actividades de investigação

na aprendizagem da matemática e na formação de professores

organização de

joão pedro da ponte
conceição costa
ana isabel rosendo
ema maia
nisa figueiredo
ana filipa dionísio

Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação
Secção de Educação e Matemática
2002

Ficha Técnica

Título: *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*

Organização: *João Pedro da Ponte, Conceição Costa, Ana Isabel Rosendo, Ema Maia, Nisa Figueiredo, Ana Filipa Dionísio*

Capa: *Sofia Ponte*

Editor: *Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação*

1ª Edição: *Dezembro de 2002*
Tiragem: *500 exemplares*
Depósito legal: *189320/02*
ISBN: *972-8614-03-9*
Impressão: *Gráfica 2000*

Este livro é publicado com o apoio da
Fundação Calouste Gulbenkian

O XI Encontro de Investigação em Educação Matemática teve o apoio do Instituto de Inovação Educacional, da Escola Superior de Educação de Coimbra e do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Índice

1

Introdução

João Pedro da Ponte
Conceição Costa
Ana Isabel Rosendo
Ema Maia
Nisa Figueiredo
Ana Filipa Dionísio

Qual o papel que as actividades de investigação podem assumir no ensino e na aprendizagem da Matemática? Os alunos conseguem investigar questões matemáticas? Os professores são capazes de promover este tipo de trabalho nas suas aulas? Que condições são necessárias para que isso aconteça? Estas são as grandes questões discutidas nos textos publicados neste livro, que reúne a grande maioria das contribuições apresentadas no *XI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, promovido pela Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação e que teve lugar em Coimbra, nos dias 5, 6 e 7 de Maio de 2002.

Em contextos de ensino, de aprendizagem ou de formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento. Significa que formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Deste modo, investigar não significa necessariamente trabalhar em problemas de elevada dificuldade. Significa, isso sim, trabalhar com questões que nos interessam e que se apresentam à partida de modo confuso, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado.

O interesse por este tema decorre do facto de diversos estudos em educação terem mostrado que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Trata-se, no entanto, de uma ideia com muitos aspectos problemáticos: Como promover nos alunos (e nos professores) as atitudes e as competências necessárias para o trabalho de investigação? Como evitar o risco de propostas de trabalho investigativo degenerarem na simples aplicação de um conjunto de procedimentos rotineiros (por exemplo – fazer tabelas ou procurar regularidades)? Como articular a realização de investigações com os outros tipos de actividades que necessariamente terão de existir num currículo de Matemática ou num programa de formação?

Os anos 80 e 90 constituíram em Portugal uma época pioneira em que estas questões foram analisadas em projectos de investigação, muitas vezes em estreita associação com o uso inovador das tecnologias de informação e comunicação. No final dos anos 90, fruto da divulgação dessas experiências, surgiram muito mais professores e educadores matemáticos interessados nesta problemática. Os textos apresentados neste livro, da responsabilidade de um conjunto muito diversificado de autores, uns mais próximos e outros mais afastados desta perspectiva, representam um primeiro balanço das potencialidades e dos problemas inerentes à realização de actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores, nos diversos níveis de ensino.

Uma atenção especial é dada à investigação na aprendizagem da Matemática, analisando o modo como os alunos se envolvem na realização de tarefas de investigação, as dificuldades que sentem, as aprendizagens que realizam e o efeito deste trabalho nas suas concepções sobre a Matemática. Como demonstram diversos textos aqui incluídos, actividades de natureza investigativa, desenvolvidas a partir de propostas de natureza aberta, podem ser realizadas desde o jardim de infância até ao ensino superior, por alunos com desempenho matemático bom, médio e fraco. Para que isso aconteça, é necessário que o professor saiba formular adequadamente as suas propostas, articulando questões mais abertas com questões mais estruturadas e que saiba promover a sua apresentação à turma de forma cuidadosa e estimulante.

O papel da investigação na formação inicial de professores é também objecto de grande interesse. Uma primeira questão que se salienta é a sensibilização dos novos professores dos diversos níveis de ensino – incluindo, portanto, os do 1º ciclo do ensino básico e os educadores de infância – para a natureza do trabalho investigativo em Matemática. É preciso que eles desenvolvam uma atitude favorável à realização deste tipo de trabalho e isso só pode ser conseguido se tiverem múltiplas experiências nesse sentido ao longo de toda a sua formação inicial. Uma segunda questão refere-se ao modo de desenvolver nestes jovens professores as competências necessárias para preparar e realizar aulas de investigação e para reflectir sobre o que acontece neste tipo de situações de ensino-aprendizagem. Trata-se de competências que estão longe de ser triviais, uma vez que implicam um domínio dos conteúdos matemáticos muito mais seguro e uma gestão da sala de aula muito mais complexa do que a que é requerida em aulas de simples exposição da matéria ou de resolução de exercícios. É um trabalho que precisa de começar nas disciplinas de didáctica e ser continuado nas disciplinas de prática pedagógica e nos estágios.

O texto do matemático Carlos Braumann ilustra diversos aspectos do trabalho original de criação matemática. Debruçando-se sobre a sua própria experiência de investigação em Matemática, como estudante e como investigador profissional, o autor sublinha que os alunos podem tirar um grande benefício da realização de trabalho investigativo em Matemática, naturalmente em questões ao seu nível. Fica assim bem patente como esta perspectiva de ensino-aprendizagem pode encontrar um eco favorável dentro da própria comunidade matemática.

O texto de Paulo Oliveira discute os aspectos epistemológicos do trabalho de investigação, em Matemática e no processo de ensino-aprendizagem. O autor descreve quatro tipos fundamentais de inferências no raciocínio matemático – dedução, indução, abdução e transformação – e aponta algumas condições para que estas possam ocorrer na sala de aula, que passará a ser assim um "espaço epistemológico forte".

Os documentos preparatórios dos grupos de trabalho passam em revista o trabalho já anteriormente realizado no nosso país neste campo, em diversos níveis de ensino, e servem de enquadramento para as discussões realizadas neste encontro. Proporcionam, igualmente, pistas sobre as questões a considerar no trabalho futuro a realizar nesta área.

Nos níveis de escolaridade mais elementares, onde vigora um regime de monodocência, as investigações matemáticas têm origem, muitas vezes, em situações da realidade ou do quotidiano dos alunos. No caso do 1º ciclo do ensino básico, a importância da resolução de problemas já é sublinhada nos actuais currículos, em vigor desde o início dos anos 90. Os clássicos *word problems* constituem uma forma de concretizar esta perspectiva. No entanto, nestes currículos não existe grande preocupação em diversificar as tarefas a propor aos alunos, valorizando assumidamente as de natureza mais aberta. Os textos aqui reunidos mostram como os alunos tendem a reagir de modo favorável a este tipo de tarefas. Deste modo, os maiores desafios que se colocam neste nível são os da formação de professores e da construção de materiais curriculares.

A partir do 2º ciclo do ensino básico, ou seja, nos níveis de ensino em que a Matemática constitui uma disciplina diferenciada, o trabalho investigativo pode igualmente desenvolver-se a partir de situações extra-matemáticas ou ter origem em contextos internos à própria Matemática. As possibilidades de se envolverem neste tipo de trabalho alunos usualmente pouco motivados para esta disciplina, com resultados surpreendentes, pela positiva, têm sido sobejamente demonstradas em numerosos relatos de investigação. As grandes questões que ainda se colocam remetem sobretudo para o campo da gestão curricular, nomeadamente o modo de articulação das tarefas de investigação com outros tipos de tarefas, tendo em vista o conjunto dos objectivos curriculares a atingir.

No que se refere à formação de professores, a actividade de investigação comporta duas facetas: a investigação matemática, a realizar na fase de preparação das aulas, no decorrer das próprias aulas, em conjunto com os alunos, ou em momentos posteriores, e as investigações profissionais, sobre aspectos da sua prática lectiva e extra-lectiva. Esta segunda faceta, envolvendo problemas e situações bastante diferentes dos problemas matemáticos, envolve uma problemática própria que começa a ser igualmente objecto de grande atenção no nosso país, dando origem a projectos, artigos e debates em encontros de educação matemática.

A problemática geral dos processos de raciocínio matemático e das inferências próprias deste domínio de pensamento é retomada em diversos textos que traduzem facetas do que se convencionou designar por "raciocínio matemático avançado", incidindo em aspectos como o "sentido do número", os níveis de competência em geometria, o desenvolvimento do conceito de função, o processo de formação de conceitos e a visualização.

Este conjunto de textos evidencia que a realização de investigações matemáticas no campo educativo encontra suporte na reflexão epistemológica e na experiência matemática, é exequível em todos os níveis de ensino e tende a produzir efeitos positivos ou muito positivos junto dos alunos. Trata-se de uma perspectiva susceptível de motivar os professores. Além disso, é compatível com o actual quadro de orientações curriculares dos ensinos básico e secundário. Pode-se dizer que, em termos teóricos e empíricos, esta perspectiva está, globalmente, legitimada.

Por resolver continuam as questões da gestão curricular – como articular este tipo de tarefas no currículo – e na avaliação – não só o modo de avaliar o desempenho dos alunos mas também o modo de integrar os elementos referentes a estas tarefas num sistema global, coerente, de avaliação. Parecendo vantajoso que as actividades de investigação tenham maior expressão no ensino superior, nomeadamente nos cursos dos formação inicial de professores, estamos ainda longe de saber como fazê-lo.

As actividades de investigação, sendo inquestionavelmente uma ideia interessante, não devem ser erigidas em solução milagrosa para todos os males da educação. Sem cair em entusiasmos exagerados – como aconteceu com a ideia da resolução de problemas – devemos ter presente que elas constituem um elemento fundamental do menu educativo mas dificilmente resultam se forem oferecidas como dieta exclusiva. Em vez de uma solução simples, fulminante, é preciso encontrar soluções complexas, flexíveis, de geometria variável, mas potencialmente mais produtivas. Deste modo, é no terreno da concretização prática nos campos do ensino e da formação – envolvendo o desenvolvimento de materiais, a gestão curricular e a construção de dispositivos de formação – que se colocam as mais importantes questões para trabalho futuro.

2

Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática

Carlos A. Braumann
Centro de Investigação em Matemática e Aplicações[1]
Universidade de Évora
braumann@uevora.pt

Introdução

O XI Encontro de Investigação em Educação Matemática escolheu como tema a investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. Considero este tema da maior importância. Por isso e por ser professor e investigador por vocação, quando a comissão organizadora me pediu um testemunho sobre a investigação matemática e sobre o seu papel na aprendizagem da matemática, aceitei entusiasmado e agradecido.

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detectivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Há quem diga que Matemática é demonstração. Não fujamos das demonstrações. Elas são essenciais para se perceber a essência da Matemática e não podem ser substituídas por exemplos ou ilustrações (fazê-lo induz os estudantes a pensar que tal é um método de demonstração logicamente aceitável). Quando a demonstração seja complicada e não se queira fazer, haja a honestidade de o dizer.

Dizer que a Matemática é demonstração é verdade, uma verdade essencial, mas só uma pequena parte da verdade. Antes de demonstrar uma proposição matemática (teorema), é preciso enunciar o teorema a demonstrar. Como se chega lá? Qual o interesse que tem esse teorema? Que problema é que ele resolve? Que mecanismos intuitivos, associados por vezes a métodos de tentativa e erro, que razões estéticas até, nos levam a pensar que a proposição é verdadeira? E, depois de sabermos o que queremos demonstrar, que estratégia usar para o demonstrar?[2]

Uma outra parte da Matemática é a de construir teorias ou modelos matemáticos para estudar certas realidades ou fenómenos da natureza. Esses modelos devem ser suficientemente simples para poderem ser formulados numa linguagem matemática e ser estudados matematicamente e suficientemente apropriados para permitirem resultados úteis para a compreensão do fenómeno e para a previsão do seu comportamento futuro e das consequências de uma intervenção sobre o mesmo.

Os problemas e projectos, mesmo simples, principalmente quando ligados à vida quotidiana ou à descrição de fenómenos naturais[3], permitem o exercício da modelação matemática, ou seja, a transposição para uma linguagem matemática adequada seguida do seu estudo por métodos matemáticos e da interpretação dos resultados em termos da realidade modelada. Esta componente desenvolve uma faceta investigativa aplicada essencial para perceber a função e utilidade da Matemática e para nos dotar de um poderoso instrumento de análise e intervenção. Desenvolve ainda o espírito científico e mostra que em Ciência não há compartimentos isolados e que a Matemática alimenta e é alimentada pelo desenvolvimento científico e tecnológico. Esquecer esta simbiose, como frequentemente nós, professores de Matemática, fazemos, é matar a Matemática do seu principal alimento e motivação, fazendo a Matemática parecer um mero jogo intelectual que busca a autosatisfação dos que com ele se deleitam. Não que, em si, isso tenha algum mal[4]. O problema está se deixamos que o ensino seja monopolizado por esse jogo, com o qual muitos se não deleitam nem vêem nele qualquer interesse ou utilidade, cedo se afastando em definitivo.

Como aprender Matemática, o mesmo é dizer, como aprender a fazer investigação matemática? Vendo fazer e FAZENDO! A simples repetição do que vimos fazer (ainda que com mudanças cosméticas) ou o simples "marrar" podem ajudar a consolidar certas rotinas úteis mas, só por si, não levam "a carta a Garcia".

Pediram-me para falar um pouco da minha experiência de investigador, procurando assim dar um testemunho, necessariamente de carácter pessoal, sobre a actividade de investigação matemática. Para isso, socorrer-me-ei de dois exemplos, um muito antigo (quando era estudante do ensino secundário), outro recente. Dar conta dos processos mentais que subjazem ao trabalho de investigação implica uma sempre difícil auto-análise, pelo que o leitor deve olhar este relato como sendo aquilo que o autor julga ter ocorrido. Incluirei também uma referência à divulgação e validação dos resultados da investigação na comunidade científica.

