo da matemática escolar? Competências geométricas, construção de conceitos geométricos, prova, resolução de problemas, uso de materiais, tecnologias? 2. A aprendizagem em geometria: o que está em jogo, quais as dificuldades, quais os obstáculos, o que é possível melhorar? 3. O ensino da geometria: o que está em jogo, produção, divulgação e avaliação de recursos, práticas de ensino, formação inicial e contínua de professores? e 4. O currículo de Geometria: organização, objetivos, tópicos, conexões com outros domínios matemáticos, o que contemplar?

Referências

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century. *American Mathematical Monthly*, *108*(7), 654-666.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14–20.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (pp. 37–52). Dordrecht: Kluwer.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization. *Teaching and learning geometry 11-19*, 55- 56. London, UK: Royal Society.

Jones, K. (2002), Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Jones, K. & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching* (pp. 3–15). London: Open University Press.

NCTM (2012). *Navigating through geometry.* Navigations series 6-8. Reston: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical success for all*. Reston: NCTM.

Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving* (pp. 156-167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Royal Society/JMC (2001). *Teaching and learning geometry 11-19*. Report of a Royal Society / Joint Mathematical Council working group. London: The Royal Society.

Silver, E. (2000). Improving mathematics teaching and learning: how can principles and standards help? *Mathematics teaching in the middle school*, *6*, 20-23.

Stylianou, D. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(4), 325-343.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Vale, I. & Pimentel, T. (2016). Resolver problemas - criando soluções, vendo. *Rematec, 21*, 8-23.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key Ideas in Teaching Mathematics*. London: Oxford University Press.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics.* Washington: Mathematical Association of America.

Comunicações - GD1

CO-AÇÃO COM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA NA VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO EM GEOMETRIA

Alexandra Pinheiro

pinheiro.alexandra@gmail.com

Susana Carreira

FCT da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

scarrei@ualg.pt

Nélia Amado

FCT da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

namado@ualg.pt

Resumo: Esta comunicação tem como objetivo analisar a forma como as interações entre os alunos e o GeoGebra promovem o desenvolvimento da visualização e do raciocínio geométrico dos alunos. Este estudo, inserido numa investigação mais ampla, refere-se apenas à análise de uma sequência de tarefas de construção de triângulos com recurso ao GeoGebra. Foi adotada uma metodologia qualitativa e de caracter interpretativo que se baseou na identificação de situações elucidativas de co-ação, em questões que envolvem visualização. Os dados foram recolhidos numa das turmas-piloto do 7.º ano, no ano letivo 2008/09, no âmbito da experimentação do Programa de Matemática do Ensino Básico, no tópico Triângulos e Quadriláteros[1]. Os resultados mostram que a co-ação entre os alunos e o GeoGebra possibilitou o surgimento de diferentes representações do mesmo objeto e de diferentes modos de efetuar a sua construção geométrica. Diversas potencialidades do AGD, incluindo o arrastamento, contribuíram para a compreensão da unicidade ou da pluralidade de triângulos que cumprem dadas condições, um aspeto em que a visualização assume grande importância.

Palavras-chave: Ambientes de geometria dinâmica, co-ação, geometria, raciocínio geométrico, visualização.

[1] Na sequência da homologação do Programa de Matemática para o Ensino Básico, em dezembro de 2007, a Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular criou um Plano de Implementação composto por sete medidas, sendo uma delas a criação de 40 turmas-piloto, no ano letivo de 2008/09, distribuídas pelas diversas Direções Regionais de Educação de Portugal Continental, para a experimentação do Programa (Ministério da Educação, 2007).

Introdução

Atualmente, as preocupações dos investigadores e educadores matemáticos já não recaem sobre a necessidade de evidência para a importância que os ambientes de sala de aula centrados na atividade matemática do aluno têm sobre a aprendizagem. É hoje claro que ao longo das últimas décadas os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), como o GeoGebra, o Geometer's Sketchpad ou o Cabri-Géométre vieram transformar de forma significativa a aprendizagem da geometria. Assim, o que se discute e analisa presentemente são, cada vez mais, as estratégias e propostas didáticas que produzem situações de aprendizagem onde o ato de convencer e argumentar é fundamental, proporcionando aos alunos oportunidades para debaterem diferentes caminhos e resoluções, para explicarem, justificarem e argumentarem, de modo a convencerem o outro da validade das suas ideias. Nestas abordagens, são os alunos, pela exploração e experimentação, os principais agentes envolvidos na descoberta de factos geométricos e de relações geométricas.

Para Güçler, Hegedus, Robidoux e Jackiw (2013), a geometria dinâmica é uma forma de visualização matemática onde as construções geométricas podem ser manipuladas através do rato do computador. Nestes ambientes, as ilustrações dinâmicas que surgem no ecrã do computador são apenas rígidas no essencial e não mais do que isso, pois as propriedades matemáticas que as definem possibilitam a exploração da invariância de elementos entre configurações ou famílias de figuras.

Alguns problemas de geometria elementar, como seja o caso da possibilidade de construção de um triângulo dadas diversas das suas medidas, são estruturantes do significado de triângulo, mas podem ser igualmente relevantes para a compreensão do processo de construção de figuras, em que a visualização adquire um papel central. Certamente é importante que o aluno seja capaz de criar uma imagem mental de um triângulo com dois lados de igual comprimento e com o ângulo por eles formado de uma dada amplitude. Mas é igualmente importante que o aluno consiga imaginar como tal triângulo pode ser traçado no plano (usando a geometria euclidiana) e se ele é único ou se há uma variedade de instâncias e que se trataria, portanto, de condições para definir uma família de triângulos.

Este estudo tem como principal objetivo analisar a forma como as interações entre os alunos e o GeoGebra promovem o desenvolvimento da visualização e do raciocínio geométrico dos alunos. Para tal, é proposta aos alunos uma tarefa onde se apresentam vários casos de construção de um triângulo em que algumas das suas medidas (comprimentos de lados e amplitudes de ângulos) são dadas. Uma das questões que está em discussão na tarefa é a da existência de uma ou de mais soluções, ou seja, está em causa a informação mínima para definir e construir um triângulo. Assim, com base nos dados de observação de um grupo de alunos, propomo-nos analisar de que modo a ação conjunta entre a pessoa e o AGD (co-ação) pode influenciar o tipo de representações e os modos de construção utilizados, levando a formas de visualização da possibilidade de um ou mais triângulos.

Raciocínio geométrico: uma perspetiva

Segundo MacCrone e outros (2010) o raciocínio geométrico envolve a exploração das características das formas geométricas, das propriedades comuns a uma família de formas ou dos caminhos possíveis para modelar tais formas. Estes autores salientam quatro elementos chave do raciocínio geométrico:

- Formulação de conjeturas sobre os objetos geométricos: implica analisar configurações e raciocinar indutivamente sobre relações para formular conjeturas;
- Construção e validação de argumentos geométricos: consiste em desenvolver e avaliar argumentos dedutivos (formais e informais) sobre figuras e as suas propriedades que permitam compreender questões geométricas;
- Múltiplas abordagens geométricas: envolve analisar situações matemáticas, utilizando transformações geométricas, abordagens sintéticas e sistemas de coordenadas;
- Conexões geométricas e modelação: significa usar ideias geométricas, incluindo a visualização espacial, em outras áreas da Matemática, outras disciplinas e em situações do mundo real. (MacCrone et al., 2010, p. 1).

Portanto, o raciocínio dedutivo, nesta perspetiva, passa a ser, essencialmente, um processo para compreender e explicar as conjeturas descobertas indutivamente e, portanto, chegar à sua comprovação ou rejeição. O raciocínio geométrico apoia-se, deste modo, em três processos fundamenais: a experimentação, a indução e a dedução.

Por sua vez, Battista (2007) refere que o raciocínio geométrico consiste principalmente na invenção e utilização de sistemas conceptuais formais para investigar as formas e o espaço. Como exemplo, destaca que os matemáticos aplicam um sistema conceptual baseado em propriedades para definir e analisar vários tipos de quadriláteros e triângulos. Acrescenta ainda que, o raciocínio geométrico inclui, por um lado, a construção e a investigação de imagens para responder a questões sobre elas e, por outro lado, a transformação e a realização de operações sobre as imagens e a preservação destas ao serviço de outras operações mentais.

Pode-se, assim, inferir que as imagens se constroem mentalmente, sendo os esquemas ou outras representações essenciais para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Por esta razão, Battista (2007) afirma que a abstração é fundamental no raciocínio geométrico e define três formas específicas de abstração: (a) Estruturação espacial – o ato mental de construir ou de abstrair a forma de um objeto ou de um conjunto de objetos, identificando a sua natureza e as suas componentes; (b) Modelos mentais – um conjunto de abstrações integradas para formar representações mentais as quais são utilizadas para interpretar e raciocinar sobre situações; e (c) Esquema – sequência organizada de ações construídas a partir da experiência e que podem ser aplicadas em resposta a situações similares.

Neste sentido, perante uma situação de geometria, um aluno pensa sobre esta, quer manipulando objetos, quer utilizando ambientes de geometria dinâmica ou ativando modelos mentais que lhe permitam realizar simulações e encontrar soluções para o problema. Por isso, Battista considera o raciocínio espacial fundamental e define-o como "a capacidade para 'ver', para investigar e para refletir sobre os objetos espaciais, imagens, relações e transformações." (Battista, 2007, p. 843).

Outros autores, como Pittalis e Christou (2010) assumem o raciocínio espacial como uma forma de atividade mental que permite ao aluno criar imagens espaciais e manipulá-las para resolver problemas. Esta atividade mental é designada por Battista e Clements (1996) como estruturação espacial e consiste no ato mental de construção de uma estrutura ou de uma forma para um objeto ou um conjunto de objetos.

Resumindo, o raciocínio geométrico requer a construção de imagens em termos de modelos mentais estruturados, de forma apropriada para investigar as formas e o espaço.

A visualização no raciocínio geométrico

A componente visual é uma componente decisiva no ensino e aprendizagem da geometria. Deste modo, importa, não só, compreender e clarificar este conceito, mas perceber a sua importância no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Na atividade matemática, tal como na atividade humana, o recurso a aspetos visuais e a representações ao longo do desenvolvimento de tarefas matemáticas é encarado com naturalidade. Esta forma de agir, que Guzmán (2002) designa por visualização matemática, é, portanto não uma visão imediata das relações, mas antes uma interpretação do nosso pensamento que é apresentado e que podemos fazer apenas quando tivermos aprendido a ler apropriadamente o tipo de comunicação que nos é oferecida (Guzmán, 2002, p. 11).

Para Arcavi (2003), a visualização:

> É a capacidade de interpretação, de utilização e de reflexão sobre as figuras, as imagens e os diagramas nas nossas mentes, no papel ou em ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias até então desconhecidas e avançar com (novos) entendimentos (p. 217).

Conceção semelhante é apresentada por Gal e Linchevski (2010) que referem que a visualização como a capacidade para representar, generalizar, comunicar e refletir sobre informação visual e, nesse sentido, tem um papel fundamental, senão o mais importante, na compreensão da geometria. Por seu lado, Duval (1998) salienta que a visualização é um dos três processos cognitivos independentes que cumprem as funções epistemológicas específicas em Geometria: visualização, construção (a partir de ferramentas) e raciocínio.

Arcavi (2010) refere também que existem diversas variáveis que têm influência na maneira como se veem diferentes representações. Advoga que aquilo que se vê não é determinado apenas pela quantidade ou qualidade de conhecimento prévio "que é direto aos nossos olhos", mas é também, em muitos casos, determinado pelo contexto em que a observação é feita. Em diferentes contextos, o "mesmo" objeto visual pode ter diferentes significados, mesmo para os especialistas.

Apesar da reconhecida relevância da visualização, são conhecidos alguns obstáculos e objeções ao seu tratamento nos currículos, como por exemplo, a ideia de que a visualização leva ao erro. A este propósito, Guzmán (2002) reconhece que a utilização incorreta da visualização pode levar a erros, mas sustenta que esta possibilidade não deve ser um argumento contra a sua eficiência nos diferentes processos da atividade matemática, onde "técnicas" mais formais também conduzem a erros, raciocínios incompletos e a resultados falsos.

Ao nível dos obstáculos, Guzmán (2002), salienta que pelo facto de ser um processo intelectual, a visualização terá de ser desenvolvida desde muito cedo. Para isso, é fundamental uma imersão e familiarização com tarefas adequadas, por exemplo, de descodificação de imagens. Quando este tipo de atividade está ausente, dificilmente se consegue desenvolver a visualização.

Arcavi (2003) classifica as dificuldades em torno da visualização segundo três categorias: culturais, cognitivas e sociológicas.

As dificuldades culturais referem-se às crenças e valores sobre o que significa a Matemática e o fazer Matemática, o que é legítimo ou aceitável, e o que não é. Desse modo, surgem afirmações como “isto não é Matemática” e a ausência de tarefas em sala de aula que envolvam a visualização. Este tipo de atitude face ao papel da visualização é descrito por Presmeg (1997) como a “desvalorização” da visualização.

Relativamente às dificuldades cognitivas, o autor destaca, em primeiro lugar, a discussão simplista sobre se o “visual” é mais fácil ou mais difícil.

> Quando a visualização atua sobre imagens conceptualmente ricas, a exigência cognitiva é certamente elevada. Além disso, o raciocínio com conceitos em cenários visuais pode implicar que não existem sempre rotinas processualmente ‘seguras’ às quais recorrer. Consciente ou inconscientemente, tais situações podem ser rejeitadas pelos alunos (e possivelmente também pelos professores), dado o seu poder ser muito arriscado, escorregadio ou impreciso (Arcavi, 2003, p. 235).

Em segundo lugar, surge a questão da necessidade de se conseguir uma tradução flexível entre as representações visuais e analíticas de uma mesma situação (que está no cerne da compreensão de muita Matemática). Aprender com compreensão e ser capaz de manipular múltiplas representações pode ser um processo penoso para os alunos.

No que se refere às dificuldades sociológicas, destaca-se a existência de alunos na aula de matemática com várias origens culturais e, portanto, diferentes experiências prévias de lidar com a visualização.

Em suma, a visualização, apesar destas dificuldades e objeções, não se reduz ao propósito de ilustrar uma ideia. Inclui “um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos” (Matos & Gordo, 1993, p. 13). A visualização é, além do mais reconhecida como uma componente chave do raciocínio geométrico, da resolução de problemas e mesmo da prova.

Co-ação com Ambientes de Geometria Dinâmica

Os AGD possibilitam a construção e a manipulação de objetos geométricos, proporcionando a exploração de conjeturas, a investigação de relações e a descoberta de propriedades desses objetos. Uma utilização adequada do GeoGebra contribui para (i) o desenvolvimento da *compreensão matemática*, em particular, auxilia os alunos a construir o significado dos conceitos, a reconhecer regularidades e a compreender relações; (ii) lidar com ideias matemáticas através de diversas *representações*; e (iii) o desenvolvimento do *raciocínio geométrico*, na medida em que possibilita aos alunos formularem e discutirem argumentos matemáticos, e investigarem a validade de conjeturas matemáticas.

A construção e os arrastamentos inerentes ao AGD possibilitam uma fácil visualização das propriedades e das relações geométricas, que podem levar à formulação de conjeturas, à testagem e à justificação. Esta manipulação favorece a criação de imagens mentais, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da capacidade de visualização e do raciocínio espacial.

Os Ambientes de Geometria Dinâmica apresentam determinadas características anatómicas, ou seja, foram concebidos segundo um paradigma que se baseia na possibilidade de os utilizadores interagirem com objetos virtuais. Com as ferramentas que disponibilizam torna-se viável construir figuras ou diagramas, através de ferramentas específicas, portadoras de intencionalidade, de premissas matemáticas e das suas próprias características de funcionamento, mas permite ainda manipular figuras de acordo com as regras que presidiram à sua construção.

Uma consequência destas características, muito evidente nos AGDs, embora também esteja presente em outros ambientes digitais, é a da co-ação que ajudam a estabelecer entre a utilização de uma determinada ferramenta pelo utilizador e a utilização dessa ferramenta pelo próprio ambiente digital (Hegedus, 2005). Nas tecnologias digitais e, em particular, nos ambientes dinâmicos, uma grande parte da intencionalidade da ferramenta é a de reagir às ações do utilizador o que lhes confere um carácter plástico, isto é, que o utilizador quer o ambiente se transformam em atores e re-atores. Eles agem e re-agem um ao outro e é essa co-ação que se torna visível mediante os modos de feedback contínuo que informam tanto o utilizador como o próprio AGD (Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, 2016). Um exemplo de uma co-ação com um AGD é a possibilidade de explorar um vasto número de exemplos, continuamente relacionados, para um mesmo conjunto de relações matemáticas através da manipulação de elementos estruturantes de uma dada construção.

Metodologia

Atendendo ao objetivo deste estudo, optou-se por uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo. Este estudo teve como contexto de investigação a experimentação do PMEB (2007) e envolveu uma turma-piloto do 7.º ano de escolaridade no ano letivo 2008/2009, de uma escola da região norte do país.

Os dados foram recolhidos, em sala de aula, pela investigadora e primeira autora desta comunicação, que recorreu a diversas estratégias e fontes de dados recomendados na investigação qualitativa (Denzin & Lincoln, 1994), tais como: entrevistas às alunas; observação e gravação em áudio e vídeo de aulas e recolha de produções escritas pelos alunos, ficheiros do GeoGebra de cada uma das tarefas e outros registos escritos sobre as aulas realizadas.

Após a recolha de dados, a primeira etapa de análise consistiu em separá-los em duas grandes classes: aulas que envolveram a utilização do Geogebra e aulas que se basearam na resolução de problemas. Estes conjuntos de dados foram ordenados no tempo.

No caso das aulas com no recurso ao Geogebra, analisaram-se, em simultâneo, os diálogos das alunas e as respetivas construções no Geogebra, que foram complementadas com notas da investigadora. A articulação destes dados permitiu compreender as estratégias seguidas pelos alunos e dar sentido às várias etapas que foram executando; conhecer as suas hesitações, as dúvidas, a forma de abordar as questões e o modo como obtiveram as conclusões.

Por fim, iniciou-se o trabalho de estruturação dos dados, em episódios que apresentassem unidade e coesão, seguindo uma lógica essencialmente descritiva, em que se foi combinando a narrativa dos acontecimentos com excertos de diálogos e exemplos de produções dos alunos, que ajudam a interpretar os processos na atividade dos alunos.

No caso dos episódios que se referem à utilização da tecnologia, focou-se a atenção na interação dos alunos com o GeoGebra, em busca de evidências que revelassem de que forma esta ferramenta apoiou os alunos no desenvolvimento das tarefas e dos contributos para a compreensão dos conceitos tratados e para a forma como abordaram as questões propostas.

Para esta comunicação selecionámos parte de uma sequência de tarefas do tópico Triângulos e Quadriláteros com recurso ao GeoGebra, baseando-se num ensino exploratório em sala de aula. Ponte (2005) considera que duas das dimensões fundamentais das tarefas são o seu grau de desafio matemático e de estrutura, tendo presente estas dimensões, a sequência de tarefas envolveu tarefas exploratórias, problemas e exercícios.

Apresentamos, em seguida, um episódio que envolve duas alunas, Joana e Matilde, escolhidas aleatoriamente entre todos os alunos da turma.

Apresentação dos dados

A tarefa dada propõe a construção de vários triângulos em que se dão diferentes medidas seja de lados ou de ângulos, sendo relevante o facto de o triângulo a construir ser único ou não (Fig. 1). Era ainda um requisito da tarefa a condição de que as construções fossem robustas, ou seja, que as propriedades não se alterassem quando os vértices fossem arrastados.

1. AB = 8 cm $\angle$ BAC = 60º	**2.** AB = 8 cm $\angle$ BAC = 60º AC = 6 cm	**3.** CA = 10 cm CB = 8 cm $\angle$ BAC = 50º
4. CA = 10 cm CB = 8 cm AB = 11 cm	**5.** AB = 8 cm $\angle$ BAC = 40º $\angle$ ABC = 60º	**6.** $\angle$ BAC = 15º $\angle$ ABC = 100º $\angle$ ACB = 65º

Figura 1. Dados para a construção dos vários triângulos

Após a leitura da tarefa Joana e Matilde perceberam que tinham de construir triângulos a partir das condições dadas e registar numa tabela as medidas dos triângulos construídos. Para a alínea 1, Joana começou por marcar o ponto A e uma circunferência de centro em A e raio 8; seguidamente fixou um ponto B sobre a circunferência e traçou o segmento de reta AB. A partir deste momento as alunas constroem sem qualquer dificuldade dois triângulos que satisfazem as condições exigidas. Num dos casos, optam por uma fazer uma *Rotação* com centro num dos pontos e amplitude 60º, obtendo assim o terceiro vértice do triângulo. Depois de unidos os três vértices as alunas constatam que o triângulo obtido é equilátero e equiângulo. No segundo caso, optam por marcar um *Ângulo com Dada Amplitude* (60º) fazendo surgir um novo ponto que lhes permitiu traçar uma semirreta com origem em A. Rapidamente percebem que qualquer ponto sobre esta semirreta pode ser o terceiro vértice do triângulo (Fig. 2). As alunas apresentaram assim duas soluções para a questão.

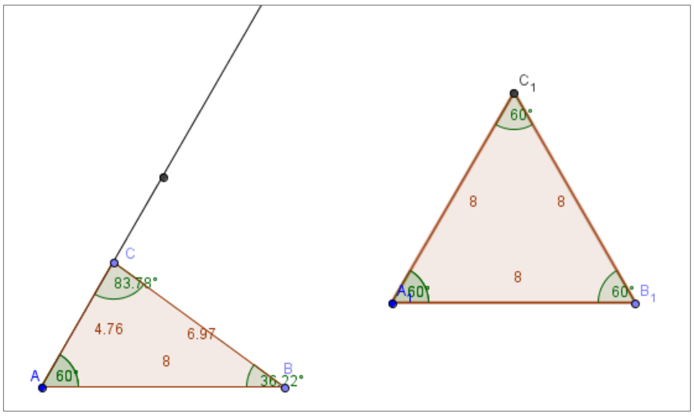


Figura 2. Construção da alínea 1 no GeoGebra

Para a resolução da alínea 2, as alunas começam por traçar o lado AB de 8 cm, usando a ferramenta *Segmento de Reta (Ponto, Comprimento)*. Recorrem de novo à ferramenta *Ângulo com Dada Amplitude* (60º) para marcar o ângulo dado e, em seguida, traçam a semirreta com origem em A que forma o outro lado do ângulo (Fig. 3). Para determinar o terceiro vértice do triângulo, sabendo que o lado AC mede 6 cm utilizam a ferramenta *Circunferência (Centro, Raio)* com centro em A e raio 6. As alunas explicam a sua estratégia na folha do GeoGebra ao lado da construção (Fig.3).

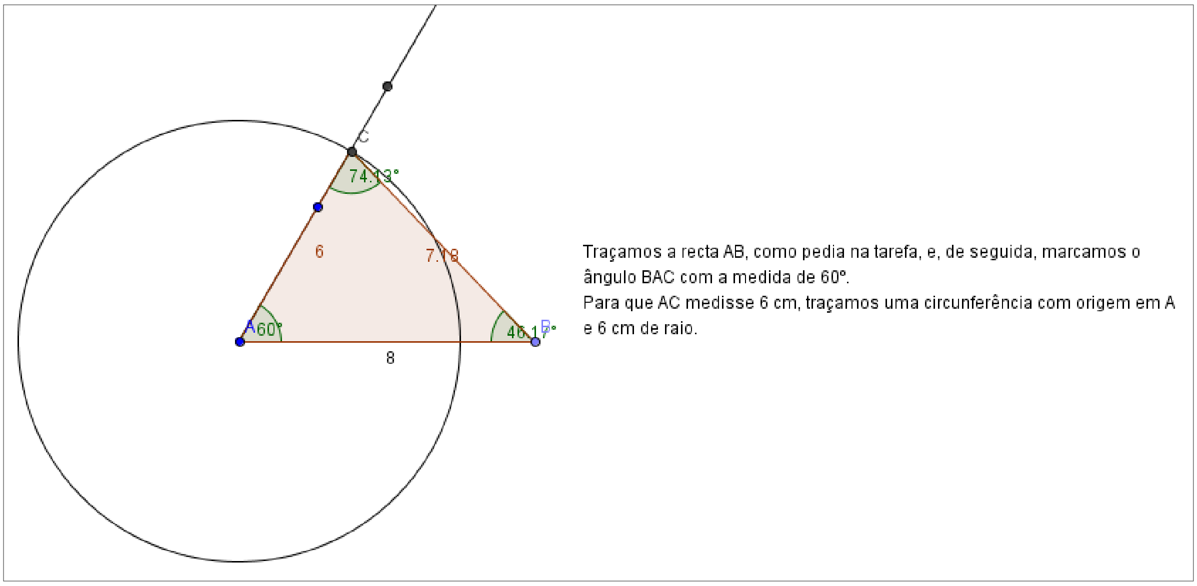


Figura 3. Construção da alínea 2 no GeoGebra

Neste caso, as alunas verificam não conseguem fazer um triângulo diferente.

> *Joana:* Espera aí. Isto não dá para fazer de outra maneira. Se tens a medida de dois, o outro tem de ser a união.
>
> *Matilde:* Espera aí, vai ao outro, vai ao outro...
>
> *Joana:* Vamos voltar a fazer e depois logo vimos.

Repetiram a construção.

(...)

Joana: Fazemos só este e dizemos que não conseguimos fazer mais.

Para resolver a questão 3, as alunas repetiram as estratégias anteriores, para traçar o segmento de reta CA de comprimento 10 cm e o ângulo BAC de amplitude 50º, usando a ferramenta *Ângulo com Dada Amplitude*. E continuaram a construção como se os dois lados fixos fossem os lados do ângulo BAC (ou seja, AC e AB, replicando o caso anterior). Ao observarem a imagem no computador perceberam que o segmento BC não respeitava as condições dadas. Decidiram apagar e procuram perceber onde tinham errado. Repetiram o procedimento e foram ler novamente a questão procurando encontrar o erro que estavam a cometer. Por fim, Joana percebeu o que estava errado na construção e afirmou: "Temos de marcar a circunferência em C".

Contudo, voltaram a ter dúvidas em relação à localização do terceiro vértice do triângulo e chamaram a professora até perceberem que teriam de encontrar uma intersecção entre a semirreta AB e a circunferência para marcar o terceiro vértice (Fig. 4).

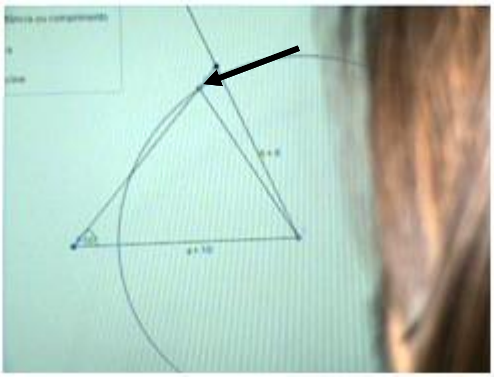


Figura 4. Marcação do ponto de interseção

Professora B: Então, onde é que está a solução? Qual é o vértice B?

Joana: É este. (apontando para o ponto assinalado na figura 4)

Professora: É esse? Porquê?

Joana: Porque tem 8 cm de CB e 50º.

Professora B: Sim. É único? Não há mais nenhuma solução?!

Joana: Não.

Professora B: Olha bem para lá.

Joana: Acho que não.

Professora B: Olhem bem para lá.

(…)

Matilde: É aqui. (apontando para o ponto que tinha indicado). Dá para pôr este aqui.

Joana (com a seta do cursor, aponta para as duas intersecções): Dá aqui e aqui.

Professora B: Força, coloca lá o ponto e explica porquê. Explica lá.

As alunas finalmente verificaram que existiam dois pontos de interseção entre a semirreta e a circunferência e chegaram aos dois triângulos pretendidos (Fig. 5).

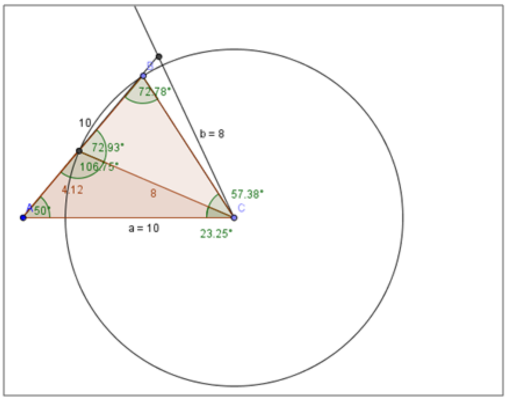


Figura 5. Construção da alínea 3 no GeoGebra

Na segunda aula, as alunas retomaram a alínea 4 da tarefa que solicita a construção de um triângulo dadas as medidas dos três lados. As alunas encontraram sem dificuldade uma solução (Fig. 6), recorrendo exclusivamente à construção de circunferências e de um segmento com comprimento fixo.

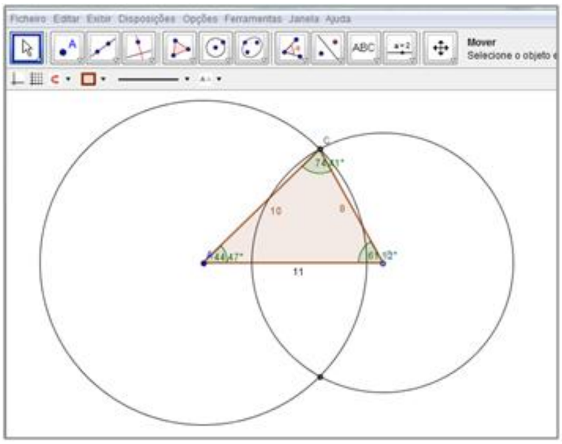


Figura 6. Construção da alínea 4 da tarefa

Após esta construção, Joana afirmou que tinham de fazer o outro triângulo, mas Matilde contestou: “É igual. As medidas são exatamente iguais. Só podes fazer este”. Joana não ficou convencida e tentou construir outro triângulo, mas acabou por concordar que se tratava do mesmo triângulo.

Para a construção dos triângulos solicitados na alínea 5, as alunas começaram por traçar o segmento de reta AB com 8 cm e marcaram em cada um dos extremos do segmento a amplitude do respetivo ângulo, traçando depois as duas semirretas. Por fim, marcaram o ponto de interseção das duas semirretas concluindo que se tratava do terceiro vértice do triângulo. As alunas perceberam que esta era a única solução à questão colocada (Fig.7).

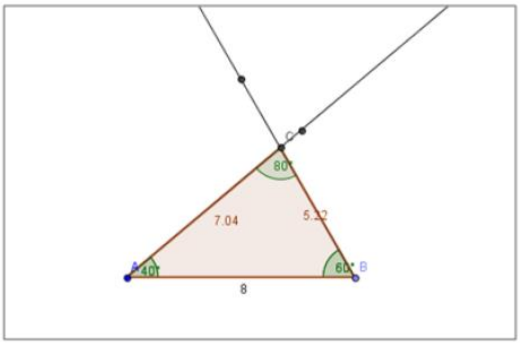


Figura 7. Construção da alínea 5 da tarefa

Para responder à questão 6, em que eram dadas as amplitudes dos ângulos internos do triângulo, as alunas começaram por marcar um ponto para seguidamente traçarem um segmento de reta com um determinado comprimento. Mas, repararam que nesta situação não era dada essa condição, pelo que hesitaram antes de retomar a construção do triângulo. Optaram, então, por marcar dois pontos, A e B, e traçar a reta que os contém. Em seguida, marcaram um ângulo de 100º com origem no ponto B e um de 15º com origem no ponto A. Depois, traçaram uma semirreta com origem em B, passando pelo ponto que definia o ângulo de 100º e fizeram o mesmo procedimento para o ponto A. Ao terminar a construção, Joana comentou: "Então, qual é a dificuldade?! Está aqui. (apontou para o ponto de intersecção das duas semirretas para indicar que era o terceiro ponto do triângulo)". Selecionaram no menu a opção *Polígono* para desenhar o triângulo, sem antes fixarem o ponto de intersecção. Rapidamente, se aperceberam que tinham cometido um erro e desfizeram a construção até à marcação das semirretas, fixando de seguida o ponto de intersecção entre elas. Voltaram a desenhar o triângulo e verificaram que o ângulo em C media 65º. Depois, em vez de arrastarem um dos vértices do triângulo para confirmarem se era, ou não, possível obter mais triângulos naquelas condições, decidiram construir um novo triângulo (Fig. 8). Concluíram assim que podiam obter mais triângulos, tal como referiu Joana: "Dá para fazer dois. Dá para fazer imensos".

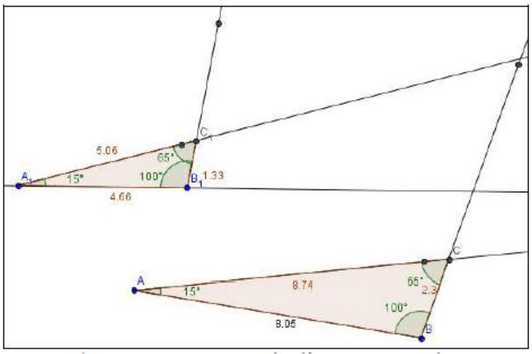


Figura 8. Construção da alínea 6 da tarefa

Embora reconhecendo que poderiam construir uma infinidade de triângulos nas mesmas condições, limitaram-se a repetir a construção para obter outro exemplo. Contudo, outros grupos optaram pelo arrasamento de um dos vértices (livres) do triângulo para mostrar que existiam mais triângulos com os mesmos ângulos.

Conclusões

Nos dados apresentados, podemos encontrar várias evidências de co-ação entre os alunos e o AGD, que têm impacto na visualização e no raciocínio geométrico que as várias questões da tarefa suscitaram.

Algumas dessas evidências referem-se à forma como as alunas optaram por diferentes ferramentas do GeoGebra que, sendo distintas, apresentam algumas caraterísticas semelhantes. Com efeito, em vários momentos, na resolução das diferentes alíneas, as alunas tiveram a necessidade de fixar ângulos internos do triângulo, com amplitudes que eram dadas. Fizeram-no geralmente por meio da ferramenta *Ângulo com Dada Amplitude*, ainda que ocasionalmente tenham usado também a ferramenta *Rotação*. Esta situação registou-se na questão 1, quando Joana e Matilde, ao construírem o segundo triângulo efetuaram procedimentos análogos aos usados na construção do primeiro, mas verificaram pelo *feedback* do computador que a rotação era dispensável. Quando usaram a ferramenta que define um ângulo com uma dada amplitude (que o computador executa devolvendo um terceiro ponto que permite definir um dos lados do ângulo por meio de uma semirreta) as alunas tendencialmente construíram uma nova semirreta (ou seja, um lado do ângulo) até então não presente na figura. De facto, o feedback visual do computador para a ação de marcação de um ângulo dado é, em certo sentido, insuficiente para a construção desejada e obriga a uma nova ação das alunas: a construção de uma semirreta com origem no vértice do ângulo. Pode dizer-se que, em várias das construções, a semirreta assumiu um papel decisivo, pois nela foi necessário identificar um ponto ou uma infinidade de pontos para a obtenção de um ou de mais triângulos, conforme os casos.

Aparentemente, o uso desta ferramenta revelou ser, para as alunas, uma forma de economia no processo de produzir as construções dos triângulos, no sentido em que parece assegurar literalmente as propriedades dos triângulos a construir (triângulo com determinado ângulo ou ângulos). Esse reconhecimento levou a que na maior parte dos casos em que eram dadas amplitudes de ângulos se limitassem ao procedimento de marcação dos ângulos. De facto, quando as construções não implicam ângulos dados, as alunas limitam-se a usar o “compasso”, ou seja, a construir uma circunferência com dado raio. Nos casos em que as construções requerem ângulos fixos e lados determinados, as alunas combinam estas duas ferramentas de forma geralmente correta.

Estas características do AGD, muito relacionadas com a medição, oferecem aos alunos a possibilidade de utilizarem os valores numéricos e de conjugarem esses dados nas suas construções, inclusivamente como forma de fazer a respetiva validação.

No que se refere à existência de um ou mais triângulos em cada um dos casos tratados na tarefa, é de salientar que as alunas pouco se socorrem da possibilidade de arrastamento para evidenciarem múltiplas soluções. No entanto, fica claro das suas afirmações e das suas ações no GeoGebra que reconhecem quando os casos são de solução única ou de múltiplas soluções. Isto acontece com base na ideia de que um ou mais vértices poderiam alterar-se dando origem a triângulos diferentes cumprindo as condições dadas.

Este facto pode sugerir a hipótese de que as alunas não encaram as múltiplas soluções como uma família de triângulos, com determinadas medidas invariantes, mas sim como vários exemplos de triângulos com certas medidas. Assim, podemos concluir que as características do GeoGebra podem contribuir para uma compreensão mais profunda dos efeitos das relações numéricas sobre as caraterísticas geométricas das figuras, designadamente em termos visuais, mas a existência de uma co-ação associada ao arrastamento requer também uma capacidade de visualização de representações dinâmicas, algo que parece ainda ausente neste episódio.

A noção de coação significa que os alunos guiam o AGD através de indicações e *inputs*, simultaneamente, são guiados pelo AGD a partir do *feedback* que este lhes proporciona em resultado das ações dos primeiros. Para além da dinâmica própria das representações onde existem elementos e objetos que podem ser alterados por arrastamento, destaca-se ainda a possibilidade de se obter de forma rápida uma diversidade de representações para o mesmo objeto geométrico. Como consequência, o conhecimento matemático que emerge a partir da co-ação com o AGD é substancialmente mais rico daquele que emerge do ambiente de papel e lápis (Moreno-Armella e Hegdus, 2009). Não apenas as representações, mas também a forma como os alunos guiam o AGD para atingir as construções desejadas influenciam o modo como os alunos desenvolvem a compreensão dos conceitos matemáticos e, por isso, transformam a sua interação com os conceitos geométricos. Os alunos agem sobre o conhecimento matemático quando escolhem as ferramentas que melhor se adequam, na sua perspetiva, à obtenção de imagens visuais das figuras geométricas pretendidas.

Referências

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-907). Reston, VA: NCTM.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. & Nobre, S. (2016). *Youngsters Solving Mathematical Problems with Technology: The Results and Implications of the Problem@Web Project*. New York: Springer.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds). (1994). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 163-183. (Published online: 26 February 2010).

Güçler, B., Hegedus, S., Robidoux, R. & Jackiw, N. (2013). Investigating the Mathematical Discourse of Young Learners Involved in Multi-Modal Mathematical Investigations: The Case of Haptic Technologies. In D. Martinovic et al. (Eds.), *Visual Mathematics and Cyberlearning* (pp. 97-118). Dordrecht: Springer.

Guzmán, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)*. Hersonissos, Crete, Greece.

Hegedus, S. (2005). Dynamic representations: A new perspective on instrumental genesis. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 1031-1040). Barcelona, Spain: Ramon Llull University.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, *26*, 13-17.

McCrone, S. M., King, J., Orihuela, Y. & Robinson, E. (2010). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Geometry*. Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J. & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*, 99-111.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Introduction: the transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 397-398.

Pitalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191-212.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Presmeg, N. (1997). Generalization Using Imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images* (pp. 299-312). London: Lawrence Erlbaum.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: ASPETOS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NO DESENVOLVIMENTO DE MODELOS CONCEPTUAIS

Hélia Jacinto
Escola Secundária Jorge Peixinho
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
helia_jacinto@hotmail.com

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

Resumo: Neste artigo discutimos a atividade de resolução de problemas de matemática com um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra, no âmbito de uma Competição de Matemática, *online*, o SUB14. É nosso propósito compreender os aspetos do pensamento geométrico envolvido no desenvolvimento de modelos conceptuais aquando da atividade de resolver e exprimir as soluções. Seguindo uma abordagem qualitativa, analisamos os protocolos de construção dos ficheiros produzidos por dois concorrentes, Marco e Jéssica, correspondentes às suas soluções de dois problemas que envolvem noções de geometria. Os resultados apontam diferenças significativas em termos das características do pensamento geométrico desenvolvido pelos dois jovens, apesar de ambos terem obtido uma solução correta. Sugerimos que essas diferenças se possam explicar a partir da capacidade em percecionar a utilidade de determinadas *affordances* do GeoGebra e colocá-las em sintonia com o conhecimento matemático de que dispõem para desenvolver um modelo conceptual da solução.

Palavras-chave: GeoGebra, matematização, pensamento geométrico, resolução de problemas de matemática, resolver-e-exprimir.

Introdução

A rápida metamorfose que se faz sentir ao nível da sociedade tecnológica e digital em que estamos hoje imersos tem impulsionado mudanças bruscas na natureza do conhecimento necessário para fazer face às situações problemáticas do dia a dia. Na verdade, esta imersão no mundo tecnológico não só potencia alterações ao nível das "capacidades matemáticas que são necessárias ao sucesso para além da escola" (Lesh, 2000, p. 177), como a disseminação e o fácil acesso destas ferramentas digitais "introduzem novas situações de resolução de problemas em que a matemática é útil, introduzem novas normas e procedimentos para construção, argumentação e justificação; e expandem radicalmente o tipo de capacidades e compreensões matemáticas que contribuem para o sucesso nessas situações” (p. 178). Nessa linha, torna-se também necessário compreender “por que motivo os alunos têm dificuldades em aplicar conceitos e capacidades matemáticas (que, presumivelmente, aprenderam na escola) fora da sala de aula – ou em outras áreas disciplinares” (English, Lesh, & Fennewald, 2008, p. 5).

A correspondente inclusão de tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática é tida como indispensável à modernização das práticas de sala de aula, à preparação de indivíduos com cidadania ativa em pleno século XXI, ao aumento da motivação dos alunos e, naturalmente, à melhoria do seu desempenho. Muito em particular, os Ambientes de Geometria Dinâmica trouxeram um novo ímpeto às sucessivas tentativas de introdução de tecnologias na aula de matemática, em grande parte devido às suas potencialidades, consideradas muito promissoras, na aprendizagem de conceitos de geometria (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strasser, 2006; Watson, Jones, & Pratt, 2013). Não obstante, as sucessivas alterações curriculares têm imprimido uma certa arritmia na adoção plena de tecnologias na aprendizagem da matemática e, em particular, da geometria no ensino básico: ora são encaradas como indispensáveis e o seu uso incentivado, ora são consideradas perniciosas e a sua utilização desaconselhada.

Importa, pois, conhecer os usos que os jovens fazem destes recursos – tecnológicos e matemáticos – de que se apropriam em contextos de educação formal ou de outra natureza, como as competições matemáticas. Perseguindo esse interesse, reportamos neste artigo uma parcela de uma investigação que visava compreender a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias num ambiente extraescolar, mais concretamente, a competição *online* de matemática SUB14®. Esta competição foi dinamizada a partir da Universidade do Algarve e destinava-se a jovens a frequentar o 7.º ou o 8.º ano de escolaridade no Algarve e no Alentejo. A fase de apuramento consistia no envio da resolução de cada um dos problemas publicados quinzenalmente no *website* da competição, através de *e-mail* ou da janela de resposta disponibilizada *online*. A comissão organizadora analisava as respostas e devolvia um feedback personalizado a cada concorrente a elogiar a prestação ou a incentivar uma revisão do trabalho. As regras da competição permitiam que os participantes recorressem à ajuda de amigos, familiares ou professores, durante esta fase.

A partir da análise de duas resoluções de problemas que envolvem noções geométricas, produzidas por dois participantes no SUB14 com recurso ao GeoGebra, procuramos compreender o papel desta ferramenta na atividade de resolver cada problema e exprimir a solução, bem como identificar os aspetos do pensamento geométrico subjacentes ao desenvolvimento dos modelos conceptuais que conduzem a essas soluções.