Não resisto a terminar com algumas considerações sobre as dificuldades que a educação matemática actualmente atravessa.

Um testemunho pessoal de uma investigação escolar elementar

Uma experiência de uma investigação trivial, mas que me deu particular satisfação, vem do ensino secundário, quando fui (há muitos anos) aluno de uma turma especial ("Matemática Moderna") para testar um novo programa curricular coordenado nacionalmente pelo Prof. Sebastião e Silva. Os números complexos faziam parte do programa.

Considere-se um complexo $z=x+iy$ (x e y reais). Suponhamos que $z\neq 0$. Então, ele pode ser representado na forma trigonométrica $z = r \operatorname{cis}\theta$ (representação unívoca se tomarmos $r>0$, $0\leq\theta<2\pi$), onde $\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Note-se que cis é uma função periódica de período 2π e que $\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) = (\operatorname{cis}\theta_1)(\operatorname{cis}\theta_2)$.

Seja $n>1$ natural, $r^{1/n}$ a única raíz real positiva de índice n de r e $w_{k,n} = \operatorname{cis}(2k\pi/n)$. As n raízes de índice n de z são dadas pela expressão $r^{1/n}\operatorname{cis}(\theta/n)w_{k,n}$, com $k=0,1,\ldots,n-1$ (5). Tal reconhece-se facilmente, pois

$$\left(r^{1/n}\operatorname{cis}(\theta/n)w_{k,n}\right)^n = r\operatorname{cis}(n\theta/n)\operatorname{cis}(n2k\pi/n) = r\operatorname{cis}(\theta+2k\pi) = r\operatorname{cis}\theta = z$$

Claro que, nas aulas e nos trabalhos para casa, fizemos alguns exercícios para calcular raízes de números complexos concretos e, em todos os casos, verifiquei que a soma das n raízes de um complexo $z\neq 0$ era nula. Não podia ser coincidência. Se considerarmos a interpretação geométrica de um complexo como um vector que une a origem ao ponto que o representa no plano de Argand e a adição de complexos como a adição desses vectores, vemos que as n raízes de um complexo formam (ver Figura 1) raios da circunferência de centro na origem e raio $r^{1/n}$ orientados para o exterior desta e dividindo a circunferência em n ângulos iguais. Se imaginarmos esses vectores como forças aplicadas na origem, a sua simetria circular implicaria intuitivamente que a força resultante, a soma vectorial das forças aplicadas, tivesse um efeito nulo. Essa era uma explicação intuitiva do resultado, que reforçava consideravelmente a convicção da sua verdade universal, mas não era uma demonstração.

Claro que bastava demonstrar a propriedade para as n raízes da unidade $w_{k,n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$ (técnica da redução do problema a outro mais simples). Com efeito, as raízes de z obtêm-se multiplicando as da unidade pela constante $r^{1/n}\operatorname{cis}(\theta/n)$.

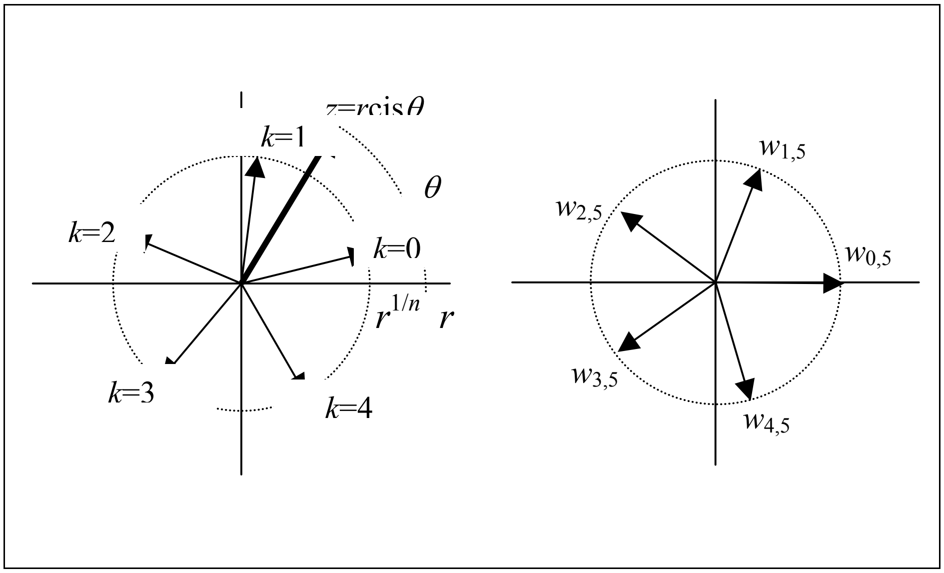


Figura 1. As 5 raízes (correspondentes a k=0,1,2,3,4) de índice n=5 de um complexo $z = r \operatorname{cis} \theta$ (à esquerda) e as 5 raízes $w_{k,5}$ (k=0,1,2,3,4) da unidade (à direita).
As raízes da figura à esquerda obtêm-se multiplicando por $r^{1/n} \operatorname{cis}(\theta / n)$ as raízes da figura à direita.

O problema reduzia-se então a demonstrar que $S = \sum_{k=0}^{n-1} w_{k,n} = 0$.

Para n par, a demonstração era fácil, bastando organizar as raízes em pares correspondentes a vectores com sentidos opostos. Com efeito, $w_{j,n}+w_{j+n/2,n}=0$ (j=0,1,…,n/2–1) pois é a soma de vectores de comprimento unitário e sentidos opostos; a mesma conclusão se obteria algebricamente, atendendo a que

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}(2(j+n/2)\pi/n) &= \operatorname{cis}(2j\pi/n+\pi) = \cos(2j\pi/n+\pi) + i \operatorname{sen}(2j\pi/n+\pi) \\ &= -\cos(2j\pi/n) - i \operatorname{sen}(2j\pi/n) = -\operatorname{cis}(2j\pi/n).\end{aligned}$$

Para n>1 ímpar, as coisas pareciam mais difíceis e, de facto, deram muita luta. Mas geometricamente vê-se (ver Figura 2) que as raízes de índice n da unidade são também raízes de índice $2n$, embora haja naturalmente mais raízes de índice $2n$, que alternam na posição geométrica com as primeiras. Com efeito, temos $w_{k,n}=w_{2k,2n}$. Ora, já sabemos que a soma de todas as raízes de índice $2n$ (que é par) é nula, isto é, $\sum_{j=0}^{2n-1} w_{j,2n} = 0$. Daqui conclui-se que a soma $\sum_{j=0,2,\ldots,2n-2} w_{j,2n}$ das raízes de índice $2n$ com j par (que coincide – basta pôr j=$2k$ – com a desejada soma das n raízes de índice n, isto é, com $S = \sum_{k=0}^{n-1} w_{k,n}$) será igual a menos a soma

$\sum_{j=1,3,\ldots,2n-1} w_{j,2n}$ das raízes de índice $2n$ com j ímpar. Mas isso ajuda pouco se não conhecermos esta última soma (que é, como vimos, igual a $-S$) e não vislumbrava meio de a obter. Reparei mais tarde que cada raíz de índice $2n$ com j ímpar se obtinha rodando a raíz com j–1 (que é par) de um ângulo de $2\pi/(2n)=\pi/n$ no sentido anti-horário (ver Figura 2). Ora uma rotação de ângulo φ (neste caso, o ângulo seria $\varphi=\pi/n$) corresponde algebricamente à multiplicação por cis φ (neste caso, por $\mathrm{cis}(\pi/n)$). Vi, por observação geométrica, aquilo que é também óbvio por cálculos algébricos elementares: $w_{j,2n}=w_{j-1,2n}\mathrm{cis}(\pi/n)$. Isto é, para obter a soma das raízes de índice $2n$ com j ímpar, bastava pegar na soma das raízes pares e multiplicá-la por $\mathrm{cis}(\pi/n)$. Logo $-S=S\mathrm{cis}(\pi/n)$, donde $S=0$, como pretendia mostrar.

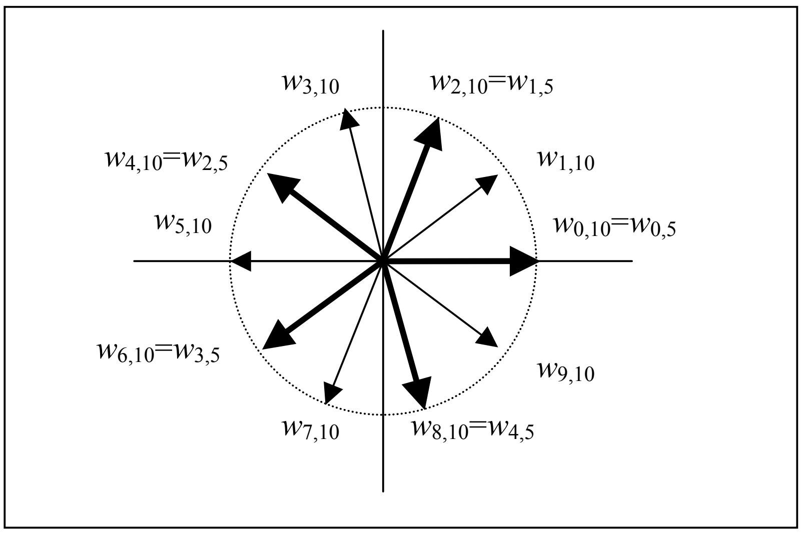


Figura 2. Ilustração para o caso n=5. As raízes $w_{k,5}$ de índice 5 da unidade coincidem com as raízes "pares" $w_{2k,10}$ de índice 10 da unidade (a traço grosso). As restantes raízes ("ímpares") de índice 10 da unidade (a traço fino) obtêm-se rodando as raízes "pares" de um ângulo $\pi/5$.

A demonstração funciona, mas é rebuscada. Mais tarde, descobri, quase por acaso, uma muito mais simples, notando que, para qualquer $n>1$ natural, vem $w_{j,n}=\alpha^j$ com $\alpha=w_{1,n}$. Então a soma das n raízes de índice n da unidade é simplesmente a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\alpha\neq1$ e de primeiro termo $\alpha^0=1$, ou seja, é igual a

$$\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1-1}{1-\alpha}=0,$$

já que $\alpha^n = w_{n,n} = cis(2n\pi/n) = 1$.

Talvez se já conhecesse que $\text{cis}\theta = e^{i\theta}$, que permitiria escrever $w_{k,n} = e^{i2k\pi/n} = (e^{i2\pi/n})^k$, tivesse visto imediatamente que a soma das raízes de índice n era a soma dos termos de uma progressão geométrica. Eis a importância de uma boa notação[6].

Claro que o facto, aliás trivial[7], da soma das raízes ser nula já era conhecido. Com efeito, encontrei-o, muito mais tarde, julgo que como exercício não resolvido de algum livro. Mas, na altura, isso funcionou como uma descoberta e a sua demonstração foi um desafio que deu luta e deu gozo vencer.

Aqui, a "descoberta" fez-se por acaso. Relatarei agora um exemplo de investigação relativamente recente em que funcionou a intuição informada (isto é, baseada numa certa experiência da matéria), e não tanto o acaso, para conjecturar o resultado a demonstrar. Trata-se de investigação matemática aplicada em problemas de crescimento populacional e de pescas. Para a apresentar, porém, é preciso pôr o leitor a par de alguns antecedentes.

O modelo malthusiano de crescimento populacional

O modelo matemático mais natural para descrever o crescimento de uma população animal (ou de bactérias) sem migrações, vivendo num ambiente constante e sem limitações alimentares ou territoriais, é o modelo de crescimento malthusiano (em homenagem a Malthus). Para o descrever, representemos por $N=N(t)$ o tamanho da população no instante $t\geq 0$ e seja $N(0)=N_0>0$ a população inicial. Neste modelo supõe-se que a taxa instantânea (velocidade) de crescimento do tamanho da população, isto é, a derivada $dN(t)/dt$, deverá ser proporcional ao próprio tamanho da população, pelo que $dN(t)/dt = rN(t)$, onde r é a constante de proporcionalidade. Neste modelo, a taxa de crescimento *per capita*[8] (instantânea) $Y(t) = (dN(t)/dt) / N(t)$, que é a taxa de crescimento da população dividida pelo seu tamanho, é a constante r, não sendo por isso influenciada pelo tamanho da população.

A equação diferencial $dN(t)/dt = rN(t)$ é fácil de resolver, visto que $(1/N(t))\,(dN(t)/dt) - r = d(\ln N(t) - rt)/dt = 0$ (há que usar a regra de derivação da função composta), donde resulta que $\ln N(t) - rt$ é constante. Considerando o valor que toma em $t = 0$, essa constante só pode ser $\ln N_0$, pelo que $\ln N(t) - rt = \ln N_0$, daí resultando o comportamento exponencial $N(t) = N_0 e^{rt}$.

Este mesmo modelo matemático pode ser utilizado para descrever um fenómeno aparentemente muito diferente (na realidade, não é tanto assim, já que é um fenómeno que, tal como o crescimento populacional, é de natureza multiplicativa), como seja o capital $N(t)$ de um depósito bancário de capital inicial

N_0 com juro composto continuamente no tempo e com taxa de juro (instantânea) constante $r>0$. Num depósito a prazo típico por determinado período renovável P, o juro acresce ao capital no final de cada período, vindo $N(t)=N_0(1+rP)^{\mathrm{INT}(t/P)}$ (9); o período pode ser um ano, um semestre, um trimestre, um mês, mas podemos imaginar qual seria a situação limite se o período fosse cada vez mais curto (tendendo para zero) e, portanto, o juro fosse composto continuamente no tempo. Com t fixo, como $k=1/P\to+\infty$, viria $(1+r/k)^{kt-1}<(1+rP)^{\mathrm{INT}(t/P)}\leq(1+r/k)^{kt}$ e, como $(1+r/k)^k\to e$, viria $N_0(1+rP)^{\mathrm{INT}(t/P)}\to N_0\,e^{rt}$, ou seja, obteríamos a solução do modelo malthusiano $N(t) = N_0\,e^{rt}$ (10).