Resolver um problema e exprimir a sua solução: processos indissociáveis

Os problemas propostos no SUB14 podem considerar-se como *problemas não-rotineiros* pois não se resolvem apenas através da aplicação de regras ou procedimentos comuns ou prontos a utilizar pelos participantes. Ao invés, este tipo de problemas requer abordagens que permitam liberdade para construir, testar e modificar as estratégias planeadas (Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, 2016). Assim, a atividade de resolução de problemas em que os jovens se envolvem é aqui encarada como o *desenvolvimento de formas produtivas de pensar sobre situações desafiadoras* (Lesh & Zawojewski, 2007), em que se torna necessário adotar uma perspetiva matemática para encontrar a solução.

Os concorrentes desenvolvem abordagens muitas vezes desprovidas de técnicas matemáticas formais, mas muito marcadas pela sua experiência pessoal (Carreira et al., 2016). Esta atividade é consistente com o desenvolvimento de um processo de *matematização* caracterizado por uma reflexão sobre a realidade, que leva à sua compreensão e alteração através do recurso a ideias ou métodos matemáticos. Gravemeijer (2005) discute que os *modelos de* situações específicas surgem como forma de representar o problema e de lhe atribuir significado, e integram estratégias informais baseadas na experiência do aluno, ao nível de uma matematização horizontal. O papel destes modelos altera-se à medida que o aluno se apropria de problemas semelhantes e passa a focar-se em objetos matemáticos, relações e procedimentos típicos da matematização vertical: “um *modelo de* uma atividade matemática informal desenvolve-se num *modelo para* um raciocínio matemático mais formal” (p. 95). O desenvolvimento de um ‘modelo para’ envolve um afastamento do contexto, com foco na simbolização, na procura de estratégias e relações mais formais que sustentem o raciocínio. O modelo conceptual assume, de forma gradual e progressiva, as características de um objeto matemático sofrendo alterações até que ganha “uma vida própria” (p. 98).

Estes modelos conceptuais podem incluir uma diversidade de diagramas, esquemas, tabelas, descrições textuais, ou expressões com símbolos. Contudo, estas “explicações e construções não são meros processos que os estudantes usam no decurso de produzir a solução (…) elas SÃO os componentes mais importantes da resposta” (Lesh & Doerr, 2003, p. 3, grifo no original). É neste sentido que propomos que a expressão do pensamento matemático tem que ser vista como parte integrante do processo de resolução de problemas, ou seja, a obtenção de uma resposta implica criar uma explicação para a solução, pelo que a atividade de resolução de um problema envolve a resposta obtida e ainda a explicação do processo seguido. Sendo então a resolução de problemas uma atividade síncrona de matematização e expressão do pensamento matemático (Carreira et al., 2016), importa compreender as formas como a tecnologia e o pensamento matemático, muito em particular os aspetos do pensamento geométrico, se tornam recursos eficazes para resolver-e-exprimir os problemas de Matemática.

O pensamento geométrico na resolução-e-expressão de problemas com o GeoGebra

Amplamente estudado em contextos de sala de aula, o desenvolvimento do pensamento geométrico tem sido caracterizado através de aspetos que dizem respeito ao pensamento espacial e à visualização, e por outros que se relacionam com a capacidade de raciocinar com conceitos teóricos do campo da geometria (Watson, Jones & Pratt, 2013).

Na perspetiva de Battista (2007), o raciocínio espacial “providencia não só um ‘*input’* para o raciocínio geométrico formal, como as ferramentas cognitivas cruciais para a análise geométrica formal” (p. 844). Por ‘raciocínio espacial’ Battista refere-se à “capacidade para ver, inspecionar, e refletir sobre objetos, imagens, relações e transformações espaciais” (p. 843). Watson et al. (2013) também clarificam que o “raciocínio espacial é uma forma de atividade mental que torna possível a criação de imagens espaciais e potencia que estas sejam manipuladas no decurso da resolução de problemas práticos e teóricos na matemática” (p. 96).

A *produção* e a *manipulação* de figuras são duas das principais *affordances*[1] (Gibson, 1979) dos ambientes de geometria dinâmica (AGD), que permitem a rápida combinação e conexão entre objetos geométricos, algébricos e a medição, pelo que se torna difícil para o utilizador não responder aos *convites para a ação* com estas ferramentas: arrastar, testar, conjeturar ou verificar. Na verdade, a formulação de conjeturas é inspirada pela observação e perceção de propriedades de uma figura que permanecem invariantes sob arrastamento (Leung, 2008) e culmina com o estabelecer de conexões com os conceitos geométricos. Embora a procura de padrões e invariantes seja considerado “uma atividade essencial no pensamento matemático” (Leung, Baccaglini-Frank, & Mariotti, 2013, p. 440), exige uma combinação entre a observação empírica e as ideias teóricas que pode estimular a necessidade de uma prova das propriedades geométricas emergentes, ou seja, pode ativar o pensamento geométrico. Por ‘prova’ entende-se aqui a produção de uma “sequência de afirmações que justificam logicamente a conclusão como uma consequência das ‘premissas’” (Battista, 2007, p. 853).

Assim, os AGD servem um duplo propósito. Por um lado, “tornam visualmente explícito o dinamismo que é implícito ao pensar sobre conceitos matemáticos geométricos” (Leung, 2008, p. 135), isto é, ‘dão vida’ às ideias e aos conceitos geométricos providenciando-lhes uma significação contextualizada. Por outro, podem guiar os estudantes numa viagem que parte de ideias informais para noções geométricas mais formais, num processo de matematização progressiva (Jones, 2000). Podem assim desempenhar um papel relevante quando se torna necessário desenvolver uma abordagem pela modelação de uma situação geométrica, e são vários os estudos a mostrar que, nessas situações, os alunos percecionam e fazem uso de um conjunto de *affordances* de modo a modelar a situação: empreendem uma construção, o que revela a maneira como estão a interpretar o problema e a vislumbrar algumas ideias matemáticas inerentes; exploram e investigam propriedades que podem levar a transformações ao nível dos seus processos de pensamento geométrico (Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, 2016; Iranzo & Fortuny, 2011; Jacinto & Carreira, 2016; Jones, 2000; Mousoulides, 2011).

Argumentamos, pois, que os AGD permitem que cada jovem participante, num determinado nível de matematização, se possa envolver numa atividade própria, construir abordagens específicas e alcançar conclusões diversas – fortemente marcadas pelo seu pensamento geométrico – enquanto resolve-e-exprime efetivamente um dado problema.

Metodologia de investigação

O estudo do qual extraímos os dados que suportam este artigo debruça-se sobre a atividade de resolução de problemas de matemática propostos pelo SUB14, com recurso a tecnologias digitais selecionadas pelos jovens participantes para desenvolver as suas próprias abordagens. A natureza exploratória do estudo levou-nos a assumir uma perspetiva interpretativa, informada por uma combinação de ideias teóricas e dados

[1] Na falta de tradução direta para Português da expressão *affordances*, a designação que mais se aproxima do seu significado seria ‘possibilidades de ação’. A fim de simplificar o discurso usaremos a versão inglesa do termo.

empíricos recolhidos e analisados segundo uma abordagem qualitativa (Quivy & Campenhoudt, 2008).

Pretendemos aprofundar a compreensão do desenvolvimento de modelos conceptuais na resolução de problemas de geometria com o GeoGebra, no âmbito do SUB14, pelo que se reporta os casos de dois participantes, de nomes fictícios Marco e Jéssica. Estes jovens recorriam com frequência a uma variedade de ferramentas tecnológicas para resolver os problemas de edições anteriores e incluíam descrições dos processos seguidos ou justificações detalhadas nas suas respostas, o que foi considerado como indicador da sua qualidade de bons informantes.

Os dados que a seguir apresentamos e analisamos consistem nos ficheiros produzidos no GeoGebra, sendo que Jéssica submeteu ainda um texto escrito com as suas explicações. No decurso do estudo principal, houve ainda lugar a entrevistas clínicas que decorreram nas casas dos participantes, mediante autorização dos seus pais. Após serem recolhidos, os dados foram organizados e tratados com recurso ao NVivo.

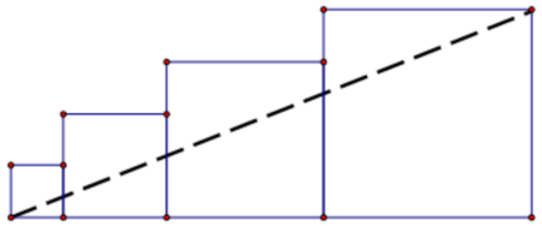
A análise destas duas resoluções, de cariz essencialmente interpretativo, visa procurar evidências que ilustrem diferentes aspetos do pensamento geométrico presentes nas abordagens destes jovens, através da descrição do desenvolvimento dos modelos conceptuais inerentes a cada solução. Nesta análise de dados ganhou relevância uma ferramenta do GeoGebra: o 'Protocolo de Construção'. Esta ferramenta faculta o acesso à atividade dos participantes no GeoGebra durante a elaboração das construções, permitindo uma descrição passo a passo das suas interações com o programa. Embora o 'Protocolo de Construção' não registe outros processos cognitivos nem indique outros procedimentos ou ferramentas que possam ter sido usados, possibilita observar a ordem de construção dos objetos incluídos em cada resolução, pelo que é sobre esses procedimentos e no reconhecimento da sua pertinência e adequação para a obtenção da solução de cada problema que se debruça esta nossa análise.

As secções seguintes reportam os casos de Marco e Jéssica a resolver-e-exprimir problemas que envolvem noções geométricas, com recurso ao GeoGebra.

Marco a resolver-e-exprimir o problema 'Unidos e Cortados'

Marco participou em várias edições das Competições de Matemática, é um jovem muito curioso, aprecia a vertente tecnológica do SUB14 bem como o facto de poder recorrer a uma diversidade de ferramentas e de abordagens. Resolveu vários problemas do SUB14 com o GeoGebra, sendo que esse à-vontade surgiu de experiências proporcionadas pela professora em sala de aula.

O problema 'Unidos e Cortados' (Figura 1) foi proposto na fase de apuramento do SUB14 quando Marco estava a frequentar o 8.º ano de escolaridade. A descrição dos processos de resolução-e-expressão que se segue baseia-se na análise do protocolo de construção do ficheiro submetido por Marco.



Considera uma sequência de quadrados de lados 1, 2, 3, 4,… centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros, como ilustra a figura. Depois de juntos, cortam-se todos os quadrados segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior. Qual é a área que fica acima da linha de corte se a sequência tiver 8 quadrados?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 1 - Enunciado do problema ‘Unidos e Cortados’

Obtendo a sequência completa de quadrados

Marco decidiu utilizar o GeoGebra para obter uma figura semelhante à que foi apresentada no problema apercebendo-se de que podia obter a sequência de 8 quadrados através da marcação dos seus vértices, da posterior construção dos lados e, a partir daí, encontrando uma forma para obter a área solicitada. Parece ter reconhecido grandes potencialidades na combinação de duas *affordances* da vista gráfica do GeoGebra – os eixos e a grelha – que providenciam um suporte visual que lhe vai permitir construir a sequência. Marco colocou cada vértice sobre a grelha, considerando as suas coordenadas e as dimensões dos lados de cada quadrado (Figura 2Figura 2). Algumas coordenadas visíveis no Protocolo de Construção (e.g, E e F na Figura 3) sugerem que recorreu ao suporte visual que a grelha oferece para encontrar a localização aproximada de cada ponto.

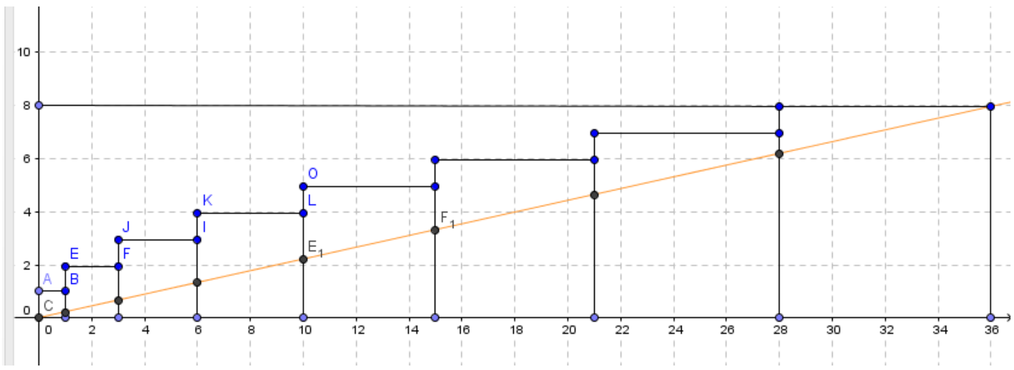


Figura 2. Construção da sequência de oito quadrados elaborada por Marco

O passo seguinte consistiu na construção dos lados dos quadrados utilizando a ferramenta que permite traçar segmentos. Construiu então uma semirreta que passa por dois pontos e, utilizando as ‘propriedades dos objetos’, alterou a cor dessa semirreta para laranja. Enquanto desenvolvia esta construção – que não surgia representada no enunciado – Marco foi combinando recursos tecnológicos e matemáticos, marcando o início de uma abordagem exploratória a este problema.

Matematizando: resolver-e-exprimir a situação

O modelo conceptual, que parece estar em desenvolvimento, guiou Marco até à solução: ao considerar a relevância da folha de cálculo (Figura 3), optou por criar uma lista dos comprimentos dos lados, e inseriu-os na coluna A, e outra contendo a área de cada quadrado correspondente, que organizou na coluna B. Depois inseriu o texto “área dos 8 Q[uadrados]” na célula A14, construiu o lado superior do retângulo envolvente que contém a sequência de quadrados e inseriu manualmente a área total dos 8 quadrados e do retângulo. Apesar de este retângulo também não ser mencionado no problema, a sua construção revela a forma como Marco projetou a continuidade da sua abordagem à solução e que é baseada na perceção de que pode obter a área pedida através da diferença entre a área dos 8 quadrados e a área do triângulo inferior, resultante da marcação da linha de corte, que corresponde a metade da área do retângulo. Assim, este retângulo é um novo objeto de conhecimento que Marco utilizou para resolver e para exprimir a sua resolução, recorrendo aos seus conhecimentos sobre o GeoGebra e aos seus conhecimentos sobre áreas de polígonos.

Continuou, inserindo o texto “área acima da linha” na célula A16, mas calculou a área de meio-retângulo e inseriu-a manualmente na célula B17. Mais abaixo registou a diferença entre as áreas do retângulo e dos 8 quadrados, e subtraiu este resultado à área do meio-retângulo. Preencheu então a célula A16 com a resposta, 60. O ficheiro que submeteu com a resolução contém a construção da sequência referida no enunciado e apresenta diversos cálculos que visam explicar e justificar a sua resposta utilizando a vista de folha de cálculo do GeoGebra.

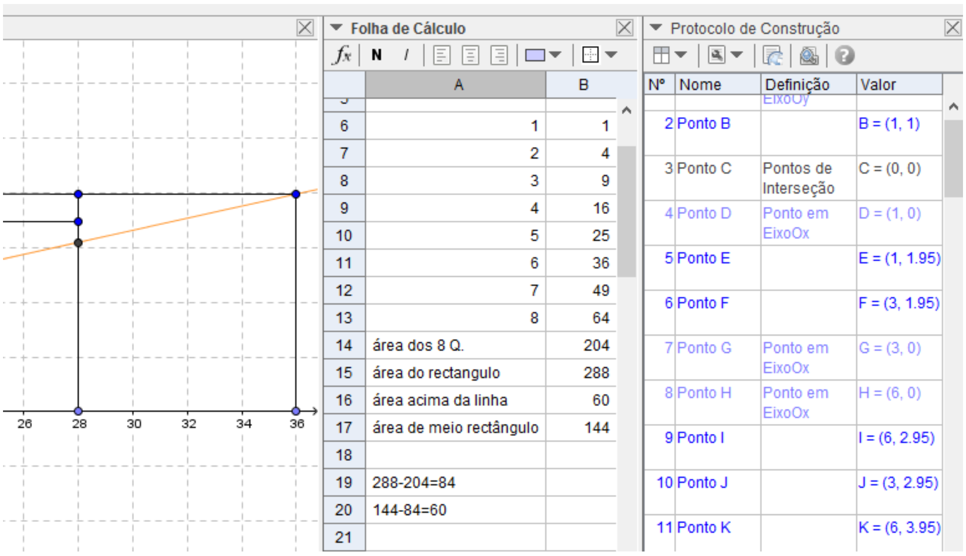


Figura 3. Folha de cálculo do GeoGebra e excerto do Protocolo de Construção

A análise do protocolo de construção que suporta esta resolução mostra que, apesar de não ter feito uma construção robusta, Marco encontrou a solução do problema e apresentou-a com clareza. Para além disso, o jovem reconheceu uma diversidade de possibilidades de ação com o GeoGebra embora escolhesse livremente fazer uso apenas das ferramentas indispensáveis ao desenvolvimento de uma abordagem exequível ao problema. Esta escolha intencional do GeoGebra baseia-se num conhecimento explícito das suas *affordances*, da sua linguagem característica e das ferramentas embutidas, bem como das capacidades do próprio jovem, por outras palavras, das coisas que é capaz de fazer com o GeoGebra e no GeoGebra para resolver o problema e exprimir a resolução.

A utilização eficaz da ferramenta parece estar relacionada com o facto de a construção espoletar uma abordagem visual que faz emergir uma estrutura conceptual subjacente ao processo de obter e apresentar a solução.

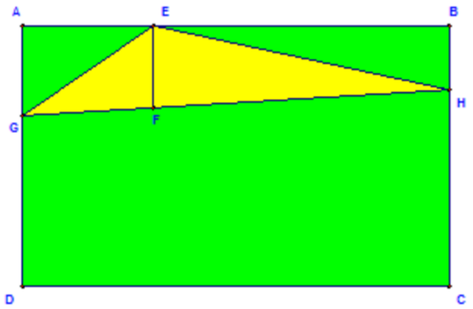
Jéssica a resolver-e-exprimir o problema "A marcação do canteiro"

Jéssica participou em duas edições do SUB14, é bastante empenhada e o seu desempenho é exemplar: responde sempre dentro do prazo estabelecido, prima pela clareza, completude e correção das suas respostas, e orgulha-se disso. Segundo Jéssica, a sua professora também utilizava com bastante regularidade o GeoGebra como forma de ilustrar alguns aspetos dos conteúdos que lecionava.

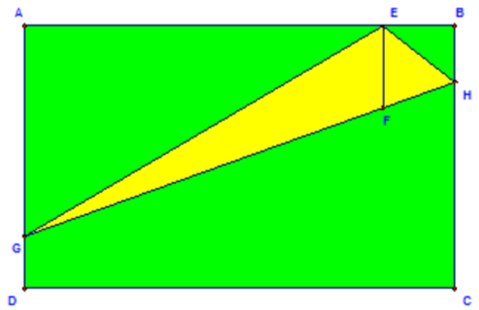
O problema 'A marcação do canteiro' (Figura 4) foi proposto na fase de apuramento do SUB14. A seguir, apresentamos os aspetos críticos da resolução da Jéssica com base na análise do protocolo de construção e do texto escrito que submeteu ao SUB14 juntamente com o ficheiro GeoGebra.

A marcação do canteiro

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva rectangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do rectângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH]



No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do rectângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



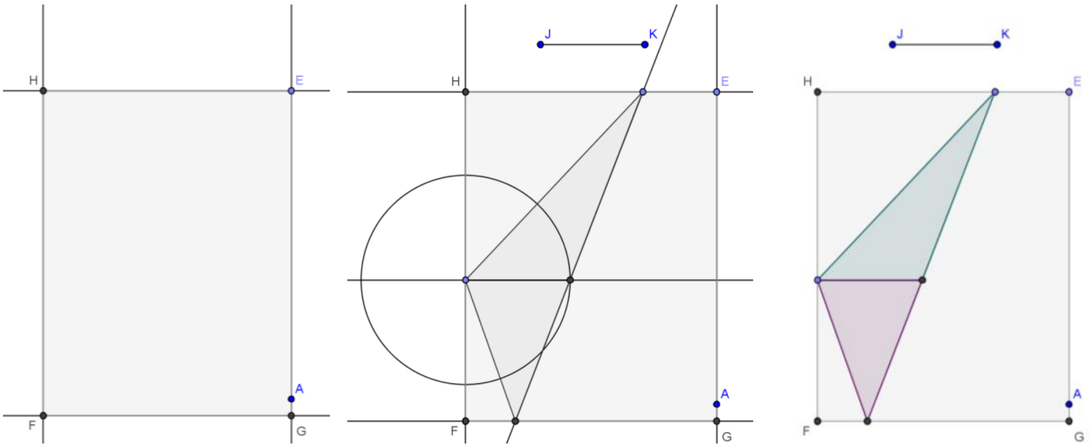
Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 4. Enunciado do problema 'A marcação do canteiro'

Percebendo a natureza dinâmica da situação

Tanto a construção (Figura 5) como a explicação (Figura 6) apresentadas por Jéssica revelam uma abordagem ancorada no reconhecimento da natureza dinâmica desta situação. Jéssica parece ter-se apercebido de que podia alcançar uma conclusão acerca do comportamento da área ao incorporar esse aspeto dinâmico na sua construção. Ao decidir construir as figuras geométricas com o GeoGebra, revela perceber a utilidade de imprimir esta natureza dinâmica na construção e de simular uma experiência com uma 'vara virtual' que introduziu num 'canteiro virtual'. Isto mostra que a jovem sabe que o GeoGebra possibilita construções precisas e rigorosas do relvado retangular e do canteiro triangular e, mais importante ainda, que favorece uma compreensão clara da matemática envolvida no problema: permite simular a alteração da posição da vara por arrastamento, o que resulta numa transformação do formato do canteiro triangular sendo que, de imediato, também exibe as áreas dos polígonos na folha algébrica. Portanto, o GeoGebra tem as características que são necessárias para simular dinamicamente a situação pelo que a manipulação das figuras fará gerar conjeturas sobre a solução e a sua prova.



(a) Construção do jardim retangular (b) Construção do canteiro triangular (c) Construção final

Figura 5. Três etapas da construção

Construindo com o GeoGebra

Jéssica recorreu a retas perpendiculares e às suas interseções para construir o jardim retangular, mantendo dois pontos móveis visíveis até ao final da construção, para poder modificar as suas dimensões: o vértice superior direito, E, e um ponto no lado direito do retângulo, A (Figura 5a). Em seguida construiu um segmento exterior à figura, simulando um seletor, cujo comprimento é transportado para a construção geométrica utilizando uma circunferência para estabelecer o comprimento da vara. Este segmento exterior, $[JK]$, é um objeto geométrico novo que não é mencionado no enunciado do problema. Assim, Jéssica não só conseguia alterar a posição da vara como controlar o seu comprimento, possibilitando o aparecimento de uma abordagem exploratória da situação.

Completou a construção do triângulo criando pontos, linhas retas, segmentos e, por fim, um polígono – o canteiro triangular (Figura 5b). Em seguida, decidiu construir dois triângulos menores e colori-los com cores diferentes (Figura 5c), o que indica que se terá apercebido de que a área do canteiro não se altera quando a vara é sujeita a arrastamento, possivelmente analisando a folha algébrica onde o GeoGebra exibe de forma automática a área de todos os polígonos construídos. Apesar de o protocolo de construção não registar qualquer tipo de manipulação, o dinamismo intencionalmente incorporado e a inclusão dos triângulos menores, em conjunto com a explicação escrita, sugerem que a análise do efeito do arrastamento de alguns objetos foi crucial para o reconhecimento de que a vara é um lado comum aos dois triângulos, portanto influenciando a construção de um modelo conceptual mais claro sobre a invariância da área do canteiro de flores.

Matematizando a situação

O passo seguinte consistiu em encontrar explicação matemática para a invariância da área do canteiro. Ao percecionar que a vara correspondia à base de cada um dos dois triângulos pequenos, Jéssica analisou essas duas áreas para compreender o comportamento da área do canteiro. Assim, recorreu à construção dinâmica como um novo objeto matemático para desenvolver um modelo conceptual da invariância da área, abandonando a atividade de construção para se envolver numa perspetiva analítica da situação em que usa a fórmula da área de um triângulo. Efetivamente, a jovem constatou que a soma das alturas dos dois triângulos mais pequenos coincide com a medida do comprimento do retângulo – uma nova compreensão matemática, potenciada pelo GeoGebra.

Explicando e exprimindo a solução

A construção é tão fundamental para a resolução como a explicação e os cálculos: são criados enquanto a Jéssica explora a figura e utiliza manipulação simbólica para demonstrar matematicamente a invariância da área (Figura 6). A ‘solução’ compreende a construção e os resultados matemáticos, isto é, através da manipulação algébrica das áreas ela oferece uma prova da sua conjetura no âmbito da sua atividade de resolver-e-exprimir o problema. Jéssica submeteu a construção geométrica e a explicação escrita, o que indica que procurou responder ao apelo que consta nas regras de participação no sentido de ser necessário apresentar uma justificação clara do raciocínio bem como uma descrição detalhada dos processos seguidos.

Resposta:
O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2

Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.

Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.

Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

Figura 6. Explicação escrita enviada pela Jéssica por *e-mail*

É ainda de sublinhar que nem todos os objetos construídos estão efetivamente visíveis no ficheiro. Em dado momento da atividade, que não é possível especificar pois o protocolo de construção não o regista, a jovem ‘limpou’ as construções recorrendo à ferramenta 'Propriedades dos Objetos' para esconder alguns elementos geométricos que foram usados como suporte de outros; por exemplo, as retas sobre as quais assentam segmentos, ou as circunferências que foram apenas usadas para fixar o comprimento de um segmento. Jéssica sabia que estas construções auxiliares são essenciais e não podem ser eliminadas apesar de já terem servido o seu propósito. Percebia um duplo propósito nesta *affordance*: por um lado, esconder um objeto reduz o número de entidades visíveis e foca a atenção naquelas que são realmente necessárias; por outro lado, limpar a construção torna-a mais elegante, simples e compreensível para aqueles que vão apreciá-la. Assim, a ferramenta 'Propriedades dos Objetos' é um recurso usado para resolver, mas é também um importante recurso para exprimir a resolução.

Discussão e considerações finais

Neste estudo apresentamos duas resoluções de problemas geométricos produzidas com recurso ao GeoGebra, a partir das quais procuramos identificar aspetos distintivos do pensamento geométrico destes jovens durante o desenvolvimento dos modelos conceptuais que sustentam as soluções.

Da análise dos dados sobressai, antes de mais, a constatação de que resolver o problema e expressar a solução são duas faces de um mesmo processo, isto é, resolver-e-exprimir descreve o processo de matematização e expressão do pensamento geométrico: cada solução explica-se a si própria.

O GeoGebra foi usado tanto por Marco como por Jéssica para construir figuras e para aprofundar a sua compreensão dos problemas. Apesar de terem encontrado no GeoGebra uma ferramenta que os conduziu com eficácia às soluções, a atividade em que se envolveram encerra diferenças significativas em termos dos modelos conceptuais desenvolvidos, permitindo identificar traços distintivos do seu pensamento geométrico.

Embora a solução produzida por Marco não evidencie grande preocupação com o rigor característico da matemática e da geometria, o jovem mostrou ser capaz de utilizar com eficácia noções de geometria (e.g., ponto, segmento, semirreta, quadrado, retângulo, área) e conhecimentos sobre o GeoGebra (e.g, uso da grelha e eixos para fazer construções, alteração de propriedades, folha de cálculo) para efetuar construções e registar cálculos durante a atividade de resolução-e-expressão do problema.

A perceção de algumas *affordances* no GeoGebra assume um papel crucial na identificação de um caminho a seguir na medida em que, inicialmente, os eixos e a grelha suportam visualmente a construção e, mais tarde, a folha de cálculo permite registar a sequência de passos seguida. Nesta atividade, Marco desenvolveu um modelo conceptual elementar, um 'modelo de', bastante próximo do contexto e no qual prevalece uma matematização horizontal suportada nos argumentos visuais construídos. Uma das particularidades da sua solução é a criação de um novo objeto de conhecimento: o retângulo que Marco acrescentou à construção, não mencionado no enunciado. Este assume grande relevância no descortinar de um caminho pois é com ele que entendeu que podia encontrar a solução ao subtrair a área do semirretângulo à área dos oito quadrados.

Jéssica revelou-se capaz de um pensamento geométrico assente no pressuposto de que a reprodução das imagens e ideias estáticas apresentadas no enunciado podem ser transformadas em imagens e ideias dinâmicas, adequadas à manipulação. À semelhança do que descreve Leung (2008), é a partir delas que construiu e desenvolveu um modelo conceptual que parte de ideias informais mas passa a incorporar noções geométricas formais. Num primeiro momento, a invariância da área do triângulo poderia não ser óbvia, mas a representação da situação no GeoGebra desencadeia a perceção da vara como a base partilhada entre os dois triângulos menores e o cálculo das áreas correspondentes. Daqui desenvolveu um modelo conceptual para resolver o problema, pelo que a construção executada com o GeoGebra induziu a obtenção de uma prova daquela solução.

A jovem dominava um conjunto amplo de *affordances* do GeoGebra: fez construções simples, reconheceu a necessidade de usar construções referenciais (linhas paralelas e perpendiculares, fixar um dado comprimento com recurso ao compasso e transportá-lo para novos objetos), alterou propriedades de objetos e, inclusive, elaborou construções usando parâmetros (simulou um seletor). A perceção destas *affordances* visava realizar ações no GeoGebra que lhe permitissem obter uma figura 'robusta', de forma que as propriedades geométricas incorporadas intencionalmente permanecessem inalteradas após a manipulação de certos elementos.

Um outro traço marcante do pensamento geométrico de Jéssica é esta intencionalidade em respeitar as condições do enunciado, mas acrescentando um segmento para simular um seletor e um ponto móvel para permitir regular as dimensões do jardim. Estes aspetos sinalizam a sua intenção em generalizar e formalizar. De facto, o GeoGebra não permitiu apenas a visualização de transformações e de relações geométricas como fez surgir conjeturas e a generalização, tal como Leung, Baccaglini-Frank e Mariotti (2013) também observaram no seu estudo. Isto sugere que a solução só é percecionada como completa após a inclusão de justificações detalhadas nas quais Jéssica explica o seu raciocínio e inclui os cálculos que, do seu ponto de vista, são necessários para 'demonstrar' a veracidade das suas descobertas.

A manipulação da variável 'altura' de cada triângulo menor, resultante da alteração da posição da vara, enquadra-se numa atividade de matematização vertical. É a capacidade de desenvolver pensamento geométrico durante a realização de construções com o GeoGebra e a análise dos objetos geométricos transformados, possivelmente mediante arrastamento, que permite a Jéssica passar de um 'modelo de', ancorado no contexto, a um 'modelo para' explicar a solução de um ponto de vista matemático – o que Jones (2000) denominou por matematização progressiva.

Em suma, estamos perante dois casos de atividade de resolver-e-exprimir problemas com o GeoGebra bem distintos, embora ambas tenham conduzido a soluções corretas. Enquanto a capacidade de Marco resolver-e-exprimir o problema *Unidos e Cortados* com o GeoGebra reside no desenvolvimento de um tipo de pensamento geométrico ancorado na sua aptidão em construir para visualizar e inspecionar que inspiram um modelo conceptual ao nível de uma matematização horizontal, a capacidade de Jéssica resolver-e-exprimir o problema *A marcação do canteiro* revela que o seu pensamento geométrico é desenvolvido a partir da construção para visualizar, manipular, explorar e formular conjeturas, afastando-se da visualização de casos particulares, pelo que, ao suscitar a generalização e a procura de uma explicação ou prova, revela traços de uma matematização vertical.

Em ambos os casos observamos que estes jovens são capazes de percecionar a utilidade de determinadas *affordances* do ambiente de geometria dinâmica em questão e colocá-las em sintonia com o conhecimento matemático de que dispõem para obter uma solução eficaz dos problemas, pelo que os aspetos do pensamento geométrico trazidos à atividade são essenciais ao seu sucesso na resolução-e-expressão-com-GeoGebra. Estes resultados apontam que a maleabilidade de um ambiente de geometria dinâmica, como o GeoGebra, permite que os estudantes resolvam problemas de geometria e desenvolvam pensamento geométrico, independentemente das suas capacidades de matematização.

Referências

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project.* New York, NY: Springer.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development.* Paper presented at ICME11. Monterrey, México: ICMI.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. In R. Shaw & J. Bransford (Eds.), *Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas – Encontro de homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 83-101). Lisbon, Portugal: APM.

Iranzo, N., & Fortuny, J. (2011). Influence of GeoGebra on problem solving strategies. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra* (pp. 91-104). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2016). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education.* Advance Online Publication. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 55-85.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lesh, R. (2000). Beyond Constructivism: Identifying Mathematical Abilities that are Most Needed for Success Beyond School in an Age of Information. M*athematics Education Research Journal, 12*(3), 177-195.

Lesh, R., & Doerr, H. (1998). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modelling. In P. Cobb & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing, communicating, and mathematizing*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 135-157.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 439-460.

Mousoulides, N. (2011). GeoGebra as a conceptual tool for modeling real world problems. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 105-118). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa, Portugal: Gradiva.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*. Oxford, UK: Oxford University Press.

RECONHECIMENTO DE FIGURAS NO PLANO A PARTIR DA IDENTIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES

Maria Paula Pereira Rodrigues
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mariapaular@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Escola Superior de Educação de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: Este artigo é parte de uma investigação mais alargada no âmbito de um estudo de Doutoramento, intitulado *Classificação de figuras no plano: uma experiência de ensino nos primeiros anos de escolaridade*, e tem como objetivo perceber que conhecimento sobre propriedades de figuras geométricas é mobilizado por duas alunas do 3.º ano de escolaridade, quando descrevem figuras no plano, durante a realização de um jogo a pares, intitulado *Adivinha em que figura estou a pensar*. Os dados foram recolhidos através de uma entrevista, com recurso a gravações áudio e vídeo, e mostram que o conhecimento mobilizado pelas alunas utiliza representações com significado individual e está relacionado com a dimensão figurativa dos objetos, surgindo associado a imagens mentais ou visuais e experiências vividas. O trabalho desenvolvido sugere que as alunas se encontram entre os níveis de raciocínio visual-holístico (nível 1) e o nível de raciocínio analítico dos componentes (nível 2) de Battista.

Palavras-chave: Visualização, representações, classificação e níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Introdução

As crianças aprendem a desenvolver diferentes perspetivas na relação com os objetos e a coordenar diferentes pontos de vista quando os observam e manipulam, utilizando referências externas que requerem a integração de diferentes representações (Clements & Sarama, 2014). Assim, cremos que um trabalho que apele à manipulação, observação e discussão de objetos ou formas geométricas pode ajudar a desenvolver o pensamento geométrico. A resolução de tarefas que apelam à visualização, pelo seu caráter desafiante e motivador, desenvolve capacidades ligadas à visualização e, consequentemente, o raciocínio espacial. Neste tipo de tarefas, os alunos descrevem e analisam propriedades das figuras e criam relações entre as mesmas, para construir o significado de “classe de figura” (Bernabeu & Llinares, 2017, p.11). Nesta perspetiva, interessa perceber a importância da realização deste tipo de tarefas no desenvolvimento do raciocínio espacial de alunos dos primeiros anos de escolaridade, onde o pensamento geométrico é ainda muito centrado em imagens visuais e conceitos geométricos que não consideram as propriedades das figuras.

Este artigo pretende perceber que conhecimento sobre propriedades de figuras geométricas é mobilizado por duas alunas do 3.º ano de escolaridade, quando descrevem figuras no plano, durante a realização de um jogo a pares, intitulado *Adivinha em que figura estou a pensar*. Este conhecimento será analisado com base nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Battista (2007), resultantes da reconceptualização dos níveis de van Hiele (1999), e da conceção de conceito figurativo de Fischbein (1993).

Enquadramento teórico

O pensamento geométrico lida com ideias figurativas e conceptuais e envolve a perceção e manipulação de imagens que conduzem à construção de conceitos figurativos e à capacidade de classificar geometricamente. Neste processo têm especial relevo os aspetos ligados à visualização e à representação.

Visualização

É comum assumir que a visualização se centra na perceção e na manipulação de imagens visuais e, nesta linha, Mariotti e Pesci (1994) identificam visualização como um processo espontâneo de pensamento, acompanhado e apoiado por imagens.

Para Battista (1990), a visualização é uma capacidade que não está necessariamente ligada com o conhecimento das propriedades, pois alunos com fraco poder de visualização podem desenvolver estratégias analíticas, baseadas em propriedades, para compensar a falta de capacidade de visualização e outros revelam uma grande capacidade de visualização, antes de desenvolverem um raciocínio baseado em propriedades das figuras.

Neste artigo, assumimos como visualização o “processo de pensamento espontâneo” (Mariotti & Pesci, 1994, p.22), suportado por imagens mentais ou representações simbólicas, com recurso à utilização de materiais manipuláveis, utilizados para comunicar o conhecimento sobre propriedades de figuras no plano.

Representações

Dufour- Janvier, Bednarz e Belanger (1987) distinguem as representações agrupando-as em dois conjuntos: internas e externas. Para estes autores, as representações internas ligam-se mais ao domínio do significado e correspondem a imagens mentais que, por sua vez, correspondem a formulações internas construídas a partir da realidade. As representações externas relacionam-se com o significante e dizem respeito a todas as representações simbólicas (símbolos, esquemas, diagramas,…) que pretendem representar externamente uma certa “realidade” matemática.

De acordo com Battista (2008), as crianças utilizam representações e objetos cognitivos, entendidos como conceitos ou definições individuais, no pensamento geométrico. Uma representação é algo com significado individual (Goldin & Kaput, 1996) e um “objeto cognitivo é uma entidade mental que opera (consciente ou inconscientemente) durante o processo de raciocínio" (pp.341-342).

O ser humano tem a capacidade de criar imagens mentais ou representações internas que pode representar externamente, conduzindo-nos à ideia de que para comunicar são necessários dois tipos de representações, as internas e as externas. A este propósito, Goldin e Shteingold (2001) referem que "Só podemos fazer inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas" (p.6), pois estas dão informação sobre o que estes pensam e sobre o seu conhecimento e a forma como partilham e constroem esse conhecimento.

As representações utilizadas pelos alunos para exprimir o conhecimento relativo a propriedades de figuras geométricas, são ferramentas que permitem articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios (Woleck, 2001).

Classificação geométrica

Pensando a classificação geométrica como o método de formar agrupamentos de figuras de acordo com um dado critério, o professor deve focar-se na intencionalidade de levar os alunos a ultrapassar uma classificação baseada em protótipos visuais, formas ou designações de figuras que não consideram atributos ou propriedades geométricas para serem integrados numa classe. Nesta perspetiva, deverá promover tarefas de classificação de tipo descritivo ou analítico, onde se reconhece uma figura a partir da identificação do conjunto das suas propriedades.

O processo de classificar em geometria, de acordo com Fischbein (1993), lida com ideias mentais que designamos de figuras geométricas. Estas possuem, em simultâneo, um caráter conceptual e figurativo, respetivamente um conjunto de propriedades e uma forma. O conceito expressa uma ideia geral relativa à representação de uma classe de objetos, baseada nas suas características comuns, em contraste uma imagem é uma representação sensorial do objeto.

A coexistência de conceitos e imagens e a sua fusão possibilitam ao indivíduo construir conceitos figurativos, aqui entendidos como as ideias figurativas e conceptuais que permitem a construção do raciocínio geométrico e o desenvolvimento da capacidade de classificar geometricamente. Classificar implica agir sobre conceitos figurativos, gerando interação entre conceito e imagem. Esta interação permite a criação de um processo de relações lógicas que levam ao reconhecimento de classes e subclasses de figuras ou a "… identificar as propriedades comuns e relevantes que determinam a categoria" (Mariotti & Fischbein, 1997, p.244). Todavia, a relação entre objetos cognitivos e representações visuais é muitas vezes dificultada pelo facto de a ligação entre as dimensões visual e conceptual se basear em ideias que não representam a definição formal mas representações visuais, imagens mentais, propriedades ou experiências individuais (Vinner, 1983). Esta situação, de acordo com Mariotti (1992), relaciona-se com a dupla dimensão dos objetos sobre a qual se debruça o raciocínio geométrico: as dimensões figurativa e conceptual, também designadas como *conceito figurativo* (Fischbein, 1993). A primeira relacionada com a representação e a segunda, mais abstrata, relacionada com a definição. Desta forma, o "raciocínio geométrico parece ser caracterizado por uma estreita interação entre estas duas dimensões" (Mariotti & Fischbein, 1997, p.220).

Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico

Identificaremos, aqui, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1999) que originaram os de Battista (2007), considerados para a análise do trabalho produzido pelas alunas.

Nível 0 – visualização ou reconhecimento

Os alunos raciocinam utilizando imagens visuais e os conceitos geométricos são considerados como um todo, sem explicitação das propriedades dos componentes. As figuras geométricas são reconhecidas pela sua aparência global e podem ser identificadas pelos nomes mas não há identificação das propriedades que levaram ao reconhecimento das mesmas.

Nível 1 – Análise

Os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, através de uma análise informal das propriedades e atributos das figuras geométricas, pela observação e experimentação, e iniciam a identificação de características das figuras geométricas, criando propriedades que são utilizadas para considerarem classes e formas.

Para compreender o desenvolvimento do pensamento em geometria, Battista (2007) reelaborou os níveis de van Hiele (1999) e definiu o progresso dos alunos desde as conceptualizações intuitivas informais, das figuras a duas dimensões, até ao sistema conceptual formal, baseado em propriedades. Esta reelaboração permitiu uma expansão da teoria de van Hiele no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento e inferências sobre propriedades. Os níveis de van Hiele reconceptualizados por Battista (2007) são:

Nível 1 - Raciocínio visual-holístico

Os alunos identificam, descrevem e raciocinam sobre formas e outras configurações geométricas, de acordo com a sua aparência, como um todo visual. Podem ser utilizados protótipos e transformações visuais imaginadas, relacionadas com a configuração ou orientação das figuras.

No nível 1, identifica dois subníveis:

1.1. Subnível de pré-recognição onde os alunos ainda não são capazes de identificar formas comuns.

1.2. Subnível de recognição onde os alunos identificam corretamente formas comuns.

Nível 2 - Raciocínio analítico dos componentes

Os alunos conseguem conceptualizar e especificar formas, descrevendo os seus componentes e as relações espaciais entre os mesmos. Contudo, as suas descrições e conceptualizações variam muito em sofisticação. Iniciam de maneira informal e imprecisa no subnível 2.1. e terminam formalmente no subnível 2.3.

Subnível 2.1 - Raciocínio na sua componente visual-informal. Os alunos descrevem partes e propriedades das formas informalmente e de forma pouco precisa. Ainda não possuem os conceitos formais necessários à especificação precisa de propriedades. As descrições e conceptualizações são baseadas em elementos visuais, focadas, inicialmente, em componentes das figuras, e não em relações espaciais entre as mesmas. Na descrição dos componentes de uma figura ou relações entre as mesmas, os alunos utilizam uma linguagem informal, desenvolvida em experiências quotidianas. A linguagem dos alunos varia em precisão e coerência, desde a utilização da conceptualização vaga e incompleta, até à descrição informal de uma conceptualização que corresponde a um conceito geométrico formal.

Subnível 2.2 - Raciocínio na sua componente informal e insuficientemente formal. Quando os alunos começam a adquirir conceptualizações formais que lhes permitem observar relações espaciais entre os componentes das figuras, utilizam uma combinação de descrições formais e informais. Contudo, as descrições formais são insuficientes para descrever as figuras e o seu raciocínio continua a ter subjacente uma componente puramente visual. Além disso, a maioria das descrições e conceptualizações ocorrem enquanto observam as figuras.

Subnível 2.3 - Raciocínio formal suficiente baseado em propriedades. Os alunos utilizam explicita e exclusivamente conceitos geométricos formais e uma linguagem que descreve e conceptualiza as formas, permitindo-lhes obter um conjunto suficiente de propriedades que especifiquem as figuras em análise. Nesta fase, os alunos passam do raciocínio visual para um raciocínio baseado na identificação e relação de propriedades das figuras e são capazes de utilizar e formular definições formais para as classes de figuras conhecidas.

Metodologia

Os dados aqui analisados foram recolhidos durante uma entrevista a duas alunas do 3.º ano de escolaridade, enquanto realizavam um jogo a pares. A entrevista foi efetuada na fase final de uma experiência de ensino que envolveu vinte alunos, desde o 1.º ao 3.º ano de escolaridade, de uma escola privada, situada no concelho de Sintra. Esta experiência de ensino foi definida tendo subjacente uma metodologia de *design based research* (Gravemeijer, 2016). Foi estabelecida a conjetura que a criação e implementação de tarefas diversificadas, que conduzissem os alunos à observação, manipulação e discussão de figuras no plano, e a interação, gerada em discussões de pequeno ou grande grupo, em situações de trabalho autónomo, permitiriam a identificação de propriedades de figuras no plano e promoveriam o desenvolvimento do pensamento geométrico.

As duas alunas referidas neste artigo, identificadas como Luana e Patrícia, nomes fictícios, tinham à data da realização da entrevista nove anos. Estas alunas revelaram sempre um bom nível de participação nas discussões tidas em pequeno grupo, durante as sessões de trabalho autónomo, e em grande grupo, nas discussões coletivas. A entrevista realizada pela investigadora, identificada como primeira autora, teve lugar fora da sala de aula, durante aproximadamente uma hora, tendo como objetivo perceber que conhecimento sobre propriedades de figuras geométricas era mobilizado pelas duas alunas, quando descreviam figuras no plano, no decorrer do jogo *Adivinha em que figura estou a pensar*. A tarefa, realizada pela primeira vez, não tinha como intuito encontrar uma vencedora mas propor que cada uma das alunas, uma a seguir à outra, descrevesse duas figuras, enunciando um conjunto de propriedades, para que o seu par conseguisse identificar as figuras descritas. A entrevista foi vídeo gravada e transcrita.

O estudo segue uma abordagem qualitativa-interpretativa (Guba & Lincoln, 1994) e os dados são analisados tendo em conta os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Battista (2007), que partem dos níveis de van Hiele (1999) e consideram um desenvolvimento gradual do pensamento geométrico dos alunos, e da conceção de conceito figurativo de Fischbein (1993), permitindo situar as alunas em termos do nível de desenvolvimento do seu pensamento geométrico.

Resultados

No início do jogo *Adivinha em que figura estou a pensar*, pretendia-se que, ao pensar numa figura conhecida, uma das alunas fizesse uma descrição, com base na identificação de um conjunto de propriedades, que permitisse à outra identificar a figura em que a primeira tinha pensado. Foram disponibilizados um conjunto de materiais a que as alunas poderiam recorrer: geoplano (5X5); elásticos de diferentes cores; folhas de papel quadriculado (1X1); folhas de papel liso; lápis de carvão e de cores e borracha.

Durante a entrevista, foi pedido a cada uma das alunas que descrevesse duas figuras. As duas fizeram uma descrição fluída da primeira figura, sem recurso à utilização de materiais e utilizando um conjunto de propriedades que permitiu à sua interlocutora identificar a figura em que estavam a pensar. O mesmo não aconteceu relativamente à segunda figura, possivelmente devido ao facto de, cada uma das alunas, ter descrito, em primeiro lugar, figuras que conheciam bem e nas quais eram capazes de analisar os seus componentes, descrevendo os que para si eram mais relevantes, em termos da sua identificação. No segundo caso, recorreram à representação das figuras descritas no geoplano 5X5, como apoio à visualização.

Luana iniciou o jogo: 4 lados iguais; 2 pares de ângulos opostos iguais e 4 ângulos retos.

Patrícia não acompanhou a descrição feita e foi necessário Luana repetir pausadamente as propriedades enunciadas. Patrícia foi ouvindo atentamente a repetição e, após a mesma, pediu para utilizar o geoplano e, no mesmo, tentou reproduzir uma figura que contivesse as propriedades enunciadas.

Após este trabalho, respondeu: Quadrado.

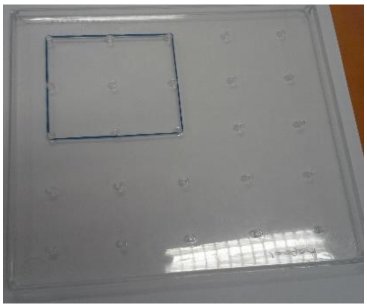


Figura 1. Quadrado representado por Patrícia no geoplano após a descrição de Luana

Luana confirmou a resposta de Patrícia e esta revelou compreender as propriedades enunciadas pela colega, através da observação e experimentação, quando representou a figura no geoplano. O suporte visual oferecido pela representação no geoplano pareceu ter contribuído para Patrícia identificar a figura descrita, com segurança.

Investigadora: Patrícia, como pensaste?

Patrícia: Ela disse “quatro lados iguais”, ou era o quadrado ou era o losango. Depois disse “dois pares de ângulos opostos iguais” e podia continuar a ser as duas figuras mas depois disse “quatro ângulos retos”. Só podia ser o quadrado.

A propriedade ‘quatro ângulos retos’ surgiu como ideia chave para Patrícia eliminar propriedades mais gerais e se centrar apenas nas essenciais, pois a sua ideia inicial parecia considerar a classificação inclusiva.

Luana recorreu a um conjunto de propriedades formais e utilizou uma linguagem que descreve e conceptualiza a figura pensada, permitindo a Patrícia obter um conjunto suficiente de propriedades que a levaram à identificação da figura.

> *Investigadora*: Luana podes pensar noutra figura.
>
> *Luana*: 2 lados iguais e 2 lados diferentes…
>
> *Patrícia*:… dois lados opostos iguais?
>
> *Luana*: Não, não é opostos.
>
> (depois de pensar um pouco)
>
> Ah… 2 ângulos agudos e 2 obtusos. E é só.

A intervenção de Patrícia pareceu surgir no sentido de, à medida que Luana foi fazendo a descrição, ir conseguindo clarificar ideias para ir construindo uma representação interna, resultante de um processo espontâneo de pensamento, da figura que estava a ser descrita.

> (Entretanto, Patrícia, pensativa, foi colocando e tirando elásticos, repetidamente, para tentar representar a figura descrita por Luana.)
>
> *Investigadora*: Já descobriste, Patrícia?
>
> *Patrícia*: Acho que sim. (Pensa mais um pouco, virando e revirando o geoplano) Acho que é esta (virando o geoplano para Luana).
>
> *Luana*: Não.

O virar e revirar do geoplano indicia que a posição das figuras ainda pode constituir um entrave à sua identificação, dado o efeito protótipo continuar a exercer influência na identificação de figuras no plano. Este tipo de comportamento parece surgir associado a transformações visuais imaginadas, relacionadas com a orientação das figuras, que se liga ao processo de manipulação de imagens visuais.

> *Investigadora*: Patrícia, que figura representaste?
>
> *Patrícia*: Um paralelogramo.
>
> *Investigadora*: Luana, não é um paralelogramo, certo?
>
> *Luana*: Não….

Ao responder que não, Luana pareceu reticente e eu questionei-a: “Não é paralelogramo ou não é o paralelogramo em que pensaste?”. A questão colocada teve por objetivo perceber se o protótipo de paralelogramo ou a posição em que o mesmo foi representado, por Patrícia, podia causar “ruído” na imagem mental de Luana, uma vez que a sua definição de paralelogramo parecia resultar de uma ligação entre as dimensões visual e conceptual de paralelogramo, baseadas em imagens mentais resultantes de experiências vividas, que não considera o paralelogramo como trapézio.

> *Luana*: Não é paralelogramo e não tem as “definições” que eu disse (referindo-se ao facto de Patrícia na figura representada não ter considerado a propriedade “2 lados iguais e 2 lados diferentes, não opostos”).
>
> *Investigadora*: Explica melhor.

Luana: 2 lados diferentes e 2 lados iguais quer dizer… aos pares… os dois iguais são diferentes dos outros dois.

Investigadora: … Olha para a figura que a Patrícia representou, com atenção, e diz-nos se ela está a pensar mal.

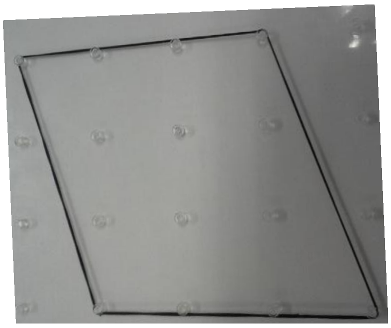


Figura 2. Figura representada por Patrícia

Luana: Não estou a perceber.

Investigadora: Ok, vou ajudar. "2 lados diferentes e 2 iguais", isto não quererá dizer que cada par de 2 lados, sendo diferente dos do outro par, podem ser iguais entre si?

Luana: Hum….

Patrícia, embora, tivesse tentado representar uma figura que correspondesse à descrição feita por Luana, não conseguiu representar a figura pensada por esta.

Perante o sucedido, tentámos que Luana compreendesse que as propriedades que tinha descrito não eram suficientes para definir a figura em que havia pensado e que existiam outras figuras, pertencentes à mesma classe, que correspondiam à descrição feita.

Investigadora: Queres reformular a tua descrição, para ajudar a Patrícia?

Luana: 2 lados iguais, 1 diferente aos outros todos e o outro diferente aos outros todos e 2 ângulos agudos e 2 ângulos obtusos.

Luana descreveu os dois tipos de ângulos que constituíam a figura, aspeto, por si, considerado essencial para que Patrícia pudesse identificar a figura em que pensou. Todavia, confrontada com o facto de, anteriormente, Patrícia não ter entendido a sua ideia, afirmou, redundantemente, que a figura também tem "2 lados iguais, 1 diferente aos outros todos e o outro diferente aos outros todos". A componente visual, centrada na perceção de imagens visuais relativas às componentes da figura descrita, apresentou-se como elemento fundamental para a descrição elaborada.

Em seguida, foi necessário repetir a ideia para que Patrícia tentasse acompanhar "2 lados iguais, 1 lado diferente e outro lado diferente e 2 ângulos agudos e 2 obtusos".

Patrícia: Tem de ter 2 ângulos obtusos e 2 ângulos agudos…

Luana: … e não são opostos.

Enquanto Patrícia pensava na figura descrita pela colega, Luana ia refletindo e acrescentando ideias.

Investigadora: Queres dizer que são adjacentes… "seguidos"?

Luana: Sim, sim.

Dado o impasse, a investigadora sugeriu que Luana desse mais algumas indicações a Patrícia, lembrando que podiam ser indicados a medida dos lados; os ângulos adjacentes ou os ângulos opostos, entre outras.

Luana: Pensa nos 4 lados do quadrilátero.

Investigadora: Sim… e mais?

Luana: 2 lados iguais, 1 diferente e outro diferente.

Patrícia: Os lados que são iguais são opostos?

Luana: Não sei dizer … não consigo ver se na figura em que estou a pensar eles são opostos.

A resposta de Luana surgiu associada ao facto de, neste momento, ter recorrido apenas a imagens mentais para elaborar a descrição e, perante a incapacidade de abstrair a figura em que estava a pensar, não conseguiu analisar os seus diferentes componentes. Esta situação pode relacionar-se com o facto da dimensão figurativa não estar suficientemente abstraída e a aluna, por isso, não conseguir fazer uma análise por componentes.

Investigadora: Ok, então, vais tu representar a figura porque, assim, não temos mais condições para ajudar a Patrícia.

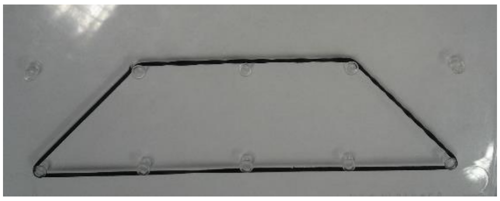


Figura 3. Figura pensada e representada por Luana

Patrícia: Mas esta tem todos os lados diferentes.

Luana: Não, não são. Estes dois são iguais [referindo-se aos lados não paralelos da figura].

Patrícia: Ah, pois é!

Investigadora: Então e que figura é esta?

Luana: Trapézio.

Quando Luana identificou a figura por si descrita, como trapézio, deixou perceber que a descrição das propriedades enunciadas surgiram associadas a imagens mentais e experiências individuais, ligadas a um conceito figurativo que ainda não inclui a relação entre propriedades e a classificação inclusiva.

Investigadora: Então, vamos pensar, em conjunto, sobre as propriedades desta figura. Os lados esquerdo e direito da figura são o quê, um em relação ao outro?

Patrícia: Opostos, com ângulos de 45°.

A possibilidade de representação das figuras no geoplano pareceu ter contribuído para desenvolver a capacidade de visualização, sendo isso observável quando Patrícia, embora referindo-se à relação entre ângulos, quando a questão abordava a relação entre os lados, identificou a existência de dois ângulos de 45° (figura 3), a partir da observação das diagonais que cortam os ângulos retos dos quadrados imaginários formados pelos pregos do geoplano.

Investigadora: Então, como poderias reformular a tua descrição?

Luana: 2 lados diferentes e 2 lados iguais […], 2 ângulos agudos e dois obtusos que não são opostos.

Nesta descrição, Luana deixou transparecer a importância da componente visual no seu pensamento geométrico. A descrição efetuada e as propriedades identificadas parecem surgir associadas a imagens visuais e experiências individuais. Além disso, a análise da reformulação de Luana pode também dar-nos a ideia de que a aluna baseou a sua descrição num protótipo de trapézio isósceles (figura 3) onde reconhece dois ângulos obtusos e dois ângulos agudos de 45°, não opostos entre si.

Entretanto, os papéis de Patrícia e Luana inverteram-se e Patrícia passou a descrever uma figura para que Luana tentasse identificá-la.

Patrícia: 4 lados iguais, 2 ângulos agudos opostos e 2 ângulos obtusos opostos.

Luana: Já está!

Patrícia: Ok, está certo. Esta era fácil.

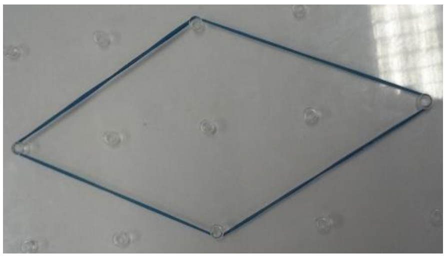


Figura 4. Figura representada por Luana após a descrição de Patrícia

Logo de seguida, foi pedido a Patrícia que pensasse noutra figura e, depois de pensar um pouco, perguntou:

Patrícia: No máximo quantas definições? (querendo referir-se a propriedades)

Investigadora: As que achares necessárias, para que a Luana identifique a figura em que estás a pensar.

Entretanto, Patrícia não conseguiu decidir o que dizer e pediu para representar no geoplano a figura em que estava a pensar, antes de a descrever. O seu pedido parece revelar que necessitava de um suporte visual que lhe sustentasse o pensamento.

Patrícia: Já está mas, agora, não sei como posso dizer.

Para a representação da segunda figura, Patrícia parece ter recorrido a uma imagem mental cuja representação interna era ainda pouco segura e cujo processo de visualização não dependia do conhecimento das suas propriedades.

Investigadora: E se a estiveres a ver, achas que a consegues descrever?

Patrícia: Posso tentar. Então, tem… dois ângulos obtusos, que não são opostos, dois agudos que, também, não são opostos e três pares de lados iguais, entre si.

Também aqui o suporte visual assumiu uma importância crucial para que a aluna conseguisse descrever analiticamente, embora de forma incompleta e parcialmente incorreta, as propriedades da figura em que pensou.

Luana: Tem de ter 6 lados porque um par é composto por 2.

Patrícia: Achas que já sabes qual é a figura, Luana?

Luana: Não. Há muitas figuras que podem ter essas condições. E os outros ângulos?

Investigadora: Ouviste o que a Luana perguntou? Ela já percebeu que a figura tem quantos lados?

Patrícia: Seis.

Investigadora: Boa, mas tu só disseste dois ângulos obtusos, que não são opostos, e dois agudos que, também, não são opostos. Identificaste quantos ângulos?

Patrícia: Quatro.

Investigadora: Pois, mas se a Luana já percebeu que a figura tem seis lados tem de ter….

Patrícia: … seis.

Investigadora: … seis ângulos, então terás de reformular as tuas condições.

Depois desta discussão, Patrícia continuou com muitas dúvidas e sentiu necessidade de "conferenciar" com a investigadora para tentar definir o conjunto de propriedades suficientes que permitiriam a Luana identificar a figura em que estava a pensar.

Patrícia: Então, eu, há bocado, disse que tinha dois ângulos obtusos… (pensa mais um pouco, observa a figura) que não são opostos, não foi?

Luana: Sim.

Patrícia: E… agora, tem mais dois obtusos e esses são opostos…

Luana: Eu acho que já sei, vou tentar.

Quando Luana estava próxima de conseguir representar no geoplano a figura pensada por Patrícia, pedi:

> *Investigadora*: Verifica as condições dadas pela Patrícia na tua figura. Patrícia repete as tuas condições, devagarinho, para a Luana ir acompanhando. Olha com atenção, pensa no que já discutimos, e refaz tudo.
>
> *Patrícia*: 2 ângulos agudos que não são opostos…
>
> *Luana*: Então, onde é que *tão* os ângulos agudos? (olhando atentamente para a figura por si representada no geoplano)

Entretanto, Patrícia levantou-se do seu lugar e tentou ajudar Luana identificando os ângulos que tinha considerado agudos, mas…

> *Luana*: Estes são obtusos!
>
> *Patrícia*: Ah, pois é… esquece. São todos obtusos. Agora tenho de reformular tudo… tem todos os ângulos obtusos… três pares de lados iguais entre si e já está tudo.
>
> *Investigadora*: Luana consegues mostrar-nos os três pares de lados iguais entre si?

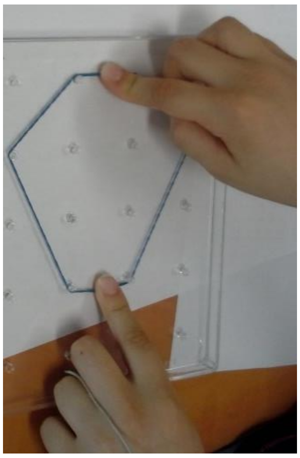


Figura 5. Luana identificando um dos pares de lados iguais entre si na figura pensada por Patrícia

Depois deste percurso, Patrícia pareceu ter conseguido perceber quais seriam as condições suficientes para descrever a figura em que tinha pensado. O suporte visual e o diálogo produzido em torno da figura observada constituíram-se como elementos fundamentais para conduzir a aluna na análise dos seus componentes e no refinamento da linguagem que foi utilizando para descrever a figura.

Discussão

As intervenções de Luana deixam perceber que as imagens mentais e visuais foram elementos fundamentais para as descrições elaboradas e a sua linguagem foi variando em função das figuras descritas. Inicialmente, a descrição informal do quadrado (figura 1) fazia prever que a aluna se poderia situar no subnível de raciocínio analítico dos componentes, de Battista. Contudo, a descrição vaga e incompleta do trapézio (figura 3), remeteu-nos para uma fase de transição entre os níveis de raciocínio visual-holístico e analítico dos componentes. Este comportamento aparenta relacionar-se com o facto da aluna, relativamente ao trapézio isósceles, dispor de uma imagem protótipo que não lhe permitiu analisar os seus componentes.

As conceptualizações e descrições de Patrícia surgiram enquanto observava as figuras e analisava os seus componentes, utilizando uma combinação de descrições formais e informais, que lhe permitiram obter conjuntos de propriedades que especificavam as figuras pensadas.

O conhecimento sobre propriedades de figuras geométricas, mobilizado pelas alunas, parece indicar que Luana se encontra entre os subníveis de recognição (1.2) e raciocínio na sua componente visual informal (2.1) e Patrícia entre os subníveis de raciocínio na sua componente informal e insuficientemente formal (2.2) e raciocínio formal baseado em propriedades (2.3), de Battista.

Esta discussão deixa perceber que o pensamento geométrico das alunas se encontra entre os níveis de raciocínio visual-holístico (nível 1) e o nível de raciocínio analítico dos componentes (nível 2), de Battista.

Considerações finais

As alunas, durante a descrição de propriedades das figuras, pensaram sobre objetos geométricos utilizando representações (Battista, 2008) com significado individual (Goldin & Kaput, 1996) e recorreram a representações externas que poderão ter conduzido à assimilação de outras representações (Clements & Sarama, 2014).

O conhecimento mobilizado pelas alunas, sobre propriedades das figuras descritas, aparenta basear-se em representações mentais e visuais ou experiências individuais (Vinner, 1983), onde a perceção sensorial se sobrepõe ao conceito e a visualização assume o papel de um processo espontâneo de pensamento, acompanhado e apoiado por imagens (Mariotti & Pesci, 1994).

O processo de relações lógicas, que levam à identificação de propriedades relevantes para o reconhecimento de uma figura (Mariotti & Fischbein, 1997) está, nestas alunas, em desenvolvimento, visto terem revelado maior facilidade em lidar com a dimensão figurativa das figuras descritas (Fischbein, 1993).

Este estudo deixou-nos perceber que o nível do pensamento geométrico das alunas pode variar em função das figuras descritas e que um mesmo nível pode, em termos cognitivos, atravessar vários domínios (Battista, 2007).

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/132192/2017).

Referências

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 47-60.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (pp. 341-362). Charlotte: Information Age Publishing.

Bernabeu, M. & Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática*, *29*(2), 9-35.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math*. NY: Routledge.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109-122), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.). *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and Development on Mathematical Concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *Roles of Representation in School Mathematics*. Yearbook (pp. 1-23), Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. (2016). Design-Research-Based Curriculum Innovation. *Quadrante*, *25*(2), 7-23.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Kalathil, R. R., & Sherin, M. G. (2000). Role of students representations in the mathematics classroom. In B. Fishman & S. O'Connor- divelbis (Eds.), *Fourth Internacional Conference of the Learning Sciences* (pp. 27-28), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology*, *18*, 9-18.

Mariotti, A., & Pesci, A. (1994). Visualization in teaching-learning situations. In *Proceedings of 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 22). Lisbon: PME.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

van Hiele (1999). Developing Geometric Thinking Through Activities that Begin With Play. *Teaching Children Mathematics*, *6,* 310-316.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures an Investigation of Children's Mathematical Drawings. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *Roles of Representaion in School Mathematics* - Yearbook (pp. 215-227). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

PROPRIEDADES E RELAÇÕES ESPACIAIS NA COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DO HEXÁGONO: UM ESTUDO COM CRIANÇAS DE 5 ANOS

Maria João Nunes

Agrupamento de Escolas de Paço de Arcos

mjoao.nunes@aepa.pt

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: Este artigo apresenta parte de um estudo que visava compreender como as crianças de cinco anos, numa sala de Jardim de Infância, usaram a visualização na resolução de problemas geométricos. O artigo analisa as estratégias utilizadas pelas mesmas na composição de uma figura bidimensional, o hexágono, bem como as representações feitas a partir dessas construções. Começamos por elencar algumas das razões teóricas pelas quais a área da geometria deve ser trabalhada no Jardim de Infância, nomeadamente ao nível da visualização espacial. O estudo segue um paradigma interpretativo, com uma abordagem de natureza qualitativa, e a recolha de dados foi realizada em 2016. Como técnicas de recolha de dados, optou-se pela observação participante e a recolha de evidências a partir de gravações de vídeo e das representações realizadas pelas crianças. Os resultados apresentados apontam para o facto do refinamento da estratégia adotada pelas crianças ser potenciado pela manipulação das peças que compõem o hexágono. Independentemente do rigor do traçado das representações feitas pelas crianças, estas revelaram o reconhecimento de relações espaciais entre as peças, reproduzindo as suas posições relativas, e fazendo uso da rotação mental.

Palavras-chave: Pré-escolar, pensamento espacial, visualização, representações.

Introdução

Quando se fala em matemática no Jardim de Infância, a maior parte dos educadores (incluindo pais e professores de outros níveis de ensino) referem o trabalho com números e eventualmente a identificação de figuras geométricas básicas. Com a publicação das novas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (Silva, Marques, Mata & Rosa, 2016), a Geometria aparece como uma das componentes na abordagem à matemática. Espera-se agora que os educadores apoiem o desenvolvimento do pensamento espacial, bem como a análise e operação com formas, designadamente promovendo a manipulação e reflexão sobre as propriedades das figuras bi e tridimensionais.

Este artigo apresenta parte de um estudo (Nunes, 2016) que procurava compreender como crianças de 5 anos, numa sala de Jardim de Infância, usaram a visualização na resolução de problemas geométricos. De acordo com esse objetivo, foram formuladas diversas questões, entre as quais: (1) Que estratégias usam as crianças na composição de figuras bi e tridimensionais? (2) Como representam as construções geométricas realizadas? (3) Que interações são desenvolvidas durante a resolução dos problemas geométricos? (4) Que dificuldades apresentam na resolução dos problemas geométricos? No artigo, apresentaremos uma das sete tarefas realizadas, denominada "Composição e decomposição do hexágono, com blocos padrão", que contempla apenas figuras bidimensionais.

Enquadramento teórico

A criança pode desenvolver diversas capacidades como a visualização, a construção e manipulação de objetos geométricos, a organização do pensamento geométrico e até a criatividade quando realiza atividades manipulativas e de exploração, utilizando objetos do mundo real ou materiais específicos. Segundo Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridos progressivamente, numa espiral de desenvolvimento em que os conceitos mais simples antecedem os mais complexos e em que a criança desempenha um papel ativo na construção dos seus próprios conceitos. O progresso da compreensão das crianças sobre a forma e o espaço obedece a uma sequência de aprendizagem que vai das experiências concretas para as abstratas, da realização de conexões no conhecido para o desconhecido, numa linha que flui do simples para o complexo.

Por sua vez, Moreira e Oliveira (2003) sugerem que os educadores devem proporcionar às crianças a possibilidade de percecionarem muitos exemplos e contraexemplos acompanhados da discussão sobre as formas e as suas características, clarificando as palavras usadas, contribuindo assim para a formação do pensamento geométrico em vez de uma aprendizagem de conceitos desprovidos de significado. Só este tipo de aprendizagem ajuda as crianças a utilizarem o conhecimento geométrico na resolução de problemas.

Segundo Clements e Sarama (2009), trajetórias de aprendizagem constituem percursos de desenvolvimento com três partes: um objetivo matemático, um caminho de aprendizagem percorrido pela criança para alcançar esse objetivo, e um conjunto de tarefas. A trajetória de aprendizagem, apresentada por Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), tem em conta os seguintes aspetos: orientar, construir e operar com formas.

"Orientar" inclui todo o tipo de atividades em que as crianças determinam a sua posição ou a de objetos no espaço e em que interpretam mapas ou esquemas (ou seja, modelos visuais). Atividades como "localizar" ou "tomar um ponto de vista" permitem desenvolver nas crianças capacidades relacionadas com "orientar".

"Construir" compreende todas as atividades através das quais as crianças fazem qualquer coisa por sua iniciativa, sendo a ação concreta e o pensamento atividades indissociáveis. Cada criança que está empenhada numa atividade de grupo tem que imaginar mentalmente o que as outras pretendem e por sua vez tentar transmitir o que pretende fazer. O educador poderá questionar por exemplo quanto à possibilidade de alguma parte das figuras que construíram poder ser substituída por outras peças.

Operar com formas tem a ver com todas as atividades que incluem transformações geométricas, nomeadamente, deslizar, rodar, refletir, projetar. Estas transformações deverão ser realizadas de forma intuitiva e incluir o uso de objetos concretos e/ou do próprio corpo.

Para que a criança consiga realizar a composição e decomposição de formas é necessário que tenha atingido um determinado nível de pensamento. Sarama e Clements (2009) explicitam os diferentes níveis de pensamento envolvido na composição de formas, segundo uma ordenação hierárquica:

- Pré-compositor – as crianças manipulam formas individualmente mas não são capazes de as combinar para compor uma forma maior nem são capazes de fazer corresponder, precisamente, formas a uma moldura;
- “Juntador” de peças – as crianças deste nível já colocam peças contíguas de modo a formarem figuras, frequentemente tocando-se apenas pelos vértices. Em tarefas do tipo “faz uma figura”, cada forma representa um único papel ou função na figura e conseguem preencher molduras simples usando a estratégia tentativa/erro;
- “Construtor” de figuras – as crianças conseguem colocar peças de um modo contíguo. Nestas construções, usam a estratégia tentativa/erro, não antecipando a criação de novas figuras geométricas e as formas são escolhidas tendo em conta a sua forma ou um atributo, tal como o comprimento do lado. Podem tentar colocar peças cujos ângulos não encaixem no puzzle da figura.
- Compositor de formas – cada vez com mais intencionalidade e antecipação, as crianças combinam formas para fazer novas formas. As formas são escolhidas atendendo aos ângulos e ao tamanho dos lados. Rotações e reflexões são usadas intencionalmente;
- Compositor de substituição – as crianças deliberadamente formam unidades compostas, reconhecendo e usando relações de substituição entre as formas;
- Compositor de formas iterativo – as crianças operam, intencionalmente, com unidades compostas (unidades de unidades). Conseguem continuar um padrão de formas que assegura uma pavimentação adequada;
- Compositor de formas com unidades superordenadas – as crianças constroem e operam sobre unidades de unidades de unidades.

Em resumo, inicialmente as crianças isolam as partes, depois arrumam-nas contiguamente e mais tarde combinam-nas de uma maneira integradora, eventualmente criando unidades mais complexas.

De acordo com Sarama e Clements (2009), existe uma sequência de desenvolvimento hierárquica iniciada com reproduzir um conjunto de figuras (com o original à vista), passando por reproduzir um conjunto de memória e finalmente construir uma configuração resultante de uma rotação ou vista de outra perspetiva.

Nas novas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (Silva et al., 2016), a visualização espacial aparece referida como “um processo que envolve a construção e a manipulação de imagens mentais de objetos a 2 ou 3 dimensões e permite construir representações visuais que são essenciais para a vida” (p. 83).

Del Grande (1990) apresenta as diferentes capacidades associadas ao sentido espacial que considera terem especial relevância no estudo da geometria. São elas:

- Coordenação visual-motora – Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. Esta capacidade revela-se especialmente importante porque, se uma criança estiver concentrada no controle do seu desempenho motor, dificilmente se conseguirá concentrar ou compreender as ideias geométricas que lhe estão a apresentar;
- Perceção figura-fundo – Capacidade de identificar e "isolar" uma determinada figura de um fundo complexo. Esta capacidade é utilizada nomeadamente na identificação de objetos/figuras camuflados/sobrepostos ou na identificação de peças específicas numa pavimentação;
- Constância percetual – Capacidade de perceber que algumas características de um objeto são independentes do tamanho, cor, textura, ou posição e também de não se confundir quando o mesmo objeto ou imagem aparece numa posição diferente ou fora do seu contexto habitual;
- Perceção de posições espaciais – Capacidade de distinguir figuras iguais (objeto, imagem ou imagem mental) mas colocadas em orientações diferentes, usando nomeadamente rotações, ou reflexões (através da ação de virar as figuras, ou de um espelho);
- Perceção das relações espaciais – Capacidade de relacionar várias figuras consigo próprias ou em relação connosco. A capacidade de relacionar objetos geométricos com as suas vistas e as suas planificações também está aqui incluída;
- Discriminação visual – Capacidade de comparar vários objetos, figuras e imagens mentais para identificar semelhanças ou diferenças entre elas, independentemente da sua posição;
- Memória visual – Capacidade de recordar objetos que já não estão visíveis e relacionar as suas caraterísticas com outros objetos visíveis ou não.

Gutierrez (1996) acrescenta à lista proposta por Del Grande (1990) mais uma capacidade:

- Rotação mental – Capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento.

A rotação mental é, segundo Clements e Sarama (2009), uma das capacidades de visualização espacial mais importante a desenvolver por crianças da educação pré-escolar. Os autores referem que, inicialmente, as imagens mentais das crianças são estáticas, podendo ser recriadas ou até examinadas, mas não transformadas. Só depois é que, progressivamente, as crianças começam a utilizar imagens mentais dinâmicas, conseguindo deslizá-las para outros locais, ou rodá-las mentalmente.

O uso destas capacidades espaciais não é individualizado, dependendo das características do problema que se pretende resolver. Frequentemente, na resolução de uma tarefa, estão envolvidas várias capacidades de visualização espacial.

Para Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) não é possível ensinar os conceitos de orientação espacial de uma forma isolada, devendo as crianças adquiri-los de forma implícita, através de jogos e de situações significativas concretas e motivadoras. No entanto, acrescentam a importância do educador/professor dirigir a aprendizagem/discussão levando as crianças a aprofundarem os conceitos trabalhados, uma vez que "não se pode esperar que as crianças cheguem à essência do problema que lhes é proposto por si próprias" (Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008, p. 142).

De acordo com Sarama e Clements (2009), a resolução de problemas e a discussão envolvendo os objetos geométricos ajudam a construir as conexões entre o conhecimento construído e outro conhecimento igualmente acessível mas ainda não interiorizado. A construção do significado matemático é feita a partir de ações em objetos geométricos e posteriormente da reflexão sobre essas ações.

Metodologia de investigação

A investigadora e primeira autora do presente artigo era também a educadora titular das crianças do estudo, tendo optado por um estudo de natureza qualitativa com uma abordagem interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Esta opção ficou a dever-se ao facto de não se procurar generalizar os resultados obtidos mas sim narrar e compreender, de forma o mais profunda possível, o modo como as crianças resolveram os problemas geométricos que lhes foram apresentados. A reflexão assenta na forma como a resolução foi encontrada mais do que no produto final.

A tarefa apresentada faz parte de um estudo levado a cabo numa sala de Jardim de Infância da rede pública da periferia da cidade de Lisboa. O grupo era composto por vinte e duas crianças com idades compreendidas entre os 3 e os 5 anos. Do grupo de 5 anos, foram selecionadas nove crianças sendo consideradas informadores privilegiados. Foram utilizados dois critérios de seleção: a) ambos os sexos; e b) pertencerem a ambientes familiares diversificados. As crianças foram observadas no ambiente da sala, no decurso das atividades de resolução de problemas e as suas prestações gravadas em filme. A fim de salvaguardar a sua privacidade, cada criança escolheu um nome fictício pelo qual é referida, razão pela qual os nomes são tão peculiares.

A recolha de dados, realizada com recurso a observação participante e a recolha documental, decorreu entre fevereiro e maio de 2016. Os instrumentos utilizados na recolha documental foram a gravação vídeo do trabalho de resolução das tarefas, as produções (representações) realizadas pelas crianças e o diário de bordo com notas de campo da investigadora. A gravação em vídeo foi um auxiliar importantíssimo para a observação e constituiu um manancial de dados que muito enriqueceu a visão do trabalho de resolução das tarefas, tornando possível revisitá-lo. As produções das crianças foram recolhidas e analisadas. Estes documentos, juntamente com as conversas tidas durante e após a realização das tarefas, ajudaram a compreender o modo como elas pensaram, tornando possível a triangulação da informação recolhida.

Ao realizar-se a análise dos dados, tentou-se negociar "com os informantes sobre a adequação das interpretações e das representações" (Walsh, Tobin & Graue, p. 1056). Tratando-se de crianças pequenas, este procedimento foi realizado durante e após a realização das tarefas, questionando-as, o que tornou possível alguma apropriação dos seus significados e contribuiu para a interpretação dos dados. Para a análise dos dados recolhidos, foram criadas categorias a partir dos quadros teóricos de Del Grande (1990) e Gutierrez (1996) para as capacidades de visualização espacial e de Sarama e Clements (2009) para a composição e decomposição de formas.

Apresentação da tarefa

A tarefa “Composição e decomposição do hexágono, com blocos padrão”, apresentada neste artigo faz parte de um conjunto de sete tarefas, levadas a cabo pela primeira autora no seu estudo (Nunes, 2016). A tarefa, aqui apresentada, foi adaptada de NCTM (2007) e é composta por duas subtarefas realizadas em dois dias diferentes: (1) construção de diferentes composições do hexágono com blocos padrão; e (2) representação através do desenho das diferentes decomposições do hexágono. A subtarefa de composição foi realizada a pares uma vez que se pretendia incrementar a interação das crianças na fase de construção das diferentes composições do hexágono, possibilitando igualmente uma filmagem mais focada em cada par. A subtarefa de representação das decomposições foi realizada em pequeno grupo pois apesar do trabalho ser individual, as crianças poderiam beneficiar com a partilha do espaço.

A educadora pôs à disposição de cada par de crianças uma caixa com 250 blocos padrão, ilustrados na figura 1, e forneceu uma folha com o contorno de 9 hexágonos (Figura 2).

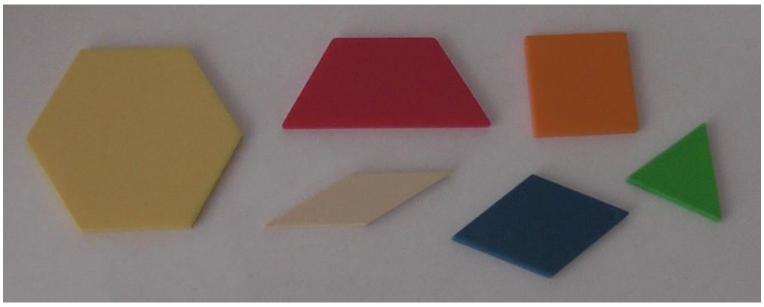


Figura 1. Exemplo de cada uma das peças dos blocos padrão

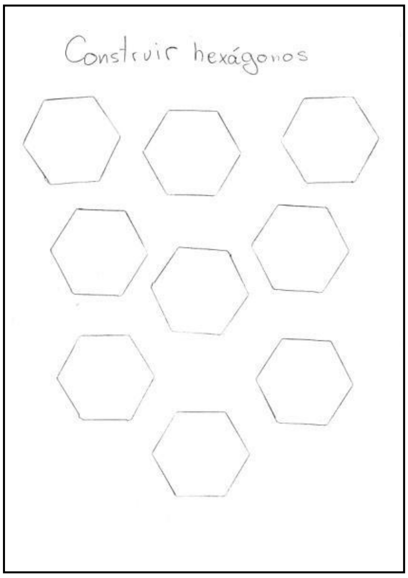


Figura 2. Folha posta à disposição

Em seguida, a educadora pediu às crianças que reconstruíssem o hexágono de todas as maneiras diferentes que conseguissem. Para isso, deveriam colocar as peças em cima da folha fornecida. Intencionalmente, a educadora forneceu apenas uma folha a cada par de crianças, esperando que ajudasse a promover a interação. No decurso da atividade, deu várias achegas na tentativa de desbloquear situações de impasse, nomeadamente reforçando que se podiam usar peças diferentes na mesma construção, mas que as construções tinham que ser diferentes entre si, mesmo que uma ou mais peças fossem iguais.

A subtarefa de representação, realizada noutro dia, consistia em desenharem as reconstruções do hexágono, que se encontravam à vista no meio da mesa (Figura 3), mas nas quais não podiam tocar. Podiam, se assim o entendessem, fazer uma construção idêntica na sua folha branca.

Figura 3. Crianças a fazerem as suas representações, com as construções à vista

Apresentação e discussão dos resultados

Subtarefa 1. Construção de diferentes composições do hexágono com blocos padrão

Todos os pares de crianças começaram por resolver o problema usando peças iguais (2 trapézios, 3 losangos ou 6 triângulos – Figura 4).

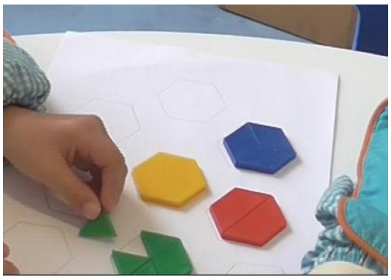
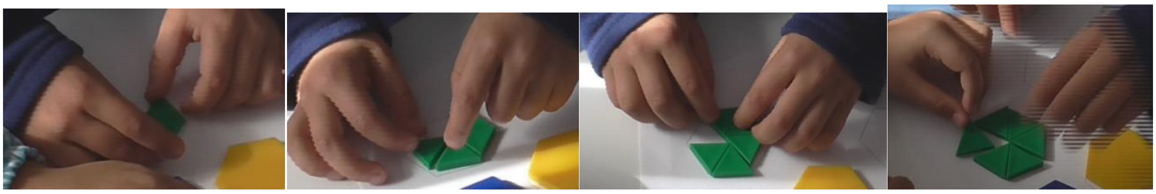


Figura 4. Resolução do problema com peças iguais

Após um primeiro período de familiarização com os materiais, as crianças demonstraram antecipação na escolha das peças ou do local onde as iam colocar. Quando os desafios eram mais exigentes (porque já estavam várias construções feitas ou porque tinham que usar mais peças na construção que estavam a realizar) recorreram à estratégia tentativa/erro, uma estratégia menos sofisticada, mas que lhes permitiu encontrar algumas novas soluções.

Apesar de falarem pouco entre si, as crianças eram capazes de completar as ações do par com quem estavam a trabalhar.

Triceratop: Já sei! (e colocou o primeiro triângulo e segundo ao lado, a seguir o terceiro e quarto (A e B). Princesa ajeitou as peças. Triceratop colocou o quinto triângulo (C). Princesa foi buscar triângulo à caixa e colocou no local que ainda faltava (D).



A B C D

Figura 5. Sequência da resolução do Triceratop com ajuda da Princesa no final

Triceratop, quando afirma "Já sei!", revelou antecipação no que respeita à combinação dos seis triângulos para compor o hexágono.

De acordo com o que nos foi dado observar, a manipulação ajudou o pensamento, embora nem sempre se verificasse antecipação. Por exemplo, Fada, na sua primeira construção envolvendo peças diferentes, tentou colocar um quadrado e a seguir um triângulo, dando voltas e mais voltas mas não conseguiu fazer coincidir os lados das peças unidas com os lados do hexágono, arrumando as duas peças na caixa (sequência da figura 6). Neste caso, Fada utilizou a estratégia de tentativa/erro.

Figura 6- Sequência das tentativas da Fada

Quanto ao nível de composição e decomposição de formas (Sarama & Clements, 2009), as crianças do estudo situaram-se entre os níveis "construtor de figuras", "compositor de formas" (a maioria dos desempenhos) e algumas ainda no nível "compositor de substituição".

No nível "construtor de figuras", podem enquadrar-se as tentativas de construção do hexágono em que as crianças usavam a estratégia tentativa/erro, especialmente com peças que não serviam para fazer a construção, como aconteceu com Fada (Figura 6), ou quando já tinham várias construções feitas e procuravam uma nova solução. Por exemplo, em determinada situação, Susana tentou utilizar o losango fino, virando-o na folha, dentro do desenho do hexágono, como que à procura do lado que coincidia (Figura 7A), enquanto Messi tentava com o quadrado, rodando-o (Figura 7C). Um pouco mais tarde, ambos voltaram a tentar utilizar o losango fino junto ao triângulo (Figura 7B). O losango fino e o quadrado são as únicas duas peças com as quais não se consegue compor o hexágono.