O modelo logístico como aperfeiçoamento do modelo anterior

Note-se que, no modelo malthusiano, a taxa de crescimento *per capita* $Y(t)$ é constante (sempre igual a r). Na realidade, à medida que a população aumenta, os recursos alimentares e territoriais disponíveis para cada indivíduo sobreviver e se reproduzir diminuem, pelo que a taxa de crescimento *per capita* terá tendência a diminuir, tanto mais quanto maior for a população. O modelo mais simples consiste em supor que a taxa de crescimento *per capita*, em lugar de ser uma constante r, diminui proporcionalmente ao tamanho da população (ver Figura 3), isto é $(1/N(t))\,(d\,N(t)/d\,t) = r - a\,N(t)$, donde

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

(onde $K = r/a$). É conhecido como modelo *logístico* (supomos $r>0$ e $K>0$).

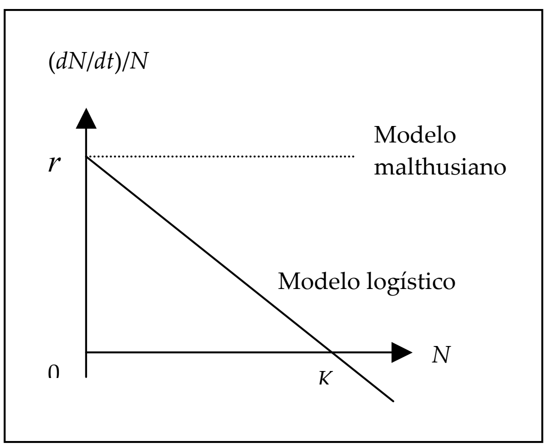


Figura 3. Comparação da taxa de crescimento *per capita* entre os modelos malthusiano e logístico

A proporcionalidade pode ser justificada utilizando argumentos biológicos razoáveis mas não seguros. É fácil ver que, quando a população tiver o tamanho K, a taxa de crescimento d $N(t)$/d t é nula, isto é, a natalidade e a mortalidade equilibram-se. Temos um ponto de equilíbrio da equação diferencial, a que se chama *capacidade de sustento do meio*. Esse equilíbrio é assintoticamente estável, no sentido de que, se o tamanho da população se afastar dele (sem ser demasiado, como seria se a população se extinguisse!), esse tamanho voltará a aproximar-se do valor de equilíbrio à medida que o tempo passa. Já o equilíbrio (extinção) N=0 (também para este tamanho da população a taxa de crescimento é nula) não é estável, pois, se houver uma pequena imigração que torne o tamanho da população positivo, ela crescerá até atingir o valor K, afastando-se de 0.

Com o recurso à mudança de variável $Z(t) = 1/N(t)$ e à regra da derivação da função composta, não é difícil de obter (com algum trabalho)

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K / N_0 - 1)e^{-rt}},$$

o que permite concluir que, caso N_0>0, vem $N(t) \to K$ quando $t \to +\infty$.

Como exemplo, apliquemos aos resultados das experiências de Gause[11] com uma população de *Paramecium Caudatum* em meio de cultura (ver Figura 4). É óbvio que o crescimento não se apresenta como exponencial e que o modelo malthusiano não se ajustaria (salvo enquanto o tamanho da população se manteve em valores baixos), mas o modelo logístico parece ajustar-se razoavelmente. Naturalmente, a realidade e o modelo logístico (que é uma mera aproximação de uma realidade mais complexa) não coincidem exactamente. Há oscilações um tanto ou quanto aleatórias que o modelo não contempla.

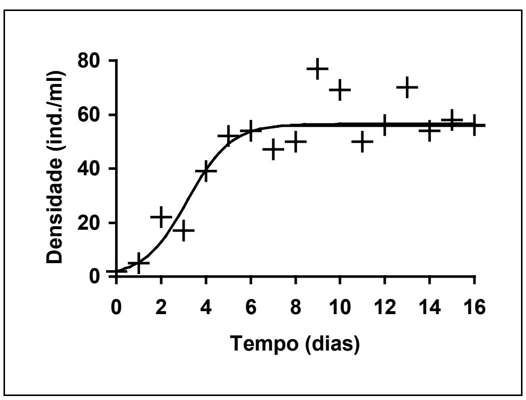


Figura 4. População de *Paramecium Caudatum*; dados das experiências de Gause (+) e ajustamento (curva) do modelo logístico com r=1,04/dia, K=56,5 ind./ml e $N(0)$=2 ind./ml

Note-se que há outros modelos similares que também se ajustam razoavelmente e que também supõem que a taxa de crescimento *per capita* diminui com o tamanho da população, mas de formas diferentes da diminuição proporcional a tal tamanho; também para certos desses modelos há argumentos biológicos razoáveis (embora diferentes dos utilizados para justificar o modelo logístico).

Extensão do modelo logístico para o caso de a população estar sujeita a pesca

O modelo logístico e modelos similares têm sido utilizados para modelar o crescimento natural[12] de um determinado "stock" de peixes sujeito a pesca. Agora, porém, temos de subtrair a taxa de capturas. É razoável supor que ela é proporcional ao tamanho da população se a pesca estiver sujeita a regras fixas e a frota pesqueira tiver características e tamanho fixos. Obtemos o modelo de Gordon-Schaeffer

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t),$$

onde a constante $E \geq 0$ é o esforço ("líquido") de pesca e depende das características da frota e das regras. O problema da determinação do valor de E que optimiza a taxa de capturas em situação sustentada (isto é, em equilíbrio assintoticamente estável) é uma boa aplicação de métodos de determinação de máximos e mínimos de funções.

Verifica-se (ver Figura 5) que existe um equilíbrio assintoticamente estável com população positiva $\hat{N} = K(1 - E/r)$ ([13]) quando o esforço ("líquido") de pesca E é inferior a r; neste caso, há um outro equilíbrio (o correspondente à extinção), mas não é estável, o que significa que, se a população estiver extinta e não for perturbada continuará extinta (é um equilíbrio), mas se sofrer uma pequena perturbação (uma pequena imigração), irá crescer afastando-se desse equilíbrio e aproximando-se do equilíbrio estável acima referido. Em conclusão, se $E<r$ e a população não estiver extinta, ela aproximar-se-á do equilíbrio estável $\hat{N}$, isto é, virá $N(t) \to \hat{N}$ quando $t \to +\infty$. Caso, porém, $E>r$, o único equilíbrio é o da extinção e é assintoticamente estável, pelo que $N(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Que sucederá, porém, se o ambiente onde a população de peixes se situa não for perfeitamente determinístico, mas sofrer oscilações aleatórias resultantes de flutuações no clima, na disponibilidade de alimentos, na predação a que está sujeita, nas doenças que sofre ou em tantos outros factores que afectam as taxas de natalidade e mortalidade.

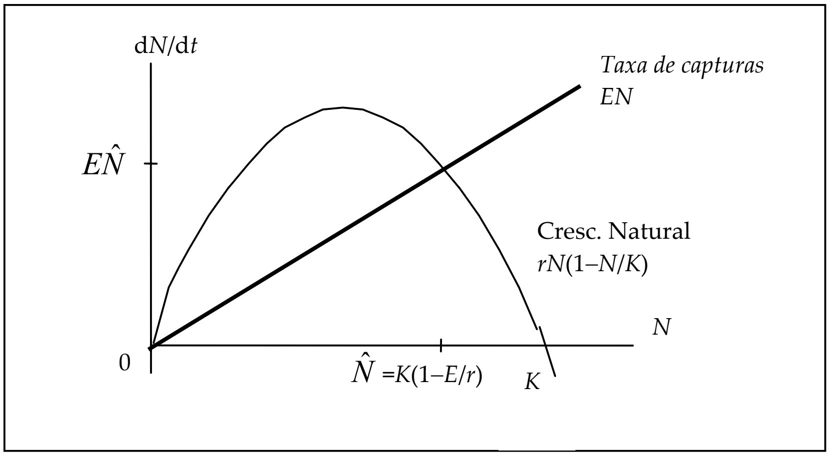


Figura 5. Modelo de Gordon-Schaeffer com $E<r$.

Modelação para ambientes aleatórios

Um modelo razoável para a contemplar essas oscilações aleatórias é presumir que a taxa de crescimento natural *per capita* tem um valor médio e é perturbada por um "ruído"[14], que vamos supor ser branco e gaussiano[15]. Representando por $\varepsilon(t)$[16] o ruído branco gaussiano padrão e por $\sigma>0$ a intensidade do efeito das perturbações aleatórias, a taxa de crescimento natural *per capita* não será $r(1-N(t)/K)$ mas $r(1-N(t)/K)+\sigma\varepsilon(t)$ e o modelo fica a ser a equação diferencial estocástica[17]

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) + \sigma\varepsilon(t)\right)N(t) - EN(t) .$$

A solução da equação é agora mais complicada e depende também do "acaso". Pode, porém, provar-se, com relativa facilidade, que ela existe e é única. Pode também provar-se que, se $E>r$, a população se extingue[18] e que, se $E<r$, a população não se extingue[19].

E será que, no caso $E<r$ (equivalentemente, podemos dizer no caso $E/r<1$), vamos ter um equilíbrio estável como acontecia no modelo determinístico? Tal não sucede porque as perturbações aleatórias do ambiente tendem a alterar o tamanho da população não a deixando estabilizar. Mas será que existe estabilidade num sentido probabilístico? Isto é, será que, embora o tamanho da população não estabilize, a distribuição de probabilidade $F_t(n)$ do tamanho da população estabiliza numa certa distribuição de probabilidade $\hat{F}(n)$, chamada distribuição estacionária, quando $t\to+\infty$. Se assim for, dado qualquer intervalo $[a,b]$, vem que a probabilidade $F_t(b)-F_t(a)$ de $N(t)$ estar nesse intervalo tende para $\hat{F}(b)-\hat{F}(a)$ quando $t\to+\infty$ (isto é, estabiliza). De facto, assim é. Isso permite ter taxas de captura EN que, embora variáveis, têm distribuição de probabilidade conhecida e características, como o valor médio ou a variância, estáveis. Podemos mesmo, escolhendo um esforço de pesca adequado E, optimizar a taxa de capturas média em situação estável[20].

O testemunho pessoal de uma investigação mais recente

O problema que se me pôs é o de saber o que sucederia se o crescimento natural da população não seguisse o modelo logístico mas algum outro modelo mais complexo, desde que biologicamente razoável. Afinal, nós não sabemos qual exactamente o modelo seguido na natureza. Experiências com modelos similares ao logístico deram[20] resultados semelhantes, devendo, porém, comparar-se o esforço de pesca E com a taxa de crescimento natural *per capita* que se obtém quando o tamanho da população tende para zero. Note-se que, no modelo logístico, a taxa de crescimento natural *per capita* é $r(1-N(t))$ e o seu limite quando o tamanho da população tende para zero é r.

Será que tivemos sorte nas experiências que fizemos ou este é um resultado geral? Claro que a convicção de que era um resultado geral era inabalável. Era uma certeza interior. Em Matemática, porém, só se pode dar como certo aquilo que se prova. E o meu objectivo era provar os resultados anteriores quando a taxa de crescimento natural *per capita* fosse arbitrária, desde que satisfazendo condições ditadas pela própria Biologia (havia contra-exemplos para taxas totalmente arbitrárias, mas todos biologicamente aberrantes). Supus, assim, que a taxa de crescimento natural *per capita* era uma função $g(N)$ qualquer[21], desde que suave (de classe C^2) e verificando a propriedade biológica de ser uma função estritamente decrescente do tamanho da população. Tinha ainda de satisfazer as propriedades biológicas de se ter $\lim_{N\downarrow 0} g(N) > 0$ ([22]) , $\lim_{N\to +\infty} g(N) < 0$ ([23]) e $\lim_{N\downarrow 0} Ng(N) = 0$ ([24]). Algumas destas suposições seriam talvez desnecessárias mas, se não viessem a fazer falta na demonstração, poderia descartá-las posteriormente. Tal não veio a suceder. Claro que, às vezes, sucede o inverso e, para conseguirmos chegar à tese do teorema, temos de acrescentar hipóteses inicialmente não previstas, sem as quais não conseguimos completar a demonstração.

Note-se que, no modelo estocástico, a taxa de crescimento natural *per capita* não é $g(N(t))$ mas $g(N(t))+\sigma\varepsilon(t)$, pelo que, rigorosamente, quando falamos de g, devemos usar o termo "taxa média de crescimento natural *per capita*". Aqui, o termo "média" é uma média geométrica[25].

Tinha agora uma conjectura, isto é, um enunciado para um possível teorema:

Consideremos os modelos determinístico e estocástico

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(N(t))N(t) - EN(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(g(N(t)) + \sigma\varepsilon(t)\right)N(t) - EN(t),$$

com $\sigma>0$ e $E\geq 0$ e com g satisfazendo as condições acima descritas. Seja $r = \lim_{N\downarrow 0} g(N)$.

Então, em qualquer dos modelos, se $E>r$, ocorre a extinção[18] *e, se $E<r$, não ocorre extinção*[19]*. Caso $E<r$, no modelo determinístico existe um equilíbrio estável positivo e, no modelo estocástico, existe uma densidade estacionária para a qual converge a distribuição de probabilidade do tamanho da população quando $t\to+\infty$.*

A verificação destas propriedades tinha a ver com certos integrais (em que intervinham $g(N)$, σ e EN) serem ou não finitos. Claro que, quando a função g era uma função concreta, como no modelo logístico e nos outros que experimentei, os integrais podiam ser calculados e assim se determinava em que condições de E e de r é que eram finitos ou infinitos. Mas, no caso geral, isso não podia ser feito. Mesmo assim, por majorações ou minorações adequadas dos integrais, tirando partido das propriedades da função g e com muita persistência, recorrendo à bagagem de "truques" que a experiência nos vai dando, foi possível determinar condições de E e de r para as quais eles eram finitos e condições para as quais eles eram infinitos. E o teorema foi demonstrado.