A B C

Figura 7. Tentativas da Susana (A) de ambos (B) e do Messi (C)

Ainda no âmbito deste nível “construtor de figuras”, e tal como descrito por Sarama e Clements (2009), as crianças tentavam convergir num dos vértices do hexágono duas peças em que a soma dos seus dois ângulos internos não coincidia com o ângulo interno do hexágono. Como se pode ver pela figura 8, o quadrado e o losango estreito não têm ângulos coincidentes com os do hexágono nem se completam, como acontece por exemplo com o losango azul e o triângulo verde também visíveis na mesma figura.

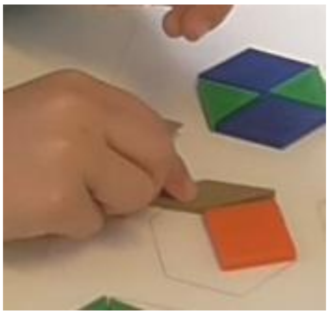


Figura 8. Tentativa de encaixe do quadrado e do losango estreito no desenho do hexágono

Eventualmente, o facto dos lados do triângulo, do hexágono, dos losangos, do quadrado e de três dos lados do trapézio terem o mesmo comprimento, poderia tê-los levado a experimentar todas as peças disponíveis.

No nível “compositor de formas”, encontraram-se inúmeros exemplos, o que estava de acordo com o esperado, tendo em conta a idade das crianças (5 e 6 anos). Na observação dos seus desempenhos, foi possível constatar que, muitas vezes, as crianças traziam na mão as peças de que iam necessitar, indicador de antecipação e visualização da composição do hexágono. Aliás, por vezes só não as colocavam, porque percebiam antecipadamente que a construção era igual a outra que já estava feita. Após a tentativa com os quadrados descrita anteriormente, Fada trouxe na mão dois losangos e um triângulo; colocou um losango e em seguida outro, unidos pelos lados, ficando com o triângulo na mão. Foi buscar outro triângulo e colocou os dois, completando o hexágono (sequência da figura 9). Assim, Fada revelou consciência de serem necessários dois triângulos para completar o hexágono, indo buscar o segundo sem precisar de colocar o triângulo que tinha na mão. Este foi um exemplo ilustrativo da intencionalidade e antecipação que caracterizam este nível. Aparentemente, Fada apresentou evolução no seu desempenho.

Figura 9. Sequência da construção da Fada

Noutra ocasião, Mário retirou da caixa um trapézio, um losango e dois triângulos que deixou na mesa, ao pé de si, dizendo “Agora vou fazer com três”; colocou numa moldura o trapézio, o losango ao lado e em seguida o triângulo (Figura 10). Provavelmente, referia-se a que ia fazer com três peças diferentes uma vez que as quatro peças que trazia na mão correspondiam a três peças diferentes. Mário parecia ter antecipado a composição do hexágono com as quatro peças que retirou intencionalmente da caixa, percebendo no final que precisaria de um triângulo e não de dois.

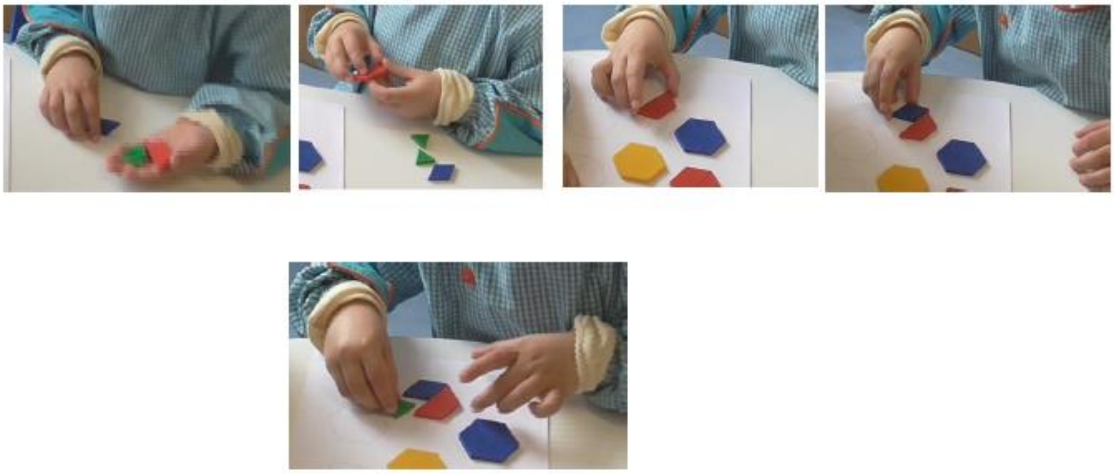


Figura 10. Sequência da construção do Mário

As crianças também se revelaram capazes de combinar formas para fazer novas formas que a seguir utilizavam, como se ilustra no episódio seguinte:

> *Princesa*: Verdes (pegou num triângulo, continuando). Dá cá esse (e tirou o triângulo da mão do colega, juntando-o ao seu, fazendo a forma de um losango que colocou na moldura).

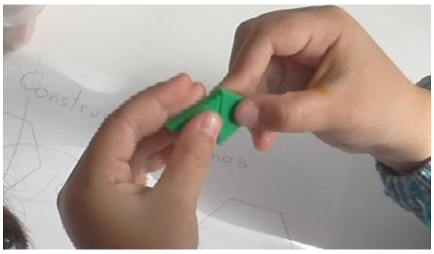


Figura 11. Princesa juntando os dois triângulos

No âmbito do nível “compositor de formas”, Princesa combinou os dois triângulos para fazer uma nova forma, a de losango.

Em certas situações, foi mesmo possível observar crianças a, deliberadamente, formarem unidades compostas, reconhecendo e usando de forma mais ou menos explícita relações de substituição entre as formas, o que as colocaria no nível "compositor de substituição". O episódio seguinte ilustra este tipo de desempenho: perante uma construção já iniciada, Triceratop tentou colocar um losango no espaço vazio (cf. Figura 12).

Figura 12. Triceratop tentando colocar o losango e depois dando os dois triângulos à colega

Como Princesa não deixou, ele disse:

> Triceratop - Ah! Falta outro! (deixou-lhe cair dois triângulos ao pé da moldura, apontando para o espaço vazio) É aqui!

Neste episódio, Triceratop evidenciou olhar para o losango como uma unidade composta de dois triângulos, substituindo o losango, que inicialmente pretendia colocar, pelos dois triângulos que o compõem, indo ao encontro do que entendeu ser a vontade de Princesa.

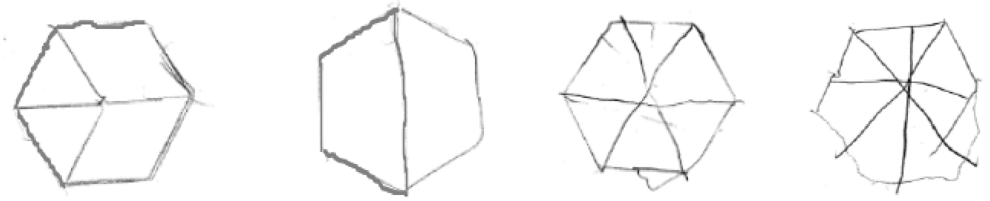
Subtarefa 2. Representação através do desenho das diferentes decomposições do hexágono

Com recurso às gravações de vídeo, foi possível olhar para o próprio processo de representação, sendo possível observar diferentes capacidades de visualização. A maior parte das crianças optou por realizar uma construção na sua folha, contorná-la e em seguida fazer os riscos entre as peças. Este processo de contornar, envolvendo a capacidade de coordenação visual-motora, revelou-se complexo para algumas crianças que diziam que as peças saíam do sítio. Das nove crianças do estudo, três utilizaram ambas as mãos no decorrer da tarefa, o que nunca se tinha verificado em tarefas de desenho ou pintura (cf. sequência da Figura 13), fazendo o traçado quer com a mão direita quer com a esquerda, de modo a usar a mão que se localizasse mais próxima do lado a traçar, sendo que a outra fixava as peças no papel.

Figura 13. Sequência ilustrativa da troca de mão

Em relação às linhas entre as peças também se observaram diferentes procedimentos que variavam não só de criança para criança mas também em função do desenho que estavam a realizar. A maior parte das linhas interiores foram realizadas afastando ligeiramente as peças, de modo a passar o lápis, como é o caso da representação do

Messi (A). Outras foram feitas olhando para a construção, o que, se era relativamente fácil no caso da decomposição do hexágono em dois trapézios (como na representação do Mário (B)), o mesmo já não se verificava em relação à decomposição em seis triângulos do Triceratop (C). Aliás, este procedimento deu origem a erros como o da representação da Fada (D). Assim, quer Triceratop quer Fada representaram os triângulos através da partição do hexágono com linhas contínuas, mas, enquanto Triceratop traça as linhas assumindo-as como diagonais, tendo a preocupação de unir os vértices opostos, Fada une vértices com pontos no meio dos lados.



A – Representação do Messi

B – Representação do Mário

C – Representação do Triceratop

D – Representação da Fada

Figura 14. Representações da decomposição do hexágono

Estas linhas interiores traçadas à mão, foram especialmente usadas em relação aos triângulos, por crianças que inicialmente tinham feito o contorno total do hexágono, tendo duas das nove crianças dificuldade em representar o número correto de peças, como se pode observar nas representações do Sonic ilustradas pela figura 15. Sonic revelou ter atendido ao facto dos vértices das peças convergirem para o meio do hexágono, situando os lados das figuras nos lados do hexágono. Ao não fazer coincidir um só lado da figura a cada um dos lados do hexágono, Sonic não respeitou o número de figuras que compõem o hexágono.

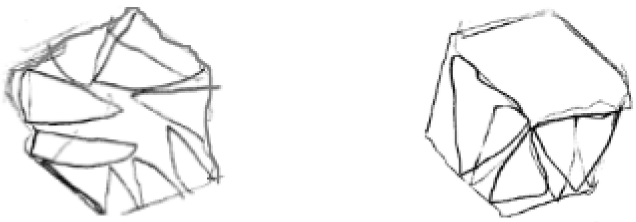
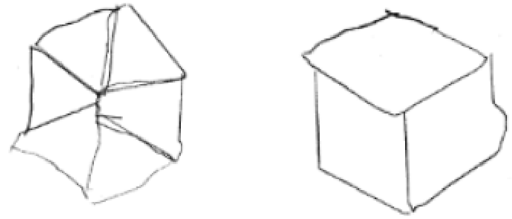


Figura 15. Representações do Sonic

Se olharmos para a figura 16A, poderemos pensar que a criança em causa, Mário, teve alguma dificuldade na realização da tarefa. No entanto, Mário foi a criança que mais depressa realizou todas as representações, sem ter tido necessidade de apagar uma única linha. Para esta representação, em particular, utilizou apenas um triângulo que foi girando de forma a ficar ao lado do que tinha representado anteriormente e assim sucessivamente até completar os seis. Esta criança revelou um desempenho muito bom em várias capacidades de visualização: constância percetual, rotação mental, perceção de posições espaciais. O procedimento que usou para fazer a representação evidencia a sua compreensão de que o hexágono pode ser gerado por rotações sucessivas do triângulo bem como a compreensão de que o triângulo pode assumir diferentes posições. A rapidez com que executou a tarefa ficou a dever-se não só à economia das linhas (Figura 16B) como à ligeireza com que identificava as figuras que ainda tinha de desenhar e a forma das peças que necessitava para o fazer. Caso as peças fossem iguais, pegava apenas numa e fazia-a rodar, não necessitando de contornar todos os seus lados, apenas os que ainda não estavam contornados. Foi a única criança a usar esta estratégia.



A B

Figura 16. Representações do Mário

Conclusão

A tarefa descrita despertou interesse e envolvimento das crianças que prontamente a executavam, mantendo-se envolvidas na sua concretização. No estudo conduzido por Nunes (2016), procurou-se apresentar tarefas que fizessem apelo à visualização espacial com vista à resolução de problemas pois, de acordo com Mendes e Delgado (2008) estas experiências desenvolvem noções geométricas importantes como a congruência e a semelhança.

Na tarefa agora apresentada (composição de formas) as crianças utilizaram a estratégia tentativa/erro. Porém, também revelaram alguma antecipação nas suas ações, ao escolherem uma determinada peça e não outra, usual na sua faixa etária, de acordo com Sarama e Clements (2009). Esta antecipação também transparecia quando diziam para si próprios ou para o par "Já sei!". As ações, em que foi utilizada a estratégia tentativa/erro, foram elas próprias fonte de aprendizagem: ao explorarem as propriedades das formas, nomeadamente lados e ângulos, bem como as relações entre eles, as crianças, mais tarde, conseguiram perceber que peça colocar, revelando que a ação constrói o pensamento, como aconteceu com Fada que iniciou a construção das composições do hexágono, usando tentativa/erro, e progredindo, a seguir, para antecipação das peças a utilizar.

Na composição do hexágono, todas as crianças conseguiram encontrar a totalidade das soluções. Pelos seus desempenhos, parecem situar-se entre os níveis "construtor de figuras" e "compositor de formas". Nalguns desempenhos específicos, Princesa e Triceratop apresentaram características do nível "compositor de substituição" (Sarama & Clements, 2009). Assim, situaram-se no nível "construtor de figuras" as duas crianças que conseguiram colocar as peças de um modo contíguo e usaram a estratégia tentativa/erro, não antecipando a criação de novas figuras geométricas. No nível "compositor de formas", situaram-se as cinco crianças que foram capazes de antecipar a escolha das peças ou a rotação necessária para encaixar no local pretendido. Embora ainda não atendessem aos ângulos, já foram capazes de ter em conta o tamanho dos lados. A consideração do comprimento dos lados na escolha intencional das peças foi um indicador deste nível. No nível "compositor de substituição", situaram-se as duas crianças que deliberadamente formaram unidades compostas, reconhecendo e usando relações de substituição entre as formas, como aconteceu ao usarem dois triângulos em vez de um losango. Nesta tarefa, a mesma criança podia revelar estratégias e atuações diversas, tanto na composição como na representação, pelo que qualquer nível em que integremos uma criança nunca deve ser uma “etiqueta” que se coloque num determinado percurso da sua aprendizagem.

A maioria das crianças do estudo realizou as representações das construções sem qualquer intervenção da educadora, que tentou criar um ambiente de aprendizagem onde as várias representações fossem encorajadas, apoiadas e aceites, chamando apenas a atenção das crianças de que deveriam reproduzir todas as construções.

Nas representações, as crianças utilizaram diferentes estratégias que variavam de acordo com a construção em causa: (i) contornar com o lápis as peças que compõem a figura; (ii) traçar linhas contínuas correspondentes à partição das figuras, implicando a mobilização da visualização espacial incidente em elementos das figuras, como vértices e lados (traçado de linhas como diagonais ao serem unidos os vértices opostos; traçado de linhas unindo quer vértices quer pontos no meio dos lados); (iii) no caso de decomposições envolvendo figuras iguais, contornar com o lápis uma única peça que é rodada de forma consecutiva até ser concluída a composição (estratégia usada por Mário na representação da decomposição do hexágono em triângulos), sendo que não era necessário contornar todos os lados da peça, apenas os que ainda não estavam contornados. Independentemente do rigor do traçado das representações feitas pelas crianças, estas revelaram o reconhecimento de relações espaciais entre as peças, reproduzindo as suas posições relativas, e o uso da rotação mental.

Embora se tenha utilizado como critérios de seleção das crianças para o grupo estudado, a diversidade de ambientes familiares e a existência de ambos os sexos, não foram identificadas associações entre os fatores ambiente familiar e sexo e os diferentes desempenhos das crianças.

No que respeita às interações, as crianças do estudo revelaram alguma dificuldade na utilização da linguagem verbal para partilharem significados, pelo que as interações verbais eram raras. Após a análise efetuada, cremos que esta situação tinha a ver com a natureza da tarefa, uma vez que criava fortes desafios de visualização espacial, exigindo assim, uma elevada concentração individual. Com mais frequência mexiam nas peças do colega do que lhe davam indicações verbais para o fazer. Eventualmente, o ainda incipiente domínio do vocabulário geométrico e a dificuldade de descentração terão contribuído para a ocorrência de poucas interações verbais. Este facto, porém, não as impediu de criarem relações de ajuda e cooperação.

A resolução dos problemas geométricos apresentados fez surgir algumas dificuldades, como era esperado. Algumas crianças revelaram dificuldade em fazer as representações através do desenho das diferentes composições do hexágono. Contudo, é de referir, que em nenhuma situação a dificuldade impediu qualquer criança de levar a cabo a sua tarefa.

Referências

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York: Routledge.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In Puig, L. & Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 3–19). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. The Netherlands: Sense Publishers.

Mendes, M. de F. & Delgado, C. C. (2008). *Geometria – Textos de apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Moreira, D. & Oliveira, I. (2003). *Iniciação à Matemática no Jardim de Infância.* Lisboa: Universidade Aberta.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, M. (2016). *A resolução de problemas geométricos por crianças de 5 anos* (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa), Disponível em http://hdl.handle.net/10400.21/6830

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York: Routledge.

Silva, I. L. (coord), Marques, L., Mata, L. & Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção-geral da Educação.

Walsh, D. J., Tobin, J. J., & Graue, M. E. (2010). A voz interpretativa: investigação qualitativa em educação de infância. In B. Spodek (Org.), *Manual de investigação em educação de infância* (pp. 1037-1066). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

RELAÇÃO 3D-2D — UMA PERSPETIVA DA ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL

Cristina Loureiro

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, CIED

cristina@eselx.ipl.pt

Sílvia Castro

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, CIED

scastro@eselx.ipl.pt

Teresa Pereira

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, CIED

tpereira@eselx.ipl.pt

Resumo: Esta comunicação tem o propósito de apresentar e discutir a análise de várias experiências de aprendizagem de geometria sobre a ligação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade, realizadas com crianças de jardim de infância. Foram realizadas cinco experiências, da responsabilidade de educadoras distintas, cada uma delas com o respetivo grupo de crianças. As experiências realizadas, de longa duração e de natureza interdisciplinar, são constituídas por atividades de Matemática e de Artes Visuais, articuladas entre si, e estão integradas no projeto MARTE1618. Este projeto liga a dimensão investigativa com a realização de ações de formação para educadores de infância e professores do 1.º ciclo do Ensino Básico. Os formandos destas ações são responsáveis ativos na criação e dinamização das atividades realizadas com crianças. No que respeita à geometria, a análise das cinco experiências realizadas recorre ao modelo de estruturação espacial e geométrica de Battista (Battista, 2008). Quanto às artes visuais, o objeto de estudo é a relação entre a tridimensionalidade e a bidimensionalidade, no que respeita aos conceitos de literacia visual inerentes ao objeto artístico 3D, bem como às suas várias formas de representação 2D.

Palavras-chave: Estruturação espacial, estruturação geométrica: tridimensionalidade, bidimensionalidade.

Apresentação e contextualização

O lugar relativo das figuras 2D e 3D é uma das questões que se coloca sempre na organização do ensino e aprendizagem da geometria. Deverão ser as figuras 3D encaradas primeiro que as outras, pelo facto dos objetos tridimensionais serem mais familiares para as crianças? Johnston-Wilder e Mason (2005) respondem a esta questão ao defenderem que tanto a geometria sólida como a plana devem ser ensinadas de modo integrado. O que é importante é que o foco seja o raciocínio geométrico e este exige tarefas que envolvam os alunos em manipulações apropriadas, que proporcionem oportunidades para dar sentido às relações geométricas e para ver essas propriedades como invariantes, independentes de uma situação particular, e passar a raciocinar com base nessas propriedades.

Neste sentido, consideramos importante realizar experiências de aprendizagem focadas na relação 3D-2D, procurando compreender quais os conceitos e relações geométricas que são favoráveis ao desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial e como é que estes podem ser trabalhados na aprendizagem da geometria elementar nos primeiros anos da educação básica. Esta relação entre a tridimensionalidade e a bidimensionalidade é também conteúdo de estudo nas Artes Visuais, razão pela qual esta temática foi escolhida como objeto de investigação numa fase avançada do projeto MARTE1618.

O projeto MARTE1618 tem como principal objetivo o estudo da ligação entre a Matemática e a Educação Artística no âmbito das artes visuais, através da realização de experiências de aprendizagem interdisciplinares. A principal motivação para este trabalho é o interesse em aproximar o conhecimento didático sobre estas duas áreas ao nível elementar, valorizando os aspetos criativos na aprendizagem tanto das artes como da matemática. O projeto está enquadrado num paradigma de aprendizagem de *Arts Based Educational Research (ABER)* (Cahnmann-Taylor & Siegesmund, 2008), que integra as componentes de fruição e conhecimento com a componente de criação. No que respeita à educação matemática, o projeto está orientado para uma aprendizagem de natureza exploratória através da resolução de problemas (Loureiro, Guerra, Castro & Pereira, 2016). O seu foco são as aprendizagens ligadas às capacidades transversais de raciocínio, comunicação e visualização.

O projeto articula a investigação com a formação (Loureiro et al., 2016), sendo a participação na primeira oficina de natureza aberta e livre e a participação na segunda por convite. As experiências analisadas neste artigo foram realizadas pelo grupo de educadoras participantes na segunda oficina (Oficina 2). Estas educadoras tinham realizado uma primeira ação de formação (Oficina 1) no ano anterior e, com a participação nesta segunda ação, passaram a integrar a equipa do projeto.

A primeira fase do projeto permitiu criar três referenciais muito úteis para o planeamento das tarefas a implementar e para a sua avaliação: referencial do plano sequencial de uma experiência; referencial de articulação entre o individual e o coletivo; referencial de análise de conhecimento estético e matemático (Loureiro et al., 2016). Apresentam-se de seguida sumariamente estes referenciais.

O referencial do plano sequencial de uma experiência foi desenvolvido na primeira etapa do projeto, a partir da evidência de que há vantagens em realizar com as crianças várias atividades [1] interligadas, umas exclusivamente matemáticas e outras exclusivamente de artes visuais, sem a preocupação de obter uma atividade única que articule todas as aprendizagens e valorizando os elos de ligação entre as tarefas a propor às crianças. A utilização deste referencial tem-se revelado útil e produtiva para analisar as aprendizagens realizadas no âmbito de uma experiência envolvendo componentes matemáticas e componentes de artes visuais articuladas entre si e, também, para desenvolver as sequências de tarefas a realizar. Destaca-se a relevância da clara separação das duas áreas em algumas atividades, que permite um aprofundamento da aprendizagem em cada uma das áreas. Esta separação é justificada pela diferença da natureza dos objetos em causa (matemáticos, composições visuais) e pela orientação inversa do percurso da respetiva construção abstrata (Duval, 2002; Kandinsky, 2016). Por um lado, na aprendizagem da matemática há todo um caminho a fazer na construção de conhecimento abstrato, intangível, mas feito através de experiências concretas. Nas artes visuais, o caminho é de certo modo inverso pois há todo um conjunto de experiências internas que se expressam por representações externas, com representação física concreta.

Uma sequência de atividades culmina sempre com a produção de uma obra que depois é exposta e apreciada em grupo. Além disso, no decorrer da experiência há atividades realizadas individualmente e outras em grupo. Esta articulação permitiu criar um referencial que organiza a articulação entre a produção individual e a produção coletiva em situação de sala de aula (Loureiro et al., 2016). Este referencial combina duas orientações, a da produção das composições e a da exploração dos trabalhos realizados. A dimensão coletiva tem sido progressivamente consolidada em todas as experiências realizadas ao longo do projeto, numa perspetiva de valorização do envolvimento das crianças e respetiva responsabilização na sua aprendizagem, bem como na apropriação de normas sociais. A relevância deste aspeto tem sido significativa tanto para a compreensão da produção artística na educação básica, como para a análise das dimensões sócio culturais na aprendizagem da matemática.

O referencial de análise do conhecimento estético e matemático, embora ainda em fase de desenvolvimento, permite organizar o conhecimento sobre obras de artistas plásticos. É um instrumento útil para a seleção de artistas e obras a utilizar pois um dos aspetos fundamentais no desenvolvimento da literacia artística é a fruição e compreensão da obra de arte. Ligados ao mesmo conceito matemático encontram-se obras que recorrem a processos criativos distintos pela utilização de técnicas diversas. Constitui-se assim um mapa de obras e artistas que pode orientar percursos de aprendizagens múltiplos que combinam aprendizagens matemáticas com aprendizagens artísticas visuais.

As experiências de aprendizagem realizadas e discutidas neste artigo surgem assim numa fase avançada do projeto. O propósito destas experiências foi proporcionar às crianças a realização de atividades com articulação entre objetos reais 3D e a sua representação a duas dimensões. As experiências realizadas tinham como objetivo identificar quais os conceitos e relações geométricas que são favoráveis ao desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial e como é que estes conceitos e relações podem ser trabalhados na aprendizagem da geometria no jardim de infância.

[1] Optamos por usar preferencialmente a designação de atividades em vez de tarefas, visto que esta designação é específica da didática da matemática. Consideramos que se justifica esta opção tendo em conta a natureza interdisciplinar do texto e o interesse em partilhá-lo com outros públicos.

Enquadramento teórico

O enquadramento teórico apresentado neste artigo contempla apenas a componente didática da geometria orientada para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial. Assume-se esta orientação dupla de Battista (2007) que afirma que a maior parte do raciocínio geométrico é espacial, considerando este tipo de raciocínio como "a habilidade para ver, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações" (p. 843).

A estruturação do raciocínio geométrico tem por base contributos diversos, nomeadamente, a estruturação dos objetos matemáticos (Freudenthal, 1991), estruturação como um processo de dependência e de estabelecimento de ligações (Skemp, 1993), construção de *schema* como uma estrutura conceptual que terá o valor de uma ferramenta para posteriores aprendizagens (Skemp, 1993), possibilidade e vantagens de coexistência de vários esquemas conceptuais (Johnston-Wilder & Mason, 2005), oportunidades para matematizar (Gravemeijer 1998), entre outros aspetos. A perspetiva de que aprender estruturalmente é vantajoso no momento de criação da estrutura conceptual, vantajoso mais tarde na reutilização da estrutura que, assim, também se consolida e pode ampliar, é um aspeto importante a reter quando se pretende estudar e analisar experiências de aprendizagens longas que integram a realização de várias atividades.

A perspetiva estruturalista tem-se verificado muito adequada à geometria. Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998) afirmam que toda a geometria é em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação e reconhecem que estudar os processos através dos quais os alunos estruturam o espaço oferece-nos uma nova e poderosa perspetiva para investigar a construção da geometria e das ideias espaciais pelas crianças.

Estruturar espacialmente um objeto determina a sua natureza, ou forma, pela identificação das suas componentes espaciais, pela combinação das componentes em composições espaciais, e pelo estabelecimento de inter-relações entre as componentes e os compostos. Por exemplo, uma caixa de cartão é um paralelepípedo estruturado a partir das suas faces e uma resma de papel é um paralelepípedo estruturado a partir da justaposição de retângulos iguais. Estas duas estruturações espaciais são distintas e permitem evidenciar relações geométricas diferentes entre os elementos constituintes do paralelepípedo.

Battista (2008, pp. 138 e 139) desenvolve a ideia de que a aprendizagem da geometria pode ser encarada como envolvendo três tipos de estruturação:

> (a) Estruturação espacial, que constrói a organização espacial ou forma de um objeto ou de um conjunto de objetos. Ela determina a perceção/conceção da natureza de um objeto ou forma, através da identificação de componentes do objeto espacial, combinando componentes em compósitos, e estabelecendo relações entre componentes e compósitos.
>
> (b) Estruturação geométrica, que descreve a estruturação espacial em termos de conceitos de geometria formal. Isto é, na estruturação geométrica de uma situação espacial, o sujeito usa os conceitos de geometria como ângulos, declive, paralelismo, comprimento, retângulo, sistemas de coordenadas, e transformações geométricas, entre outros, para conceptualizar e operar sobre uma dada situação. Para que a estruturação geométrica faça sentido para alguém, ela terá que evocar uma estruturação espacial adequada.

(c) Estruturação lógico formal, que organiza os conceitos geométricos (isto é, as estruturas geométricas) num sistema e que especifica as relações que podem ser descritas e estabelecidas através de raciocínio lógico. Para chegar à estrutura lógica, o indivíduo deve organizar logicamente conjuntos de propriedades.

É importante referir que o desenvolvimento de uma boa estruturação lógico formal depende de uma boa estruturação geométrica, assim como, o desenvolvimento de uma boa estruturação geométrica depende da qualidade da estruturação espacial. A relação entre estes tipos de estruturação não deve ser encarada como uma hierarquia fechada, de sentido único. A orientação deste modelo de estruturação, que passamos a designar por *modelo de Battista*, é útil para o planeamento de tarefas de geometria, encadeadas e articuladas entre si (Loureiro & Serrazina, 2015).

A estruturação espacial e geométrica coloca-se tanto para objetos bidimensionais como tridimensionais. Os objetos 3D podem ser estruturados espacialmente a partir de componentes 2D, são representados no plano a duas dimensões e, por isso, é defendido que tanto a geometria sólida como a plana devem ser ensinadas de modo integrado (Johnston-Wilder & Mason, 2005). Alternância entre convexidades e concavidades, sobreposição, transparência, deformação, obliquidade, escalonamento e perspetiva são comumente utilizadas como estratégias compositivas de construção espacial por parte dos artistas, transpondo para o plano da representação os processos fisiológicos de perceção visual. Segundo Jones e Tzekaki (2016), a investigação tem mostrado que as dificuldades dos alunos em visualizar e explicar os seus raciocínios podem ser devidas à falta de experiências prévias e ao débil desenvolvimento de imagens mentais. Esta ideia confere uma relevância especial à tridimensionalidade e à necessidade de a articular com a bidimensionalidade. Os objetos reais são maioritariamente tridimensionais e muitos desenhos a duas dimensões são representações de objetos tridimensionais.

Metodologia

O projeto em que se insere este trabalho é um projeto de investigação e formação que tem como objetivo experimentar e estudar atividades que envolvem simultaneamente aprendizagens matemáticas e de educação artística visual. Pretendemos que o aprofundamento interdisciplinar, com olhares diversos sobre os mesmos objetos, ajude a promover um maior conhecimento dos mesmos e dos processos inerentes à sua criação. Subjacente a este trabalho está o propósito de realizar uma pesquisa acerca das múltiplas interseções entre as artes plásticas e a matemática, designadamente: a) Ao nível dos processos criativos/processos de raciocínio matemático; b) Da análise e fruição da obra de arte, assinalando e compreendendo a presença de conceitos e métodos matemáticos na sua estrutura formal/conceptual; c) Ao nível dos contributos recíprocos para a compreensão das caraterísticas inerentes aos processos de raciocínio matemático e do desenvolvimento da literacia artística, compreendendo as dimensões da experimentação, do raciocínio, da fruição e da análise, (Loureiro et al., 2016).

Neste artigo distinguimos duas dimensões metodológicas: a metodologia do projeto e a metodologia que orientou a análise das experiências realizadas sobre a ligação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade.

A metodologia utilizada neste projeto é de natureza qualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011), tendo por base a realização de experiências de aprendizagem com crianças. A metodologia incorpora duas componentes articuladas: 1) a realização de um conjunto de oficinas de formação para professores e educadores; 2) a realização de experiências de aprendizagem com crianças, levadas a cabo pelos professores e educadores ligados ao projeto através da participação nas oficinas de formação. A realização das experiências de aprendizagem é da responsabilidade dos participantes nas ações de formação e não está previsto o acompanhamento nas salas de aula por parte dos formadores/ investigadores. Os experimentadores começam por participar livremente na Oficina 1 e são depois convidados a participar na Oficina 2. Na primeira, as experiências realizadas com crianças são livres e têm por base os conteúdos trabalhados, tanto matemáticos como das artes visuais. Na segunda, as experiências são planeadas em conjunto entre formadores/ investigadores e formandos/ experimentadores, deixando sempre uma grande margem de liberdade aos experimentadores. Esta parceria contribui para articular as componentes de planeamento e análise das experiências com a componente de aprofundamento teórico e a construção de referenciais de análise. O desenvolvimento do projeto permitiu identificar o interesse em continuar a realização de experiências a partir de uma terceira oficina ainda em fase planeamento.

Os instrumentos de recolha de dados do projeto são: trabalhos realizados pelas crianças nas experiências de sala de aula e discutidos nas sessões de formação, relatórios dos formandos, notas de campo das sessões das ações de formação, entrevistas a formandos, reflexões escritas dos formandos. Os instrumentos de análise de dados são os referenciais que vão sendo construídos no âmbito do projeto, com a colaboração dos formandos nas ações de formação, e outros modelos ou referenciais teóricos.

As experiências de aprendizagem são realizadas durante um período alargado de tempo e decorrem em simultâneo com a ação de formação em que participam as responsáveis pelas experiências. Assim, as várias atividades que compõem uma experiência vão sendo planeadas, realizadas e discutidas nas sessões de formação. Deste modo não existe um plano prévio global de toda a experiência, embora haja um propósito global da experiência a realizar. As experiências evoluem tendo em conta as intenções do educador e as sugestões decorrentes da discussão realizada nas sessões de formação com o contributo dos formadores e dos formandos. No caso das experiências que se analisam neste artigo há uma liberdade total relativamente a conteúdos de geometria. Esta liberdade decorre da sua realização no pré-escolar, nível em que as orientações curriculares não vinculam o educador a um programa de conteúdos rígido.

No que respeita à análise das experiências de geometria, houve uma decisão conjunta de trabalhar a relação entre a tridimensionalidade e a bidimensionalidade. Foram escolhidas as cinco experiências que decorreram ao longo da oficina e que foram sendo objeto de discussão nas sessões de formação. A análise que se discute neste artigo foi feita após a conclusão de todas as experiências, com base nos relatórios das formandas e nas notas recolhidas nas sessões de formação.

Abordagens integradas 3D-2D

O conjunto de experiências que aqui se discute tinham como propósito comum trabalhar a ligação entre a tridimensionalidade e a bidimensionalidade, tendo como foco, na componente de artes visuais, a fruição e a composição do objeto escultórico. Em todos os casos esteve presente a intenção de criar condições para dar espaço à criatividade das crianças.

Com o objetivo de aprofundar o conhecimento sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial, no fim da oficina de formação foi elaborada pelas investigadoras uma descrição de cada percurso realizado, recorrendo ao referencial do plano sequencial de uma experiência e contemplando as suas duas componentes: artes visuais e matemática. Esta descrição sintetizou os relatos elaborados por cada educadora no respetivo relatório da formação, tendo sido totalmente respeitada a sequência e a categorização da atividade nas duas componentes.

Para cada descrição foi feita depois uma análise mais fina tendo em conta o desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial segundo o modelo de Battista. Para isso, foi acrescentada uma coluna ao referencial. Esta análise permitiu obter para cada percurso uma nova descrição tendo sido obtidos cinco quadros de que se apresenta um exemplo (Quadro 2). Estes quadros descritivos permitiram fazer uma análise comparativa das cinco experiências.

Nas cinco experiências apresentadas são trabalhados conteúdos geométricos distintos e as suas respetivas durações são bastante diferentes. Todas as experiências foram realizadas em salas heterogéneas, com crianças entre os 4 e os 6 anos. A heterogeneidade de desenvolvimento das crianças está patente em algumas descrições como ilustra o excerto do relatório de uma das formandas.

> Aparentemente as crianças mais novas desenharam a imagem mental da escultura que tinham feito, enquanto as mais velhas tentaram fazer um desenho à vista, da escultura que tinham construído. (Relatório de uma formanda).

Apesar das diferenças, todas as experiências são inclusivas e foram organizadas em função de todo o grupo de crianças, não se discutindo neste artigo aspetos de diferenciação ou outros que podem ocorrer num grupo heterogéneo de crianças. É importante referir que durante a realização das experiências os conceitos de estruturação espacial e estruturação geométrica de modelo de Battista não foram discutidos com as educadoras responsáveis pela realização das experiências. No quadro 1 apresentamos um plano global sumário das cinco experiências analisadas, desenvolvendo posteriormente aspetos relevantes de cada uma delas.

Quadro 1. Plano global das experiências realizadas

	Orientação da experiência
A	Composições com base em elementos naturais (*Land art*). Simetria.
B	Esculturas figurativas. Sombras e projeções.
C	Composições com elementos geométricos. Paralelepípedos.
D	Composições com elementos geométricos. Paralelepípedos e paralelismo.
E	Composições com elementos geométricos. Planos e paralelismo.

A experiência A foi a mais curta e aquela para a qual apresentamos o plano global (Quadro 2) como um exemplo de utilização do referencial do plano sequencial de uma experiência com a integração da análise do raciocínio geométrico e espacial.

Quadro 2. Plano sequencial da experiência A

	Artes Visuais	**Matemática**	**Raciocínio geométrico e espacial**
1ª	Realização de uma composição coletiva com base em elementos naturais (*Land art*). Composição livre sem orientação previamente definida.		Estruturação espacial. Construção de um objeto 3D composto a partir de elementos.
2ª	Representação da composição coletiva em papel. Seleção de cores e elementos visuais.	Relações espaciais e visualização.	Estruturação espacial. Construção de um objeto 2D composto, a partir de elementos e como representação de um objeto 3D.
3ª **Momento coletivo fruição**	Fruição da composição elaborada.	Análise dos elementos da composição. Repetição. Simetria.	Estruturação geométrica. Estabelecimento de relações entre os elementos de uma composição. Identificação de invariantes numa composição geométrica.

Nesta experiência destaca-se a intenção de obter uma representação 2D de um objeto 3D em que cada elemento da composição tem uma representação específica que foi discutida com as crianças (Figura 1). A natureza coletiva da composição elaborada permitiu desenvolver um diálogo participado com as crianças. É importante destacar que a primeira atividade não tinha uma intenção matemática explícita, o seu objetivo era exclusivamente de natureza estética no âmbito das artes visuais. No entanto, a análise posterior permitiu identificar a presença da estruturação espacial na realização da atividade.

Figura 1. Fotografias da composição 3D e da sua representação 2D

A experiência B recorre à representação de objetos 3D a duas dimensões com duas orientações distintas: a partir de vistas e a partir de projeções planas realizadas através de sombras (Figura 2). As relações que se podem estabelecer entre o objeto 3D e as suas projeções são de natureza totalmente diferente de representações através de vistas. Os objetos 3D usados neste caso eram figurativos e poderíamos pensar que não eram favoráveis ao desenvolvimento do raciocínio geométrico por introduzirem elementos distratores da atenção às componentes geométricas. No entanto, valorizamos esta experiência porque ela introduz a geometria na relação entre 3D e a representação 2D. Neste caso consideramos relevante a associação que pode ser feita entre a estruturação espacial e a estruturação geométrica.

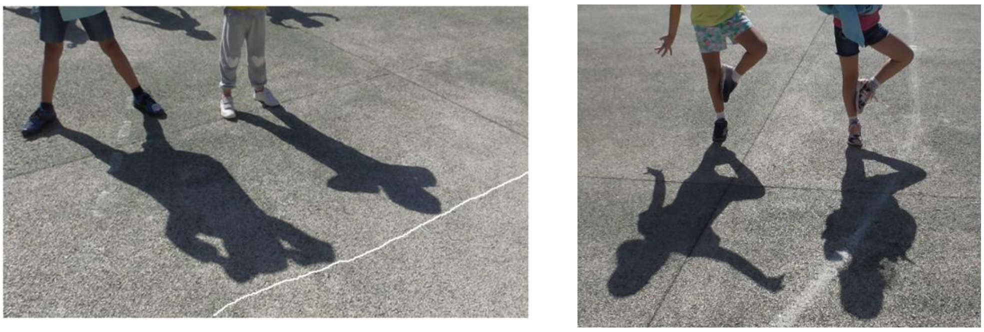


Figura 2. Fotografias de sombras das crianças

Na experiência C a estruturação espacial do paralelepípedo foi trabalhada de dois modos diferentes. Na parte inicial o paralelepípedo foi visto e trabalhado pelas crianças como poliedro constituído por três pares de faces paralelas. Nesta fase do trabalho foi estabelecida uma relação explícita entre a planificação do paralelepípedo e o próprio paralelepípedo. Numa fase posterior, o paralelepípedo foi estruturado a partir da repetição e justaposição de vários planos iguais (Figura 3). Nesta fase de estruturação esteve presente a iniciação à estruturação lógica formal na medida em que o paralelepípedo foi visto como um prisma quadrangular e foi associado ao cilindro. Os dois sólidos foram construídos em fatias, como mostram as fotografias.

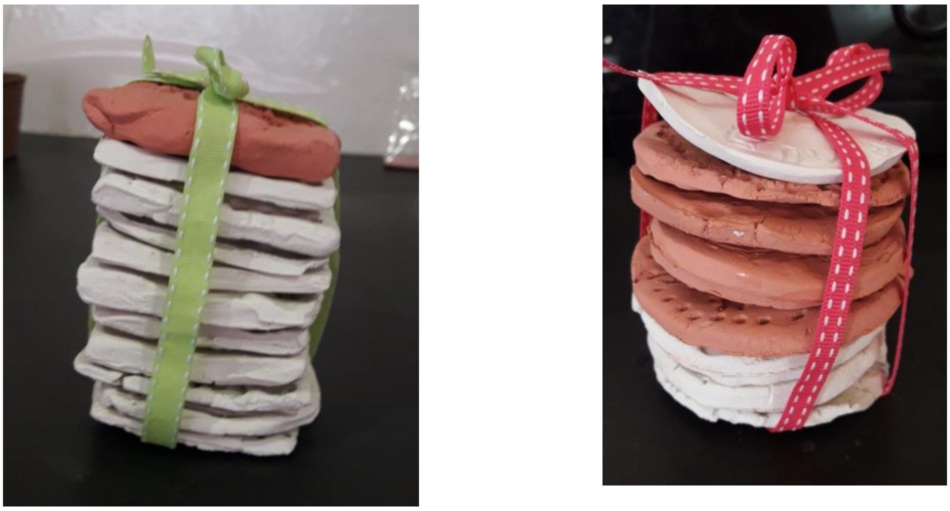


Figura 3. Fotografias do prisma e do cilindro construídos em fatias

Um dos aspetos a destacar na experiência D é a presença de uma abordagem de iniciação à estruturação lógico-formal com o trabalho sobre uma classe de figuras, os paralelepípedos. As relações geométricas estabelecidas entre os objetos tiveram subjacente o conceito inclusivo de classe pois as crianças trabalharam sobre conjuntos de paralelepípedos em que também havia cubos incluídos. O diálogo com as crianças, durante a observação coletiva de uma escultura, ilustra essa intenção que esteve presente em todo o trabalho realizado:

> — São quadrados.
> — Mas também retângulos.
> — Há retângulos de grossuras diferentes, um é mais grosso, outro é médio e o outro é fino.

Neste diálogo está patente a identificação pelas crianças dos elementos 2D em figuras 3D, bem como a possibilidade de estruturação do paralelepípedo como repetição e justaposição de retângulos iguais. Esta experiência foi determinante para estudar, discutir e experimentar vários modos de estruturar o paralelepípedo e para trabalhar a classificação inclusiva de paralelepípedos como prismas. Permitiu também identificar a necessidade de trabalhar na formação o conceito de perspetiva e os vários tipos de perspetiva geométrica, um processo geométrico muito rico de ligação 3D-2D e muito pouco conhecido dos professores e educadores. Além disso, histórica e culturalmente a perspetiva é uma ligação privilegiada entre a matemática e a arte.

Na experiência E houve intenção de estabelecer relações de paralelismo entre elementos de uma composição, com o objetivo claro de trabalhar o conceito de paralelismo no plano (retas paralelas) e no espaço (planos paralelos) (Figura 3). Em ambos os casos estes conceitos foram trabalhados em simultâneo com a exploração estética e visual. Nestes casos as atividades de estruturação espacial foram trabalhadas com intencionalidade de estruturação geométrica em que o diálogo com as crianças teve um papel importante.