Mas, perguntei então, que sucede se a política de pesca não for de esforço constante E, mas de esforço variável $E(N)$ (suposta função não-negativa de classe C^2)? Será que o resultado se mantém neste caso mais geral?

Mas o que deve agora desempenhar o papel da constante E? Naturalmente, o limite $\lim_{N\downarrow 0} E(N)$. Pode, porém, ocorrer que este limite e r sejam ambos infinitos, caso em que nada se resolveria, embora se pudesse resolver porque o quociente podia ser uma indeterminação "levantável". Nesse sentido, como $E<r$ [$E>r$] equivale a $E/r<1$ [$E/r>1$], a ideia será trabalhar com o limite do quociente $h = \lim_{N\downarrow 0}\left(E(N)/g(N)\right)$, ficando com os casos $h<1$ e $h>1$. O caso $h<1$ tem a interessante interpretação que o esforço de pesca deve ser menor que a taxa média de crescimento natural *per capita* quando a população é pequena; se assim for, evita-se a extinção e tem-se um equilíbrio estável ou uma densidade estacionária, conforme o modelo seja determinístico ou estocástico. Se $h>1$, isto é, se, quando a população é pequena, o esforço de pesca for superior à taxa média de crescimento natural *per capita*, a população extingue-se. Não foi muito difícil adaptar a demonstração para cobrir esta extensão do resultado anterior, generalizando assim o teorema atrás enunciado[26].

No que se refere à extinção, o resultado do teorema tem agora uma expressão tão óbvia que quase se poderia dizer que isso era o que teríamos previsto por mero bom senso, sem Matemática[27]. Nem sempre é assim, o que parece óbvio pelo bom senso é, por vezes, falso, e o que o bom senso nem suspeita ou pensa que é incorrecto é, por vezes, verdadeiro; e, sem Matemática, nunca saberíamos se um destes casos estaria a ocorrer ou não.

Finalmente, surge a pergunta natural: E se, no modelo estocástico, ao contrário do que todos os autores supõem (por simplicidade), a intensidade do efeito das perturbações aleatórias do ambiente sobre a taxa de crescimento natural *per capita* não for uma constante σ como acima supusemos, mas puder ser ela própria variável, da forma $\sigma(N)$, função positiva de classe C^2. De facto, a sensibilidade da taxa de crescimento aos efeitos das flutuações ambientais poderá depender do tamanho da população, havendo certos tamanhos mais críticos. É quase certo que alguma dependência se verificará na natureza.

Tentámos demonstrar os mesmos resultados para este caso mais geral. Infelizmente, não conseguíamos ver se os integrais que aparecem na demonstração eram finitos ou infinitos para as condições $h<1$ e $h>1$. O problema é que, ao contrário do caso de σ constante, $\sigma(N)$ podia disparar para valores infinitos nos limites quando $N\downarrow 0$ ou quando $N\to+\infty$, estragando as majorações ou minorações dos integrais que havíamos utilizado na demonstração anterior, isto embora não tivéssemos conseguido arranjar um contra-exemplo.

Felizmente, com a hipótese biologicamente razoável de $\sigma(N)$ ser uma função limitada, as demonstrações anteriores, com algumas adaptações, funcionavam. Mais tarde, verificámos, modificando um tanto o esquema da demonstração, que nem isso era preciso, bastando que $\sigma(N)$ satisfizesse certas condições técnicas mais fracas. E, foi com essas condições, que resolvemos apresentar o novo teorema (extensão do teorema anterior) ao público numa revista da especialidade[28].

A publicação em revistas científicas e o sistema de arbitragem

Este último resultado já é de 2000, mas as revistas científicas levam muito tempo a publicar e só saiu em Maio de 2002. Primeiro, o artigo submetido é enviado a dois árbitros anónimos (*referees*), devendo o editor da revista escolher duas pessoas competentes na matéria que estejam disponíveis para fazer esse trabalho. Essas pessoas são também investigadores, normalmente sobrecarregados de trabalho, pelo que o processo leva o seu tempo. Os árbitros dão a sua opinião sobre se o artigo deve ser publicado, isto é, se se inscreve na linha de especialização da revista, se tem matéria suficientemente nova e interessante e se, no essencial, os resultados estão correctos. Dão também sugestões de alteração. Com base na opinião dos árbitros, que é, em muitos aspectos, subjectiva, o editor toma normalmente uma de quatro decisões: não publicar o artigo, publicar o artigo tal qual está (o que é muito raro), publicar o artigo após o autor introduzir pequenas alterações tendo em conta as sugestões dos árbitros, sugerir ao autor substanciais alterações a introduzir de acordo com a recomendação dos árbitros e resubmeter o artigo modificado para nova apreciação sobre se será ou não publicado.

Quando os árbitros são competentes e gastam algum tempo a ver o artigo, este pode melhorar substancialmente. Com efeito, os erros e gralhas podem ser detectados, a redacção pode ser melhorada aqui e ali para tornar o texto mais claro, alguns aditamentos interessantes podem ser sugeridos, referências bibliográficas relevantes esquecidas pelos autor(es) ou desconhecidas deste(s) podem ser incluídas, um exemplo ilustrativo pode ser acrescentado, alguma afirmação não justificada (ou insuficientemente justificada) pode vir a sê-lo, etc.

Muitas vezes beneficiei deste trabalho anónimo e não remunerado dos árbitros. O caso mais relevante foi o de um artigo em que aparecia uma expressão matemática que, por ser parecida com outra anteriormente surgida no artigo, eu transcrevi com "cópia e cola", mas que me esqueci de fazer a alteração no índice superior de um somatório (esqueci-me na altura e, quando fiz a revisão, li o que lá devia estar e não o que lá estava). Havia uma matriz cujos elementos eram definidos por essa expressão e que era ortogonal, aspecto essencial para que o resto do raciocínio funcionasse. Dada a limitação do número de páginas que podia usar, omiti a demonstração da ortogonalidade da matriz, já que, embora fosse trabalhosa, era trivial e qualquer leitor a poderia reconstituir se quisesse. Claro que, devido à gralha, a matriz "gralhada" já não era ortogonal. Felizmente, um dos árbitros, deu-se ao trabalho de verificar se a matriz era ortogonal e, por mais que tentasse, não conseguia mostrá-lo. Podia naturalmente ser por inabilidade dele ou podia ser porque não era ortogonal. Pôs a questão ao editor, que me transmitiu o seu pedido para que apresentasse a demonstração da ortogonalidade da matriz (não para ser incluída, porque não havia espaço, mas para ser verificada pelo árbitro). Claro que aí detectei a gralha e corrigi-a, juntando a demonstração de que a matriz (com a expressão correcta) era ortogonal. Juntava também, naturalmente, as minhas desculpas pelo tempo que fiz perder ao árbitro e os meus agradecimentos pelo trabalho exaustivo e cuidadoso que tinha feito. Se não fosse isso, um leitor que utilizasse o meu artigo (e não fosse meticuloso ao ponto de verificar se tudo o que lá estava era correcto) corria o risco de ir trabalhar com uma matriz incorrectamente definida e invalidar as conclusões a que chegasse (nomeadamente testes estatísticos nela baseados poderiam rejeitar uma hipótese que deveria ter sido aceite ou aceitar uma que deveria ter sido rejeitada). A gralha era insignificante, mas as consequências não.

Também sirvo frequentemente de árbitro para revistas científicas e para actas de reuniões científicas. Tenho, como é natural, a preocupação de ser meticuloso, para que os erros e gralhas possam ser corrigidas e a clareza do texto melhorada. Talvez a minha contribuição mais útil tenha sido para um artigo em que um passo de uma demonstração usava um argumento incorrecto para chegar a uma conclusão, a qual fazia falta para o resto da demonstração. Não me limitei a apontar o erro e procurei ver se a demonstração podia ser salva, já que o teorema me "cheirava"[29] a verdadeiro e, a sê-lo, continha um resultado importante. Felizmente, verifiquei que o resto da demonstração, que se baseava naquela conclusão, podia ser modificado de modo que bastaria basear-se numa conclusão mais fraca que a anterior, a qual podia ser obtida por meio de um argumento correcto. Outras vezes, também, detectei um argumento incorrecto numa demonstração, mas incorrecto porque, para funcionar, necessitaria de uma hipótese adicional no enunciado do teorema; acrescentada esta, o teorema, embora ligeiramente modificado, "salvava-se".

Mas também acontece depararmos ocasionalmente com árbitros que fazem um mau trabalho. Por vezes, fazem um trabalho pouco meticuloso, deixando passar falhas e insuficiências. Outras vezes têm um conhecimento superficial do assunto (quiçá porque o editor não percebeu bem qual era a área de especialidade), mas, mesmo assim, aceitam o trabalho, fazendo depois críticas absurdas, como dizerem que certas coisas certas estão erradas, ou que os resultados são triviais ou não têm relevância, não porque assim seja, mas precisamente porque não entendem suficientemente do assunto. Se se tem a sorte de o outro árbitro achar o artigo uma maravilha, com resultados inovadores importantes, o artigo poderá ir a um terceiro árbitro ou o editor poderá exigir que se introduzam alterações de acordo com as sugestões e críticas do tal árbitro pouco conhecedor, caso em que vamos ter o trabalho de explicar cuidadosamente onde é que ele errou (já que não queremos voluntariamente introduzir disparates nos nossos artigos). Se temos o azar de o segundo árbitro ter uma posição de aceitação, mas menos entusiasmada, pode bem suceder que o artigo seja rejeitado.

Caso o artigo não seja publicado ou o autor não aceite as alterações que porventura lhe sejam impostas e comunique o facto ao editor, fica o autor livre para submeter o artigo a outra revista científica. Mas não fica livre de, por coincidência, um dos árbitros designados por essa revista, ser o mesmo.

Por vezes surgem situações curiosas. Um caso interessante foi a de um árbitro de um artigo em que era co-autor e que fez pequenas sugestões de alteração de pouca importância (que até melhoravam o texto), mas que considerava que o artigo devia fazer referência a uma quantidade enorme de trabalhos, todos da autoria ou co-autoria de um Senhor X (aliás, um dos mais reputados e citados autores daquela área genérica). O nosso trabalho citava os trabalhos do Senhor X que tinham alguma coisa a ver com o tema concreto do nosso trabalho, mas não citava aqueles outros sugeridos pelo árbitro porque a sua ligação ao tema era extremamente remota e porque, a fazê-lo, teríamos de citar imensos outros com ligação igualmente remota, tornando a lista de citações exagerada e absurdamente extensa. Neste caso, era óbvio que o árbitro "anónimo" era mesmo o Senhor X, que era também um dos editores da revista, e também era óbvio porque razão o Senhor X era tão citado nos trabalhos publicados nessa revista, aliás a mais importante daquela especialidade.

Alguns "palpites" sobre os problemas que atravessa a educação matemática

Para além das considerações que apresento logo na Introdução deste texto a propósito do papel da investigação na aprendizagem da Matemática, acrescentarei aqui algumas outras referentes às dificuldades que a educação matemática actualmente atravessa. Sustentam-nas apenas alguma experiência e intuição e algumas leituras não sistemáticas, cujas fontes e influências já esqueci. Por tudo isso e porque não me assiste qualquer autoridade científica de investigador em educação matemática, que não sou, como "palpites" ou "divagações" devem ser encarados.

Eis os "palpites" que queria deixar:

- Considero que a aplicação universal de reformas curriculares ou de métodos de ensino-aprendizagem se deve basear, não em meros "palpites" (e aqui incluo todos, os meus em particular, mas especialmente os dos que se instalaram nas estruturas de decisão do Ministério da Educação, por mais iluminados que os considerem), mas em investigação em educação matemática solidamente sustentada em experimentação pedagógica[30]. Isto não significa que os "palpites" não sejam úteis; afinal, uma investigação começa muitas vezes com um "palpite".
- Em consequência, considero essencial desenvolver a investigação em educação matemática, o que exige a formação de mais investigadores, a colaboração destes com as estruturas educativas, a divulgação dos resultados e a disponibilização dos necessários financiamentos.
- Há um ambiente social desfavorável à Matemática e ao seu ensino, que está a contribuir para a degradação deste (um verdadeiro desastre nacional!) e a prejudicar seriamente o desenvolvimento cultural, científico e tecnológico do País. Embora esse ambiente pareça estar a

sofrer alguma inflexão favorável, exigem-se medidas urgentes de mobilização social.

- O gosto ou o desgosto pela Matemática adquirem-se muito cedo e, por isso, é preciso dar particular atenção ao primeiro ciclo do ensino básico e às qualificações dos seus professores[31].
- O principal problema do ensino da Matemática não é propriamente o dos conteúdos curriculares, mas o de não desenvolver a capacidade de dedução matemática. Isso exige, entre muitas outras coisas, que não expulsemos as demonstrações do ensino da Matemática e que proporcionemos ao estudante oportunidade de construir ele próprio demonstrações.
- Os professores, a escola e a sociedade devem ser exigentes[32] para permitir o pleno desenvolvimento do potencial dos jovens. O "músculo" intelectual precisa de desafios e estiola com a falta de exercício. O actual "facilitismo" que se instalou no sistema de ensino é, em boa parte, responsável pelos problemas de qualidade do sistema educativo e é um crime contra a juventude.