Figura 4. Fotografia de uma composição 3D e da sua representação 2D

Estas cinco experiências proporcionaram condições para analisar e discutir os três tipos de estruturação do modelo de Battista.

Assim, foi possível desenvolver uma consciência mais clara do que se entende por estruturação espacial de um objeto geométrico e tornar mais transparente este conceito. A estruturação espacial é simultaneamente um modo de encarar e conceber um objeto e uma capacidade do sujeito. Consideramos a estruturação espacial como capacidade pois esta está intimamente ligada ao desenvolvimento de capacidades de visualização e ao reportório mental de imagens de cada sujeito.

Ao clarificarmos o que se entende por estruturação espacial fica mais acessível a intencionalidade desta estruturação nas tarefas a propor às crianças. Este aspeto evidencia-se quando se verifica que nas atividades de artes visuais, inicialmente sem intenção de estruturação espacial, se explicita e descreve a sua presença.

Possivelmente uma das dificuldades do desenvolvimento do raciocínio geométrico é a orientação desse desenvolvimento sem qualquer atenção à estruturação espacial. O modelo de estruturação de Battista é claro na chamada de atenção para as duas estruturações, espacial e geométrica, em ligação. Assim, não faz sentido o apelo ao estabelecimento de relações geométricas entre elementos de uma figura ou entre figuras sem que haja atenção à natureza da estruturação espacial envolvida. Os exemplos analisados evidenciam experiências em que os dois tipos de estruturação coexistiram.

Como seria de esperar em atividades de jardim de infância a estruturação espacial teve uma maior preponderância. No entanto, a estruturação geométrica teve um papel destacado e foi possível identificar também a presença da estruturação lógico-formal na sua fase mais inicial. É desejável que o desenvolvimento do raciocínio lógico formal seja feito sustentadamente ao longo da escolaridade. Para isso é importante que o educador ou professor tenha os conceitos consolidados sobre estes aspetos, com consciência clara de que, na geometria, uma figura é um representante de uma classe e de que as classes de figuras se relacionam entre si sempre numa base inclusiva. Nestas experiências foi muito evidente a importância de discutir e trabalhar estes aspetos durante a formação.

A ligação 3D-2D foi amplamente discutida com as educadoras responsáveis pelas experiências e foi objeto de uma reflexão escrita individual por cada uma delas. As educadoras foram unânimes em considerar que o trabalho no plano, a duas dimensões, é mais simples e aquele que usualmente é mais explorado com as crianças. Embora as educadoras refiram que já tinham em consideração também o trabalho com objetos 3D, afirmaram que a novidade esteve na ligação entre as duas dimensões nas atividades experimentadas. Destacaram também a importância que teve partir do 3D para o 2D e evidenciaram os aspetos de linguagem desenvolvidos a partir desta orientação. “Como faço para representar a parte de trás?” e “Como é que se vê de cima?” são exemplos de expressões de que as crianças se apropriaram e passaram a utilizar com frequência.

A apreciação de uma das educadoras expressa na frase “as crianças têm que reconhecer diversos pontos de vista relativamente a uma mesma construção ou eventualmente desenhá-los” leva-nos a discutir a ideia de que um objeto 3D admite várias representações 2D. Estas experiências levam-nos a formular a conjetura de que, matematicamente, a passagem do 3D para o 2D é mais rica do que a passagem inversa. Do ponto de vista artístico o nosso conhecimento de várias obras e trabalhos de artistas aponta também nesse sentido.

A ideia original, no início da formação, de trabalhar a representação 2D de figuras 3D valorizou-se bastante no decorrer destas experiências. O nosso objetivo inicial era trabalhar apenas esta ligação num sentido, introduzindo a técnica matemática da representação por vistas. Na componente de formação matemática, as experiências realizadas permitiram dar um maior protagonismo aos objetos 3D e avançar bastante no conhecimento sobre o modelo de estruturação de Battista, como procurámos mostrar. Em nosso atender este enriquecimento decorreu da criatividade das educadoras e da sua capacidade de programar atividades de natureza artística muito ricas e com grande significado para as crianças.

O objeto artístico escultórico, tanto em situações de arte pública, como em fotografia ou vídeo, e nas composições realizadas pelas crianças teve um papel insubstituível neste trabalho. As análises que fizemos e a clarificação que nos parece termos conseguido avançar sobre o modelo de estruturação de Battista não teriam ganho a riqueza que mostrámos sem estes trabalhos.

Além da importância do caminho 3D-2D, ficou também claro que a ligação entre a tridimensionalidade e bidimensionalidade não é só num sentido e que pode ser bastante mais favorável com alternância de orientações. Ficaram algumas ideias latentes desta possibilidade de partir também do 2D para o 3D. Há vários artistas e obras que podem ser favoráveis a esta orientação. Registamos também a importância da fotografia e do vídeo que não foram explorados nestas experiências.

Conclusões

As experiências realizadas neste projeto têm ajudado a consolidar a ideia de que o maior conhecimento sobre a estruturação espacial permite compreender melhor a estruturação geométrica e, consequentemente, a estruturação lógico formal. Ao valorizar a estruturação espacial estamos a desenvolver bases mais consistentes e sólidas para a estruturação geométrica. Na nossa análise, a ligação 3D-2D proporciona contributos fundamentais para estruturar os objetos geométricos 3D e compreender a importância do 2D na estruturação do 3D.

A estruturação espacial no ensino da geometria tem obviamente objetivos de estruturação geométrica. A estruturação espacial no ensino das artes visuais pode ter outro tipo de objetivos, de natureza artística. A conciliação da estruturação espacial nestas duas disciplinas é uma ideia que sai fortalecida com esta análise.

Tendo em conta a natureza interdisciplinar do projeto, esboça-se a conjetura de que um maior conhecimento do que se entende por estruturação espacial permite destacar a importância desta capacidade e deste modo de encarar e conceber os objetos nas atividades de aprendizagem no âmbito das Artes Visuais. Seguramente que os artistas visuais são as pessoas que melhor desenvolveram a estruturação espacial e, por isso, destaca-se um potencial forte nas atividades de artes visuais para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial e uma mais valia para que os alunos atribuam sentido às atividades de geometria. A diversidade das composições realizadas e das técnicas plásticas utilizadas é um bom exemplo desta conclusão.

A estruturação espacial é uma vasta zona de interseção entre matemática e as artes visuais e constitui um terreno fértil para um trabalho interdisciplinar, seja nos níveis mais elementares como nos mais avançados da educação básica. As experiências aqui apresentadas, realizadas apenas com crianças do pré-escolar, constituirão o ponto de partida para experiências a realizar no 1.º ciclo no âmbito da continuidade deste projeto.

Referências

Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. (2008). Development of the shape makers geometry world. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspectives* (pp. 131-156). Reston, VA: NCTM & IAP.

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow, C. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *JRME*, *29*(5), 503-532.

Cahnmann-Taylor, M. & Siegesmund, R. (2008). *Arts-Based Research in Education: Foundations for Practice*. London/ New York: Routledge.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais: Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina.

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.) *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Mexico (Vol. I, pp. 3-26). México: NAPME.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1998). From a different perspective: building on students' informal knowledge. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 45- 66). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense Publishers.

Kandinsky, W. (2016). *O futuro da pintura*. Lisboa: Edições 70.

Loureiro, C., Guerra, C., Castro, S. & Pereira, T. (2016). Contributos para uma interdisciplinaridade entre Matemática e Literacia Visual. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos (Eds.), *Atas do EIEM 2016 - Recursos na Educação Matemática* (pp. 99-112). Évora: SPIEM.

Loureiro, C. & Serrazina, L. (2015). Spatial and geometric structuring – contributions for a collective construction. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 550-556). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Skemp, R. (1993). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin Books.

DISTRIBUCIÓN SIGNIFICATIVA DE CONTENIDOS EDUCATIVOS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Angélica Martínez-Zarzuelo

Dpto. de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, España

angelica.martinez@ucm.es

Mª José Fernández-Díaz

Dpto. Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación (MIDE), Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, España

mjfdiaz@edu.ucm.es

Eugenio Roanes-Lozano

Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI) & Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, España

eroanes@mat.ucm.es

Palabras-clave: Distribución significativa, enseñanza, aprendizaje, geometria, grafo.

La distribución de contenidos educativos es un proceso fundamental para la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de cualquier disciplina. Organizar los contenidos de forma significativa para mejorar su comprensión no es una tarea sencilla. El caso de la disciplina matemática ofrece posibilidades muy interesantes en este sentido. Sin embargo, la complejidad de su propia estructura de contenidos interrelacionados hace difícil, entre otros, los procesos de planificación de su enseñanza. Programar un orden adecuado en la presentación de contenidos es, sin duda, uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta. Sin embargo, una de las limitaciones apreciables en este proceso es la falta de visión global de la relación entre los diferentes contenidos que forman el edificio matemático. Es en este contexto, y bajo esta necesidad, donde surge el trabajo que aquí se presenta.

Con el fin de analizar tanto numérica como visualmente el edificio matemático, se ha modelizado parte del mismo mediante una estructura de grafo. Concretamente, se ha trabajado con más de ochocientos contenidos matemáticos distintos organizados según una relación basada en el aprendizaje significativo (Martínez-Zarzuelo, 2015; Martínez-Zarzuelo, Roanes-Lozano & Fernández-Díaz, 2013). Esta relación se fundamenta, concretamente, en la necesidad que supone para la comprensión de un determinado contenido, el conocimiento de otro. Los contenidos considerados forman parte de la etapa educativa *Educación Secundaria Obligatoria* del Sistema Educativo Español. Mediante el uso de software especializado (Bastian, Heymann & Jacomy, 2009; Batagelj & Mrvar, 2014; Cherven, 2015; de Nooy, Mrvar & Batagelj, 2011) y algoritmos de detección de clusters (Blondel, Guillaume, Lambiotte & Lefebvre, 2008) se han identificado en dicho grafo cinco conjuntos (C_0, C_1, C_2, C_3 y C_4) formados, cada uno de ellos, por contenidos más densamente conectados entre sí que con el resto de contenidos que forman el grafo. Esta organización de contenidos ha demostrado ser una alternativa técnicamente fundamentada a la distribución habitual en los bloques de contenidos de Aritmética, Álgebra, Medida y geometría y Estadística y probabilidad que consideran las administraciones educativas (Martínez-Zarzuelo, Roanes-Lozano & Fernández-Díaz, 2017).

En el presente trabajo se ha analizado en profundidad el subgrafo correspondiente a contenidos geométricos. En este subgrafo formado exactamente por 338 contenidos se ha observado una distribución de los mismos acorde a los cinco grupos de contenidos identificados. Concretamente el 3.0% de sus contenidos forman parte del conjunto C_0, el 21.9% del C_1, el 0.3% del C_2, el 8.3% del C_3 y el 66.6% del C_4. Esta distribución se traduce, de forma general, en la agrupación de contenidos siguiente: semejanza de figuras; polígonos, prismas, perímetros, áreas y volúmenes; estimación; vectores y ecuaciones de rectas; y ángulos, trigonometría, puntos notables, movimientos, medidas, circunferencia, círculo, esfera, poliedros y pirámides, entre otros.

Cabe destacar que el 66.6% de los contenidos geométricos forman parte del conjunto C_4. No obstante, estos suponen el 97.4% de la totalidad del conjunto C_4. Ello demuestra de forma objetiva que prácticamente todos los contenidos de C_4 se identifican con contenidos geométricos. Sin embargo, la presencia de contenidos geométricos en los otros cuatro conjuntos en un 33.4% revela la posibilidad fundamentada de tratar esos contenidos junto con los correspondientes al conjunto identificado al que pertenecen, y no como parte de la geometría tal y como hoy en día es considerada en el sistema educativo.

El criterio considerado para la creación del grafo de contenidos, así como el tipo de análisis presentado en este estudio permite su extensión no solamente a otras áreas de las matemáticas diferentes a la geometría, sino también a otras disciplinas, a otras etapas educativas e, incluso, a otros sistemas educativos. Todo ello supone una opción factible de nuevas propuestas de distribución de contenidos educativos diferentes a las ya existentes y fundamentadas, además, en el aprendizaje significativo del alumnado.

Referencias

Bastian, M., Heymann, S., & Jacomy, M. (2009). Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks. *Proceedings of the International Conference on Weblogs and Social Media (ICWSM), 8*, 361-362.

Batagelj, V. & Mrvar, A. (2014). Pajek. In R. Alhajj & J. Rokne (Eds.), *Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining* (pp. 1245-1256). New York: Springer Publishing Company.

Blondel, V. D., Guillaume, J. L., Lambiotte, R., & Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 10*, 1-12.

Cherven, K. (2015). *Mastering Gephi Network Visualization.* UK: Packt Publishing Ltd.

de Nooy, W., Mrvar, A., & Batagelj, V. (2011). *Exploratory social network analysis with Pajek*. New York: Cambridge University Press.

Martínez-Zarzuelo, A. (2015). *Selección, organización y secuenciación del conocimiento matemático mediante teoría de grafos* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Martínez-Zarzuelo, A., Roanes-Lozano, E., & Fernández-Díaz, M.J. (2013). About Organizing and Structuring the Contents of Mathematical Subjects using Graph Theory. In A. Cavalcante (Ed.), *Graph Theory: New Research* (pp. 185-203). New York: Nova Science Publishers.

Martínez-Zarzuelo, A., Roanes-Lozano, E., & Fernández-Díaz, M.J. (2017). Grouping mathematical contents using network analysis software. An application to the Spanish Secondary Education case. *The International Journal for Technology in Mathematics Education* (aceptado para su publicación).

AS JUSTIFICAÇÕES MATEMÁTICAS DOS ALUNOS DO 2.º CICLO NO CONTEXTO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO PARA PROMOVER O RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO

Marisa Gregório

Agrupamento de Escolas Rainha D. Leonor

marisaspg@gmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Palavras-chave: Justificação matemática, raciocínio geométrico, experiência de ensino, 2.º ciclo do ensino básico.

Neste póster apresenta-se um estudo a realizar com o objetivo de caracterizar as justificações matemáticas dos alunos do 5.º ano e de compreender como estas evoluem, ao resolverem tarefas que visam o desenvolvimento do raciocínio geométrico, no decurso de uma experiência de ensino.

A justificação é um dos principais componentes do processo de raciocínio matemático (Lannin et al., 2011), que envolve avaliar a validade dos argumentos ou demonstrar a falsidade de uma afirmação. Seguindo a linha de pensamento destes autores, consideramos neste estudo a justificação como um argumento lógico baseado em ideias já apreendidas, que cumpre critérios matemáticos e usa uma linguagem adequada à comunidade que a produz (neste caso, os alunos) e não como um argumento baseado na autoridade, perceção, consenso popular ou exemplos. Também neste sentido, Bartolini Bussi et al. (1999) e Douek (2009) defendem o uso da argumentação como base eficaz para as discussões de sala de aula, no que diz respeito não só ao raciocínio matemático em geral, mas também para a produção de justificações.

Nesta experiência de ensino será privilegiada a atividade de resolução de tarefas diversificadas, nomeadamente exploratórias, que visam o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Para Duval (1998), o raciocínio em geometria é um processo que permite obter um novo conhecimento a partir de informações dadas e requer capacidades de visualização espacial, reconhecimento de propriedades das formas geométricas e a relação entre as propriedades das formas geométricas. Esse novo conhecimento é utilizado para provar, explicar e estender o conhecimento existente. As tarefas utilizadas serão elaboradas tendo em conta os três tipos de processos cognitivos que atendem a três funções epistemológicas específicas necessárias para a proficiência em geometria: os processos de visualização, que dizem respeito à representação espacial; de construção, que atendem à utilização de ferramentas e; de raciocínio, aqui entendido em relação a processos discursivos para a justificação (Duval, 1998).

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, com observação participante e o design de experiência de ensino, sendo que a intervenção pedagógica será realizada em duas turmas do 5.º ano, de uma escola do 2.º ciclo do ensino básico, em que a investigadora (primeira autora) é simultaneamente professora de matemática.

Os métodos de recolha de dados incluem observação participante com registo áudio e vídeo das aulas, recolha das produções escritas dos alunos decorrentes da resolução das tarefas matemáticas propostas e entrevistas a um grupo pré-selecionado de alunos, após o término da intervenção. Dado que a investigadora assumirá também o papel de professora, esta procurará assegurar-se que a participação dos alunos no estudo é voluntária e que os mesmos não serão beneficiados ou prejudicados na sua avaliação na disciplina pela participação no estudo.

A análise dos dados terá em conta as categorias indicadas por Knuth, Choppin e Bieda (2009), com as quais se pretende caracterizar o tipo de justificação matemática utilizada pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem o raciocínio geométrico, em particular no estudo de propriedades geométricas.

Referências

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., Ferri, F., & Garuti, R. (1999). Early approach to theoretical thinking: Gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 67–87.

Douek, N. (2009). Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. In *Proceedings of CERME 6*. www.inrp.fr/editions/cerme6

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.

Knuth, E. J., Choppin, J. M., & Bieda, K. N. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective* (pp. 153–170). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS NUMA ATIVIDADE DE GALLERY WALK

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo & CIEC
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo & CIEC
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Palavras-chave: Resolução de problemas, visualização geometria, *gallery walk*, formação de professores.

Este póster tem como objetivo identificar as estratégias usadas por estudantes da formação inicial do ensino básico, 1º/2º ciclos, na resolução problemas de geometria com múltiplas resoluções, usando uma nova estratégia de ensino e aprendizagem, *gallery walk*, assim como caracterizar a sua reação durante o seu envolvimento.

Propomos a *gallery walk* como estratégia que permite a apresentação da resolução de um problema em pósteres, localizados à volta da sala de aula, numa perspetiva semelhante à dos artistas quando expõem os seus trabalhos numa galeria (Fosnot & Dolk, 2002). Na visita aos pósteres os alunos analisam e comentam as resoluções apresentadas para uma discussão posterior. Esta estratégia favorece a comunicação, a discussão, o pensamento crítico, a aprendizagem cooperativa, competências fundamentais a trabalhar com os alunos.

A visualização tem um papel fundamental como componente do raciocínio matemático (e.g. Jones, 2001; Presmeg, 2014; Vale, Barbosa &Pimentel, 2016) com fortes ligações à geometria. Contudo, a geometria é um tema no qual os estudantes apresentam dificuldades, sendo os resultados por norma fracos. Esta situação reflete-se também na formação inicial. É importante evidenciar que os campos numérico e geométrico não estão tão distantes como pode parecer, sendo desejável estabelecer conexões. Destacamos, neste trabalho, as potencialidades das resoluções visuais, aquelas que incluem o recurso a diferentes representações visuais (e.g. figuras, desenhos, diagramas, gráficos) como parte essencial do processo de chegar à solução (e.g. Presmeg, 2014; Vale et al., 2016).

Este estudo, que faz parte de uma investigação mais alargada sobre as potencialidades das resoluções visuais, resulta de uma experiência de ensino com 14 estudantes numa unidade curricular de Didática da Matemática, onde se implementou uma *gallery walk*. Adotou-se uma abordagem qualitativa, recolhendo dados através de observações, das produções escritas das tarefas e do comentário escrito sobre a experiência realizada. A *gallery walk* utilizada consistiu na resolução das tarefas e construção de um póster; análise das resoluções apresentadas nos diferentes posters e elaboração dos comentários individuais; e discussão coletiva.

Analisar-se-ão, no póster, dois dos problemas trabalhados (Figura 1):

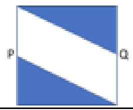
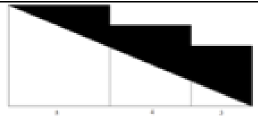
O quadrado junto tem 4 cm² de área e os pontos P e Q são pontos médios de dois lados opostos. Atendendo ás condições da figura, qual será a área da parte sombreada da figura? Apresente mais que uma resolução.	
A figura junta mostra três quadrados adjacentes, cujas as dimensões dos lados são respetivamente 5, 4 e 3 cm, como indicados na figura. Descubra a área da região a negro. Apresente mais que uma resolução.	

Figura 1. Problemas propostos

Não houve dificuldades na resolução destes problemas. No primeiro, 75% dos alunos recorreu a uma abordagem visual, sem usar a fórmula da área do triângulo. Os comentários nos pósteres resumiram-se a: "é uma estratégia simples e de simples compreensão" [na resolução visual] ou "não precisavas de usar raiz" [na resolução não visual]. No segundo, surgiram duas estratégias que envolveram uma resolução mista, abordagem visual complementada com processos analíticos. Contudo, uma das resoluções suscitou muita discussão. Os cálculos estavam corretos, mas o resultado era diferente; os alunos sabiam que não podia ser, mas não conseguiam descobrir porquê. Esta situação foi interessante porque criou a oportunidade de discutir os perigos dos raciocínios baseados apenas na aparência dos desenhos e permitiu analisar a justificação matemática para a impossibilidade de uma das resoluções.

Conclui-se que a resolução destas tarefas permitiu identificar as estratégias utilizadas pelos alunos e constatar que, apesar de continuarem a recorrer a fórmulas e a procedimentos rotinizados, também surgiram resoluções visuais. A estratégia da *gallery walk* permitiu o envolvimento dos alunos nas resoluções dos colegas ("sem medos e represálias") e nas discussões de sala de aula, confirmando as potencialidades desta abordagem para a promoção de discussões produtivas e consequentemente um ensino mais eficaz da matemática (Fosnot & Dolk, 2002).

Referências

Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization. In the report on *Teaching and learning geometry 11-19* (pp. 55-56). London, UK: Royal Society.

Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto, (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving* (pp. 156-167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Vale, I., Barbosa, A. & Pimentel, T., 2016). Tarefas em contextos visuais e a formação de professores. Em A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo e L. Santos (Eds), *Investigação em Educação Matemática – Recursos na Educação Matemática* (pp. 83-86). SPIEM

DESCOBRIR FIGURAS GEOMÉTRICAS NO PRÉ-ESCOLAR

Filipa Balinha
Universidade do Minho
filipa.balinha@gmail.com

Ema Mamede
Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Palavras-chave: Figuras geométricas, educação pré-escolar, matemática.

O documento *Orientações curriculares para a educação pré-escolar* (Silva, Marques, Mata & Rosa, 2016) salienta a importância de desenvolver o sentido espacial das crianças. Van Hiele (1986) afirmou que as crianças devem ter uma variedade de experiências exploratórias, desafiadoras e que envolvam contato com manipulações. Sobre sentido espacial, Frostig, Horne e Miller (1994) distinguem os aspetos mais importantes da perceção visual na aprendizagem das crianças. A coordenação visual motora (coordenar a visão com os movimentos do corpo), perceção figura fundo (distinguir, entre um conjunto de estímulos, um foco de interesse), a constância percetual (reconhecer num objeto propriedades invariáveis), a perceção da posição no espaço (compreender posições espaciais) e a perceção das relações espaciais (perceber a posição dos objetos em relação a si e aos outros). Para os autores, o período normal de desenvolvimento da perceção visual é entre os 3 e os 7 anos. Del Grande (1990) acrescentou a memória visual (recordar objetos que já não vemos) e a discriminação visual (identificar semelhanças e diferenças entre objetos).

O estudo procurou conhecer as ideias das crianças sobre figuras geométricas. Tenta perceber: As crianças identificam algumas figuras geométricas? Como se caracteriza o seu sentido espacial, em relação às figuras geométricas? Que vocabulário específico aprendem?

Adotou-se uma metodologia qualitativa de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 2013; Yin, 2014) para conhecer as ideias de 20 crianças (3 a 4 anos) do pré-escolar sobre figuras geométricas. As crianças resolveram 10 tarefas em 28 sessões relacionadas com quadrados, retângulos, triângulos e círculos. Uma das autoras do póster foi investigadora. As tarefas possibilitavam descobrir, representar e identificar figuras em diferentes posições, a sua posição relativa, copiar figuras do geoplano para o papel ponteado, construir figuras dadas condições e preencher figuras com contornos usando o tangram. As reações das crianças foram gravadas e fotografadas.

As crianças identificaram propriedades (número e medida dos lados), das figuras geométricas ("três bicos" para o triângulo, "quatro bicos" para o quadrado, "mais comprido" para o retângulo, e "rendodinho" para o círculo) e aprenderam vocabulário geométrico (vértice e geoplano). Percebeu-se que tinham adquirido aspetos da perceção visual (Del Grande, 1990; Frostig, Horne & Miller, 1994) como a coordenação visual motora, ao desenharem no papel ponteado. A perceção figura fundo foi abordada no uso do tangram e a memória visual nas atividades com o geoplano. A discriminação visual mostrou estar adquirida ao encontrarem semelhanças e diferenças entre as soluções de cada um no geoplano. Algumas crianças também mostraram ter perceção da posição no espaço, ao descobrirem figuras congruentes em diversas posições. Reconheceram as figuras geométricas apresentadas, independentemente da posição, revelando constância percetual adquirida.

Aspetos como a capacidade de aprender vocabulário geométrico, de desenhar um retângulo com elásticos no geoplano e de reconhecer figuras geométricas pelo seu aspeto e posição confirmam a inclusão de algumas destas crianças no nível I de Van Hiele (1986). Outras destas crianças conseguiam identificar propriedades das figuras geométricas (os lados opostos do retângulo são iguais e três bicos para o triângulo), pelo que parecem podem incluir-se no nível II de Van Hiele (1986).

Assim, o pensamento espacial parece poder ser promovido com tarefas específicas sobre as noções espaciais e figuras geométricas, desde que o trabalho das mesmas seja bem planificado, desafiante para as crianças e se utilizem os materiais adequados.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação qualitativa em educação - Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 14-20.

Frostig, M., Horne, D., & Miller, A. (1994). *Figuras y Formas: Guía para el maestro.* Madrid: Editorial Medica Panamericana.

Silva, I. L., Marques, L., Mata, L. & Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação/DGE.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education.* New York: Academic Press.

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

GRUPO DE DISCUSSÃO 2

Formação de professores em ensino da Geometria

FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM ENSINO DA GEOMETRIA

Margarida Rodrigues
ESELx - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

A geometria ocupa um lugar de grande relevância na educação em geral, sendo, por isso, fundamental proporcionar uma formação de qualidade aos professores neste domínio. De acordo com Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), essa relevância justifica-se pelo facto de a geometria ajudar os alunos a estabelecer conexões com a matemática e por permitir o desenvolvimento de raciocínios visuais bem como a procura de invariantes. Numa perspetiva convergente, Johnston-Wilder e Mason (2005) destacam como aspetos centrais do pensamento geométrico (i) a invariância, (ii) a linguagem e pontos de vista, (iii) o raciocínio, e (iv) a visualização e representação.

Pensar na formação de professores em ensino da geometria, tema que dá corpo ao presente grupo de discussão, implica atender a diferentes aspetos, igualmente importantes, tanto do foro do conhecimento matemático como do didático. Um desses aspetos prende-se com a necessidade de os futuros docentes desenvolverem um conhecimento compreensivo e aprofundado dos conceitos geométricos, e não meramente um conhecimento dos processos matemáticos em que se podem envolver os alunos com que irão trabalhar (Ball, 1990; 1991; Paparistodemou, Potari, & Pitta-Pantazi, 2014). O desenvolvimento desse conhecimento passa necessariamente pelo desenvolvimento do raciocínio geométrico, o qual se encontra associado a três tipos de estruturação, correspondendo a níveis hierárquicos, alcançados em diferentes níveis de escolaridade: (i) estruturação espacial (em que uma forma é percebida através da identificação dos seus componentes e das relações espaciais entre os componentes e a forma global); (ii) estruturação geométrica (em que a estruturação espacial é descrita com recurso aos conceitos formais da geometria); e (iii) estruturação lógico-formal (em que as estruturas geométricas são organizadas num sistema, e os conjuntos de propriedades são organizados logicamente) (Battista, 2008). Assim, embora a estruturação lógico-formal deva ser desenvolvida no âmbito da formação de professores, esta implica o desenvolvimento dos níveis anteriores. Alguns estudos, realizados em Portugal (Serrazina et al., 2014; Tempera, 2010), evidenciam um conhecimento deficitário em conceitos elementares da geometria, por parte de uma grande parte dos estudantes à entrada da Licenciatura em Educação Básica, bem como fragilidades ao nível da justificação. Estes resultados reforçam a importância de trabalhar na formação inicial abordagens que contemplem o desenvolvimento integrado dos três níveis de estruturação propostos por Battista (2008).

A justificação, embora se encontre no cerne da demonstração enquanto argumento transparente usado para validar as afirmações matemáticas, e com a dupla função de convencer e de promover a compreensão (Hanna, 1996), pode ser realizada de modo informal através de processos intuitivos e de métodos visuais e experimentais (Prusak, Hershkowitz, & Schwarz, 2012). O *software* de geometria dinâmica é um recurso que suporta a argumentação em geometria, envolvendo os estudantes, futuros docentes, em estratégias baseadas na inquirição. Facilita a atividade de conjeturar (processo de gerar generalizações acerca de uma classe de fenómenos), já que a opção de arrastamento permite mudar a forma de uma figura, revelando os invariantes que definem os atributos da figura (Koedinger, 1998; NCTM, 2000; Prusak, Hershkowitz, & Schwarz, 2012). A argumentação, enquanto processo de encontrar fundamentação para uma generalização (Koedinger, 1998), pode ser desenvolvida associada ao trabalho com este tipo de *software*, na medida em que após a emergência das conjeturas, os estudantes deverão ser incentivados a procurar justificá-las e prová-las (Prusak, Hershkowitz, & Schwarz, 2012).

De um modo geral, a formação de professores tem um papel importante na promoção de um ensino de Matemática de qualidade (Ponte, 2014). Essa formação integra uma formação matemática adequada e conhecimentos e capacidades no domínio da didática específica. Além disso, Ponte (2014) destaca a importância das qualidades humanas e profissionais e do relacionamento com os alunos. O NCTM (2017) reforça a componente profissional do professor de Matemática, nomeadamente no que respeita à procura de formação contínua que contribua para "que o seu conhecimento matemático para ensinar, o seu conhecimento da pedagogia da matemática e o seu conhecimento dos alunos enquanto aprendizes de matemática, aumentem e se aperfeiçoem" (p. 101).

Assim, um conhecimento aprofundado da geometria permite aos professores apoiar os alunos no desenvolvimento das suas aprendizagens. Mas não é suficiente. Segundo Serrazina (2012), não basta pensar no que deve ser ensinado, sendo necessário pensar também como o ensinar. Deste modo, importa que o conhecimento da geometria seja combinado com a compreensão de como os alunos aprendem geometria, e com o conhecimento didático de quais os métodos e recursos que potenciam o desenvolvimento das ideias matemáticas dos alunos (Paparistodemou, Potari, & Pitta-Pantazi, 2014). De acordo com Schoenfeld e Kilpatrick (2008), desenvolver nos professores a proficiência para ensinar matemática envolve diversas dimensões, designadamente: (i) conhecer a matemática escolar em profundidade e abrangência; (ii) conhecer os alunos como pensantes; (iii) conhecer os alunos como aprendentes; (iv) criar e gerir os ambientes de aprendizagem; (v) desenvolver normas de sala de aula e apoiar o discurso como parte de um ensino com compreensão; (vi) construir relações que suportem a aprendizagem; e (vii) refletir acerca da sua própria prática.

O Grupo de Discussão *Formação de professores em ensino da geometria* é composto por um total de cinco comunicações, três orais e duas em poster. Dado o reduzido número de comunicações e a diversidade de temáticas apresentadas, não nos foi possível estabelecer uma organização por temas. Serão discutidas diversas problemáticas associadas a temas como o raciocínio matemático e a comunicação escrita de futuros docentes, a avaliação reguladora do ensino, a implementação de tarefas exploratórias dentro e fora da sala de aula, envolvendo, nalguns casos, o recurso a tecnologia. Embora estas problemáticas se caracterizem pela sua transversalidade a todos os domínios da matemática, elas serão aqui discutidas tendo como referentes as especificidades do ensino da geometria, quer tendo como foco os futuros docentes em formação inicial quer os docentes em exercício.

O grupo de discussão reúne estudos envolvendo a formação inicial (três estudos) e a formação contínua de professores (dois estudos). Os trabalhos referentes à formação inicial concretizam-se no 1.º ciclo de estudos, no âmbito da Licenciatura em Educação Básica, e no 2.º ciclo de estudos correspondente ao mestrado que habilita para o ensino no 1.º ciclo do ensino básico e nas disciplinas de Matemática e Ciência Naturais do 2.º ciclo do ensino básico. Dos estudos na formação contínua de professores, um decorre em Portugal no 2.º ciclo do ensino básico e outro tem lugar no Brasil nos anos finais do ensino fundamental.

Um conjunto de comunicações deste grupo de discussão é dedicado à formação inicial de docentes dos primeiros anos. O estudo de Lina Brunheira e João Pedro da Ponte, *A justificação de generalizações em geometria na formação inicial de professores*, decorre no âmbito de uma experiência de formação realizada no 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica. Tem como objetivo compreender a forma como as estudantes justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas, num contexto de ensino exploratório. Os resultados evidenciam que as formandas, inicialmente, apresentam argumentos inadequados, revelando dificuldades sobre o que significa justificar e sobre o processo de justificar generalizações. Na segunda tarefa, os argumentos passaram a apoiar-se mais na estruturação correta das figuras geométricas. Os autores apontam que as diferenças que se evidenciam entre as duas tarefas apresentadas podem estar associadas à especificidade das tarefas, mas podem também corresponder a uma conceção mais correta do que significa justificar. Verifica-se que o processo de interação na sala de aula e a natureza das tarefas propostas nessa experiência de formação potenciam a melhoria das justificações que apresentam. Assim, apesar dos resultados se restringirem a duas tarefas, no início de um percurso, estes parecem apontar para a relevância da ênfase na compreensão das relações, tal como apontam outros autores. Assim, destacam a importância do ambiente de interação e do desenho das tarefas para a produção e confronto de justificações e representações.

Uma outra comunicação foca-se também na formação inicial de professores e analisa as produções escritas dos estudantes de uma turma da Licenciatura em Educação Básica, no âmbito do trabalho desenvolvido na Unidade Curricular de Geometria. Esta comunicação, *A escrita matemática na resolução de um problema de geometria por alunos de Licenciatura em Educação Básica*, proposta por Helena Martinho e Helena Rocha, caracteriza a comunicação escrita na resolução de um problema de medida geométrica e discute de que forma essa comunicação escrita contribui para a compreensão do conhecimento dos estudantes por parte do professor. As autoras assumem a escrita matemática como sendo um meio poderoso de aprendizagem e de descoberta, na linha do defendido por Sabrio, Sabrio, e Tintera (1993). A análise das produções escritas dos estudantes, futuros docentes, permitiu discutir o papel das intuições nos raciocínios dos alunos e identificar dificuldades na fundamentação das respostas, a preferência pela representação verbal bem como a desvalorização pelas abordagens prévias não conducentes à solução do problema. Ainda neste momento, será dedicado um tempo alargado final para realizar uma discussão global e uma síntese decorrente da discussão realizada no grupo, em torno das comunicações apresentadas.

Ainda no contexto de formação inicial de professores, o estudo de Teresa Neto e Lúcia Pombo, intitulado *Espaços indoor e outdoor no ensino da geometria: uma experiência na prática pedagógica supervisionada com alunos do 1.º ciclo do ensino básico*, é desenvolvido na unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada do curso de Mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do ensino básico. Este estudo tem como objetivo descrever um processo de formação inicial que envolve a realização de tarefas em sala de aula e em contexto *outdoor* no âmbito do Projeto EduPARK. Os resultados mostram que as professoras estagiárias identificam diferentes estratégias de resolução e reconhecem a importância atribuída aos contextos *outdoor*. Por seu lado, nos alunos, verifica-se que as atividades *outdoor* promovem motivação e interesse na sua concretização.

Duas comunicações deste grupo de discussão referem-se à formação de professores em exercício, desenvolvida em contextos colaborativos. Elvira Santos e Leonor Santos, em *Práticas avaliativas reguladoras, tecnologia e regulação do ensino*, apresentam e discutem um modelo de aprendizagem e regulação do ensino, através da análise detalhada das práticas profissionais de um docente do 2.º Ciclo do Ensino Básico, envolvendo uma tarefa de medida geométrica, com recurso ao *Geogebra*. Os resultados do estudo apresentado no artigo evidenciam a importância da planificação de uma estratégia de avaliação reguladora na regulação do ensino, ao permitir ao professor interpretar o impacto das estratégias durante e após as aulas e selecionar outras estratégias que apoiem o trabalho dos alunos. Os gestos profissionais do docente, definidos por Jorro (1998) como os caracterizados pela intencionalidade pedagógica e que surgem da reflexão em ação, são marcadamente dirigidos para regular normas, orientar o raciocínio matemático dos alunos e orientar a atividade de manipulação de conceitos. O estudo de Rivaldo Sousa e Flávia Santana, *A implementação de uma tarefa exploratória envolvendo relações métricas no triângulo retângulo*, tem como objetivo analisar aspetos relacionados com a concretização em aula de uma tarefa exploratória envolvendo relações métricas no triângulo retângulo por um professor de matemática do ensino fundamental, no Brasil. A tarefa foi elaborada em colaboração com outros professores que faziam parte do Grupo Observatório de Educação Matemática, cujo objetivo era desenvolver materiais curriculares educativos sobre tópicos de matemática para os anos finais do ensino fundamental. Os resultados apontam para a existência de mudanças na prática e que a reflexão sobre o trabalho desenvolvido em sala de aula contribuiu para o desenvolvimento profissional do professor que decorreu da integração no grupo.

Complementarmente às ideias apresentadas nas comunicações, propomos um conjunto de questões associadas à temática do grupo, a formação de professores em ensino da geometria, tais como: (Q1) Como articular, na formação inicial de professores, o desenvolvimento do conhecimento matemático, em geometria, com o conhecimento didático? (Q2) Como integrar, na formação inicial de professores, os três níveis de estruturação do raciocínio geométrico? (Q3) Como desenvolver, na formação de professores, processos mais sofisticados de justificação em geometria? (Q4) Como desenvolver, na formação de professores, a visão da natureza da matemática, na qual se integra a geometria, com os seus processos específicos de validação do conhecimento? (Q5) Como desenvolver, na formação de professores, a integração de processos transversais, como a comunicação, o raciocínio, a avaliação, a utilização das tecnologias, que potenciem um ensino de geometria com maior qualidade e garante das aprendizagens dos alunos? (Q6) Como desenvolver, na formação de professores, processos reflexivos acerca da prática e de que modo esses processos contribuem para um melhor conhecimento dos alunos? (Q7) Que características são essenciais num contexto de formação que visa o desenvolvimento profissional em torno da promoção de práticas de ensino e de avaliação eficazes no ensino-aprendizagem da geometria?

(Q8) Será que se verifica um isomorfismo de práticas na formação inicial de professores e de que modo é equacionado este aspeto na lecionação das Unidades Curriculares relacionadas com geometria?

Referências

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.

Ball, D. L. (1991). Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about subject matter? In M. M. Kennedy (Ed.), *Teaching academic subjects to diverse learners* (pp. 63-84). New York: Teachers' College Press.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics*: *Cases and Perspectives* (Vol. 2, pp. 131-156). NCTM & IAP.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: Universitat de Valencia.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (2005). *Developing thinking in geometry.* London: The Open University in association with Sage.

Jorro, A. (1998). L'inscription des gestes professionnels dans l'action. *Revue En Question, 19,* 1-19.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and argumentation in High-School geometry students. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 319-347). Mahwah, NJ: Erlbaum.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2017). Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática. Lisboa: APM. (Trabalho original de 2014, publicado em inglês)

Paparistodemou, E., Potari, D., & Pitta-Pantazi, D. (2014). Prospective teachers' attention on geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 1-18.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 343-358). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 19-40.

Sabrio, D., Sabrio, S., & Tintera, G. (1993). Writing to learn and learning to write mathematics: An experimente. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 3*(4), 419-429.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (Vol. 2, pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Serrazina, L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação, 6*(1), 266-283. Acedido de http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/355/162.

Serrazina, L., Barbosa, A., Caseiro, A., Ribeiro, A., Monteiro, C., Loureiro, C., Fernandes, F., Veloso, G., Vale, I., Fonseca, L., Menezes, L., Rodrigues, M., Almeida, P., Pimentel, T., & Tempera, T. (2014). O conhecimento matemático dos estudantes no início da Licenciatura em Educação Básica: Um projeto envolvendo três Escolas Superiores de Educação. In G. Portugal, A. I. Andrade, C. Tomaz, F. Martins, J. A. Costa, M. R. Migueis, R. Neves, & R. M. Vieira (Orgs.), *Formação inicial de professores e educadores: Experiências em contexto português* (pp. 115-131). Aveiro: UA Editora.

Tempera, T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa). Consultada em http://hdl.handle.net/10400.21/2717

Comunicações - GD2

A JUSTIFICAÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Lina Brunheira
ESELx -Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Esta comunicação enquadra-se numa experiência de formação com futuras professoras e educadoras do 2.º ano de uma LEB, em que estas produziram justificações de generalizações num contexto de ensino exploratório. O estudo tem como objetivo compreender a forma como justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo e das produções escritas das formandas, focando-se nos argumentos usados para justificar generalizações sobre famílias de figuras. Na análise, mereceu especial atenção o tipo de argumentos, o seu grau de generalidade e a sua validade. Os resultados mostram que as formandas revelam dificuldades sobre o que significa justificar e sobre o processo de justificar generalizações, apresentando inicialmente argumentos inadequados. A associação da justificação ao *investigar o porquê* da generalização, bem como a natureza da tarefa e a interação na sala de aula, potenciaram a melhoria das justificações. Destaca-se a necessidade de enfatizar a construção de um discurso argumentativo que evidencie que a generalização se aplica a todo o domínio considerado.

Palavras-chave: geometria, raciocínio, justificação, generalização, formação inicial.

Introdução

Nas últimas duas décadas tem havido um interesse crescente no raciocínio matemático que, como afirmam Yackel e Hanna (2003), pode ser observado em documentos de orientação curricular como a edição de 2000 dos *Princípios e normas da matemática escolar*, onde se elege o raciocínio e a demonstração como uma das normas de processo que devem ser parte integrante da experiência matemática a iniciar desde o pré-escolar (NCTM, 2007). Em Portugal, também o raciocínio matemático mereceu um especial destaque no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), como uma capacidade transversal que “envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas" (p. 8), devendo merecer uma grande atenção em todos os ciclos de ensino.

Também a investigação em educação matemática tem acompanhado o interesse sobre o raciocínio, especialmente no que respeita à argumentação e demonstração (Hanna, 2000; Stylianides, 2007). Do ponto de vista dos temas matemáticos e níveis de escolaridade, como referem Stylianides, Bieda e Morselli (2016), a geometria continua a ser o campo mais profícuo para a investigação, particularmente no ensino secundário. Entre as linhas de investigação identificadas na última década surgiram estudos centrados na sala de aula e que procuram encontrar formas de apoiar os alunos na argumentação e demonstração. Estes autores consideram que esta área beneficiaria com investigação que desenhasse ferramentas práticas, para utilização em sala de aula, baseadas em ideias teóricas. Já na área da formação de professores, consideram que o foco da investigação mantém a incidência na natureza do conhecimento sobre argumentação e prova sugerindo que

> é necessária mais investigação sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático dos professores sobre argumentação e prova, com o desenho de intervenções que tenham explicitamente em conta a ideia de que um ensino eficaz de matemática requer que os professores tenham não apenas um bom conhecimento de matemática, mas que sejam também capazes de usar flexivelmente esse conhecimento para apoiar a aprendizagem dos seus alunos. (Stylianides, Bieda & Morselli, 2016, p. 342)

O trabalho aqui apresentado surge justamente da necessidade sentida pela primeira autora, enquanto professora, em apoiar os futuros professores no seu raciocínio matemático, particularmente no que respeita ao processo de justificação em geometria. O seu objetivo é compreender a forma como justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas, pelo que analisamos as seguintes questões: que tipo de argumentos são usados pelas participantes para justificar generalizações sobre famílias de figuras geométricas? Qual o seu grau de generalidade e a sua validade?

Raciocínio matemático e justificação

Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que o raciocínio matemático é um processo evolutivo que inclui conjeturar, generalizar, *investigar porquê*, justificar e refutar. No que respeita à generalização, existem dois tipos de atividades: identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada. *Investigar porquê* envolve a identificação de relações que permitem perceber por que uma afirmação é verdadeira ou falsa. Os autores entendem uma justificação válida como uma sequência lógica de afirmações, cada uma apoiando-se em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão. Este tipo de justificação deve conter linguagem geral que demonstre que se aplica a mais do que um caso particular, sem prejuízo de se poderem usar exemplos, mas que devem constituir exemplos genéricos. A sua definição de justificação inclui modos de justificação como a redução ao absurdo, em que uma afirmação fica validada pelo facto de a sua negação ser impossível, que é muitas vezes a única razão que permite compreender que a afirmação é verdadeira, mas, em termos gerais, os autores consideram que no âmbito do ensino *investigar porquê* está intrinsecamente associado ao processo de justificar, na medida que "os alunos constroem justificações para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (p. 35).

Esta visão da justificação inclui os papéis de validação e de compreensão de um resultado e uma dimensão comunicativa que busca a legitimidade da atividade matemática – aspetos que associamos à demonstração. Na verdade, os conceitos de justificação e demonstração são muito próximos, o que deriva de a demonstração assumir vários significados, quer no âmbito da investigação em educação matemática (Stylianides et al., 2016), quer na matemática, onde existem muitas opiniões conflituosas sobre o seu papel e o que a torna aceitável (Hanna, 2000; Harel & Sowder, 2007). Tradicionalmente, o termo demonstração aparece associado a um certo grau de formalidade e de complexidade próprios do ensino secundário ou superior, mas a valorização atual destas ideias desde o pré-escolar trouxe um significado mais abrangente, embora pouco claro, ao termo demonstração. Com o propósito de conceptualizar a demonstração tendo em conta os primeiros anos de escolaridade, Stylianides (2007) apresenta uma definição fundada na literatura sobre filosofia da matemática e educação matemática:

> Uma demonstração (*proof*) é um argumento matemático, uma sequência de afirmações interligadas, a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Usa afirmações aceites na comunidade da sala de aula (um conjunto de afirmações aceites) que são verdadeiras e disponíveis sem justificação adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicada usando formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula. (p. 291)

Neste estudo utilizamos o termo "justificação" com o significado aqui atribuído por Stylianides para demonstração [1], de forma incluir formas de argumentação com diferentes graus de formalidade e referentes a vários níveis de escolaridade. Doravante será esse o termo utilizado.

Formação de professores e o processo de justificar

Lo e McCrory (2009) defendem que os futuros professores dos primeiros anos[2] devem aprender a justificar e sobre justificação a três níveis: a) enquanto uma ferramenta para mostrar ou verificar a verdade ou falsidade de uma afirmação; b) enquanto objeto matemático que se regula por algumas regras e padrões, tais como tornar os passos explícitos, saber quais as premissas em que se pode basear e os princípios referidos por Stylianides (2007); e c) enquanto fator de desenvolvimento dos alunos, o que depende do seu nível de ensino, o tipo de argumentos que são capazes de formular, as representações que podem usar… Estes três níveis correspondem ao que as autoras indicam como *saber justificar*, *compreender a natureza da justificação* e *adaptar a justificação ao nível de desenvolvimento* dos alunos, em que os dois primeiros estão associados ao conhecimento matemático e o terceiro ao didático.

[1] No contexto português, o termo "demonstração" está associado a uma conceção mais formal, pelo que optamos pelo termo "justificação" que se aproxima mais do conceito de Stylianides (2007).
[2] Referidos como K-6, que se inicia no jardim de infância e termina no 6.º ano.

Contudo, Stylianides e Stylianides (2009) referem a existência de vários estudos que mostram que os futuros professores que lecionam os primeiros anos têm predominantemente ideias erradas sobre a justificação, particularmente sobre o papel dos argumentos empíricos, em alguns casos mesmo depois de terem tido formação sobre justificação. Também Lin et al. (2012b) referem que para muitos professores deste nível a sua convicção num resultado assenta mais na autoridade de entidades externas (como manuais ou colegas que reconhecem como mais competentes) do que no seu raciocínio, o que revela fraca autoconfiança na sua capacidade. No que respeita a estudos que procuram desenvolver o conhecimento dos professores e futuros professores nesta área, referem que são em número reduzido e resumem as orientações dos estudos encontrados: resolver tarefas de justificação individualmente ou em pequenos grupos; realizar discussões coletivas; partilhar e criticar as justificações uns dos outros; promover desafios cognitivos e o estabelecimento de convicção nos resultados.

Justificar generalizações em geometria: a construção de um modelo de análise

A construção de um modelo de análise sobre a justificação de generalizações em geometria afigura-se-nos como um desafio que deve responder a algumas questões. Por um lado, deve captar em que medida a justificação cumpre o seu papel na sala de aula – convencer-se a si próprio e aos outros porque é verdadeira uma afirmação particular. Por outro lado, consideramos relevante atender à sua validade, verificando se corresponde a um argumento ou conjunto de argumentos lógicos baseados em ideias previamente compreendidas, e se a linguagem e o raciocínio apoiam a relação geral, mostrando que se aplica em todos os exemplos do domínio considerado.

Atendendo a que o estudo incide sobre a justificação de generalizações para famílias de objetos geométricos, consideramos necessário construir um quadro de análise que tenha em conta a especificidade destes objetos e a natureza da atividade proposta, que se insere no âmbito do raciocínio geométrico. Nesse sentido, convocamos as ideias de Battista (2009) que afirma que operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los) requer que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo. Para isso, há duas formas fundamentais de abstração em geometria – a *estruturação espacial* e a construção de *modelos mentais*:

> A estruturação espacial é o ato mental de organizar um objeto ou um conjunto de objetos através da identificação das suas componentes e do estabelecimento de relações entre elas. Os modelos mentais são versões não verbais, versões mentais das situações que capturam a estrutura das situações que representam. (pp. 94-95).

Para o autor, o raciocínio envolve a ativação destes modelos mentais para que seja possível imaginar diferentes cenários e soluções para os problemas.

Desta forma, consideramos que a construção de justificações em geometria que permitam compreender a razão pela qual uma generalização é verdadeira é um processo que implica necessariamente a estruturação espacial dos objetos. Mais ainda, uma vez que uma justificação implica a explicitação de argumentos, é necessário ir além da dimensão mental a que se refere a estruturação espacial, entrando assim na estruturação geométrica que "descreve a estruturação espacial através de conceitos formais" (Battista, 2007, p. 861). Isto significa que, ao estruturar geometricamente um objeto ou situação espacial, um indivíduo usa conceitos tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformação geométrica ou sistema de coordenadas para conceptualizar e operar sobre a situação. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, pois sem a construção de modelos mentais que capturem a estrutura da situação, a estruturação geométrica não tem significado para o indivíduo.

Assim, o modelo de análise das justificações sobre generalizações foca-se, em primeiro lugar, na natureza dos argumentos produzidos no que diz respeito à incidência na estruturação geométrica dos objetos. Interessa-nos compreender em que medida as formandas investigam a razão pela qual as generalizações são válidas recorrendo à forma como os objetos estão estruturados, ou seja, de que forma se compõem e como se relacionam as suas componentes. Em segundo lugar, procuramos compreender se o raciocínio apoia a relação geral mostrando que se aplica em todos os exemplos desse domínio (Lannin et al., 2011), pelo que estabelecemos indicadores que, por um lado, evidenciam a natureza dos argumentos usados e, por outro, identificam o grau de generalização da justificação. Adotamos a aceção de “exemplo genérico” de Balacheff (1988) que

> envolve tornar explícitas as razões da validade de uma afirmação através de operações ou transformações de um objeto que não é apresentado pelo seu valor próprio, mas como um representante característico da sua classe. Esta descrição envolve as propriedades e estruturas características da classe. (p. 219)

Quadro 1. Quadro de análise das justificações de generalizações

<table>
<tr><th>Natureza dos argumentos</th><th>Indicadores</th><th>Validade[3] da justificação</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Com base na correta estruturação geométrica da família de figuras</td><td rowspan="2">Mobiliza as propriedades relevantes e já estabelecidas sobre a família de figuras, usando uma linguagem genérica sobre a família</td><td>Completa ou quase completa</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mobiliza as propriedades relevantes e já estabelecidas sobre a família de figuras a partir de um exemplo genérico</td><td>Completa ou quase completa</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td></tr>
<tr><td>Mobiliza as propriedades relevantes e já estabelecidas sobre uma ou mais figuras da família sem generalizar</td><td>Incompleta</td></tr>
<tr><td>Com base numa estruturação geométrica incompleta ou errada da família de figuras</td><td>Não reconhece propriedades relevantes ou acrescenta propriedades inexistentes ou não estabelecidas</td><td>Incorreta</td></tr>
</table>

[3] Neste trabalho, consideramos que uma justificação completa ou quase completa é válida e uma justificação incompleta não é válida, embora contenha argumentos legítimos.

Sem recurso à estruturação geométrica da família de figuras	Mobiliza relações numéricas sem relacionar com a estruturação das figuras	Incompleta ou incorreta
	Recorre a uma fonte externa de validação (por exemplo, o GeoGebra, um colega ou um manual).	Incorreta

Metodologia de investigação

Este estudo tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores e educadores, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação, partindo da compreensão que construímos sobre a forma como desenvolvem o seu raciocínio geométrico. A investigação foca-se na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino, pelo que optámos pela metodologia de investigação baseada em *design*, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003) em que a professora (a primeira autora do artigo) tem também o papel de investigadora. Esta modalidade é referida por Stylianides et al. (2016) como sendo uma “abordagem promissora na resposta às necessidades de desenvolvimento de formas eficazes para abordar as dificuldades de alunos e professores relativamente à argumentação e prova” (p. 344).

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo do estudo, no ano letivo de 2014/15, envolvendo uma turma de 25 formandas que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica). As tarefas foram realizadas em grupos de 4/5 elementos, mas cada participante realizou um registo individual que, em muitos casos, refletiu a discussão no grupo, mas também particularidades do raciocínio da sua autora. A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas e foi ainda realizada a análise documental das produções escritas, todas elaboradas na sala de aula. A análise de dados é feita a partir do quadro apresentado no ponto anterior.

Neste artigo discutimos a justificação de generalizações a partir de duas tarefas, uma sobre a congruência dos ângulos verticalmente opostos e outra sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono. As duas tarefas foram antecedidas por outra em que, com recurso ao GeoGebra, as formandas conjeturaram sobre as relações envolvidas nas tarefas. Deste modo, estas tarefas correspondem a *tarefas de transição entre conjetura e justificação* de acordo com a classificação de Lin et al. (2012a), ou seja, tarefas em que os alunos são convidados a justificar conjeturas que os próprios estabeleceram.

Em ambas as tarefas estão envolvidas famílias de figuras: na primeira, a figura com os ângulos verticalmente opostos deve ser entendida como representante de um número infinito de casos, uma vez que a amplitude dos ângulos exibidos é irrelevante, podendo servir apenas como exemplo genérico; na segunda, o conceito de família de figuras surge duplamente – os hexágonos apresentados são tanto representantes de uma infinidade de hexágonos como representantes de um qualquer polígono de *n* lados.

Resultados e discussão

Tarefa 1 – Ângulos verticalmente opostos

Anteriormente descobriste que dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude. Encontra uma justificação que explique a razão pela qual essa relação é sempre verdadeira.

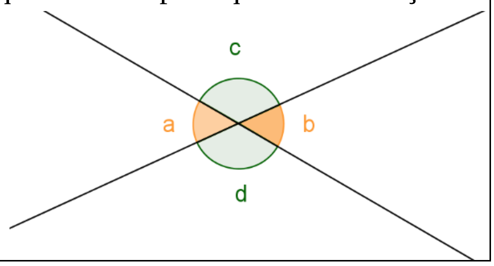


Figura 1. Tarefa para a justificação da congruência de ângulos verticalmente opostos

A justificação da congruência dos ângulos verticalmente opostos não foi a primeira tarefa de justificação envolvendo ângulos, mas foi a primeira em que não foi fornecido qualquer valor, pelo que a reação das formandas foi muito diferente das anteriores. Surgiram apenas duas resoluções escritas da tarefa (Figuras 2 e 3):

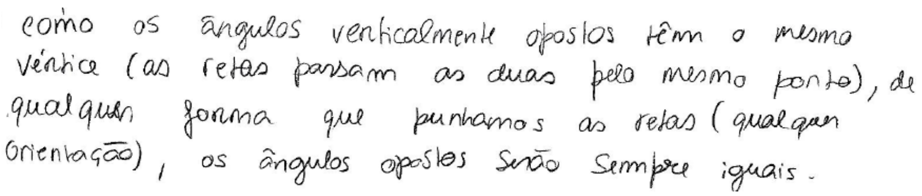

como os ângulos verticalmente opostos têm o mesmo vértice (as retas passam as duas pelo mesmo ponto), de qualquer forma que punhamos as retas (qualquer orientação), os ângulos opostos serão sempre iguais.

Figura 2. Resposta de Helena à tarefa 1

A resposta de Helena faz referência a uma propriedade dos ângulos verticalmente opostos, mas essencialmente a sua justificação não recorre à estruturação geométrica pois, ao afirmar "de qualquer forma que púnhamos as retas", a formanda está a recorrer à sua experiência anterior com o GeoGebra em que manipulou os lados dos ângulos verticalmente opostos e estes mantiveram a relação de igualdade. Desta forma, a sua justificação recorre implicitamente a uma fonte externa – o GeoGebra – para validar a afirmação, pelo que a justificação é incorreta. Embora baseada em experiência empírica, a utilização do *software* assume também o caráter de autoridade à qual a formanda atribui confiança nos resultados.

A resposta de Teresa (Figura 3) reproduz por escrito o que muitas formandas exprimiram em intervenções orais:

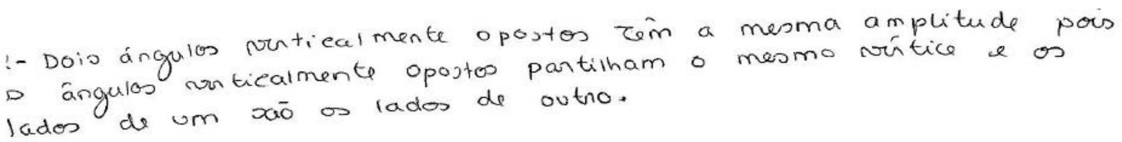

1- Dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude pois os ângulos verticalmente opostos partilham o mesmo vértice e os lados de um são os lados de outro.

Figura 3. Resposta de Teresa à tarefa 1

Esta resposta não é uma justificação válida, mas sim uma caracterização de ângulos verticalmente opostos que mais se assemelha a uma definição. De acordo com o quadro de análise, os argumentos apresentados por Teresa baseiam-se numa estruturação geométrica incompleta pois não mobiliza uma propriedade fundamental para justificar corretamente – os pares de ângulos adjacentes são também suplementares – o que conduz a uma justificação incorreta.

Esta dificuldade foi sentida em vários grupos, como mostra o seguinte diálogo:

> *Marina:* Têm de ser iguais porque têm o vértice em comum e os lados de um são os lados do outro.
> *Profª:* Mas o que vocês me estão a dizer é quase a definição de ângulos verticalmente opostos. Essa afirmação não justifica que eles tenham de ser iguais.
> *Marina:* Então como é que vamos justificar?

Na tentativa de ajudar o grupo, a professora sugere a introdução de um valor:

> *Profª:* Imaginem que o *a* é igual a 30º. Procurem encontrar os valores dos outros ângulos sem usarem a propriedade.
> *Marina: Que propriedade?*
> *Profª:* A que querem justificar. Que os ângulos verticalmente opostos são congruentes. Encontrem os outros valores a partir de outras relações.
> *Marina:* Ah! Então… *c* é 150… porque com o *a* dá 180 graus. São… suplementares.
> *Profª: OK…*
> *Marina:* Depois o *b* é 30 porque é verticalmente oposto ao *a*.
> *Profª:* Atenção! Combinámos que não podemos usar essa propriedade. Percebes porquê? Não podes justificar que uma propriedade é verdadeira se estiveres a usá-la no teu raciocínio. É uma espécie de pescadinha de rabo na boca!
> *Marina:* Está bem… Ah, *b* é 30 porque é suplementar de *c* que é 150.
> *Profª:* OK. Como veem chegaram aos valores 30 e 150, portanto à conclusão que eles são iguais sem usarem a propriedade. Agora, procurem usar esse raciocínio sem concretizar para um valor particular, como fizeram aqui.

Neste diálogo, Marina revela algumas dificuldades. Por um lado, não distingue a caracterização dos ângulos verticalmente opostos da justificação da sua congruência. Este problema pode ser particularmente sentido devido à forte perceção que temos de que os ângulos têm mesmo de ser congruentes pela forma como estão construídos. Por outro lado, a versão simplificada do problema usando um valor concreto mostra também que Marina não reconhece que não pode usar a propriedade que está a procurar justificar – outro problema relativo à conceção do que é uma justificação. Finalmente, consegue justificar que os valores de *a* e *b* são os mesmos usando apenas o dado de que *a* e *c* são suplementares. Esta estratégia foi seguida em vários grupos que também conseguiram concluir a relação usando valores concretos. Contudo, nenhum grupo escreveu uma resposta para a justificação do caso geral. Este episódio evidencia a dificuldade em transitar de um raciocínio que incide num caso particular para um raciocínio geral para o domínio considerado.

O entendimento do que significa justificar foi abordado pela professora na discussão coletiva da tarefa:

> *Profª: …* Portanto, é preciso perceber a diferença entre caracterizar algo e justificar uma propriedade. Por exemplo, vocês sabem porque é que a soma dos ângulos internos de um triângulo dá 180º?

> *Jacinta:* Não, mas sabemos que é assim!
> *Profª:* Pois. Vocês induziram essa propriedade porquê? Porque viram muitos casos em que isso acontecia! [aludindo à investigação com o GeoGebra]
> *Lúcia:* Então mas se nós estivermos a construir um ângulo de 90º e depois outro de 90º, depois já não conseguimos fazer um triângulo!
> *Profª:* Certo, é verdade, mas isso não obriga a que a soma dos ângulos internos seja 180º, estás a ver?…

De seguida, a professora usa um triângulo em papel para justificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, através de dobragens (Figura 4) e propriedades já estabelecidas.

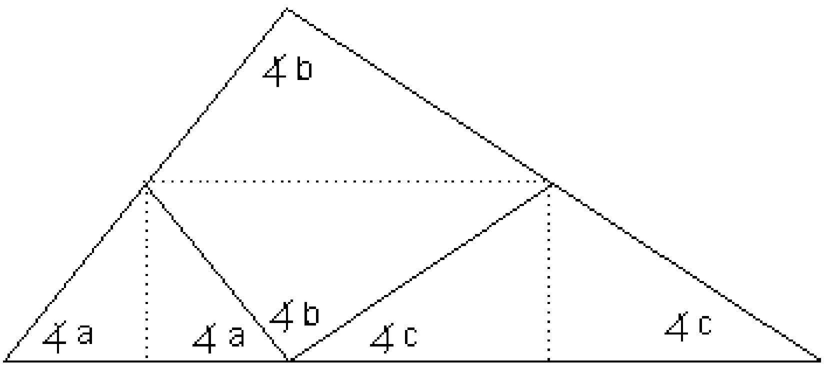


Figura 4. Modelo da representação usada para justificar a soma dos ângulos internos de um triângulo

Tarefa 2 – Soma as amplitudes dos ângulos internos de um polígono.

Na tarefa “Relações entre ângulos” encontraste uma generalização para a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de *n* lados. Vamos procurar justificá-la. Para isso, observa as três figuras seguintes. Todas elas partem do mesmo hexágono, no qual se iniciou uma estratégia possível para chegar a justificação procurada. Usa uma das figuras e completa a justificação recorrendo ainda a outras relações que já tenhas estabelecido.

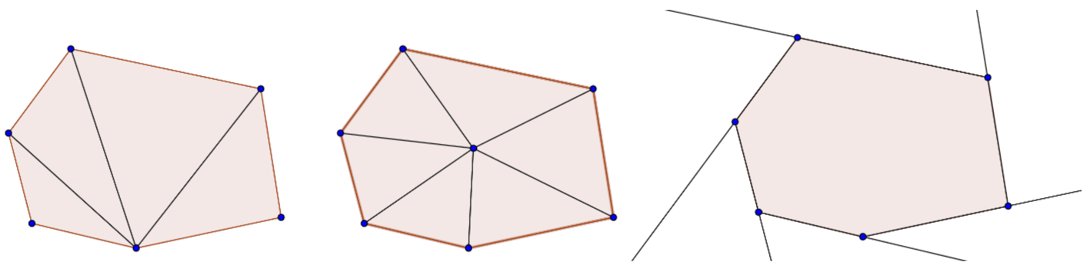


Figura 5. Tarefa para justificação da soma de ângulos internos de um polígono

A tarefa 2 parte também do trabalho realizado na semana anterior em que, recorrendo ao GeoGebra, a turma estudou a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono e formulou três generalizações (a última das quais reproduzimos na figura 6):

A. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Sempre que se acrescenta um lado, acrescenta-se 180º à soma dos ângulos internos. (1ª abordagem)

360+180 (n-4) , n>4 e n = nº de lados de um polígono (2ª abordagem)

B. Soma dos ângulos internos = 180 ×(nº de lados – 2). Ex: pentágono 180 × (5-2) = 180 × 3 = 540

C.

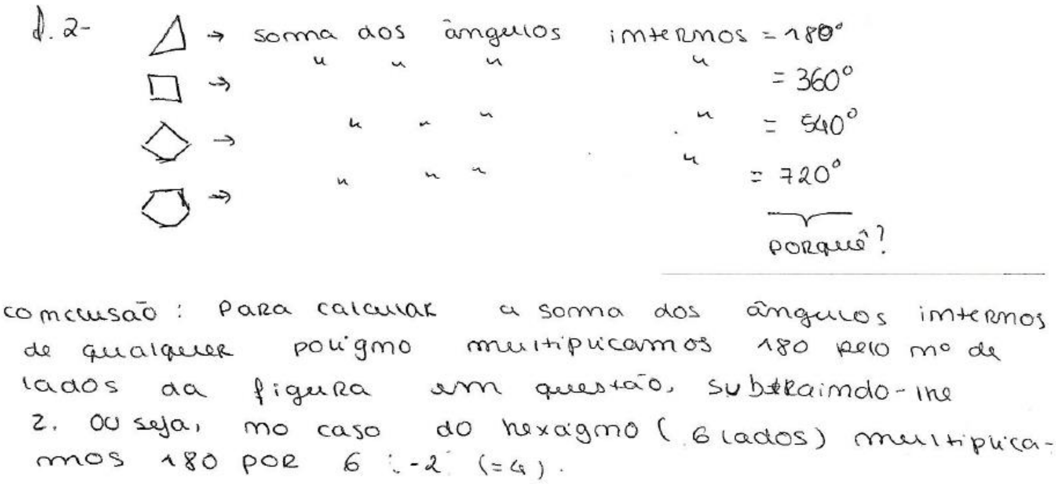


Figura 6. Generalização de Teresa sobre a soma das amplitudes de ângulos internos de um polígono

A fase inicial de trabalho na tarefa 2 não foi fácil. Tal como na tarefa 1, nas figuras não constam quaisquer valores e algumas formandas pensaram que para chegarem à soma dos ângulos internos do polígono precisariam do valor de cada ângulo. Uma das formandas chegou a perguntar se não poderiam usar o valor 90 para um ângulo interno que parecia mesmo ser reto. A professora frisou então que deveriam prosseguir as estratégias iniciadas e que, para saber a soma, não precisamos de conhecer cada parcela. Os grupos progressivamente foram assim avançando na atividade pretendida.

De seguida, apresentamos resoluções que ilustram o trabalho desenvolvido pelos grupos.

> *O primeiro hexágono está dividido em 4 triângulos. Todos os vértices de cada triângulo cobrem todos os ângulos internos do polígono. Se soubermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, basta multiplicarmos 180 por 4 (4 triângulos) e conseguimos obter a amplitude de todo o polígono. A expressão que generaliza é (n-2)×180.*
>
> *Se um polígono tiver 10 lados, é possível desenhar 8 triângulos; se tiver 6 lados, desenhamos 4 triângulos. Se tiver n lados, desenhamos n-2 triângulos.*

Figura 7. Resposta de Célia a partir da primeira figura

A resposta de Célia parte da estratégia sugerida pela primeira figura. Baseia-se na correta estruturação geométrica da família de figuras pois identifica duas propriedades relevantes – a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a possibilidade de decompor o polígono em *n-2* triângulos cujos ângulos compõem os ângulos do polígono original. Célia usa o hexágono e ainda o decágono com a clara intenção de os tratar como exemplos genéricos, pois explicita propriedades que todos os elementos da classe possuem. Desta forma, podemos considerar que a sua justificação é quase completa[4].

Todos os grupos usaram a primeira figura para justificarem a generalização, mas a maioria resolveu seguir também as outras estratégias. A resposta seguinte (Figura 8) pertence a Anita e é representativa do seu grupo. Note-se, porém, que a utilização da terceira figura surge a partir da discussão no seio do grupo onde Teresa explica a sua ideia às colegas:

> *Teresa:* Estes todos dão 180º [os ângulos formados por cada ângulo interno juntamente com o externo]. Então 6×180. Mas os externos não queremos, estão a mais. Mas os externos todos juntos dão 360! Portanto, vamos ao 6×180 e tiramos os 360!

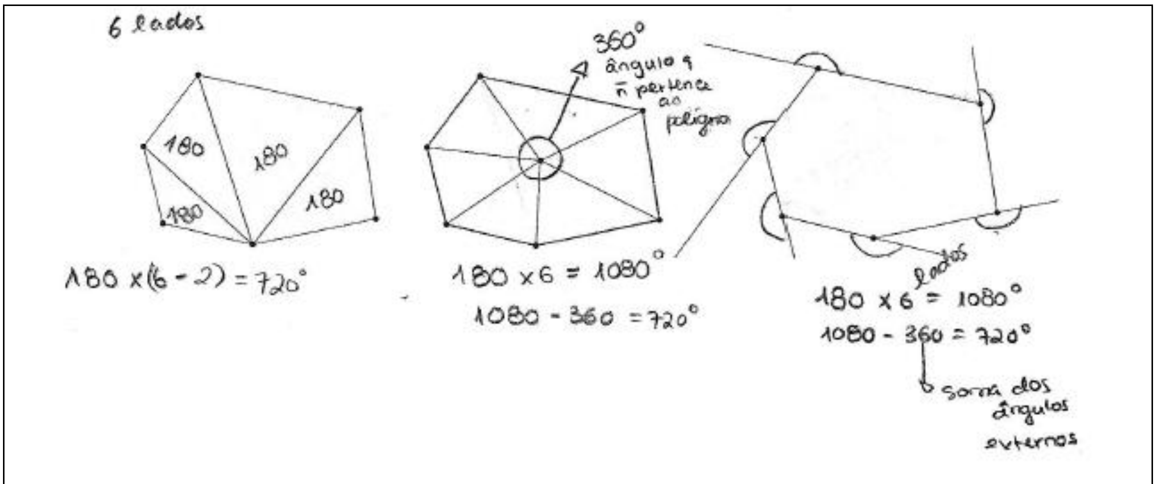


Figura 8. Resposta de Anita à tarefa 2

A resposta do grupo de Anita apoia-se numa correta estruturação geométrica, mobilizando propriedades relevantes já estabelecidas (soma dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo giro formado na segunda figura, a soma dos ângulos externos de um polígono e a relação entre um ângulo externo e um interno), sem explicar a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que é decomposto. No entanto, estas propriedades incidem apenas no caso do hexágono que não é tratado como exemplo genérico (o número de triângulos da decomposição é variável para a classe) e não são explicitadas convenientemente, pelo que a justificação é incompleta.

A próxima resposta (Figura 9) pertence ao grupo que propôs a expressão *360 + 180 (n-4)* (generalização A). Acontece que esta expressão não se relaciona diretamente com nenhuma das figuras apresentadas, pelo que as formandas usam outras expressões:

[4] Note-se que apenas estamos a considerar a qualidade dos argumentos, sem ter em conta erros de linguagem.

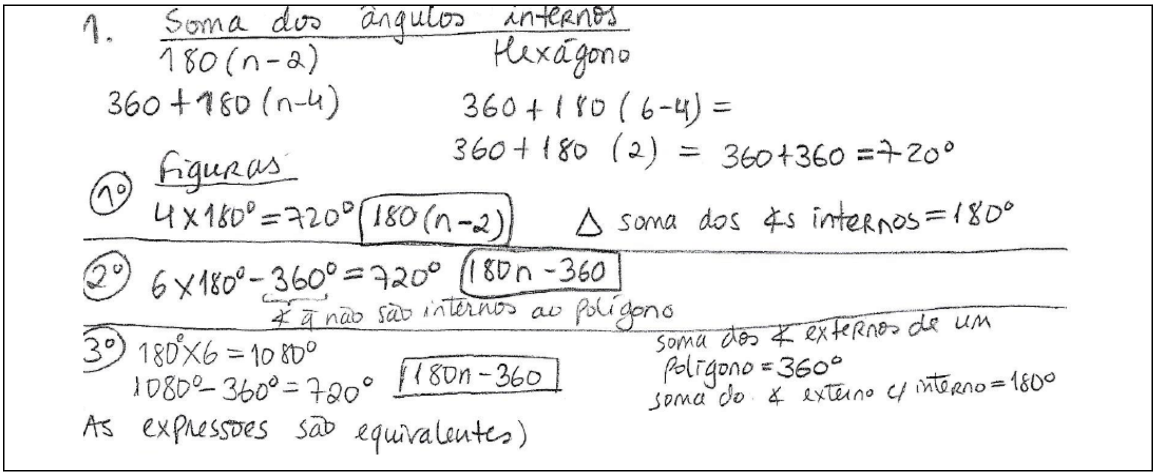


Figura 9. Resposta de Isabel à tarefa 2

A justificação de Isabel é sobretudo uma interpretação das expressões encontradas e não elabora um texto que articule as várias ideias. Contudo, o seu registo revela claramente que os seus argumentos se baseiam na estruturação geométrica, pois mobiliza quase todas as propriedades que são relevantes, omitindo a relação numérica entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que é decomposto e a sua justificação. Nesta resposta, o hexágono é usado como um exemplo que ilustra e explica as expressões utilizadas, mas não há uma explicação no sentido de o tornar claramente num exemplo genérico, apesar de a formanda explicitar as propriedades comuns à classe. Esse aspeto foi abordado pela professora junto do grupo:

> *Profª:* Sim, mas esse caso será para o hexágono. E se tivermos outros polígonos? Por exemplo, com 10 lados?
> *Isabel*: Fazemos… 8 triângulos. Tiramos dois aos lados.
> *Profª*: E então?
> *Isabel*: Exato. Então dá (n-2) × 180!
> *Andreia*: E para o outro fazemos 6×180 e tiramos depois dois triângulos. 2×180.
> *Profª*: E porque é que tiras os ângulos de dois triângulos?
> *Isabel*: Pois… Isso és tu a forçar para dar igual…
> *Profª*: É isso. Têm de ver que se tiverem que tirar alguma coisa, algum valor, isso tem de fazer sentido…

Este diálogo mostra que as formandas estavam conscientes da relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos da decomposição (para o caso da primeira figura), mas não o explicitaram no seu registo.

Pelas razões explicitadas, consideramos que esta justificação é incompleta. Além disso, salientamos alguns aspetos adicionais. Em primeiro lugar, esta tarefa levou a que o grupo pensasse na propriedade em causa de várias perspetivas. A sua primeira abordagem à generalização foi de natureza numérica, pois as formandas identificaram que por cada lado que acrescentavam ao polígono, a soma das amplitudes acrescia 180º. De seguida, usaram uma expressão que não se relacionava com qualquer das figuras apresentadas, pelo que usaram outras expressões (uma delas desconhecida). Em segundo lugar, este grupo parece querer corresponder ao desafio da professora de dar sentido às expressões utilizadas, o que corresponde a uma visão da justificação como explicação do porquê. Este aspeto é percetível no seu registo, mas particularmente no discurso de Isabel, quando diz a Anabela que tirar dois triângulos é “forçar para dar igual”. Da mesma forma, o registo de Teresa (Figura 6) releva esta curiosidade quando a formanda escreve “porquê?” junto dos valores encontrados.

Conclusão

A primeira tarefa revelou dificuldades das formandas relacionadas essencialmente com dois fatores: a natureza da afirmação a justificar – uma generalização – que se apoia numa representação genérica onde não surgem quaisquer valores; os princípios de uma justificação, nomeadamente a impossibilidade de se fundamentar num só exemplo ou de usar como premissa a propriedade que se pretende justificar. O facto de as formandas conseguirem resolver uma tarefa semelhante com a introdução de um valor, mostrou que as dificuldades não advêm da identificação das propriedades relevantes e já estabelecidas, mas da construção de uma argumentação que aplique essa estruturação a toda a família de figuras. Isto significa que as formandas revelaram dificuldades quer sobre a dimensão *saber justificar*, quer *compreender a natureza da justificação* (Lo & McCrory, 2009).

Durante a discussão coletiva, a professora colocou a ênfase da justificação na compreensão do porquê da validade da afirmação, o que foi reforçado com a formulação da tarefa 2, a qual permite *investigar o porquê* confrontando diferentes representações e mobilizando várias propriedades. Esta perspetiva pareceu bem integrada pelas participantes que foram, na maioria dos casos, além do que a tarefa pedia, envolvendo-se em discussões marcadas pelo objetivo de compreender o significado das generalizações. Não houve qualquer sinal de que a resolução da tarefa estabelecesse a validade das generalizações que as formandas nunca colocaram em causa, pelo que a justificação ficou claramente associada à compreensão da razão da sua validade. As várias resoluções da tarefa 2 envolveram uma correta estruturação geométrica da família de figuras, surgindo mais justificações válidas ou que continham argumentos válidos e pertinentes, mesmo que incompletas. Tendencialmente, estas justificações apoiaram-se em exemplos que, nalguns casos, foram assumidos como genéricos.

Assim, no que respeita ao tipo de argumentos usados pelas participantes para justificar generalizações, foi sentida uma diferença entre as duas tarefas, pois estes passaram a apoiar-se mais na correta estruturação das figuras geométricas. Estas diferenças podem estar associadas à especificidade das tarefas, mas podem corresponder também a uma conceção mais correta do que significa justificar. Contudo, as respostas mostram que há dois aspetos importantes a desenvolver. Por um lado, é necessário vencer a resistência em construir um discurso argumentativo, que observamos em resoluções que se reduzem à interpretação esquemática de expressões ou representações visuais, por forma a valorizar a dimensão comunicativa deste processo (Yackel & Hanna, 2003). Por outro lado, é importante elevar o grau de generalidade do discurso que, nalguns casos, é demasiadamente apoiado em exemplos particulares e não evidencia que a generalização se aplica a todo o domínio de figuras, um requisito da justificação (Lannin et al., 2011). Na verdade, existe uma linha pouco definida entre apresentar um exemplo genérico que seja representativo do domínio – uma estratégia aceitável para justificar – e apoiar a justificação em exemplos que valem apenas por si próprios – o que corresponde a um erro e uma conceção errada comum sobre o papel dos resultados empíricos na validade de uma justificação (Stylianides & Stylianides, 2009).

Os resultados aqui apresentados restringem-se a duas tarefas que constituem apenas o início de um percurso no sentido de desenvolver a capacidade de justificar generalizações. Contudo, eles confirmam a relevância da ênfase na compreensão das relações descobertas para dar sentido ao processo de justificar referida por vários autores (e.g., Harel & Sowder, 2007; Lannin et al., 2011; Stylianides et al., 2016). Em particular, o desenho de tarefas que promovam a produção e confronto de diferentes justificações e representações, num ambiente de interação entre pares, parece ser um elemento determinante no desenvolvimento da capacidade de justificar.

Agradecimentos

O presente artigo foi realizado no âmbito do projeto *O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos* sedeado no Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais - referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

Referências

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–238). London: Hodder & Stoughton.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CT: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T.V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Greenwich, CT: Information Age.

Lannin, J.K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lin, F.L., Yang, K.L., Lee, K.H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012a). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15* (pp. 305–325). Dordrecht: Springer.

Lin, F.L., Yang, K.L., Lo, J.J., Tsamir, P., Tirosh, D., & Stylianides, G. (2012b). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15* (pp. 327–346). Dordrecht: Springer.

Lo, J., & McCrory, R. (2009). Proof and proving in mathematics for prospective elementary teachers. In F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 41–46). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em inglês, publicado em 2000).

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 289–321.

Stylianides, A.J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G.C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotherham: Sense.

Stylianides, G.J., & Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40,* 314–352.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 22–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

A ESCRITA MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA POR ALUNOS DE LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA

Maria Helena Martinho
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Helena Rocha
UIED, Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade NOVA de Lisboa
hcr@fct.unl.pt

Resumo: Apesar da escrita ter, habitualmente, uma maior expressão no ensino da Matemática que a própria oralidade, os alunos não estão habituados a explicitar raciocínios e a utilizar linguagem matemática apropriada. A comunicação matemática escrita tem algumas particularidades que podem ser diretamente trabalhadas com os alunos. Por exemplo, a escrita ajuda os alunos a dar sentido à Matemática e a melhorar o próprio discurso. As produções dos alunos transportam informações para o professor contribuindo para a planificação e concretização da sua prática profissional. Assim, e apesar de frequentemente ser descurada, a escrita matemática pode ser trabalhada na sala de aula, em particular, com futuros professores. Este artigo reporta parte de uma experiência realizada com uma turma da Licenciatura em Educação Básica, tendo por base a resolução em grupo de um problema de Geometria e o registo escrito do processo de resolução elaborado pelos alunos. Pretendeu-se desta forma caraterizar a comunicação escrita dos alunos e identificar contributos desta para a compreensão por parte do professor dos conhecimentos dos alunos. A análise da escrita matemática dos alunos, tendo por base um conjunto de critérios previamente definidos, permitiu identificar a preferência destes pelo recurso à representação verbal, dificuldades em fundamentar adequadamente as respostas apresentadas e uma forte tendência para desvalorizar as abordagens prévias que não conduziram à resposta ao problema. Permitiu ainda identificar uma tendência para não explicitar o entendimento das questões que lhes eram colocadas. A forma como os conceitos matemáticos surgem nas repostas escritas permite identificar aspetos relevantes do conhecimento dos alunos.

Palavras-chave: Comunicação matemática, escrita matemática, intuições em Geometria, futuros professores.

Introdução

A aprendizagem comporta uma partilha de significados entre os intervenientes numa situação de comunicação, que aqui definimos como um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente (Martinho, 2011). A capacidade de comunicação matemática tem vindo a ter cada vez mais expressão na comunidade de Educação Matemática e entre os professores. No entanto, existe ainda um largo caminho a percorrer.

A comunicação matemática escrita tem algumas particularidades que podem ser diretamente trabalhadas com os alunos. Tem sido, no entanto, descurada ao longo da escolaridade. Note-se, por exemplo, que apesar dos contextos de avaliação sumativa estarem muito dependentes da versão escrita, a competência de comunicação escrita raramente é trabalhada de forma explícita.

Este artigo retrata parte de uma experiência exploratória realizada no âmbito da formação inicial de professores. Pretendeu-se caraterizar a escrita matemática de futuros educadores e professores do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, num contexto de resolução de problemas de Geometria, e identificar contributos desta para a compreensão por parte do professor dos conhecimentos dos alunos.

Na próxima secção discute-se a comunicação matemática escrita e seus contributos para a aprendizagem bem como algumas armadilhas das intuições em Geometria. Segue-se a descrição do contexto do estudo, a apresentação de alguns dos seus resultados e, por fim, as conclusões.

Comunicação escrita

A comunicação desenvolve-se essencialmente pela prática e pela reflexão sobre essa prática. Como referido na introdução, este artigo centra-se na escrita matemática. No entanto, oralidade e escrita estão fortemente interligadas. A produção de textos pelos alunos e a sua posterior discussão oral, constituem um meio importante no desenvolvimento da capacidade de comunicação (NCTM, 1994; Pimm, 1996).

A escrita é um meio de comunicação, mas também é um meio muito poderoso de aprendizagem e de descoberta (Sabrio, Sabrio, & Tintera, 1993). Ajuda os alunos a dar sentido à Matemática (Countryman, 1992) e a melhorar o próprio discurso (Sabrio et al., 1993). Em particular, Rosaen (1989, p. 155) refere que "ensinar os alunos a escrever sobre um determinado conteúdo é ensiná-los a 'escrever para aprenderem esse conteúdo'". Enquanto escrevem os alunos estão ativos, a pensar e a aprender sobre matemática (Burns, 2008), desenvolvem o seu pensamento bem como o uso da linguagem matemática, como seja o uso de termos, diagramas, gráficos, esquemas, analogias e símbolos (NCTM, 1994). Segundo Peterson (2007), a escrita promove o pensamento claro e aprofunda a compreensão quando é necessário explicitar aquilo que ocorre internamente. Ao redigir os alunos precisam de examinar as suas ideias e refletir sobre o que já sabem, tomando consciência das suas eventuais dificuldades. Este processo amplia e aprofunda a compreensão (Burns, 2008). Assim, o aluno escreve para aprender e aprende a escrever matemática. No entanto, a expressão escrita matemática, não abrange apenas a ação de escrever uma resposta a um exercício ou indicar simplesmente os passos seguidos na sua resolução. Mais do que isso, trata-se de explicitar os raciocínios que levaram à resposta.

A literatura aponta para a importância do recurso a tarefas que envolvam a leitura e escrita de textos matemáticos na sala de aula (Atieri, 2010; Danielson, 2010). Pugalee (2004) realizou um estudo que mostrou que alunos a quem fora pedido que explicitassem por escrito as estratégias usadas na resolução de problemas, evoluíam mais do que aqueles que apenas as verbalizavam. De facto, o processo de escrita requer, habitualmente, uma maior atenção e reflexão de quem escreve quando comparado com a expressão oral. No entanto, o reforço desta prática reflexiva requer também uma intervenção explícita dos professores para incentivar a capacidade de reflexão sobre o texto escrito produzido pelos alunos. O processo de reflexão ajuda-os a evoluir, tornando as suas explicações mais aceitáveis e claras. Progressivamente, os alunos revelam-se mais críticos e exigentes (Yackel, 1995). Quando o aluno se envolve no processo de explicar as suas ideias aos outros e com o objetivo de ser entendido, ele próprio experimenta uma evolução nas suas compreensões. A comunicação ajuda-o a formalizar as suas próprias ideias (Pimm, 1996). Em geral, o ato de escrita, forçando a explicitação de conjeturas e conclusões, constitui uma oportunidade para clarificar, organizar e consolidar o pensamento do aluno, e desenvolver o conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas, o poder de abstração bem como a capacidade de raciocínio e a confiança em si próprio alcançando uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios matemáticos (NCTM, 1994).