Conclusão

Começámos por afirmar que aprender Matemática passa necessariamente por uma faceta investigativa, que só se pode apreender fazendo investigação matemática (ao nível adequado para cada grau de ensino). Dessa investigação não devemos excluir (antes pelo contrário) as aplicações da Matemática (e, particularmente, a modelação matemática), explorando a sua relação simbiótica com as diversas Ciências. Não estamos a falar de descobertas verdadeiramente novas para o capital científico da Matemática, mas sim de descobertas novas para o capital científico do estudante. Claro que elas poderiam ter sido apresentadas como conhecimento já feito, mas ao não o serem, vão permitir ao estudante a prática (e, assim esperamos, o prazer) da investigação matemática. Sem essa prática, podemos dizer o que quisermos mas, se formos minimamente honestos, sabemos que não estamos a ensinar Matemática e que o estudante não está a aprender Matemática. Não nos devemos espantar se ele não gostar.

Procurei, em seguida, como me foi pedido, dar um testemunho (necessariamente pessoal porque todos somos diferentes) do que é a actividade de investigação matemática. Para o fazer, socorri-me de dois exemplos, um muito antigo e trivial (de estudante do secundário) e um recente. Não me atreverei a resumir em forma esquematizada as ideias e os meandros envolvidos na prática de investigação matemática que procurei ilustrar na apresentação desses exemplos. Em jeito de desculpa, poderei dizer que nada melhor que deixar os exemplos falarem por si ou ainda que não reflecti o suficiente sobre a minha prática de investigação para poder ter uma teoria (ou um esboço de teoria) sobre essa prática.

Falei também de alguns aspectos relacionados com a difusão e a validação da investigação matemática.

Terminei com alguns "palpites" sobre as dificuldades que a educação matemática actualmente atravessa.

Notas

[1] Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

[2] A prática da demonstração de propriedades não encontradas no livro de texto, dando espaço ao estudante para descobrir estratégias de demonstração, é essencial para o desenvolvimento das suas capacidades matemáticas. Embora essa atitude se deva desenvolver em qualquer tópico leccionado, a geometria euclideana é, nesse aspecto, um excelente manancial.

[3] Algumas sugestões de projectos em dinâmica e em genética de populações, a realizar possivelmente em colaboração com a disciplina de Biologia (inclusivamente no âmbito de um Clube de Ciência), aparecem em Braumann, C. A. (2001), A Matemática e a Vida, *Educação e Matemática* 64: 23-29. Outras sugestões envolvem problemas de depósitos e empréstimos, de probabilidades associadas a jogar no totoloto, de cifras [veja-se Sarrico, C. (1995). Os Números Primos e o Sistema de Codificação R. S. A., *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 33: 81-89] ou de algarismos de teste para detecção e correcção de erros na transmissão de dados [veja-se Picado, J. (2001). A Álgebra dos Sistemas de Identificação, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 44: 39-73]. Mas os problemas e projectos de natureza mais puramente matemática (não directamente suscitados pelas aplicações) também são úteis e necessários.

[4] Há até vantagem em que se façam também inquirições na aparência puramente matemáticas. Curiosamente, a experiência tem mostrado que frequentemente elas vêem a ter aplicações em áreas insuspeitas. Um exemplo típico é a teoria dos números, que recentemente veio a ter importantes aplicações na codificação de mensagens em canais inseguros, sem o que não teríamos multibanco nem comércio electrónico.

[5] Outros valores de k inteiros também fornecem raízes, mas são repetidas.

[6] O ser $\text{cis}\theta = e^{i\theta}$ não é só uma questão de notação, mas um facto mais profundo.

[7] E, por isso, certamente insusceptível de publicação em revistas científicas matemáticas credenciadas.

[8] Esta taxa é a diferença entre as taxas (instantâneas) de natalidade e de mortalidade *per capita*.

[9] INT(x) representa o maior inteiro inferior ou igual a x.

[10] Outra abordagem (aqui expressa de forma informal, pouco rigorosa) para chegar ao modelo malthusiano seria partir logo da ideia de juros compostos continuamente no tempo e considerar o que se passaria num pequeno intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$; um modelo aproximado seria $N(t+\Delta t) \approx N(t)+(r\Delta t)N(t)$, donde a razão incremental seria $(N(t+\Delta t)-N(t)) / \Delta t \approx rN(t)$ e, passando ao limite quando $\Delta t \to 0$, obteríamos a equação diferencial $\mathrm{d}\, N(t)/\mathrm{d}\, t = rN(t)$.

[11] Gause, G. F. (1934). *The struggle for existence.* Williams and Wilkins, Baltimore.

[12] Com o termo "natural", queremos dizer o que ocorreria pela natalidade e mortalidade naturais da população, isto é, sem considerar a mortalidade provocada pela pesca.

[13] Interessa considerar um equilíbrio com população positiva pois um equilíbrio com população nula corresponderia à extinção desta, situação em que nada se pescaria.

[14] Termo que designa uma variável que varia com o tempo e com as circunstâncias que o acaso ditou para os diversos factores que afectam a população.

[15] Gaussiano significa que tem distribuição normal, o que advém de serem múltiplos os factores perturbadores e do teorema do limite central. O termo "ruído branco" é um termo técnico, com significado preciso que, por ser demasiado longo fazê-lo, não irei explicitar aqui. Direi apenas informalmente que tal significa que os efeitos acumulados do ruído em intervalos de tempo não sobrepostos são probabilisticamente independentes. Os "ruídos" naturais não são, em geral, nem exactamente brancos nem exactamente gaussianos, mas trata-se de aproximações razoáveis que facilitam o tratamento matemático do problema.

[16] Sendo um "ruído", não depende apenas do tempo, mas também do "acaso". Usa-se a convenção habitual em probabilidades de não explicitar essa dependência do "acaso" para tornar a notação mais leve.

[17] É uma equação diferencial com um termo estocástico (dependente do "acaso"). Vamos interpretá-la usando o cálculo de Stratonovich (um cálculo estocástico), que não vou aqui abordar.

[18] Rigorosamente deveríamos dizer que a probabilidade de se extinguir é um. A não-extinção terá então probabilidade zero de ocorrer, mas isso não significa que seja impossível, embora, para efeitos práticos, a possamos considerar como tal. Também acertar com o ponto central da ponta de uma seta exactamente no ponto central de um alvo não é impossível mas, como tem probabilidade zero de ocorrer, considera-se como praticamente impossível.

[19] Rigorosamente, a probabilidade de a extinção ocorrer é zero. Aqui, porém, há que ter uma certa cautela porque estamos a trabalhar com modelos aproximados em que o tamanho da população varia continuamente, podendo tomar valores não inteiros, o que não tem importância para populações grandes (o erro de aproximação é desprezável), mas tem para populações à beira da extinção. Assim, embora no modelo a probabilidade de extinção seja zero, na realidade, devido ao erro de aproximação do modelo, ela poderá tomar um valor positivo pequeno.

[20] O problema da optimização e o estudo com o cálculo de Stratonovich podem ver-se em: Braumann, C. A. (1985), Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation, em

Mathematics in biology and medicine, V. Capasso, E. Grosso e L. S. Paveri-Fontana (Orgs.), Springer, Berlin. O estudo (sem optimização) para alguns modelos, usando o cálculo de Ito, já havia sido feito por: Beddington, J. R. e May, R. M. (1977), Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment, *Science* 197: 463-465. Pode também ver-se em May, R. M., Beddington; J. R., Horwood, J. H. e Shepherd, J. G. (1978), Exploiting natural populations in an uncertain world, *Math. Biosc.* 42: 219-252.

[21] O modelo logístico corresponde ao caso particular $g(N)=r(1-N/K)$).

[22] Se fosse negativo, a população teria uma mortalidade natural superior à natalidade natural e a extinção seria certa, caso sem interesse, por tão trivial de estudar; seria, por exemplo, o caso de termos $r<0$ no modelo logístico.

[23] Caso contrário, a população, por maior que fosse, cresceria sempre, o que não é biologicamente realista.

[24] Caso contrário, a taxa de crescimento natural total seria positiva para uma população nula, ou seja, haveria geração espontânea, o que é biologicamente impossível.

[25]Se quisermos usar uma média aritmética, devemos usar o cálculo de Ito em vez do cálculo de Stratonovich, como mostrarei num artigo em preparação.

[26] Este resultado saiu no artigo: Braumann, C. A. (1999), Variable effort fishing models in random environments, *Math. Biosc.* 156: 1-19.

[27] O bom senso provavelmente não nos diria que deveríamos usar uma média geométrica para que funcionasse. Igual enunciado com uma média aritmética tem situações em que falha.

[28] Braumann, C.A. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Math. Biosc.* 177-178: 229-245.

[29] O "faro" (ou intuição) é um dos principais amigos do investigador; sem ele, não vai longe. Como se adquire? Não sei, mas sei que a experiência do nosso trabalho e do trabalho alheio ajuda a desenvolvê-lo.

[30] Não o fazemos em Medicina. Porque razão o fazemos na Educação, tão vital para o nosso futuro colectivo?

[31] Advogo mesmo, entre outras medidas, que a Matemática (a par do Português) passe a ser exigida como prova de ingresso obrigatória para as licenciaturas que formam esses professores, o que exige concertação entre as instituições formadoras.

[32] Claro que não ajuda a ilusão instilada de que se pode aprender sem esforço e que, quando isso não resulta, a culpa é necessariamente do professor que não soube tornar a matéria atraente para os estudantes. Tornar as matérias atraentes é importante, mas há partes da matéria que são necessárias mas dificilmente se podem tornar atraentes. Por outro lado, em Matemática raras são aquelas, atraentes ou não, que não exijam algum esforço.

3

A aula de matemática como espaço epistemológico forte

Paulo A. J. Oliveira
Departamento de Educação da Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
jesus.olive@clix.pt

Introdução

Uma perspectiva investigativa do ensino da matemática coloca alguns problemas de índole epistemológica, em virtude de se considerar a matemática como "uma forma de gerar conhecimento e não como um corpo de conhecimentos" (Oliveira, Segurado e Ponte, 1999, p. 175). Mas, até que ponto os alunos podem gerar conhecimento matemático relevante e original na prossecução de tarefas investigativas? Alguns autores apontam para essa possibilidade. Por exemplo, Hirsh (1971) defende a tese segundo a qual "se podem e devem proporcionar oportunidades em matemática, em todos os níveis, que conduzam à produção de trabalho que pode ser propriamente considerado original e criativo" (p. 27). Analogamente, Hatch (1995) defende a "ideia de que as crianças, pelo menos durante parte da sua aprendizagem, criem a sua própria matemática" (p. 37). Para Goldenberg (1999), um dos grandes propósitos da "educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas aprendem factos e métodos" (p. 37). Por isso, os alunos

> deveriam também, durante uma parte significativa do tempo da aprendizagem, dedicar-se a essa mesma actividade: *descobrir* os factos. (...) O objectivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação. (Goldenberg, 1999, p. 37).

A investigação empírica em educação matemática, fornece evidência de que, num contexto investigativo, é natural que os alunos desenvolvam abordagens investigativas inesperadas, ou mesmo originais. A título de exemplo, refira-se que no âmbito de um projecto colaborativo que envolveu professores e investigadores, estes afirmam: "É interessante notar que alguns alunos tiveram ideias em que nós não tínhamos pensado enquanto projectávamos a tarefa" (Oliveira, Segurado, Ponte e Cunha, 1999, p. 127). Também Keyton (1997) relata resultados novos que os seus alunos obtiveram ao investigar propriedades de quadriláteros na geometria euclidiana.

Por conseguinte, perspectivar o ensino da matemática em torno das actividades investigativas, promovendo, assim, a expressão criadora dos alunos, é uma boa forma de traduzir na aula de matemática o "trabalho desenvolvido pelos matemáticos profissionais, ou, por outras palavras, o processo de criação matemática que é inerente ao que é a matemática e ao que significa saber matemática" (Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes, 1999, p. 71).

Esta ênfase no trabalho investigativo na aula de matemática, implica a valorização do pensamento inferencial que está subjacente aos processos investigativos. É o que iremos discutir de seguida.

Inferências envolvidas nas actividades de investigação

O pensamento matemático, evidentemente multidimensional, tem na sua vertente inferencial uma das dominantes na actividade investigativa. Tradicionalmente, as inferências de tipo dedutivo, que predominam na matemática formal (i.e., já 'feita'), relegam qualquer outro tipo de inferência para um papel secundário. No entanto, numa perspectiva investigativa, em que o conhecimento matemático ainda está a ser gerado, o pensamento dedutivo articula-se com outros tipos de pensamento inferencial, nomeadamente, o indutivo, o abdutivo e o transformativo.

Vejamos, brevemente, como estes quatro tipos de pensamento inferencial podem contribuir para o desenvolvimento de actividade epistemologicamente mais relevante na aula de matemática.

Indução

O pensamento indutivo começou por ser estudado por Aristóteles, apesar de ter sido Francis Bacon (século XVII) a popularizá-lo. A indução baconiana, diferente da aristotélica, consiste na afirmação, para toda uma classe de entes, de uma propriedade atribuída a, pelo menos, um dos entes constituintes dessa totalidade. Neste tipo de indução, o número de experiências não é tão relevante como o tipo de análise que elas suscitam. Eventualmente, uma única experiência pode ser suficiente para induzir um determinado facto.

Uma vez que a indução baconiana transcende a simples soma dos factos observados numa experiência, pode acrescentar conhecimento novo, e por isso, está associada à intuição e à imaginação criativa de quem os analisa.

Alguns matemáticos têm mostrado a relevância da indução na matemática informal. Assim, Laplace considerou que os "principais instrumentos de descoberta da verdade [em matemática] são a indução e a analogia" (citado em Pólya, 1954/1990a, p. 35). Igualmente, Sylvester afirmou:

> A análise matemática... incessantemente faz apelo às faculdades de observação e de comparação, sendo a indução uma das suas armas principais, que recorre frequentemente à tentativa experimental e à verificação. (citado em Wells, 1995, p. 38)

Em matemática, tal como nas mais diversas áreas científicas, o ponto de partida do processo indutivo é a observação atenta, incisiva, de certos factos de uma experiência. Isto pressupõe, naturalmente, que se dê lugar ao que Burton (1984, p. 38) chama "aprendizagem indutiva": começando pela observação e análise de particularizações de um certo fenómeno matemático, o aluno (ou o matemático) procura a sua generalização através do *design* de múltiplas conjecturas. A aprendizagem indutiva subentende que os alunos possam trabalhar dados matemáticos em bruto.

Quando não se conhecem contra-exemplos a uma generalização, ou quando os que se conhecem são epistemologicamente irrelevantes, surge, naturalmente, a demonstração para a validar. Por isso, um ensino que dê maior expressão ao pensamento indutivo torna a demonstração necessária.

Pólya (1954/1990a) refere-se a uma dimensão ética da indução que se consubstancia em três valores éticos básicos: coragem intelectual (devemos estar prontos a rever as nossas concepções); honestidade intelectual (devemos alterar uma concepção quando houver uma razão compulsória para o fazer) e contenção sensata (não devemos mudar uma concepção sem motivo).

Os valores da cidadania constituem um referente estruturante do ensino actual, pelo que, esta ética da indução contribui para o desenvolvimento de uma cultura científica eivada de valores que a humanizam, e também, a credibilizam de um ponto de vista epistemológico.

Dedução

O conhecimento matemático, tradicionalmente, tem sido organizado e estruturado com base em inferências dedutivas. Esta é a chamada matemática formal. Uma boa parte do trabalho investigativo dos matemáticos assenta, pois, em raciocínios dedutivos. Porém, o conhecimento matemático desenvolveu-se *stricto sensu* de modo informal, não dedutivo.

A demonstração esconde o trabalho do matemático que é mais relevante de um ponto de vista epistemológico, ou seja, a criação matemática, propriamente dita. Embora as demonstrações contenham elementos formais, como símbolos, regras de inferência e sintaxe, também contêm elementos informais (e.g., a linguagem natural, conceitos 'evidentes'). Para alguns matemáticos, estas demonstrações semi-formais, podem ser, em princípio, formalizadas. Outros consideram que a formalização completa é uma utopia. A este respeito, Hersh (1993) afirma:

> No caso de muitas investigações matemáticas, a total formalização e a demonstração formal completa, mesmo se possível em princípio, pode ser impossível na prática. Podem requerer tempo, paciência, e interesse para além da capacidade de qualquer matemático humano. De facto, podem exceder a capacidade de qualquer sistema computacional disponível ou previsível. (p. 390)

A tendência para absolutizar o rigor matemático, não leva em conta que "o que constitui o consenso actual acerca do rigor, não foi criado *ex nihilo*, é o produto de um processo histórico e social no seio da comunidade matemática" (Balacheff, 1991, p. 178). Os consensos sobre o rigor são, naturalmente, mutáveis, pelo que o valor epistemológico do rigor deve ser relativizado.

Também em termos educativos, temos que reconhecer que há uma dimensão da aprendizagem da matemática que tem lugar

> numa ordem muito diferente da ordem lógica. Aprendemos mais ao estabelecer conexões e relações, ao construir uma teia de ideias, do que numa sequência linear e lógica de implicações; as ideias crescem mais de modo sinergético do que ligadas estritamente umas às outras. (Dreyfus, 1999, p. 98)

Uma perspectivação investigativa do ensino da matemática, com uma forte ênfase na produção de conhecimento novo, pode contribuir para que os alunos desenvolvam competências demonstrativas. A resolução de um problema, em que é necessário descobrir uma solução correcta (ou satisfatória), de algum modo inibe os comportamentos demonstrativos dos alunos, porque estes acabam por se comportar como uma espécie de artífices ou práticos. Ora,

> o problema da pessoa prática é *ser eficiente* não é *ser rigorosa*. É produzir uma solução, não é produzir conhecimento. Deste modo, o aluno que resolve um problema não sente a necessidade de fazer apelo a mais lógica do que é necessário para a prática. (Balacheff, 1991, p. 188)

A intervenção do professor pode ser bastante mais fecunda se incidir na discussão do nível de profundidade das demonstrações dos alunos, na negociação – com eles – do rigor aceitável e desejável nas demonstrações, na identificação de argumentações melhoráveis e na própria concepção da estrutura das demonstrações.

No contexto escolar, a explicação, a comunicação, a sistematização, a memorização e a algoritmização (Villiers, 1999, p. 23) devem complementar a função tradicional da demonstração.

Abdução

Como se fazem descobertas científicas, e, em particular, como se fazem descobertas matemáticas? Haverá um conjunto de procedimentos racionais que, uma vez seguidos, conduzirão necessariamente a descobertas científicas? Para muitos filósofos da ciência, não apenas não existe actualmente uma lógica da descoberta como é mesmo "impossível existir um modelo racional da descoberta. Em resumo, a descoberta científica é irracional e não existe a possibilidade de raciocinar sobre as hipóteses [a descobrir]" (Magnani, 2000, p. 1).

No entanto, podem adoptar-se modelos racionais de descoberta científica, com repercussões na aula de matemática, que assentam num tipo específico de inferência, a saber, a abdução. Desde Aristóteles, na antiguidade, passando por Pierce (último quartel do século XIX), Hanson (anos sessenta do século XX), Thagard (anos oitenta do século XX) e Blachowicz (anos oitenta/noventa do século XX), a abdução tem sido estudada em diversas perspectivas, muitíssimo relevantes em termos epistemológicos. Assim, Pierce e Hanson – segundo Blachowicz – caracterizaram "a abdução como sendo uma forma de inferência de um *explanandum* (algum fenómeno que se observou) para um *explanans* (uma hipótese explicativa)" (Blachowicz, 1996, p. 141). Isto significa que a abdução é uma inferência criadora, no sentido em que "desempenha o papel de geração de novas ideias ou hipóteses" (Yu, 1994, p. 7).

A abdução e a dedução constituem a compreensão conceptual de um fenómeno, e a indução a verificação quantitativa. No estágio da abdução, o objectivo é explorar os dados, descobrir um padrão, e sugerir uma hipótese plausível, usando categorias adequadas; a dedução consiste na construção de uma hipótese lógica e testável com base em outras premissas plausíveis; e a indução consiste numa aproximação à verdade com vista a fixar as nossas crenças [*beliefs*] para pesquisa adicional. Em resumo, a abdução cria, a dedução explica e a indução verifica (Yu, 1994, p. 12).

Ao fazer a avaliação de hipóteses concorrentes, o investigador pode compará-las quanto à sua "completude, precisão, ausência de suposições *ad hoc*, e pela analogia com hipóteses previamente estabelecidas" (Blachowicz, 1996, p. 150); a consistência, simplicidade e consiliência constituem outras dimensões de comparação.

Por conseguinte, pelo menos "em alguns casos, chegamos a conclusões de acordo com critérios racionais" (Magnani, 2000, p. 3), o que, de algum modo, legitimiza a existência de modelos racionais de descoberta científica que contrariam a famosa posição de Popper: "Não existe um método lógico de ter ideias novas, ou uma reconstrução lógica deste processo" (citado em Blachowicz, 1996, p. 144).

As experiências matemáticas dos alunos devem acomodar inferências que começam pelas razões e procuram as consequências (dedução), a par das inferências que começam pelas consequências e procuram as razões (redução[1]).

Imagens mentais e pensamento transformativo

No seu célebre estudo de 1945, *Psycology of invention in the mathematical field*, Hadamard pediu a alguns matemáticos que explicitassem os seus modos de pensamento matemático inventivo. As respostas que Hadamard recebeu foram espantosamente coincidentes no sentido em que, na sua esmagadora maioria[2], revelaram que os matemáticos evitavam utilizar palavras e símbolos e privilegiavam imagens mentais vagas (Hadamard, 1945, p. 85).

A tese de Hadamard, segundo a qual, a invenção matemática assenta quase exclusivamente na manipulação de imagens mentais vagas, tem sido corroborada pela moderna investigação em neurociência. O neurocientista António Damásio apresenta evidência conceptual e empírica segundo a qual "a produção de imagens nunca pára (...) as imagens são a moeda corrente da mente" (Damásio, 1999, p. 363). Damásio considera que as diversas modalidades sensoriais no ser humano também são geradoras de imagens mentais (1994, pp. 123-124). Por isso, este autor refere-se, por exemplo, a imagens gustativas e sonoras, e, mais geralmente, a imagens somatossensoriais (todas as imagens de algum modo ligadas ao corpo). Quer isto dizer que o cérebro só funciona com este suporte imagético? Segundo Damásio (1999), é "bem pequeno o resíduo mental que não é constituído por imagens mentais" (p. 363). Por outro lado,

> o cérebro é um sistema criador. Em vez de se limitar a reflectir o ambiente à sua volta, tal como faria um dispositivo artificial de processamento informático, cada cérebro constrói mapas desse mesmo ambiente usando os seus próprios parâmetros e *design* interno e criando assim um mundo único para a classe de cérebros comparáveis. (Damásio, 1999, p. 367)

Tudo isto tem consequências epistemológicas e educativas bastante profundas. Sendo o cérebro um sistema criador, i.e., que funciona, naturalmente, criando, é preciso reconhecer que, nesta perspectiva, também a aprendizagem é um contínuo de pequenos actos criadores (ou recriadores). Assim, aprende-se criando e recriando realidades.

Actividades de investigação genuínas, i.e., que acomodem a criação de matemática nova, ainda que circunscrita ao contexto escolar, condizem bem com o *modus operandi* do cérebro já que potenciam essa sua expressão criadora espontânea. Como os alunos têm uma certa liberdade para desenvolver uma investigação, de acordo com as suas características, inclinações ou preferências, o seu pensamento avança de acordo com o seu próprio estilo, ou seja "depressa ou devagar, de forma ordeira ou sobressaltada e, algumas vezes, avança não apenas numa sequência mas em várias. Outras vezes, as sequências [de imagens] concorrem, convergente ou divergentemente, e algumas vezes sobrepõem-se" (Damásio, 1999, pp. 362-363).

Davis e Hersh, como matemáticos profissionais, defendem uma cultura matemática que valorize "os aspectos espaciais, visuais, cinestésicos e não verbais do pensamento [matemático]" (Davis e Hersh, 1995, p. 296). De certa maneira, estes aspectos podem ser aglutinados na ideia de intuição matemática. Ora, "temos intuição porque temos representações mentais dos objectos matemáticos" (Davis e Hersh, 1995, p. 366). Essas representações mentais são adquiridas através de "experiências de resolução de problemas e descoberta de coisas por nós próprios" (Davis e Hersh, 1995, p. 366).

Nesta linha de valorização do pensamento imagético, o educador matemático Martin Simon (1996) considera um tipo de raciocínio a que chama "transformativo", uma vez que "a caracterização das explorações e justificações matemáticas dos alunos como sendo indutivas e dedutivas [e abdutivas] é incompleta" (p. 197).

Para Simon (1996), o raciocínio transformativo

> permite visionar as transformações que estes objectos experimentam e o conjunto de resultados destas operações. No raciocínio transformativo, é central a capacidade de considerar, não um estado estático, mas um processo dinâmico pelo qual um novo estado, ou contínuo de estados, são gerados. (p. 201)

Assim, tipicamente, o que distingue o raciocínio transformativo do não-transformativo, é o facto de as operações incidirem sobre objectos, ou famílias de objectos, matemáticos, encarados, no primeiro caso, como entes estáticos e, no segundo, como entes dinâmicos. Simon (1996) apresenta diversos exemplos de raciocício transformativo em ambientes de geometria dinâmica. Porém, a abordagem transformativa de problemas e investigações matemáticos, não se restringe a esses ambientes.

O raciocínio transformativo pode enriquecer os contextos investigativos de ensino e aprendizagem da matemática, porque as imagens mentais dinâmicas e as transformações que estas permitem inferir, possibilitam o alargarmento do âmbito da exploração de uma situação matemática, pela sugestão de novas conexões matemáticas, quiçá "escondidas" numa abordagem estática.

Uma problematização epistemológica da aula de matemática

A aula de matemática pode ser entendida como um espaço epistemológico, quer dizer, como um espaço pessoal, relacional e comunicacional em que se produz conhecimento. Este espaço epistemológico pode ser robustecido se se acrescentar à dinâmica da aula de matemática uma perspectiva investigativa. Neste caso, a probabilidade de os alunos produzirem conhecimento matemático novo aumenta consideravelmente. Portanto, poderemos problematizar a aula de matemática como espaço epistemológico forte, se adicionarmos a vertente investigacional às dimensões pessoal, relacional e comunicacional. Esta problematização envolve:

(i) Identificar valências (positivas e negativas) epistémicas, associadas a condições que propiciam a produção de conhecimento ou que a inibem;
(ii) Apreciar o conhecimento novo na sua dimensão estética;
(iii) Estabelecer critérios de validação do conhecimento;
(iv) Identificar obstáculos epistemológicos;
(v) Identificar o valor e os limites desse conhecimento;
(vi) Estabelecer a relação entre quem conhece e o que conhece;
(vii) Caracterizar o conhecimento (*epistema*) matemático novo.

Evidentemente, esta caracterização da aula de matemática como espaço epistemológico forte não é única, apesar de contemplar aspectos incontornáveis de uma análise epistemológica da aula de matemática.

As actividades investigativas ganham uma maior legitimidade epistemológica nesta caracterização da aula de matemática como espaço epistemológico forte. Vejamos em que sentido.

Valências e condições epistémicas

Na aula de matemática, parece haver três condições epistémicas básicas que podem possibilitar, ou inviabilizar, a criação de conhecimento por parte dos alunos, a saber, a liberdade, a divergência e a curiosidade. A liberdade permite que o aluno dê o rumo que entender à sua investigação; a divergência é a concretização dessa liberdade, ou seja, o aluno tem a possibilidade de seguir o seu próprio caminho na investigação, e fá-lo; a curiosidade é uma espécie de energia das intelecções e das emoções que assegura a perseverança do aluno no processo investigativo.

Havendo estas três condições na aula de matemática, dizemos que o processo investigativo tem valência epistémica positiva, e, por isso, há condições favoráveis à criação de conhecimento. Na falta de, pelo menos, uma destas condições, o processo investigativo tem valência negativa, pelo que, a criação de conhecimento pode ser inviabilizada.

Estética

O conhecimento matemático, usualmente, é alvo de apreciações de carácter estético que se traduzem num deleite intelectual que é difícil verbalizar. A beleza matemática está relacionada com a simplicidade das ideias e das demonstrações matemáticas, a sua inter-relação e as suas potencialidades de conexão com várias áreas da matemática, o seu carácter unificador, a sua maior generalidade, etc.

A estética, ligada à perfeição das demonstrações, pode funcionar como um critério de eliminação de ideias matemáticas. Por exemplo, o teorema que é conhecido actualmente como 'teorema de Bolzano', tinha sido demonstrado por vários matemáticos antes de Bolzano. Ora, a insatisfação de Bolzano relativamente a essas demonstrações, resultou precisamente da imperfeição da sua estruturação lógica. Actualmente, as demonstrações que Bolzano criticou são relevantes apenas para os historiadores da matemática!

A actividade matemática como um todo é susceptível dessa apreciação estética. De facto, "a importância de critérios estéticos aplica-se (...) aos julgamentos (...) que fazemos a toda a hora no trabalho matemático" (Penrose citado por Burton, 1995, p. 284).

Analogamente, a actividade investigativa dos alunos, em todas as suas vertentes e fases, deve ser apreciada esteticamente. A beleza matemática associada a uma intuição fecunda, a uma ideia inesperada, a uma boa estruturação lógica, etc., não deve ser subordinada a critérios utilitaristas de obtenção de resultados a todo o custo.

Validação

A validação do conhecimento produzido na actividade investigativa é uma dimensão epistemológica de primeira importância. A 'explosão' da produção matemática no século XX e a proliferação de especialidades matemáticas, pôs em relevo os limites de verificabilidade do conhecimento produzido.

> A tentativa mais recente de demonstração do Último Teorema de Fermat fornece um exemplo da inverificabilidade, por parte da maioria dos matemáticos, das afirmações feitas e, consequentemente, tanto da sua potencial não unicidade como da fragilidade do seu [dos matemáticos] estatuto. (Burton, 1995, p. 284)

Habitualmente são os especialistas numa certa área que têm credibilidade científica para assegurar a verificação dos esquemas validativos que foram empregues numa determinada investigação. Se a investigação incidir sobre especialidades científicas não afins, as possibilidades de verificação tornam-se mais desfavoráveis. Obviamente, a comunidade matemática como um todo, tem que fazer fé na autoridade científica desses especialistas.

Na aula de matemática, o professor desempenha o papel de especialista que assegura a correcção dos esquemas validativos em contextos investigativos. O grau de confiança nesta correcção pode ser incrementado, por exemplo, pela publicação de uma página na *Internet* com as investigações dos alunos. Este alargamento da aula de matemática a críticas e apreciações que lhe são exteriores pode dar mais credibilidade epistemológica às investigações dos alunos.

Por outro lado, uma posição epistemológica mais generosa sobre a natureza da matemática, torna aceitáveis esquemas de validação que, actualmente, são inaceitáveis para os matemáticos profissionais. Por exemplo, no caso da matemática chinesa, como no da indiana, o "objectivo não é construir um edifício imponente sobre alguns axiomas auto-evidentes mas validar um resultado através de qualquer método, incluindo a demonstração visual" (Joseph citado por Burton, 1995, p. 278).

Em contextos investigativos é importante, por razões epistemológicas e educativas, que os alunos validem, progressivamente, os seus resultados: da pré-demonstração (argumentação convincente), passando pela proto-demonstração (provas mais elaboradas), até à demonstração propriamente dita.

Obstáculos epistemológicos envolvidos nas actividades de investigação

O trabalho investigativo dos alunos, pela sua riqueza e complexidade conceptual e matemática, origina obstáculos epistemológicos que podem comprometer todo o processo. A ausência de motivação adequada é um obstáculo comum, sendo mesmo, para alguns alunos, inultrapassável. Reconhecemos que

> fazer descobertas significativas em matemática é suficientemente difícil para os matemáticos... e não nos devemos esquecer que eles estão

> fortemente motivados para o seu assunto. Ambientes ricos, como este, implicam muitas complexidades, e os alunos provavelmente encontrarão muitas dificuldades neles e não estão necessariamente muito motivados para a matemática. (Ponte e Matos, 1992, p. 252)

Outros obstáculos epistemológicos relacionam-se com o

> conhecimento de conteúdos, processos de raciocínio, ou atitudes gerais e apreciação. Os alunos podem não ser capazes de descobrir nenhuma maneira de começar uma investigação. Podem não saber conteúdos relevantes de base, ou não serem capazes de avaliar um resultado dado. (Ponte e Matos, 1992, p. 253)

Havendo elementos perturbadores numa das quatro dimensões[3] da aula de matemática como espaço epistemológico forte, inevitavelmente surgirão obstáculos epistemológicos que, em muitos casos, são removíveis.

O valor e os limites do conhecimento produzido nas investigações dos alunos

Ao promover uma dinâmica investigativa nas suas aulas, o professor "tem que aceitar que nem toda a matemática criada na investigação de um problema terá igual importância futura" (Hatch, 1995, p. 38). Algumas das produções dos alunos têm uma certa sintonia com ideias matemáticas potentes, na perspectiva da comunidade matemática actual; noutros casos, essas produções são desvalorizadas pela sua marginalidade ou irrelevância científica. Porém, na investigação científica profissional, ocorre algo semelhante: a produção científica dos matemáticos, tal como a dos cientistas em geral, é diferentemente valorizada pela comunidade científica.

> São identificadas áreas matemáticas "importantes", é atribuído mais valor a uns resultados que a outros, são tomadas decisões sobre o que deve ou não deve ser publicado, numa sociedade determinada por relações de poder (...). Os produtos matemáticos podem então ser vistos como o resultado da influência de uma 'leitura' particular dos eventos num certo tempo/lugar. (Burton, 1995, p. 279)

Por isso, coexistem teorias estruturantes do conhecimento numa certa área; teorias locais, isto é, de âmbito limitado; ideias isoladas, que tanto podem abrir como fechar linhas de investigação, ou simplesmente, acrescentar algum conhecimento parcelar. A todas estas produções está associado um determinado valor epistemológico, determinado por critérios culturais, sociais e temporais, além dos critérios propriamente científicos. Portanto, este valor epistemológico não é absoluto mas mutável.

Analogamente, as investigações dos alunos permitem-lhes produzir conhecimento matemático a que está associado um determinado valor epistemológico, relativo, que deve ser atribuído à luz de critérios culturais, sociais, temporais, educativos e, naturalmente, matemáticos.

Relação entre conhecimento e quem conhece

Tradicionalmente, o conhecimento tem sido considerado como absoluto tendo o sujeito aprendente que fazer um esforço de aproximação assimptótica a esse absoluto. Assim entendido, o conhecimento é coisificado na sua imutabilidade. Idealmente, todos, em toda a parte, se apropriariam do mesmo conhecimento, de maneira isomorfa e o retransmitiriam da mesma maneira. Porém, as posições epistemológicas actuais sublinham o caráter situacional do conhecimento, nas suas diversas dimensões epistemológicas, desde a valorização, até à apreciação estética, passando pela validação. Nesta perspectiva, "a epistemologia (...) exige a reconsideração de uma posição teórica do conhecimento como dado, como absoluto, para uma teoria do conhecimento, ou talvez melhor, do conhecer, como subjectivamente contextualizado e no seio da qual o significado é negociado" (Burton, 1995, p. 277).

Uma primeira consequência desta posição epistemológica é que "conhecer, em matemática, não pode ser diferenciado daquele que conhece" (Burton, 1995, p. 286). A relação entre o conhecimento e quem conhece ganha um novo dinamismo: o sujeito aprendente recria o conhecimento, porque "o cérebro é um sistema criador" (Damásio, 1999, p. 367), e o conhecimento recria o sujeito aprendente. Portanto,

> conhecer matemática [é] (...) uma função de quem afirma saber, relativamente a que comunidade, como esse conhecimento é apresentado, que explicações são dadas sobre como esse conhecimento foi alcançado, e as conexões demonstradas entre ele e outros conhecimentos (aplicações). (Burton, 1995, p. 287)

Estas considerações de teor epistemológico têm tido expressão na prática profissional dos matemáticos. Por exemplo, Penrose (citado por Burton, 1995) corrobora a ideia segundo a qual há "muitas maneiras diferentes de pessoas diferentes pensarem – e mesmo de matemáticos diferentes pensarem sobre a sua matemática" (p. 283). Aliás, Penrose vai mais longe ao admitir que o próprio processo de validação de resultados matemáticos está eivado de um inquestionável relativismo ao depender de quem está envolvido nesse processo. Quer dizer,

> 'ver' a validade de um argumento matemático tem que ser uma experiência pessoal e de um tipo que, parece-me razoável asseverá-lo,

> pode assumir-se como diferindo entre indivíduos. Ao argumentar que 'ver' é não algorítmico, Penrose permitiu a personalização do processo. (Burton, 1995, p. 283)

No contexto escolar, a relação entre sujeito aprendente e conhecimento (ou conhecer) não é diferente. Como "aprender matemática não significa construir o conhecimento certo, visto que ninguém está seguro acerca do que é esse conhecimento" (Dawson, 1992, p. 201), é natural que cada aluno, num contexto investigativo, tenha um tipo de experiência matemática que resulte num "produto matemático diferente daquele que seria proporcionado por outro indivíduo" (Burton, 1995, p. 283).

Caracterização do conhecimento matemático novo

A concepção da aula de matemática como espaço epistemológico forte pressupõe que sabe matemática quem faz uso dinâmico e produtivo dos processos tipicamente matemáticos.

Nesta perspectiva, o uso dos processos matemáticos passa pela geração de conhecimento matemático novo. Porém, é preciso reconhecer que o conhecimento matemático novo tem diversos níveis de complexidade, extensão, profundidade, etc. Portanto, fazer justiça à riqueza do conhecimento matemático implica reconhecer a importância epistemológica da matemática informal, dando crédito ao conhecimento que emerge do exercício de *todos* os processos matemáticos. Neste sentido, as ideias que resultam de intuir, conjecturar, experimentar, generalizar, etc., podem constituir conhecimento matemático (relativamente) novo. Em suma, conhecimento matemático novo é um conjunto de ideias que resulta da(o):

- (i) Extensão de conhecimento *standard*;
- (ii) Produção e análise de exemplos críticos;
- (iii) Criação de linguagem e de representações simbólicas apropriadas;
- (iv) Identificação de casos particulares que abrem caminhos de investigação;
- (v) Estabelecimento de conexões entre áreas matemáticas;
- (vi) Concepção de novas provas e demonstrações;
- (vii) Definição de conceitos, entes e relações entre eles;
- (viii) Estabelecimento de proposições;
- (ix) Matematização de situações;
- (x) Identificação de propriedades de entes matemáticos.

Conseguintemente, problematizar a aula de matemática como espaço epistemológico forte, acrescenta legitimidade epistemológica à legitimidade educativa e matemática do trabalho investigativo no âmbito escolar.

Conclusão

No dealbar do século XXI, perspectiva-se uma inevitável mudança de paradigma educativo, uma vez que "viver e actuar na incerteza é a face da nova modernidade" (Ambrósio, 1999, p. 20). A sociedade da informação, desejavelmente, dará lugar à sociedade do conhecimento, visto que

> informação não é conhecimento; é apenas a sua matéria base. A este, ascende-se pelo ensino, mas sobretudo pelo desejo de saber mais, pela atitude de querer aprender para fazer diferente, para ser e estar de outro modo, consigo e com os outros. São os pilares da educação e formação para o século XXI: o saber, saber fazer, saber ser, saber estar com os outros. (Ambrósio, 1999, p. 23)

Uma sociedade do conhecimento exige uma refundação da escola como instituição e a atribuição de novos papéis aos seus actores. Para o aluno da sociedade do conhecimento, o "objectivo final [é] o desenvolvimento das capacidades cognitivas, de aprender a aprender, de problematizar, mobilizar conhecimentos perante situações reais concretas de resolução de problemas" (Ambrósio, 1999, p. 24).

A sociedade do conhecimento dará uma maior relevância epistemológica à escola e, em particular, à aula de matemática. Assim, a concepção da aula de matemática como espaço epistemológico forte, em que as dinâmicas investigativas têm uma presença primordial, é a concretização por excelência desse viver e actuar na incerteza. Importa, pois, favorecer a expressão do pensamento inferencial (indutivo, abdutivo e transformativo) associado à criação de conhecimento matemático, ainda que informal. Naturalmente, uma vez que a criação de conhecimento também exige conhecimento, há que integrar e harmonizar, no ensino regular, as dimensões produtiva e reprodutiva do conhecimento. Esse é o grande novo desafio do professor, que também vive e actua na incerteza, e da escola, como lugar dos saberes feitos que hão de ser refeitos depois de desfeitos.

Para que não se diga como o poeta (Tamen, 1995, p. 451):

> *(...) do lido,*
> *da ruga feita,*
> *que se aproveita*
> *mais que alarido?*

Notas

[1] A palavra 'redução', por vezes, representa a abdução e a indução consideradas em conjunto, com vista à geração e generalização de hipóteses explicativas.

[2] Birkoff é mencionado como uma das notáveis excepções porque, ao que parece, tinha uma certa propensão para pensar algebricamente.

[3] A saber, a pessoal, a relacional, a comunicacional e a investigacional.

Referências

Ambrósio, T. (1999). Investigar/formar/inovar: Um percurso integrado para uma mudança reflexiva na educação. In *Investigar e formar em educação* (vol. 1, pp. 17- 26). Porto: SPCE.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Orgs.) *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer.