A literacia matemática, passa pela habilidade de falar e escrever matematicamente, pela capacidade de desencadear os tipos de raciocínio que caraterizam a disciplina de Matemática bem como de se envolver na expressão oral e escrita desses mesmos raciocínios. Os alunos com menor literacia matemática não revelam necessariamente dificuldades na aprendizagem das estruturas linguísticas, mas no conflito de alinhamento que os discursos envolvem. Em rigor, a prática de explicitação de raciocínios e a prática de reflexão em torno desses raciocínios ajuda o aluno a desenvolver a literacia matemática, ao que Alrø e Skovsmose (2002) chamam aprendizagem crítica da Matemática.

Ao longo da escolaridade, os alunos revelam, habitualmente, dificuldades na escrita matemática. Segundo Carvalho (2011) em muitos casos deteta-se resistência à escrita matemática e necessidade de ajuda dos professores. O mesmo autor identifica dificuldades na conversão do pensamento em palavras, especificamente, dificuldades em saber como escrever, a ordem como apresentar a frase e encadear as ideias. Segundo Carvalho (2011), o insucesso na explicitação de raciocínios não resulta da falta de conhecimento matemático, mas sobretudo da incapacidade de o verbalizar.

A escrita matemática é diferente da escrita em outras áreas de conhecimento, exigindo capacidades diferentes que podem ser desenvolvidas nas aulas de matemática (Adu-Gyamfi, Bossé, & Faulconer, 2010; Meaney, 2005). As diferentes representações matemáticas (como a numérica, simbólica, gráfica e verbal), requerem uma utilização frequente para que os alunos as dominem. Quando estes revelam deficiência no domínio da linguagem matemática é natural que isso afete também toda a compreensão matemática, por exemplo a leitura e interpretação de um enunciado.

Para que os alunos desenvolvam a capacidade de escrita matemática é necessário que se sintam à vontade para utilizar diferentes representações, de acordo com a sua necessidade. A linguagem matemática formal e rigorosa não precisa de ser imposta, pode surgir com naturalidade e tornar-se comum pela necessidade do seu uso. Os alunos que escrevem matemática com alguma frequência vão naturalmente progredindo na sua formalização, reconhecendo nela uma maior universalização e mesmo facilidade para comunicar (NCTM, 1994). Os alunos podem começar por escrever recorrendo às suas próprias palavras enquanto não se sentem familiarizados com os símbolos. Naturalmente, os símbolos vão deixando de constituir um obstáculo à compreensão do texto e começam a ser mais frequentes na própria escrita.

Intuição em Geometria: algumas armadilhas

O conhecimento sobre o raciocínio dos alunos é crucial para professores e formadores.

Vários são os autores que discutem a tendência que alguns alunos revelam de tirar conclusões precipitadas com base na intuição. Tirosh e Stavy (1999a) referem-se a essas práticas como "regras intuitivas", enquanto Driver (1994), por exemplo, intitula-as "concepções alternativas". Independentemente do nome atribuído, estas situações ocorrem quando o aluno, ao construir o seu próprio conhecimento, transporta para novas situações um contexto que, apesar de lhe ser alheio, aparece como logicamente coerente.

Na aprendizagem da Geometria, as intuições têm um papel importante contribuindo para o desenvolvimento do sentido espacial. No entanto, nem sempre as intuições conduzem a raciocínios corretos.

Stavy e Tirosh (2000) apresentam algumas classes dessas regras a que intuitivamente os alunos recorrem. Neste artigo abordaremos as regras tipificadas por estes autores nas classes "mais A – mais B" e "mesmo A – mesmo B". No primeiro caso, "mais A – mais B", conclui-se que a variação positiva ou negativa, numa medida de dois objectos, leva necessariamente a uma variação de igual sentido em outra medida. Por outro lado, a classe "mesmo A – mesmo B" traduz situações em que perante dois objetos que partilham o valor de determinada medida, se conclui que em outra medida diferente também terão valor igual.

Os alunos veem, por vezes, estas regras como evidentes e tendem a usá-las com confiança. De facto, a autoconfiança e a evidência são as principais caraterísticas do raciocínio intuitivo. Note-se que o uso da intuição corresponde a uma primeira abordagem a um problema, por vezes antes mesmo da verdadeira compreensão do problema.

Vamos analisar de seguida alguns exemplos que nos ajudam a compreender as intuições dos alunos no contexto da Geometria e que podem conduzir a respostas incorretas.

Área e perímetro

A similaridade das variações entre a área e o perímetro é uma dessas situações. Considere-se, por exemplo, as duas figuras reproduzidas na figura 1, apresentadas em Tirosh e Stavy (2010), em que é pedida uma comparação do perímetro das duas figuras tendo em conta que a uma delas foi retirado um quadrado do canto.

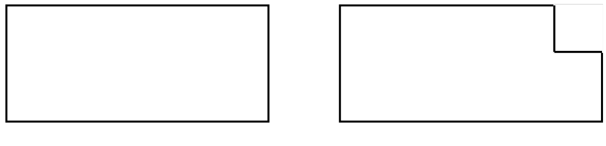


Figura 1. Retângulo e hexágono apresentados em Tirosh e Stavy (2010)

Tirosh e Stavy (2010) recorrem a este exemplo para mostrar que quando os alunos consideram que sendo a área da primeira figura maior também o perímetro o será, estão a recorrer à regra “mais A – mais B”.

Ângulo

Outra situação surge na comparação de dois ângulos, como os representados na figura 2. Tende a considerar-se que as amplitudes são diferentes, dado que a porção de lado (segmento de reta) desenhado é maior num caso do que no outro.

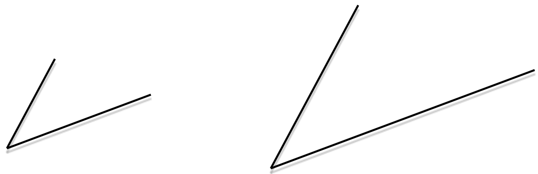


Figura 2. Duas representações dum mesmo ângulo

Segundo Tirosh e Stavy (1999b) esta conclusão revela a aplicação da regra intuitiva “mais A – mais B”.

Comprimento e distância

Nesta situação, em que se considera que o comprimento de duas linhas diferentes que unem dois pontos à mesma distância é igual, está a ser ativada a regra “mesmo A – mesmo B” (Tirosh & Stavy, 1999a).

Área de superfície e volume

Livne’s (1996, citado por Tirosh & Stavy, 1999a) discute uma tarefa, apresentada a alunos do ensino secundário, em que se pretende comparar a proporção entre as áreas da superfície e os volumes de dois cubos de diferentes arestas. Muitos dos inquiridos consideraram que a proporção entre as áreas e entre os volumes é a mesma porque sendo a mesma forma, o aumento da área de superfície e do volume é igual. Outros justificaram que, pelo facto do aumento ser proporcional, a razão também se mantém. A situação exemplifica de novo a ativação da regra “mesmo A – mesmo B” (Tirosh & Stavy, 1999a).

Na mesma linha surge o exemplo dos dois cilindros construídos com uma folha de papel A4 na horizontal e na vertical (figura 3). Neste caso tende-se a considerar que, se a folha (área de superfície lateral) é a mesma, então o volume dos cilindros também será igual.

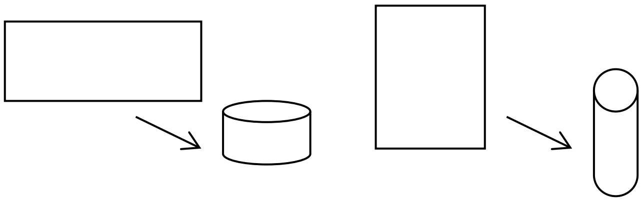


Figura 3. Cilindros construídos a partir de uma mesma folha de papel

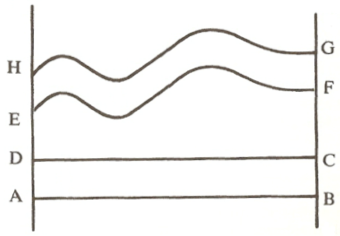
Opções assumidas e contexto do estudo

A expressão matemática escrita de alunos de uma turma da Licenciatura em Educação Básica foi objeto de atenção ao longo de um semestre numa disciplina de Geometria. Os alunos resolviam em grupo um conjunto de tarefas selecionadas e faziam o registo escrito do processo de resolução seguido. Este artigo centra-se na análise das produções dos alunos na concretização de uma dessas tarefas (figura 4).

Um dilema por resolver…

O Sr. António tem dois terrenos ([ABCD] e [EFGH]) cujas formas estão representadas na figura.

Uma vez que a época de cultivo da batata está a chegar, o Sr. António foi confrontado com um problema: Em qual dos terrenos conseguirá plantar o maior número de batatas possível?



Ajuda o Sr. António a resolver esta situação sabendo que ambos têm a mesma largura.
Imagina agora que o Sr. António quer vedar os terrenos com rede. Para qual deles precisa de mais rede?

Figura 4. Enunciado do problema (adaptado de Fischbein, 1999)

A turma era formada por 56 alunos (apenas três do género masculino) estando estes divididos em dois turnos nas aulas práticas, trabalhando em grupos de quatro ou cinco elementos. Cada grupo resolvia a tarefa e escrevia a sua resolução explicitando o processo seguido.

Na próxima secção são analisadas as resoluções de alguns grupos de alunos, selecionados em termos da sua diversidade relativamente aos critérios de análise adotados. Estes critérios para análise da escrita matemática baseiam-se nos desenvolvidos por Santos e Semana (2014), à luz do que o próprio processo de análise suscitou. Assim, foram tidas em conta:

1. Compreensão do problema
   - explicitação do que se pretende
   - implícita e identificável através da resposta apresentada
2. Apresentação das diferentes abordagens ensaiadas
   - explicitação das etapas realizadas durante a resolução do problema
   - fundamentação das opções assumidas (de acordo com o ponto seguinte) que levaram a considerar e a abandonar essa etapa
3. Fundamentação da resposta apresentada

   a) o nível de fundamentação apresentado
      - correção
      - clareza
      - complitude da justificação

   b) o tipo de fundamentação apresentado
      - justificação vaga ou pouco clara
      - apresentação exclusiva de uma regra, procedimento ou definição

- descrição de caráter procedimental (explicação do que é feito sem justificação da razão porque tal é válido)
- recurso a uma abordagem empírica ou experimental para tentar verificar a veracidade
- justificação de caráter relacional (explicitação da razão porque aquilo que é feito é válido)

4. Representações utilizadas
   - linguagem verbal (linguagem natural podendo integrar terminologia matemática)
   - representações icónicas (um esquema ou desenho)
   - representações simbólicas (símbolos algébricos).

O estudo assume uma natureza qualitativa, uma vez que se pretendia analisar detalhadamente as produções escritas dos alunos (Scott & Usher, 2011). Os dados recolhidos consistem nas produções escritas realizadas pelos alunos e foram recolhidos pela própria professora da turma (que também assumia o papel de investigadora). O problema que serviu de base à análise que aqui se apresenta foi proposto aos alunos numa fase inicial do semestre, quando os alunos ainda não tinham grande experiência na resolução de problemas e na elaboração de um documento escrito sobre esta. As produções escritas realizadas pelos alunos foram posteriormente analisadas, sendo dado feedback aos alunos sobre o trabalho desenvolvido e dada a oportunidade de o melhorar ou aprofundar.

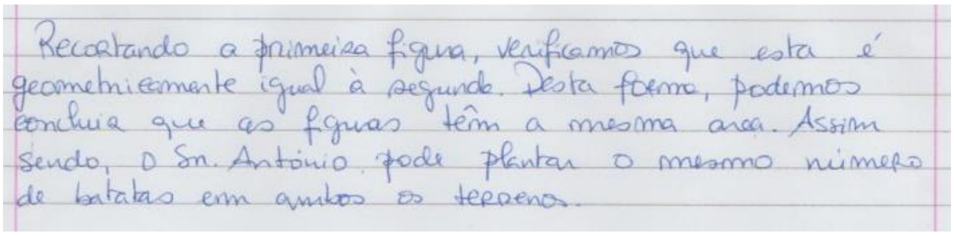
Resultados

Esta secção está organizada em função das resoluções dos diferentes grupos de alunos. Para cada resolução é feita uma análise das suas caraterísticas de acordo com as categorias definidas.

Grupo A

Embora os alunos não apresentem explicitamente na sua resposta algo que indique terem compreendido o que lhes é pedido, a resposta que dão ao problema sugere que assim sucedeu.

Na sua resolução os alunos apenas apresentam a resposta ao problema, não incluindo qualquer indicação relativamente a etapas por que tenham passado. Relativamente à resposta que dão parecem fundamentá-la implicitamente numa representação visual do terreno. Para o efeito, apoiam-se numa representação icónica que de algum modo articulam com um texto em linguagem natural, onde pontualmente usam termos matemáticos (figura 5).



Recortando a primeira figura, verificamos que esta é geometricamente igual à segunda. Desta forma, podemos concluir que as figuras têm a mesma área. Assim sendo, o Sr. António pode plantar o mesmo número de batatas em ambos os terrenos.

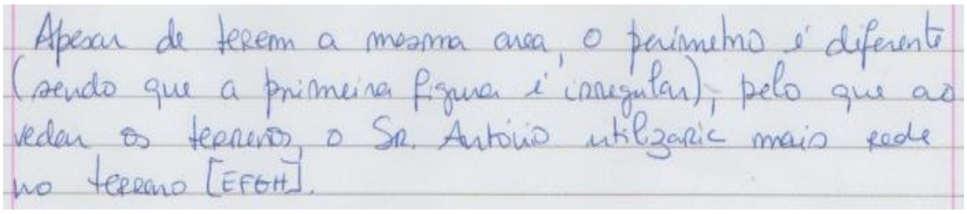
Figura 5. Resposta à primeira questão do problema (grupo A)

No entanto, não apresentam justificação de como pensaram para chegar a essa representação visual, nem de como se apoiam nela para fundamentar a sua resposta. A fundamentação da resposta pode assim ser considerada vaga, embora tenha uma fundamentação de base experimental implícita, pois os alunos recortam o primeiro terreno de forma a conseguirem colar os pedaços e reconstruir um terreno de forma retangular idêntica à do segundo terreno (figura 6). Não existe, contudo, qualquer indicação relativamente ao processo que os levou a decidir recortar a representação do terreno daquela maneira.

Figura 6. Reconstrução do primeiro terreno na forma retangular (grupo A)

A forma como usam a noção de "geometricamente igual" é mais uma vez ambígua, sugerindo que não dominam o conceito, mas na sua resposta é de algum modo ambíguo se a designação se refere à forma do terreno tal como surge no enunciado ou à nova forma que obtêm depois de a terem transformado num retângulo.

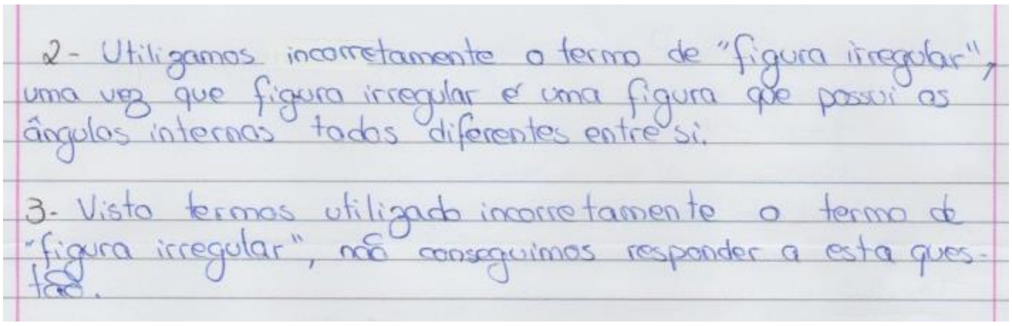
Na segunda questão o caráter vago da resposta mantém-se com a irregularidade a ser apontada como central para a resposta, sem que, no entanto, seja clarificado o que se entende por "irregular" e como é que tal afeta o perímetro do terreno (figura 7).



Apesar de terem a mesma área, o perímetro é diferente (sendo que a primeira figura é irregular), pelo que ao vedar os terrenos, o Sr. António utilizaria mais rede no terreno [EFGH].

Figura 7. Resposta à segunda questão (grupo A)

Quando confrontados com um conceito de irregular diferente do que pretendiam atribuir ao termo na sua resolução, os alunos assumem que cometeram um erro e que consequentemente a sua resposta está errada (figura 8). Contudo, não apresentam qualquer tentativa de ultrapassar o erro e não elaboram nenhuma resposta alternativa ou complementar.



2- Utilizamos incorretamente o termo de "figura irregular", uma vez que figura irregular é uma figura que possui os ângulos internos todos diferentes entre si.

3- Visto termos utilizado incorretamente o termo de "figura irregular", não conseguimos responder a esta questão.

Figura 8. Reação ao comentário sobre o uso do termo "figura irregular" (grupo A)

Os pontos chave que a análise desta resolução permite identificar prendem-se com a dificuldade dos alunos em ser explícitos na apresentação de raciocínios, com a falta de descrição do percurso efetuado durante a resolução do problema e com a falta de rigor na utilização de termos/conceitos matemáticos. Sugere ainda uma dificuldade dos alunos em refletir sobre o que escreveram de forma crítica e em desenvolver respostas alternativas.

Grupo B

À semelhança do que sucedeu com o grupo A, também neste grupo os alunos não apresentam explicitamente na sua resposta algo que indique terem compreendido o que lhes é pedido. Mas, mais uma vez, a resposta que dão ao problema sugere que assim sucedeu.

Estes alunos começam por dar a resposta ao problema apresentando depois alguns elementos relativamente a uma abordagem anterior e que não foi bem sucedida. Não apresentam a razão por que pensaram em traçar retas paralelas sobre a figura correspondente ao terreno, mas já explicitam a razão que os levou a pensar em traçar retas a passar por pontos específicos e não coincidentes com os limites do terreno. As razões que apontam sugerem pois que adotaram uma abordagem de carácter experimental e que é nela que se apoiam para fundamentar a sua resposta. Socorrendo-se das representações icónicas (figura 9) e verbais (figura 10), articulam-nas para explicitar o que pensaram e porque pensaram.

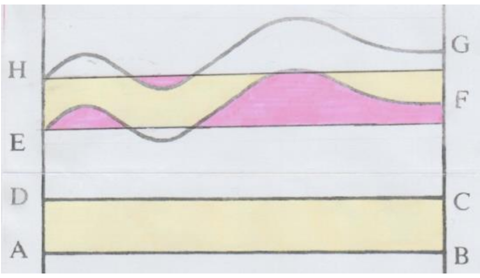
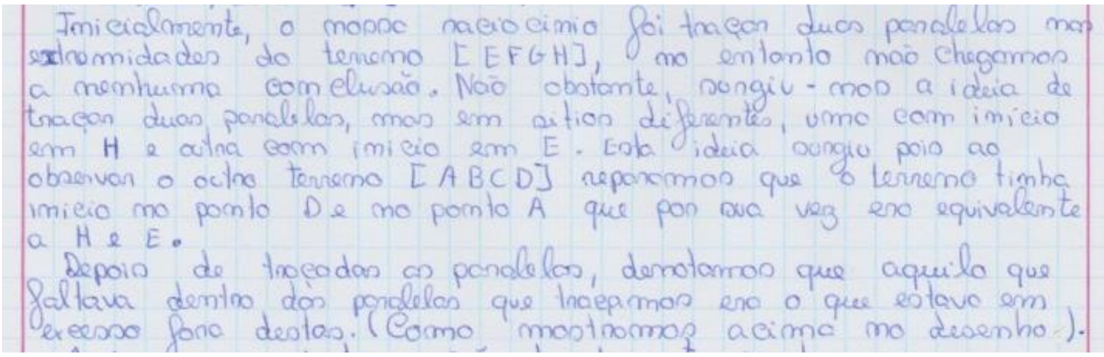


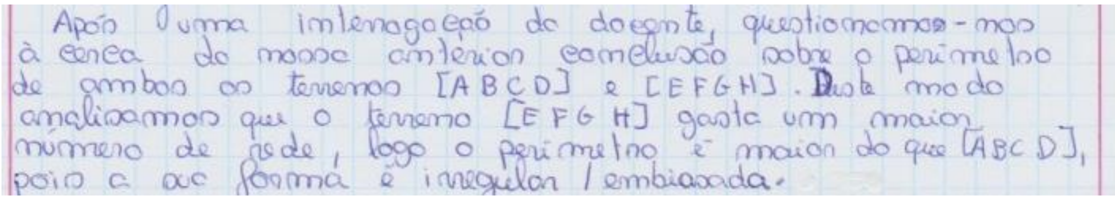
Figura 9. Representação icónica (grupo B)



Inicialmente, o nosso raciocínio foi traçar duas paralelas nas extremidades do terreno [EFGH], no entanto não chegamos a nenhuma conclusão. Não obstante, surgiu-nos a ideia de traçar duas paralelas, mas em sítios diferentes, uma com início em H e outra com início em E. Esta ideia surgiu pois ao observar o outro terreno [ABCD] reparamos que o terreno tinha início no ponto D e no ponto A que por sua vez era equivalente a H e E.
Depois de traçadas as paralelas, denotamos que aquilo que faltava dentro das paralelas que traçamos era o que estava em excesso fora destas. (Como mostramos acima no desenho).

Figura 10. Representação verbal (grupo B)

Relativamente à segunda questão referem que foi uma questão do docente que os levou a reavaliar a sua resposta. Corrigem então a resposta inicial, segundo a qual os dois terrenos têm o mesmo perímetro, mas não fundamentam em que se basearam para chegar a uma conclusão, nem inicialmente nem posteriormente (figura 11).



Após uma interrogação do docente, questionamos-nos à cerca da nossa anterior conclusão sobre o perímetro de ambos os terrenos [ABCD] e [EFGH]. Deste modo analisamos que o terreno [EFGH] gasta um maior número de rede, logo o perímetro é maior do que [ABCD], pois a sua forma é irregular/embicada.

Figura 11. Correção à resposta inicial à pergunta 2 (grupo B)

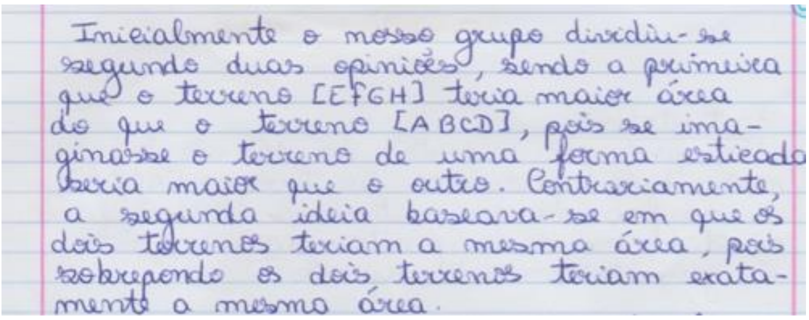
A análise desta resolução evidencia assim alguma preocupação em explicitar raciocínios, procurando apresentar o percurso realizado e o que determinou as opções assumidas, e disponibilidade para refletir sobre o trabalho efetuado. Opção pelo recurso a representações icónicas e verbais. É ainda interessante notar que a resposta errada surge precisamente na parte do problema em que não é explicitada justificação para as opções assumidas.

Este grupo, quando concluiu que a área e o perímetro são iguais, ativou a regra intuitiva “mesmo A – mesmo B” (Tirosh & Stavy, 2010). Conseguiram mostrar que a área era a mesma e deduzem que o perímetro também é o mesmo.

Grupo C

À semelhança do que sucedeu com os grupos A e B, também neste grupo os alunos não apresentam explicitamente na sua resposta algo que indique terem compreendido o que lhes é pedido. Mas, mais uma vez, a resposta que dão ao problema sugere que assim sucedeu.

Este grupo começa por referir duas opiniões contrárias entre os membros do grupo: áreas iguais e áreas diferentes. Na figura 12 é possível encontrar uma tentativa de explicitação dessas opiniões.



Inicialmente o nosso grupo dividiu-se
segundo duas opiniões, sendo a primeira
que o terreno [EFGH] teria maior área
do que o terreno [ABCD], pois se ima-
ginasse o terreno de uma forma esticado
seria maior que o outro. Contrariamente,
a segunda ideia baseava-se em que os
dois terrenos teriam a mesma área, pois
sobrepondo os dois terrenos teriam exata-
mente a mesma área.

Figura 12. Opiniões divergentes (grupo C)

A primeira opinião apresentada revela que estão a associar intuitivamente os comprimentos. Sendo a linha curva HG maior do que o segmento DC, então as respetivas áreas são também diferentes. Ao imaginarem que podem “esticar” o terreno, estão a supor que ele tem apenas uma dimensão. Ou seja, importam a regra intuitiva de Tirosh e Stavy (2010) “mais A – mais B” em que a um maior comprimento corresponde uma maior área.

Estes alunos, contrariamente aos restantes dos grupos A e B, procuram apresentar o processo de resolução por que passaram, apresentando três tentativas diferentes de abordagem e descrevendo explicitamente a divisão existente no grupo quanto à resposta. Na primeira tentativa, os alunos optam por uma fundamentação de caráter experimental, recortando e sobrepondo o primeiro terreno sobre o terreno retangular, para comparar as áreas. Apesar da forma descuidada como ilustram esta tentativa (figura 13), onde são visíveis vários espaços do terreno retangular não cobertos por partes do outro terreno recortado, os alunos concluem que uma vez que sobra um pedaço a área desse terreno será maior.

Figura 13. Representação icónica da primeira tentativa (grupo C)

Não apresentam qualquer justificação para que esta resposta não tenha sido a resposta final e passam a apresentar uma nova tentativa. Neste caso decidem recorrer a um elástico para medir o que designam por contorno dos terrenos, concluindo que o do terreno retangular era menor (figura 14). É a intervenção da professora que, segundo afirmam, os leva a abandonar esta tentativa e passar à terceira.

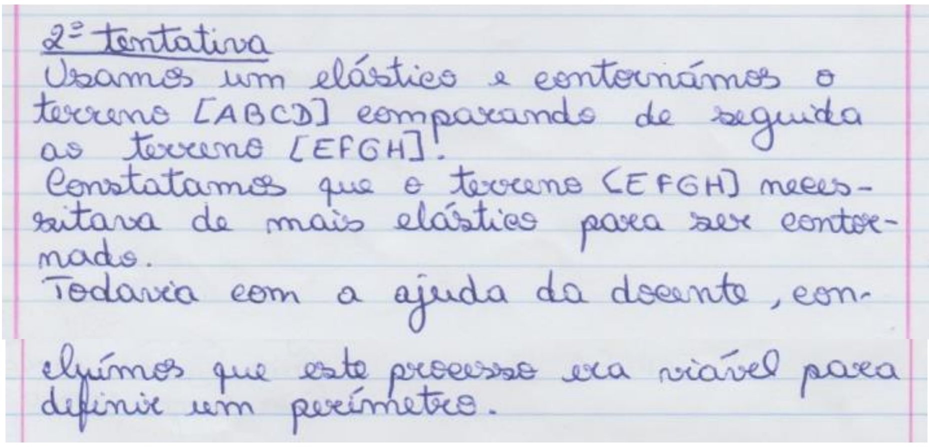

2ª tentativa
Usamos um elástico e contornámos o terreno [ABCD] comparando de seguida ao terreno [EFGH].
Constatamos que o terreno [EFGH] necessitava de mais elásticos para ser contornado.
Todavia com a ajuda da docente, concluímos que este processo era viável para definir um perímetro.

Figura 14. Segunda tentativa de resolução (grupo C)

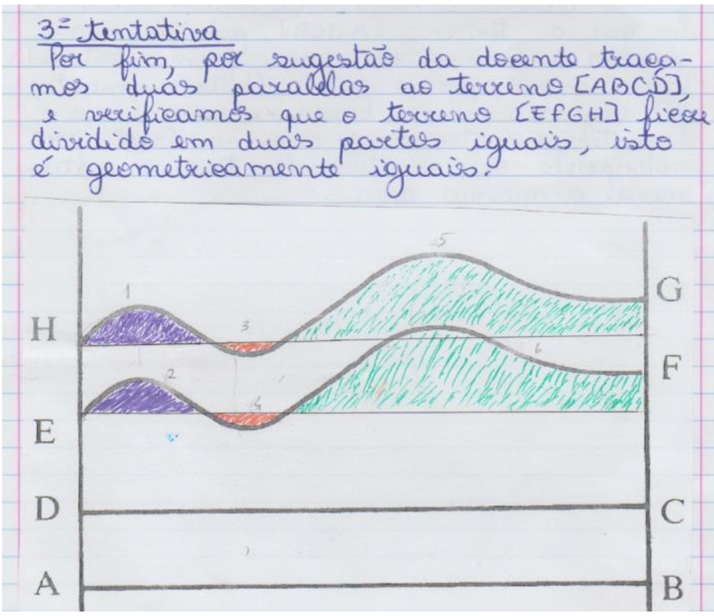

3ª tentativa
Por fim, por sugestão da docente traçamos duas paralelas ao terreno [ABCD], e verificamos que o terreno [EFGH] ficou dividido em duas partes iguais, isto é geometricamente iguais.

Figura 15. Terceira tentativa de resolução (grupo C)

Por sugestão da professora traçam duas retas paralelas sobre a representação do primeiro terreno e concluem que as áreas são iguais. Fundamentam a sua conclusão dizendo que o terreno "ficou dividido em duas partes iguais", uma afirmação vaga, que não é fácil de perceber e que deixa dúvidas quanto à compreensão dos alunos relativamente à resposta que apresentam (figura 15).

Relativamente à questão 2 não é dada nenhuma resposta explícita, parecendo que a referência ao perímetro na segunda tentativa poderá ser encarada pelos alunos como suficiente para responder a esta segunda questão.

Relativamente às representações utilizadas, a verbal e icónica constituem os dois tipos presentes.

A análise da reposta dos alunos evidencia a intenção de dar a conhecer todo o processo vivido pelo grupo, sendo marcantes as dificuldades sentidas e o impacto da intuição sobre uma das abordagens seguidas. Apesar da intenção de dar a conhecer o que foi feito, os alunos não apresentam efetivamente justificações para as decisões tomadas, nem para as respostas apresentadas. Toda a fundamentação apresentada é de carácter experimental, algo que é transversal a todas as abordagens que efectuaram.

Conclusão

Este estudo permitiu identificar algumas caraterísticas da escrita matemática dos alunos. Perante os grupos estudados é possível concluir que os alunos não tendem a explicitar na sua escrita o que se pretende com a questão colocada, sendo a compreensão que detêm relativamente ao problema inferida a partir da resposta que dão.

Apresentar o processo de resolução é algo que também não é muito comum, havendo um claro enfoque em dar a resposta ao problema. Mesmo os alunos que apresentam algo relativamente ao percurso porque passaram, tendem a fazê-lo no final da sua resolução. Ainda assim, há alunos que procuram fazer uma apresentação sequencial do processo de resolução por que passaram.

Quanto ao nível de fundamentação das respostas, pode-se concluir que a sua qualidade é variável, nem sempre as respostas se encontrando corretas, sendo expressas de forma clara ou estando completas. A intuição assume um papel importante, sendo possível identificar casos em que parece impedir o desenvolvimento de respostas fundamentadas e levando a repostas incorretas. Relativamente ao tipo de fundamentação apresentado este parece ser determinante para a compreensão pelo professor do conhecimento do aluno, ainda assim a fundamentação carece frequentemente de desenvolvimento, sendo muitas vezes vaga ou de caráter empírico ou experimental. Ainda assim, os casos em que é apresentada uma maior fundamentação da reposta tendem a estar associados a respostas corretas. Paralelamente, a fundamentação das respostas parece consistir num ponto de partida para a reflexão do aluno.

Relativamente às representações utilizadas, e podendo haver aqui uma influência das caraterísticas específicas deste problema, a representação dominante é a linguagem verbal, que tende a ser articulada com uma representação icónica. Integrados na linguagem verbal por vezes surgem termos ou conceitos matemáticos, frequentemente esclarecedores relativamente ao nível de conhecimento matemático dos alunos.

De um ponto de vista mais amplo, é importante referir que o recurso à escrita matemática também se revela importante para o professor, uma vez que através das produções escritas dos alunos este consegue aceder à sua forma de pensar (Pugalee, 2004). O facto de o professor aceder ao pensamento e processos de raciocínio dos alunos permite que atue de forma diferenciada e que planifique a sua prática letiva de forma mais adequada à realidade em que se encontra. A escrita matemática dos alunos permite que o professor saiba o que aprenderam, quais os raciocínios a que recorrem e se são adequados ou revelam falhas, se utilizam os novos conceitos trabalhados na sala de aula e as diferentes representações.

Na resolução do problema foi possível identificar algumas intuições nos raciocínios dos alunos. Em particular, as regras "maior A – maior B" (Tirosh & Stavy, 2010) quando os alunos assumem que um maior comprimento se traduz numa maior área e a regra "mesmo A – mesmo B" quando concluem que a superfícies de igual área correspondem iguais valores para o perímetro.

Dada a importância que a escrita matemática assume na construção do universo matemático dos alunos, revela-se fundamental cuidar do seu desenvolvimento nos futuros professores, para que eles sejam capazes não só de ter um discurso oral e escrito claro e completo. Assim, sendo uma melhor compreensão da escrita matemática e um melhor conhecimento de como a desenvolver nos alunos constitui por si só uma agenda de trabalho científico em que se justifica plenamente continuar a investir.

Referências

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Faulconer, J. (2010). Assessing understanding through reading and writing in mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *11*(5), 1-22.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Atieri, J. (2010). *Literacy+Math=Creative connections in the elementary classroom*. Newark: International Reading Association.

Burns, M. (2008). *Writing in math class: A resource for grades 2-8*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Carvalho, J. A. B. (2011). Escrever para aprender: Contributo para a caraterização do contexto português. *Interacções*, *19*, 219-237.

Countryman, J. (1992). *Writing to learn mathematics: Strategies that work, K-12*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Danielson, C. (2010). Writing papers in math class: a tool for encouraging mathematical exploration by preservice elementary teachers. *School Science and Mathematics*, *110*(8), 374-381.

Driver, R. (1994). *Making a sense of secondary science*. London: Routledge.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with understanding* (pp. 11-50). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Martinho, M. H. (2011). *A comunicação na sala de aula de Matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Braga: CIEd-UMinho.

Meaney, T. (2005). Mathematics as text. In A. Chronaki & I. M. Christiansen, *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp. 109-141). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM-IIE.

Peterson, S. S. (2007). Teaching content with the help of writing across the curriculum. *Middle School Journal*, *39*, 26-33.

Pimm, D. (1996). Diverse communications. In P. Elliott & M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics K-12 and beyond*. *Yearbook* (pp. 11-19). Reston, VA: NCTM.

Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written description of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 27–47.

Rosaen, C. (1989). Writing in the content areas: Reaching its potential in the learning process. *Advances in research on teaching*, *1*, 153-189.

Sabrio, D., Sabrio, S., & Tintera, G. (1993). Writing to learn and learning to write mathematics: An experimente. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *3*(4), 419-429.

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment practices. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 65-87.

Scott, D., & Usher, R. (2011). *Researching education: data, methods and theory in educational inquiry*. New York: Continuum.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. New York: Teachers College Press.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999a). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with understanding* (pp. 51-66). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999b). Intuitive rules and comparison tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(3), 179-194.

Tirosh, D., & Stavy, R. (2010). The effect of intervention on accuracy os students' responses and reaction times to geometry problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*, 185-201.

Yackel, E. (1995). Children's talk in inquiry mathematics classrooms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 131-162). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

PRÁTICAS AVALIATIVAS REGULADORAS, TECNOLOGIA E REGULAÇÃO DO ENSINO

Elvira Santos
Agrupamento de Escolas de Álvaro Velho
elvira.santos@campus.ul.pt

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ulisboa.pt

Resumo. Este texto reporta uma parte de uma investigação que tem como objetivo compreender como professores do 2.º ciclo desenvolvem práticas avaliativas reguladoras num contexto com recurso a tecnologia e as usam no aperfeiçoamento do processo de ensino. Com este texto pretende-se dar a conhecer a prática do professor João quando planifica estratégias avaliativas num contexto com recurso à tecnologia, envolve os alunos e interpreta o impacto na aprendizagem. O estudo é de natureza interpretativa e o design de estudo de caso. Os dados apresentados foram recolhidos por observação com registo áudio das sessões de trabalho, áudio e vídeo da sala de aula e das produções escritas dos alunos. Os resultados apontam que a planificação de estratégias avaliativas num contexto com recurso à tecnologia é realizada segundo as necessidades dos alunos, fluiu como um processo cíclico e tem como pilares Identificar os conhecimentos e capacidades dos alunos, Selecionar fontes de recolha de evidências e Promover produções significativas dos alunos. Os resultados apontam que, durante a realização da tarefa, os gestos profissionais do professor são dirigidos para Regular regras/normas e Orientar a atividade do raciocínio matemático. Na atividade de coavaliação os gestos profissionais do professor revelam Orientar a atividade de manipulação de conceitos e/ou objetos do saber. Os resultados apontam, ainda, que a planificação de uma estratégia de avaliação reguladora permite ao professor selecionar estratégias alternativas para ajudar os alunos constituindo-se, assim, como uma mais valia para o processo de regulação do ensino.

Palavras-chave: Avaliação reguladora, tecnologia, regulação do ensino.

Introdução

No sentido de contribuir para uma aprendizagem efetiva, de qualidade e para todos os alunos, a avaliação deve ser sistemática na sala de aula em vez de aparecer como uma interrupção da atividade letiva (Black & Wiliam, 2009). Os professores devem, por isso, procurar evidências em diversas fontes de modo a garantir que cada aluno possa mostrar o que sabe e o que consegue fazer revelando, assim, os seus pontos fortes (NCTM, 2007).

O processo de construção geométrica mediado pela utilização de um ambiente de geometria dinâmico (AGD) permite que um elemento do diagrama, ao ser arrastado pela ação do rato, preserve as relações geométricas usadas, modificando-se de acordo com a geometria da construção e não de acordo com o desejo do utilizador. Deste modo, cria condições para um vai e vem de conjeturas e de verificações, de certezas e incertezas que só é possível pelo potencial de interação e facilidade de verificação oferecidas pelo AGD (Laborde, Kynigos, Hollebrands, e Strässer, 2006). A utilização do AGD na sala de aula permite, também, conhecer a ação sistemática do professor para organizar e orientar o uso do artefacto, ou seja, o processo de génese instrumental dos alunos (Drivers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010).

Os princípios orientadores da avaliação reguladora preconizam uma postura ativa do aluno, intervindo na sua aprendizagem e na avaliação pretendendo, em última instância, fazer um balanço para encontrar os melhores caminhos na superação das dificuldades (Pinto & Santos, 2006). A avaliação reguladora contribui, assim, para conhecer melhor o aluno através das suas produções, de modo a ajudar a compreender o seu funcionamento cognitivo, tornando-se um instrumento de regulação das aprendizagens e do ensino (Black & Wiliam, 1998; Santos, 2002).

Nos estudos realizados em Portugal sobre o domínio da avaliação, Santos (2004) e Fernandes (2009) são consensuais na necessidade da existência de uma agenda de avaliação, mencionando a existência de poucos estudos nesta área. Acresce-se, ainda, que numa pesquisa realizada posteriormente, no âmbito do projeto AREA[1], não foram encontrados estudos na área da regulação do ensino, o que deixa antever a pertinência deste estudo.

Este texto reporta uma parte de uma investigação que tem como objetivo compreender como professores do 2.º ciclo desenvolvem práticas avaliativas reguladoras num contexto com recurso à tecnologia e as usam no aperfeiçoamento do processo de ensino. Para a concretização deste objetivo, foram definidas as seguintes questões: Como se caracteriza a planificação de uma prática avaliativa reguladora envolvendo tecnologia? Como se concretiza essa prática avaliativa na sala de aula? De que modo se procura integrar essa prática na regulação do processo de ensino? O presente artigo foca-se nas práticas do professor João.

Regulação do ensino

Uma prática efetiva de avaliação reguladora depende do envolvimento do professor num ciclo de questionamento e de construção do conhecimento (Timperley, 2014).

Assim, desenvolvemos um modelo de aprendizagem e regulação do professor (fig. 1) no sentido de contribuir para um melhor conhecimento do papel da utilização da avaliação reguladora na regulação do ensino. Partindo das necessidades do contexto de ensino, dos seus conhecimentos, das suas crenças e conceções, assim como do conhecimento de si próprio, o professor planifica estratégias avaliativas e leva-as à prática na sala de aula. Posteriormente, em sessão conjunta, interpreta o impacto das estratégias para a aprendizagem dos alunos, reflete sobre o trabalho desenvolvido e usa esse conhecimento no aperfeiçoamento do processo de ensino.

Ao *planificar estratégias avaliativas*, o professor *identifica o conhecimento e as capacidades dos alunos*, ou seja, o que sabem os alunos, o que precisam aprender e

[1] Avaliação Reguladora no Ensino e Aprendizagem

saber fazer. *Seleciona fontes de recolha de evidências* no sentido de operacionalizar uma prática de avaliação reguladora que proporcione o desenvolvimento das capacidades dos alunos. Ao *promover produções significativas dos alunos,* o professor questiona-se sobre como construir tarefas que contribuam para a aprendizagem e para melhorar o perfil das produções dos alunos, tendo por base o conhecimento dos alunos.

O professor leva à prática as estratégias concebidas e *envolve os alunos nas estratégias de aprendizagem* em que os gestos profissionais do docente contribuem para esse envolvimento. Segundo Jorro (1998), gestos profissionais são aqueles que se opõem aos gestos de caráter rotineiro e que, por isso, surgem da reflexão em ação. Manifestam uma intenção pedagógica e devem estar em sintonia com o projeto profissional do docente.

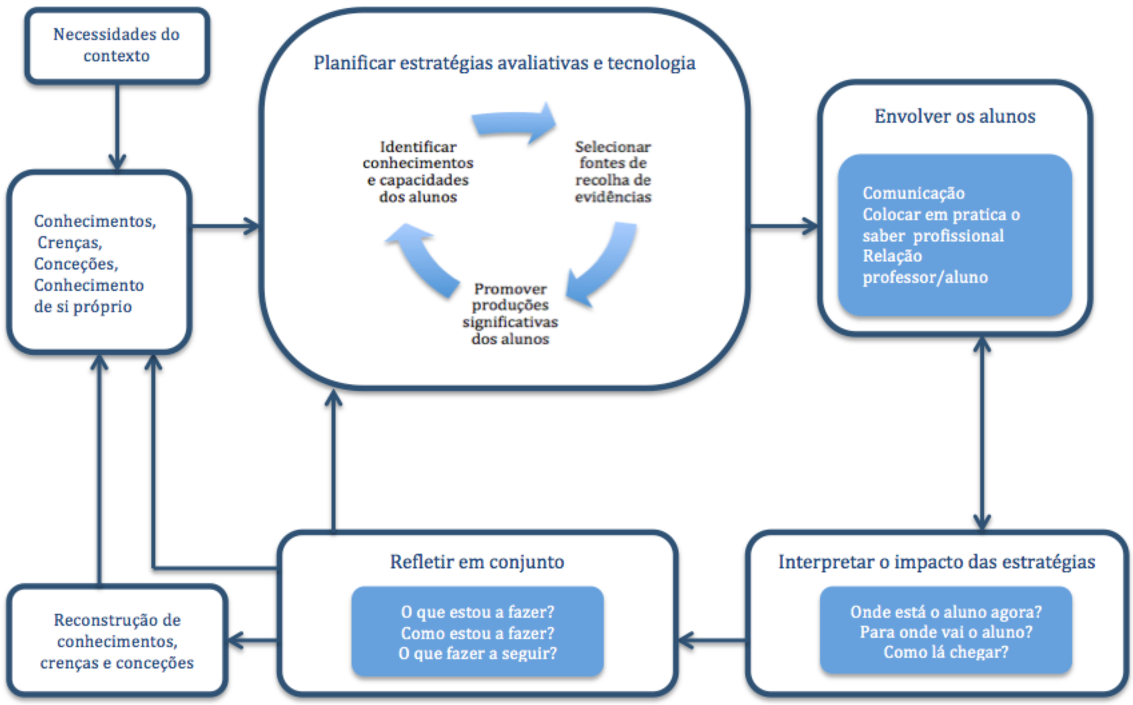


Figura 1. Modelo de aprendizagem e regulação do ensino

Os gestos linguísticos permitem ao professor estabelecer *comunicação* com os alunos, *colocar em prática o saber profissional* revela-se na forma como orienta a atividade intelectual dos alunos. O tipo de *relação entre professor/aluno* deve estar de acordo com o formato de avaliação escolar que coloca em prática (Jorro, 2006).