Blachowicz, J. (1996). Ampliative abduction. *International Studies in the Philosophy of Science, 10(2)*, 141-157.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(1)*, 35-49.

Burton, L. (1995). Moving towards a feminist epistemology of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 28*, 275-291.

Damásio, A. (1999). *O sentimento de si: O corpo, a emoção e a neurobiologia da consciência*. Mem-Martins: Europa-América.

Dawson, S. (1992). Learning mathematics *does not (necessarily) mean* constructing the right knowledge. In D. Pimm & E. Love (Orgs.), *Teaching and learning school mathematics* (pp. 195-204). London: Hodder & Stoughton.

Davis, P,. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics 38*, 85-109.

Goldenberg, P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto "Matemática Para Todos" e APM.

Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hatch, G. (1995). If not investigations – what? *Mathematics Teaching 151*, 36-39.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics 24*, 389-399.

Hirsh, K. (1971). Creativity in classroom: A discussion of the place of original work in a mathematical education. *International Journal for Mathematics Education, Science and Technology*, *2*, 21-29.

Keyton, M. (1997). Students discovering geometry using dynamic geometry software. In J. King & D. Schattschneider (Orgs.), *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research* (pp. 63-68). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Magnani, L. (2000). *Abduction and hypothesis withdrawal in science*, retirado em 24/05/2000 de http://www.bu.edu/wcp/Papers/Scie/ScieMagn.htm.

Oliveira, H., Segurado, M., & Ponte, J. P. (1999). Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 175-182). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Oliveira, H., Segurado, M., Ponte, J., & Cunha, M. (1999). Investigações matemáticas na sala de aula: um projecto colaborativo. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 121-131). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Orgs.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlim: Springer.

Pólya, G. (1954/1990a) *Mathematics and plausible reasoning*: *Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Simon, M. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics 30*, 197-210.

Tamen, P. (1995). *Tábua das matérias*. Lisboa: Círculo de Leitores.

Wells, D. (1995). Investigations and the learning of mathematics. *Mathematics Teaching*, *150*, 36-40.

Yu, C. (1994). *Deduction? Abduction? Induction? Is there a logic of exploratory data analysis?* Paper Apresentado no Encontro Anual da AERA, retirado em 24/05/2000 de http://seamonkey.ed.asu.edu/~behren/asu/reports/Peirce/Logic_of_EDA.html.

4

Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Isabel Vale
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Helena Fonseca
Universidade de Lisboa
hfonseca@netcabo.pt

Teresa Pimentel
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
teresapimentel@ese.ipvc.pt

Neste artigo, dividido em duas partes, damos conta do trabalho desenvolvido no grupo com o mesmo nome. Na Parte I apresenta-se o texto base elaborado para apoio à discussão efectuada no grupo de trabalho. Na Parte II são adiantadas algumas reflexões/conclusões que surgiram a partir dos contributos das comunicações inseridas no grupo e da discussão havida, tendo sempre como 'pano de fundo' o documento elaborado com antecedência e a que todos os elementos do grupo tiveram acesso.

O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores

Este texto foi elaborado com o objectivo de constituir uma base de trabalho no grupo de discussão com o mesmo nome no XI Encontro de Investigação em Educação Matemática. O texto apresenta-se organizado em três secções. Na primeira é apresentada uma discussão à volta dos termos investigações, actividades investigativas e resolução de problemas em Matemática. Na segunda referimo-nos ao papel da resolução de problemas e das actividades de investigação matemáticas na formação inicial de professores, tendo por base diferentes trabalhos realizados fundamentalmente por investigadores portugueses. Por último, é abordado o papel que pode ter a investigação sobre a prática profissional na formação inicial, recorrendo também a estudos realizados em Portugal, mas incluindo algumas referências internacionais. Estas duas últimas secções terminam com um conjunto de questões que pretendem ser pontos de partida para a discussão a realizar no grupo de trabalho, para além das sugeridas pelas diferentes contribuições a apresentar no grupo.

Investigações e problemas

Os conceitos de resolução de problemas e de investigações matemáticas têm mais pontos comuns do que diferenças pois ambos proporcionam actividades que envolvem processos complexos de pensamento. E mais do que distinguir problema de investigação, o que é importante é apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes, que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e onde os alunos tenham oportunidade para experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões. A resolução de problemas vai muito além de resolver um problema. É um modo de entender o ensino-aprendizagem da matemática e a própria matemática.

Pode dizer-se que esta tomada de posição em relação à resolução de problemas vem na sequência das preocupações referidas no relatório NACOME (1975) onde se defendia que a prática nas aulas de matemática deveria contemplar actividades que apontassem para níveis cognitivos mais elevados dos alunos, e que a resolução de problemas deveria aparecer em todos os níveis de ensino, de preferência ligada a situações concretas. Em particular, Morris Kline, conforme refere o relatório, mostrava preocupações com o ensino da resolução de problemas que se efectuava nas escolas dos EUA onde a principal tarefa dos alunos consistia em traduzir o enunciado dos problemas em linguagem simbólica e nas consequentes manipulações aritméticas e algébricas que conduzem inevitavelmente a soluções fechadas com poucas aplicações a situações realísticas. Esta relevância da resolução de problemas como método investigativo ou da resolução de problemas como estilo de trabalho privilegiado nas aulas de matemática seguindo uma aprendizagem investigativa da matemática começou a partir de então a ser defendida por vários documentos (e.g., APM, 1988; Cockcroft, 1982; NCTM, 1989, 1991, 1998; NRC, 1989). Mais recentemente o NCTM (2000), no documento *Principles and standards for school mathematics,* continua a privilegiar a resolução de problemas, como uma das dez normas para o ensino da Matemática para cada um dos níveis de escolaridade, onde se refere que

> Aprendendo resolução de problemas em matemática, os alunos adquirem modos de pensar, hábitos de persistência e de curiosidade, e confiança em situações que não lhes são familiares e que lhes servirão fora da aula de matemática. Ser um bom resolvedor de problemas pode acarretar-lhes grandes vantagens quer na vida de todos os dias quer no trabalho (p. 52).

Assim, a resolução de problemas deve constar nos programas de ensino, contribuindo para a compreensão matemática, de modo que todos os alunos:

- Construam novos conhecimentos matemáticos através do seu trabalho com problemas;
- Desenvolvam vontade para formular, representar, abstrair e generalizar em situações dentro e fora da matemática;
- Apliquem uma grande variedade de estratégias para resolver problemas e adaptem as estratégias a novas situações;
- Monitorizem e reflictam sobre o seu pensamento matemático na resolução dos problemas (p. 52).

Como já foi referido, a realização de actividades investigativas e de resolução de problemas, como actividades matemáticas, estão próximas (Ponte 2001); contudo, para alguns autores, existem algumas diferenças. Geralmente, uma das principais características de um problema é ter um objectivo bem definido mas que não é rapidamente alcançável. Os problemas podem ser mais estruturados ou mais abertos e referir-se a situações puramente matemáticas ou contextos da vida real, no entanto, geralmente, as questões estão claramente estruturadas desde o início e são apresentadas já formuladas aos alunos. Nas investigações, a formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objectivos por parte dos alunos são um dos seus atributos essenciais. Assim, para que este processo seja despoletado a investigação deve ter um carácter aberto e um ponto de partida pouco definido.

Pirie (1987) defende que numa investigação não há resultados conhecidos para os alunos e não se espera que estes alcancem "a resposta correcta", mas sim que explorem as possibilidades, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas. Esta autora, recorrendo a uma metáfora geográfica, refere que numa investigação "a ênfase está em explorar uma questão da matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem, não o destino" (p. Intro. 2). Ernest (1991) utiliza o mesmo tipo de metáfora para comparar o processo de investigação matemática – "explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objectivo específico" (p. 285) com o processo de resolução de problemas – "abrir um caminho para uma meta" (p. 285).

Confrontando o trabalho investigativo com a resolução de problemas, a primeira é considerada uma actividade divergente e a segunda convergente (Ernest, 1991; Frobisher, 1994). Deste modo, na resolução de problemas o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível e numa investigação o objectivo é explorar todos os caminhos interessantes partindo de uma dada situação. Para além disso, na resolução de um problema podem ser sugeridas heurísticas como as apresentadas por Polya (1978), nas investigações é muito difícil apresentar um conjunto de estratégias a seguir pois as possibilidades são imensas (Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, 1998).

Uma abordagem investigativa no ensino da Matemática proporciona uma experiência produtiva ao nível dos processos envolvidos na matemática e no pensamento matemático tais como procura de regularidades, formulação, teste, justificação e prova de conjecturas, reflexão e generalização, existindo assim múltiplas oportunidades para o trabalho criativo e significativo durante uma investigação (Ponte, 2001).

Ernest (1991) ilustra no quadro seguinte os papéis do professor e do aluno, aquando da adopção de diferentes abordagens de ensino ligadas à inquirição no ensino da Matemática:

Método	Papel do Professor	Papel do Aluno
Descoberta Guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o objectivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objectivo.	Segue a orientação.
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

Figura 1. Papel do professor e do aluno em diferentes abordagens de ensino

Da discussão anterior parece poder afirmar-se que as definições de problema e de investigação variam de autor para autor, sendo possível que, por vezes, se esteja a dar o mesmo significado aos dois termos. Por outro lado, a separação também pode ser difícil pelo facto da classificação estar dependente da pessoa que resolve o problema ou a investigação.

O papel das investigações matemáticas (e dos problemas) na formação inicial de professores

Sendo os professores peças fundamentais no processo ensino/aprendizagem, a formação inicial deve preparar os seus futuros professores de modo a implementar com sucesso um tipo de ensino que vá de encontro às recomendações anteriores. Neste sentido há necessidade de estudar os futuros professores, contudo são poucos os estudos conhecidos no nosso país envolvendo alunos da formação inicial em tarefas de investigação.

Apresentamos de seguida dois conjuntos de trabalhos de investigação; um primeiro mais centrado na resolução de problemas e um segundo mais relacionado com tarefas de investigação.

O primeiro trabalho neste âmbito foi o de Fernandes (1988) que desenvolveu uma investigação experimental num contexto de formação inicial de professores do 1º ciclo durante as aulas de Metodologia do Ensino da Matemática, na Universidade Texas A&M, em que comparou os efeitos de dois métodos de ensino de resolução de problemas analisando: (1) os seus efeitos em termos da capacidade de resolução de problemas; e (2) a percepção que estes professores têm acerca das estratégias por eles usadas. Das conclusões a que chegou destacamos as seguintes: os futuros professores do ensino básico, em formação inicial, podem aprender a resolver problemas de processo em Matemática; os futuros professores do ensino básico, em formação inicial, podem ser ensinados a aplicar conscientemente estratégias de resolução para resolver problemas de matemática; e ambos os modelos de ensino parecem ter contribuído para que os futuros professores demonstrassem vontade de ensinar problemas a alunos do ensino básico e para que se revelassem mais conscientes acerca das estratégias e outros aspectos dos problemas que devem ser ensinados naquele nível de ensino. Mais tarde Fernandes (1992) desenvolveu outro estudo idêntico, mas com alunos de formação inicial de uma Escola Superior de Educação, e chegou precisamente aos mesmos resultados. Estes trabalhos caracterizam-se sobretudo por marcarem a passagem de uma linha de investigação que se vinha fazendo sobre os métodos heurísticos de ensino para uma preocupação também com as concepções dos professores sobre o tema, assim como a passagem progressiva do paradigma quantitativo para o qualitativo na realização destas investigações.

Vale (1993) e Fernandes e Vale (1994a, 1994b) analisaram e discutiram as concepções e as práticas de dois jovens professores perante a resolução de problemas. Estes jovens professores tiveram durante a sua formação diversas disciplinas onde a resolução de problemas tinha um papel importante, tendo-lhes sido dadas oportunidades para resolverem problemas e desenvolverem os seus processos metacognitivos assim como uma visão sobre as várias heurísticas e estratégias de resolução de problemas. Os dois formandos, enquanto alunos, valorizaram ambos fortemente a componente de resolução de problemas; contudo, desenvolveram estilos de ensino muito diferentes quando confrontados na sua prática lectiva. Os autores, a partir das asserções seguintes: "os alunos manifestaram (verbalizaram) concepções semelhantes em relação à matemática, à resolução de problemas e ao seu ensino, no entanto adoptaram estilos de ensino diferentes", elaboram algumas reflexões: (1) a formação inicial parece ter tido um impacto muito reduzido na forma como os participantes integram a resolução de problemas no desenvolvimento do currículo de matemática; (b) as concepções que manifestaram em relação à resolução de problemas mostram-se incompatíveis com as suas concepções acerca dos programas, uma vez que estas condicionaram as actividades de resolução de problemas; e (c) os professores no seu primeiro ano ficaram completamente entregues a si próprios não encontrando condições favoráveis ao desenvolvimento de práticas inovadoras nas escolas em que leccionaram.

Num outro estudo, Vale (1997) analisa, em contexto de sala de aula, os desempenhos e a reacção de futuros professores, alunos do 4º ano dum curso de formação de professores de Matemática/Ciências da Natureza duma Escola Superior de Educação, na resolução de problemas de matemática. Conclui que as principais dificuldades estão associadas à compreensão e à execução. Detecta dificuldades na generalização a partir da descoberta de padrões e incapacidade de pensar matematicamente. Verificou também que os futuros professores são pouco reflexivos, têm dificuldades de argumentação e não procuram resoluções alternativas. Constatou no entanto que o módulo de ensino sobre resolução de problemas teve impacto positivo quer a nível de desempenho quer a nível de concepções desenvolvidas.

Fonseca (1997), conduzindo um estudo exploratório sobre processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de matemática, também alunos do 4º ano dum curso de formação de professores de Matemática/Ciências da Natureza duma Escola Superior de Educação, detecta nestes alunos dificuldades em argumentar a favor dos seus raciocínios, em conjecturar e em generalizar, e ainda na