Interpretar o impacto das estratégias para a aprendizagem dos alunos permite ao professor questionar-se sobre onde está nesse momento o aprendente, para onde vai, e como deve lá chegar. Esta avaliação garante entender se a identificação dos progressos realizados pelos alunos são adequados aos parâmetros discutidos e nas áreas em que os alunos precisam melhorar (Black & Wiliam, 2009; Timperley, 2014).

Com a dimensão *refletir em conjunto* o professor reflete com os colegas e com especialistas, questiona o que faz, como faz e o que deve fazer a seguir. No final o professor volta ao ponto de partida se identificar novos desafios, ou novos ciclos de reflexão, reconstruindo conhecimentos, crenças e conceções contribuindo, assim, para melhorar as suas competências e aprofundar o conhecimento profissional (Butler, 2005; Timperley, 2014).

Planificar o ensino para a aprendizagem

No sentido de contribuir para o conhecimento da forma como os professores planificam as suas estratégias, John (2006) menciona dois tipos de planificação, a naturalista e o método interacional. A *planificação naturalista* inicia-se com atividades e ideias que dela decorrem antes de surgirem os objetivos que não são, por isso, determinados à partida. Estes planos têm em consideração as necessidades dos alunos e fluem como um processo cíclico funcionando como referência para a aula. O *método interacional* privilegia o caráter interativo que se baseia mais num conjunto de princípios desenvolvidos gradualmente que se vão ajustando durante o ensino interativo.

Este último tipo de planificação é mais característico dos professores experientes que realizam mais planos mentais do que escritos dependendo menos dos materiais associados ao currículo (John, 2006; Superfine, 2008). Estes professores desenvolvem uma planificação mais compreensiva e mais aberta no sentido de dar resposta a questões do tipo: O que quero que os alunos aprendam?; Que conhecimentos e competências são importantes para que os alunos aprendam melhor; Como os objetivos de aprendizagem e os resultados podem informar mais e melhor a planificação seguinte; Que recursos podem ajudar a envolver os alunos na aprendizagem (John, 2006).

Contexto de aprendizagem

A tarefa para o estudo da área do paralelogramo foi planeada em duas sessões de trabalho colaborativo (S13 e S14) e finalizada em trabalho individual. Foi desenvolvida em duas aulas de 90 minutos cada, trabalhando os alunos em pequenos grupos.

Na aula 1 (A1), os alunos tiveram acesso a um ficheiro Geogebra e a um conjunto de questões em suporte papel (ver anexo), com a intenção de favorecer momentos de discussão e reflexão no trabalho de grupo. A tarefa apela à descrição, explicação das experiências realizadas e ao registo das conclusões, abrindo caminho para a exploração de variabilidades, regularidades e formulação de conjeturas (Pierce & Stacey, 2013).

À organização desta tarefa, de natureza exploratória, esteve associada uma prática de avaliação reguladora, nomeadamente à utilização de critérios de avaliação pelos alunos (ver anexo) e à avaliação entre pares. Os critérios de avaliação, que definem o que é importante em cada momento, são as regras a que nos referimos para dizer que um aluno realizou de certa forma um trabalho, adquiriu um certo conhecimento ou desenvolveu uma certa capacidade (Nunziatti, 1990). É, por isso, uma ferramenta de diálogo entre avaliadores e avaliados (Vial, 2001), colocando a aprendizagem em termos da lógica do aprendente e do acesso à autonomia. A coavaliação, como um processo de envolver os alunos na avaliação do trabalho dos seus colegas, permite perceber, mais profundamente, o que os alunos aprenderam (Tillema, 2014).

Pretendeu-se desenvolver uma postura reflexiva de modo a que todos compreendessem não só o que estavam a fazer, mas também o que alterar em direção à aprendizagem (Black & Wiliam, 1998; Nunziatti, 1990; Wiliam, 2007). Os erros e/ou as dificuldades foram encarados como sinais e geridos no sentido de assegurar uma boa gestão de ensino e aprendizagem (Pinto & Santos, 2006).

Na aula 2 (A2), destinada a um momento de coavaliação, o professor organizou a troca dos trabalhos entre pares de grupos. Cada grupo analisou o trabalho de outro grupo, e através do preenchimento de uma grelha própria elaborou pistas, recorrendo aos critérios de avaliação, para ajudar os seus colegas a melhorar as suas produções (ver anexo). No final, as produções dos alunos e a ficha, onde foram registadas as pistas, voltaram aos grupos iniciais para que estes pudessem aperfeiçoar as suas produções.

Opções metodológicas

O estudo é de natureza interpretativa e a modalidade é de estudo de caso. Ao longo do ano letivo de 2014/15, num contexto de trabalho colaborativo entre a investigadora e dois professores de Matemática (João e Ana) a lecionar o 5.º ano de escolaridade, foram selecionados conteúdos programáticos, construíram-se tarefas e conceberam-se estratégias avaliativas concretizadas em sala de aula, procurando integrar as informações recolhidas na planificação seguinte.

Neste texto, é apresentado como João planifica, envolve os alunos, para o estudo da área do paralelogramo, e interpreta o impacto das estratégias para a aprendizagem dos alunos (S15). João é professor do 2.º ciclo do ensino básico, com 15 anos de serviço e uma licenciatura em variante Matemática-Ciências, de uma Escola Superior de Educação Portuguesa.

A recolha de dados foi feita através da observação das sessões de trabalho e de aulas, ambas acompanhadas de registo áudio e de recolha documental como produções de alunos, numa fase inicial e após a intervenção da coavaliação, e materiais realizados no âmbito da prática de ensino. Coube ao professor João a tarefa de elaborar o suporte informático e à professora Ana a construção da tarefa em suporte papel.

A análise de dados seguiu a análise de conteúdo (Bardin, 2011). As categorias de análise foram constituídas tomando por foco de atenção as fases do quadro teórico "Planificar estratégias avaliativas e tecnologia", "Envolver os alunos" e "Interpretar o impacto das estratégias" (fig. 1).

Planificar estratégias avaliativas

Identificar conhecimentos e capacidades dos alunos. Durante as sessões, sobre como desenvolver o ensino e a aprendizagem da área do paralelogramo, os professores identificam o que os alunos sabem e/ou precisam aprender ou saber fazer. Os alunos já conhecem a fórmula da área do retângulo mas a expressão "altura" surge, pela primeira vez, quando tomam contacto com a noção de área do paralelogramo. João reconhece que os alunos têm uma noção do conceito de altura associada às propriedades dos poliedros o que pode dificultar a apropriação da linguagem.

> Aqui na área fala-se em altura porque vem na fórmula. Eles relacionam a altura com os poliedros, com os polígonos é mais ... [largura]. (S14)

São, também, analisadas as capacidades dos alunos relativas à elaboração das produções escritas. João considera que a linguagem matemática ainda está comprometida e, por isso, é uma capacidade que é preciso desenvolver (falas 1 e 3). Por outro lado, a apropriação dos critérios de avaliação ainda precisa ser fortalecida, tendo em consideração o trabalho desenvolvido anteriormente (fala 1):

1. *João*: Eu tive um grupo que teve muita dificuldade nos comentários e a relacionar os comentários com os critérios. Porque eles têm muita dificuldade em escrever. Acho que o problema principal tem a ver com isso. Quando estão a falar até vão falando

qualquer coisa mas depois até que comecem a escrever. Eu vejo muito [a dificuldade] ao nível do Português.

2. *Inv*: É do português ou da linguagem matemática?
3. *João*: Junta as duas coisas. A maneira de escrever é um bocado atabalhoada e depois acaba por complicar também a nível da matemática. (S13)

Selecionar fontes de recolha de evidências. Para a estratégia avaliativa do estudo da área do paralelogramo surge a ideia de trocar as produções entre os grupos. O professor começa a estruturar a forma como irá decorrer a atividade de coavaliação. O feedback está agora a cargo dos próprios alunos, por isso, comparar o que está registado com as etapas dos descritores dos critérios de avaliação é uma indicação essencial (fala 3).

1. *João*: Eles trocam entre eles, de certa maneira são eles que fazem os comentários.
2. *Ana*: E dizem o quê? Eles não sabem [fazer comentários].
3. *João*: Podiam ver em que etapa é que está aquela resposta. O que é que considera em relação aquele grupo, qual a etapa e o que é que eles melhoravam. (S13)

João considera que, inicialmente, os alunos terão tendência para fazer juízos de valor sobre os trabalhos em apreciação (fala 1). Mas, no sentido de os ajudar a perceber o que se pretende faz uma alusão à utilização do jogo da caça ao tesouro (fala 3).

1. *João*: Eles vão ter tendência para dizer que está mal.
2. *Inv*: Pois vão, mas podemos tentar que eles digam em código.
3. *João*: Uma caça ao tesouro. Vamos ver se eles conseguem. (S14)

Os professores analisam as etapas da atividade proposta aos alunos e identificam o que estes têm de saber fazer, que descritores são considerados durante a elaboração da tarefa e devem ser usados durante a apreciação do trabalho dos colegas no sentido de se prepararem, também, para as situações de aula (falas 1 e 3).

1. *João*: Sim. Naquela [questão] como transformar um no outro, estão a fazer uma descrição e ao mesmo tempo uma explicação.
2. *Ana*: Mas quando estão a usar os seletores estão só a explicar, não estão a fazer nenhuma estratégia.
3. *João*: Aí estão a experimentar e a fazer uma descrição do que é que eles viram lá. Mas a estratégia será só então para a última [questão]. (S14)

Promover produções significativas dos alunos. No sentido de promover produções significativas dos alunos que fomentem a aprendizagem, discute-se as linhas orientadoras do documento em suporte informático. A construção de um retângulo que, através da função de arrastar do Geogebra, se transforma num paralelogramo ganha expressão. Contudo, a professora Ana considera que o retângulo deve permanecer como referência para os alunos:

João: Se eles construíssem o retângulo no Geogebra usando as linhas paralelas e depois arrastavam e ficam com o paralelogramo? E aí eles primeiro no retângulo usavam aquela [função] da medição da área e quando arrastavam para o paralelogramo.

Ana: Se calhar era bom ficar lá sempre o retângulo, como referência. (S13)

A discussão coloca-se, então, sobre como apresentar o ficheiro. Utilizando a interseção de retas constitui-se uma rede de pontos que os alunos vão usar para construir os polígonos. Terão, ainda, à sua disposição dois segmentos de reta a considerar como base de cada um dos polígonos. João propõe, assim, uma construção que permita aos alunos mobilizar as propriedades dos polígonos mas, também, a exploração para a identificação da área (fala 1 e 5).

1. *João*: Se calhar eles começavam pela construção do retângulo. Até para eles terem a "base" para a medição das áreas.
2. *Inv*: Ter uma parte e eles fazerem o resto?
3. *João*: Sim. Se tivéssemos essa base já construída e fossem só fazer a área.
4. *Inv*: Fariam os segmentos de reta?
5. *João*: Sim. Podem depois medir a área e fazer de início o paralelogramo. Em vez de dar as [retas] oblíquas, eles têm que escolher os pontos. Vou tentar e ver o que é que sai. (S13)

Posteriormente, o professor, em trabalho individual, elaborou o ficheiro Geogebra que voltou à discussão na sessão seguinte. João menciona que usou dois seletores que permitem aos alunos alterarem a altura e o comprimento das bases dos polígonos.

João: A ideia era eles completarem deste lado o retângulo e deste lado fazerem o paralelogramo. Eles iam aqui e faziam o paralelogramo obliquângulo e depois iam à área e selecionavam para aparecer a área de cada um. Aqui eles podem alterar a largura e aqui o comprimento. E ficam com inúmeras hipóteses.
Inv: E vão vendo que a área é a mesma?
João: Sim. (S14)

A construção do ficheiro tem "escondida" uma translação para, no fim, permitir visualizar a transformação de um polígono no outro. Contudo, o professor percebe que o ficheiro colocava os alunos numa posição de espectadores não contribuindo, assim, para o desenvolvimento de conjeturas que relacionam a área do retângulo com a área do paralelogramo (falas 1 e 3). Assim, altera-se a linha orientadora do ficheiro para permitir aos alunos a elaboração de conjeturas e contribuir para que as produções dos alunos sejam mais significativas para a aprendizagem (fala 3).

1. *João*: O que eu tinha feito é que ele [software] vai desenhar aqui um triângulo que vai-se movimentar aqui. Mas se calhar nem é preciso.
2. *Inv*: Aliás vocês tinham referido que pretendiam que eles tivessem que pensar nas relações.
3. *João*: Pois, mesmo a nível matemático se se fizer assim eles eram espectadores. E eles conseguem dessa maneira chegar à fórmula. Está bem! Vou tirar a translação porque não vale a pena. (S14)

No final o ficheiro apresenta um conjunto de pontos e dois segmentos de reta. Estes segmentos de reta iguais (bases) são o ponto de partida para iniciar a construção de um retângulo e de um paralelogramo (fig. 2).

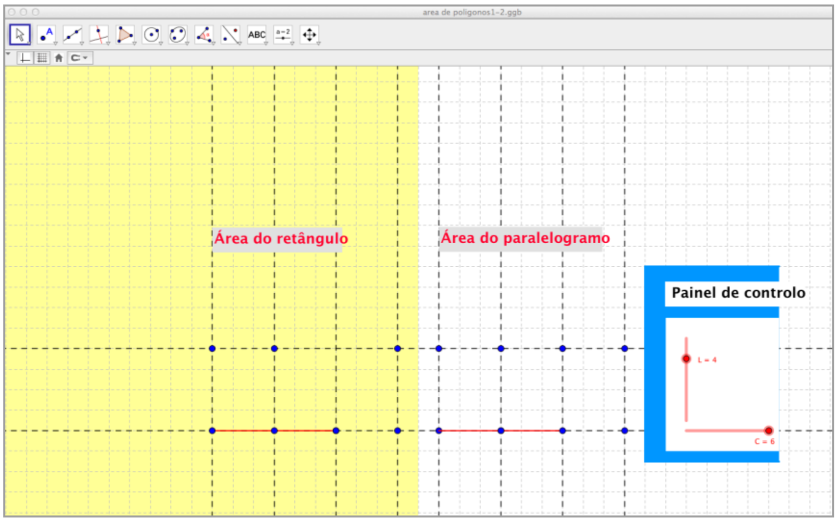


Figura 2. Ecrã do ficheiro Geogebra

Envolver os alunos

Comunicação. Existem regras e normas que estão patentes na estrutura da tarefa, nomeadamente nas questões destinadas às construções geométricas e às indicações relativas aos comandos do Geogebra. O grupo constrói um polígono diferente do que está mencionado e tenta, mesmo assim, avançar no trabalho. O professor questiona os alunos, dando oportunidade de serem eles próprios a detetar o erro, como se pode ver pelo extrato seguinte (falas 1 e 3).

1. *João*: Vamos olhar para ali. Eu queria saber o nome daqueles polígonos.
2. *Alunos*: Triângulo.
3. *João*: E então o que diz lá em cima?
4. *Alunos*: Retângulo.
5. *João*: Então e está certo?
6. *Aluno*: Não. (A1)

Outra das situações evidenciadas diz respeito a momentos em que o professor percebe que os alunos não conseguem obter o quadrilátero. O professor revela a necessidade de introduzir saberes relativos à utilização de alguns procedimentos do software. Os alunos são informados da necessidade de percorrer todos os vértices, assinalando-os com a utilização do rato de modo a fechar a figura, pois, só assim, é considerado como um polígono pelo software:

> Vocês têm mesmo que começar nos pontinhos azuis. (...) Faz lá, vês? Já fechou ... têm que ir aos quatro vértices, senão não fecha, está bom? (A1)

Devido à dificuldade manifestada pelos alunos relativa à noção de conjetura o professor tenta associar esta noção ao trabalho realizado anteriormente, atribuindo sentido escolar aos conhecimentos dos alunos. O grupo não corresponde e, por isso, considera oportuno revisitar a noção de conjetura de uma forma clara para que a continuidade do trabalho não seja prejudicada:

1. *Aluno*: O que é uma conjetura?

2. *João*: Conjetura? Já houve um trabalho anterior que fizeram uma conjetura, não foi? ... No trabalho anterior dos triângulos também houve a necessidade de fazer uma conjetura em relação aos triângulos. E a conjetura era sobre o quê?
   [Alunos pensam]
3. *João*: Uma conjetura é como se fosse uma regra que vocês têm que descobrir. Qual é a regra, ok? Se calhar desta maneira percebes mais facilmente. Mas repara a conjetura é sobre o quê?
4. *Alunos*: Sobre os paralelogramos. (A1)

Colocar em prática o saber profissional. Os alunos estão a ler e a tentar compreender o que os colegas registaram nas suas produções. Simultaneamente, utilizam os critérios de avaliação para redigir uma pista, caso considerem que o trabalho realizado necessita de ser melhorado. O grupo indica o critério e o respetivo nível que entende caracterizar o trabalho ali registado, mas está com dificuldades no registo da pista. O professor percebe que os alunos estão a relacionar o nível do critério com o tipo de comentário que devem registar (fala 2). Assim, orienta a atividade de manipulação de conceitos para ajudar os alunos a dar uma pista que ajude a melhorar a produção dos colegas:

1. *Aluno*: Stor eu aqui escrevi o mesmo que escrevi ali [nível do critério mas para critérios diferentes] só que não sei se devo escrever o mesmo que escrevi ali [pista]!
2. *João*: Vocês acham que os critérios são iguais?
3. *Aluno*: Ali pedíamos para explicar melhor e também "utiliza linguagem matemática com imprecisões".
4. *João*: Mas isso é um critério? Quais são os critérios que temos aqui nesta ficha. Os critérios são, o quê? ... Lê lá quais são os critérios! (A2)

Nas duas aulas, o professor revela orientar a atividade do raciocínio matemático. Os alunos, na aula 1, realizam experiências com tecnologia, registam as conclusões e a forma como pensam recorrendo a esquemas. O professor, através do questionamento oral, coloca questões que podem ser usadas pelos alunos como referências, relembrando experiências que realizaram com o Geogebra. (falas 1, 3 e 5):

1. *João*: Isto é o quê?
2. *Aluno*: Um paralelogramo. Antes isto estava assim, depois pusemos isto, este ponto aqui e puxamos este ponto para aqui e este para aqui.
3. *João*: Para transformar este paralelogramo no retângulo o que é que viam no Geogebra?
4. *Aluno*: O paralelogramo tinha a mesma área que o retângulo.
5. *João*: Repara que nós vamos transformar um no outro. (A1)

Na aula 2, os alunos recebem o feedback realizado pelos colegas. Um dos grupos precisa de reescrever as conclusões das experiências realizadas, mas revela dificuldades em melhorar o seu trabalho. O professor questiona o grupo sobre o que era preciso melhorar. O aluno porta-voz do grupo tenta descrever a ação de movimentar uma parte do paralelogramo, explicando na figura (fala 4). O professor envolve os restantes colegas tentando que estes validem, ou não, a transformação que o colega está a sugerir (fala 6). Um dos alunos do grupo reconhece que o processo indicado não é uma forma de manter a mesma área nas duas figuras, tornando-a ainda maior e não servindo o propósito (fala 7):

1. *João*: Qual era a pergunta? Na 9 [questão] qual era a pergunta?
2. *Aluno*: Transformar um retângulo num paralelogramo.
3. *João*: Como é que eu posso transformar este paralelogramo num retângulo?
4. *Aluno*: Posso mexer este.
5. *João*: Pronto e mexias como?

[O aluno assinala na folha]

6. *João*: Vejam lá a ideia do Luís. E ficava igual a isto?
7. *Aluno*: Ficava maior.
8. *João*: Quando tinham um retângulo e um paralelogramo o que é que viram em relação à área?
9. *Aluno*: Tinham sempre a mesma área. (A2)

Relação professor/aluno. O professor mantém uma postura de incentivo à participação de todos os alunos no trabalho de grupo. Quando é solicitado pelos alunos, procurando a sua aprovação, o professor envolve os alunos na criação de um produto de todos: “Devem perguntar uns aos outros o que é que vocês acham” (A2).

Ao longo da atividade matemática o professor é questionado sobre a unidade de medida a utilizar, mas a resposta ocorre prontamente, vinda de um outro aluno. O professor respeita as intervenções de todos alunos e espera que sejam aceites, ou não, pelos seus pares, contribuindo para o incentivo à colaboração de todos no trabalho de grupo. Contudo, intervém discretamente para que o assunto não continue sem regulação (fala 5):

1. *Aluno*: Stor cada quadradinho mede quanto?
2. *Aluno*: 1 centímetro
3. *Aluno*: Muito obrigada
4. *Aluno*: E depois fazes vezes 4.
5. *João*: Mas olhem isso não é importante. Ok?
6. *Aluno*: Então contamos com os quadradinhos?
7. *Aluno*: Ok. Estavas-me a baralhar. (A1)

Interpretar o impacto das estratégias

Onde está o aluno agora e para onde vai? Os alunos revelaram dificuldades em transformar o paralelogramo num retângulo durante a elaboração das suas produções e esta situação é reconhecida, pelo professor, como transversal a quase todos os grupos de alunos:

> Eles perceberam que o retângulo e o paralelogramo eram equivalentes, isso eles perceberam. Não conseguiram perceber como é que transformavam um no outro. Tirar aquele triângulo e colocá-lo no outro sítio, só um grupo é que conseguiu logo fazer isso. (S15)

Um dos grupos decompunha o paralelogramo usando triângulos mas na fase seguinte apagavam o triângulo em vez de o deslocar para outra posição. João colocou questões e relembrou experiências já vividas pelos alunos, mas mesmo assim não conseguiram ultrapassar a situação.

> Tiravam o triângulo deste lado e tiravam daquele, ou seja, cortavam. Não perceberam que tinham que dar aqui a volta. E eu estive ali a tentar dar a volta. Falei nos pentaminós para eles perceberem o que havia ali, mas

> eles não conseguiram. Eu estava à espera do clique, por isso é que eu empatei mais um bocadinho [a aula] e não fizemos a revisão final. (S15)

Como lá chegar? Em sua opinião, a qualidade do feedback produzido pelos grupos ajudou os seus colegas a refazerem as suas produções. Mas o contacto com as produções dos outros grupos criou, também, momentos de aprendizagem entre os diversos grupos. Deste modo, o professor faz uma referência positiva à atividade de coavaliação:

> Eu acho que eles terem visto o trabalho dos outros ajudou a melhorar o trabalho deles. Não foi em todos os grupos, mas no grupo da Ana isso foi muito visível. Também a identificação dos critérios e as pistas que eles deram foram muito boas para os outros. E então quando os outros aceitaram as pistas, acho que isso os ajudou bastante. (S15)

O professor refere que a combinação dos grupos também contribuiu para a aprendizagem dos alunos. A troca de grupos não foi totalmente intencional já que no final da primeira aula dois dos grupos terminaram antes dos restantes e proporcionou-se, assim, a troca de trabalhos. Contudo, a seleção dos restantes grupos já teve em consideração a qualidade das produções dos grupos colocando-os numa situação heterogénea relativamente ao trabalho realizado:

> Na primeira vez eram aqueles dois grupos que tinham terminado, mas depois como eram três grupos teve que ser uma troca. E a ideia era que o grupo da Sofia desse o trabalho ao grupo do Luís que era assim mais fraquinho para eles terem contacto com isso e ao mesmo tempo revessem o trabalho do grupo da Raquel. (S15)

O professor pensa numa forma de organizar a próxima aula no sentido de contribuir para fazer os alunos "chegar lá". João considera que seria uma boa ideia usar paralelogramos em papel, pedir a um grupo para mostrar a transformação e terminar com a aplicação informática que visualizava a transformação:

> O que se pode fazer é levar uns paralelogramos e eles mostrarem aos outros como se cortava para se tornar num retângulo. Se calhar era importante uma coisa deste tipo, para eles perceberem que o que está em comum são as bases e a altura. Se calhar este grupo mostrar como fez e finalmente a utilização daquela aplicação. (S15)

Conclusão

As evidências revelam que a planificação de estratégias avaliativas e tecnologia foi elaborada segundo as necessidades dos alunos. Iniciou-se com ideias para atividades que foram fluindo num processo cíclico, como uma planificação mais compreensiva e aberta (John, 2006). Este processo tem como pilares "Identificar os conhecimentos e capacidades dos alunos", "Selecionar fontes de recolha de evidências" e "Promover produções significativas dos alunos" (Timperley, 2014).

O primeiro revela-se tanto nos tópicos matemáticos como na dificuldade que os alunos apresentam ao elaborar as suas produções escritas ou seja, tem em consideração o que os alunos sabem e/ou precisam saber.

Selecionar fontes de recolha de evidências revela-se na identificação das capacidades e/ou dificuldades dos alunos relativas à forma como desenvolvem as suas produções escritas e na utilização dos critérios de avaliação.

Para promover produções significativas dos alunos, o professor recorre à identificação dos conhecimentos anteriores bem como aqueles que devem adquirir. Revela-se na discussão pormenorizada sobre o que é essencial usar e o que pode ser evitado na elaboração do ficheiro Geogebra, para levar à elaboração de conjeturas.

Discutindo como as categorias de análise se revelam nos gestos profissionais do professor, ao envolver os alunos nas estratégias de aprendizagem, verifica-se a diversidade das decisões que o professor toma no sentido de orientar o processo de génese instrumental do aluno (Drivers et al., 2010). O professor acompanha o trabalho regulando regras e normas ajudando os alunos a lidar com a sintaxe e a semântica do *software*. Assim, contribui para reduzir obstáculos que possam comprometer o processo de aprendizagem realizado pelo próprio aprendente.

Colocar em prática o saber profissional surge na aula com a estratégia avaliativa de coavaliação. Ajuda a orientar a atividade dos alunos na utilização dos critérios de avaliação, a compreender as produções realizadas pelos seus pares, assim como, a relacionar, de forma adequada, pistas com os critérios de avaliação. Mas, também, revela *orientar a atividade do raciocínio matemático* quando os alunos registam as suas conclusões e a forma como pensam.

A Relação professor/aluno revela-se através do incentivo ao aluno, podendo constituir-se como uma característica forte que se encontra em sintonia com o formato de avaliação que coloca em prática, como afirma Jorro (2006).

As evidências revelam, ainda, que o professor interpreta o impacto das estratégias, durante o processo de trabalho em sala de aula, quando refere que os alunos revelaram ter compreendido que os dois polígonos eram equivalentes, através das experiências com a tecnologia. Mas também após a aula quando seleciona uma estratégia alternativa para ajudar os alunos a chegar ao objetivo proposto.

Concluímos que o trabalho realizado na planificação da estratégia avaliativa e tecnologia se desenvolveu no sentido de incentivar e estimular a tomada de decisões dos aprendentes como responsáveis pela sua aprendizagem. Permitiu ao professor agir como um apoio para manter a atividade da aula centrada no aluno. E ajustou a sua ação às necessidades intelectuais dos alunos ficando disponível para perceber o impacto das estratégias na aprendizagem, regulando o ensino (Black & Wiliam, 2009; Nunziatti, 1990).

Num ciclo de aprendizagem e regulação do professor, o conhecimento dos gestos profissionais mais marcantes para envolver os alunos em estratégias de aprendizagem com avaliação reguladora e tecnologia constitui, também, uma mais valia para o processo de regulação do ensino relativamente ao que faz, como faz e o que fazer a seguir.

Referências

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Coimbra: Edições 70, Grupo Almedina. (obra original em francês, publicada em 1977)

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 98*(5), 7-68.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education), 21*(1), 5-31.

Butler, D. L. (2005). L'autorégulation de l'apprentissage et la collaboration dans le développement professionnel des enseignants. *Revue des sciences de l'éducation, 31*(1), 55-78.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213-234.

Fernandes, D. (2009). Avaliação das aprendizagens em Portugal: Investigação e teoria da actividade. *Sísifo, Revista de Ciências da Educação, 9,* 87-100.

John, P. D. (2006). Lesson planning and the student teacher: Re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies, 38*(4), 483-498.

Jorro, A. (1998). L'inscription des gestes professionnels dans l'action. *Revue En Question, 19,* 1-19.

Jorro, A. (2006). L'agir professionnel de l'enseignant. In *Séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la formation*-CNAM, Paris, France.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Guitiérrez & P. Boero (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM. (obra original em inglês, publicada em 2000).

Nunziatti, G. (1990). Pour construire un dispositif d´évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques, 280*, 47-64.

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: four 'early majority' teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(5), 323-347.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). É mesmo possível uma regulação no quotidiano do trabalho do professor e do aluno. *Actas do Profmat 2006*. Lisboa: APM.

Santos, L. (2002) Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), *Avaliação das aprendizagens* (pp. 75-84). Lisboa: DEB, ME.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. In *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (S.E.I.E.M.) (pp. 127-151). Coruña: Universidade da Coruña.

Superfine, A. C. (2008). Planning for mathematics instruction: A model of experienced teachers´ planning processes in the context of a reform mathematics curriculum. *The Mathematics Educator, 18*(2), 11-22.

Timperley, H. (2014). Using assessment information for professional learning. In C. Wyatt-Smith, V. Klenowski, P. Colbert (Eds.), *Designing assessment for quality learning* (pp. 137-149). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Tillema, H. (2014). Student involvement in assessment of their learning. In C. Wyatt-Smith, V. Klenowski, P. Colbert (Eds.), *Designing assessment for quality learning* (pp. 39-53). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Vial, M. (2001). *Se former pour évaluer. Pédagogies en développement*. Bruxelles: De Boeck Université.

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte: Information Age Publishing.

Anexos

Escola Básica do 2º e 3º Ciclos

Avaliação do trabalho de grupo

Verificação do trabalho do grupo: ____

Questões	Critérios	Nível	Pistas para melhorar
8			
9			
10			

Grupo que fez a verificação: ____________________________________

Escola Básica do 2º e 3º Ciclos
Ficha de Trabalho 2 - Matemática – 5º Ano
NOMES: ____________________________ TURMA: ___ DATA: ___/___/___

Tarefa: Área do paralelogramo

Para descobrir a área do paralelogramo vamos utilizar o *software* do Geogebra.

1.Abram *o software* Geogebra.

2. No menu Ficheiro cliquem em Abrir → Ambiente de trabalho → área de polígonos 1

3.Na barra de ferramentas cliquem (Polígono)

4. Construam um retângulo cuja base é o segmento de reta vermelho, para isso cliquem nos vértices (pontos azuis) e novamente no vértice inicial.

5. Construam o paralelogramo cuja base é segmento de reta vermelho, para isso cliquem nos vértices (pontos azuis) e novamente no vértice inicial.

6. Cliquem no botão e selecionem (esta ferramenta fornece o valor numérico da área de um polígono).

7. Cliquem em cima do retângulo e em cima do paralelogramo, e registem na tabela abaixo o que observam.

Área do retângulo	**Área do paralelogramo**

8. Cliquem no botão (Ponteiro – para selecionar um objeto clicamos sobre ele com o rato, após ter selecionado a ferramenta Mover).

Movam os pontos vermelhos do **Painel de controlo** e observem o que acontece com cada um dos polígonos. Façam os vossos registos nas tabelas seguintes.

Tabela 1

	Retângulo	**Paralelogramo**
Comprimento (C)		
Largura (L)		
Área		

Tabela 2

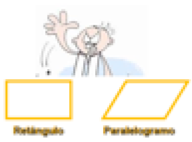
	Retângulo	**Paralelogramo**
Comprimento (C)		
Largura (L)		
Área		

Tabela 3

	Retângulo	**Paralelogramo**
Comprimento (C)		
Largura (L)		
Área		

Descrevam e expliquem todas as experiências que fizeram e a que conclusões chegaram.

9. Será que podemos "transformar" o paralelogramo num retângulo?
Podem usar palavras e desenhos para explicarem a vossa estratégia.



10. Formulem uma conjetura que vos permita calcular a área de qualquer paralelogramo.

Critérios de avaliação/ autoavaliação do trabalho de grupo[1]

Recursos a Estratégias e Processo de Exploração

0	1	2	3
…não apresenta estratégias apropriadas … não apresenta um processo de exploração ou apresenta um processo de exploração totalmente desadequado.	…apresenta estratégias apropriadas … apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.	…apresenta estratégias apropriadas … apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.	…apresenta estratégias apropriadas … apresenta um processo de exploração organizado e completo.

Usar a Informação/Conhecimentos Estudados

0	1	2	3
… não recorre a informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.	… reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da atividade, mas não os aplica adequadamente.	… reconhece e aplica parcialmente informações/ conhecimentos essenciais à exploração.	…reconhece e aplica adequadamente informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.

Descrição e Explicação da Atividade Desenvolvida (Comunicação)

0	1	2	3
… não descreve os passos do trabalho realizado nem a forma como os seus elementos pensaram … não descreve nem explica as conclusões obtidas.	… descreve parcialmente os passos do trabalho realizado e a forma como os seus elementos pensaram. … descreve as conclusões obtidas mas não as explica na totalidade.	… descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas e as conclusões obtidas. …descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	… descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas e as conclusões obtidas. …descreve as conclusões obtidas e explica-as na totalidade.

Linguagem Matemática Escrita

0	1	2	3
… utiliza linguagem matemática.	… utiliza linguagem matemática com imprecisões.	… utiliza linguagem matemática com pequenas imprecisões.	… utiliza linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados.

[1] Adaptado de Semana & Santos (2008). A avaliação e o raciocinio matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

ESPAÇOS INDOOR E OUTDOOR NO ENSINO DA GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA NA PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA COM ALUNOS DO 1º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Teresa B. Neto

Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores

teresaneto@ua.pt

Lúcia Pombo

Departamento de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro, Portugal

lpombo@ua.pt

Palavras-chave: Formação inicial, geometria e medida, educação *indoor* e *outdoor*.

Neste trabalho descreve-se um processo de formação inicial de professores de Matemática, desenvolvida na Prática Pedagógica Supervisionada – Unidade curricular do Curso de Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo. Nesta experiência, de iniciação à investigação, as futuras professoras tiveram como objetivo analisar as dificuldades, o interesse e a motivação dos alunos nas tarefas realizadas em sala de aula e em contexto *outdoor* no contexto do Projeto EduPARK.

O EduPARK (edupark.web.ua.pt) é um projeto de investigação e desenvolvimento em torno de práticas inovadoras interdisciplinares, com atividades *outdoor* curricularmente integradas e suportadas por tecnologias móveis. Neste projeto criou-se uma aplicação interativa em Realidade Aumentada, para dispositivos móveis no Parque Infante D. Pedro, em Aveiro. Esta estratégia articula a procura de locais de interesse no Parque, com desafios educativos e visualização de recursos adicionais ao que é real, como textos, imagens, vídeos, áudios (ver figura 1), o que permite suportar a compreensão de fenómenos não observáveis no momento e no local, assim como o desenvolvimento de competências relevantes no século XXI (Pombo et al., 2017).

Figura 1. Reconhecimento de marcadores de Realidade Aumentada

A aplicação interativa integra guiões didáticos para todos os níveis de ensino e público em geral, com desafios educativos, para que os visitantes possam aprender enquanto usufruem de uma caminhada saudável pelo Parque, que se constitui assim como laboratório educativo. O desenho das propostas pedagógicas permitiu às futuras professoras vivenciar o que é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo e no espaço, tal como é afirmado por D'Ambrósio (2002).

O estudo insere-se numa iniciação à Investigação-Ação, uma vez que integra as seguintes fases: planificação, atuação, observação e reflexão (Coutinho, 2015). Na planificação, a díade de mestrandas desenvolveu um guião específico para uma turma do 4º ano do Ensino Básico no domínio da Geometria e Medida. Na fase de atuação, o guião, integrado na aplicação móvel desenvolvida pela equipa do EduPARK, foi implementado com uma turma de 21 alunos, no Parque, de forma a promover a sua participação ativa na construção de conhecimento e desenvolvimento de valores, potenciando uma aprendizagem autêntica, em contexto formal de aprendizagem. Na fase de observação foi aplicado um inquérito por questionário aos alunos, logo após a atividade. Finalmente, na reflexão, as futuras professoras em conjunto com a equipa do Projeto EduPARK procederam à análise e avaliação da experiência.

Cada guião inclui quatro etapas integrando várias questões e cada etapa corresponde a uma zona do Parque. De seguida apresentam-se resultados referentes a uma questão da Zona da Casa de Chá, a título exemplificativo.

Questão: A planta da casa de Chá está a uma escala de 1:100, ou seja, 1 cm na planta corresponde a 100 cm na realidade.

Pretende-se colocar um rodapé de madeira na sala A. Atenção que a porta tem 1 cm de largura na planta! Quantos metros de madeira são necessários? Selecionem a opção correta. a) 28 metros; b) 27 metros; c) 40 metros; d) 39 metros.

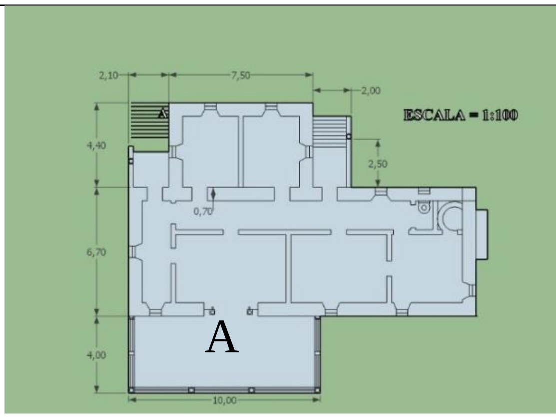


Figura 2. Casa da Chá e planta

Durante a resolução desta questão, as professoras estagiárias identificaram diferentes estratégias de resolução, ou seja, recurso a cálculos numéricos e /ou recurso a diagramas representativos da situação. A principal dificuldade identificada teve relação com a interpretação da escala da planta.

A análise do questionário aplicado aos alunos demonstra que as atividades no contexto *outdoor* promovem a motivação e o interesse dos alunos na sua concretização e minimizam conflitos cognitivos.

A reflexão das professoras estagiárias sobre as práticas desenvolvidas nesta experiência indica o reconhecimento da importância atribuída aos contextos *outdoor*, neste caso concreto a ligação com aspetos históricos e culturais da zona geográfica dos alunos através desta metodologia inovadora.

Referências

Coutinho, C. P. (2015). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. 2.ª Edição. Coimbra: Almedina.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Pombo, L. Marques, M. M., Loureiro, M. J., Pinho, R., Lopes, L., & Maia, P. (2017). *Parque Infante D. Pedro – Património Histórico e Botânico, Projeto EduPARK*. L. Pombo (Coord.). Aveiro: UA Editora. Disponível em http://ria.ua.pt/handle/10773/18026

A IMPLEMENTAÇÃO DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIA ENVOLVENDO RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Rivaldo Firmino Sousa
Escola Estadual Professora Armandina Marques(Salvador/Ba)
rivaldofsousa@gmail.com

Flávia Cristina de Macêdo Santana
Universidade Estadual de Feira de Santana-Ba/Brasil
flaviacris.uefs@gmail.com

Palavras-chave: Tarefa exploratória, relações métricas, professor de matemática, educação fundamental.

O presente estudo teve por objetivo analisar aspetos relacionados à implementação de uma tarefa exploratória envolvendo relações métricas no triângulo retângulo na perspectiva de um professor de matemática da Educação Básica. Usaremos o termo “tarefa para demarcar o objetivo da atividade” (Ponte, 2005, p. 11). A tarefa a que estamos fazendo referência foi elaborada em colaboração com outros professores que faziam parte do Grupo Observatório de Educação Matemática **(**OEM), coordenado pelo professor Jonei Cerqueira Barbosa (UFBA), no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Um dos objetivos do grupo era desenvolver materiais curriculares educativos (MCE) sobre tópicos de matemática para os anos finais do ensino fundamental. Segundo Davis e Krajcik (2005) e Remillard (2005), os materiais curriculares educativos (MCE) visam promover a aprendizagem do estudante e o desenvolvimento profissional do professor. Para a produção dos MCE produzidos pelo grupo nos apoiamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) e nas matrizes de referência, adotada no Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB (Brasil, 2008).

Para este poster socializaremos a tarefa sobre as relações métricas no triângulo retângulo que foi implementada pelo primeiro autor e tinha como objetivo identificar três relações métricas no triângulo retângulo: $b^2 = a.m$, $c^2 = a.n$ e $h^2 = m.n$. A princípio foi realizado um mapeamento de pesquisas sobre o tema e a síntese dos resultados, com vistas a nortear a elaboração dos MCE. Após o mapeamento, o subgrupo passou a fazer protótipos de materiais curriculares, ou seja, versões sucessivas das tarefas produzidas com base em estudos minuciosos a respeito do tema. Os protótipos eram socializados e refinados no grupo. Em seguida, a tarefa foi implementada por professores em uma sala de aula da Educação Básica.

Os dados foram coletados por meio da observação realizada durante a implementação da tarefa. A experiência foi documentada por meio de filmagem e da narrativa elaborada pelo professor. A análise dos dados foi realizada com base em um levantamento preliminar, cujo foco recaiu na experiência vivenciada pelo professor ao implementar a tarefa e narrá-la.

A partir dessa análise, podemos inferir algumas considerações acerca das contribuições do trabalho desenvolvido no OEM para a formação de professores, em especial, para a formação do professor Rivaldo. Os resultados apontam indícios de mudanças na prática empreendida. A reflexão sobre o trabalho desenvolvido em sala de aula, posterior à fase de implementação, contribuiu para o crescimento profissional do professor e para o fortalecimento do grupo, por promover um intenso debate sobre as questões pedagógicas. O professor destacou que o ingresso no grupo foi um diferencial para sua vida profissional. E que a sua participação possibilitou não apenas a mudança de um profissional, mas contribuiu para que mudanças ocorressem também na gestão em sala de aula. Estas conclusões colocam novos desafios para a agenda de pesquisa empírica sobre tarefas sinalizando uma articulação entre Brasil e Portugal.

Agradecimentos

Este trabalho foi escrito como parte da nossa participação no Observatório da Educação Matemática (OEM). Apesar de não serem responsáveis pela produção deste artigo, agradecemos a todos os membros pela oportunidade de trabalharmos em conjunto.

Referências

Brasil. (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental*: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: MEC/SEF, 01-429.

Brasil. (2008). Ministério da Educação. PDE: *Plano de Desenvolvimento da Educação*: Prova Brasil. Ensino Fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB, Inep, 01-199.

Davis, E. A., & Krajcik, J. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, *34*(3), 3-14.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211-246.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (p. 11-34). Lisboa: APM.

Livro de Atas do EIEM 2017

Encontro de Investigação em Educação Matemática

O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

Editores:

Hélia Oliveira

Leonor Santos

Ana Henriques

Ana Paula Canavarro

João Pedro da Ponte

Isabel Vale

Margarida Rodrigues

Neusa Branco

Teresa Pimentel

Local:

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática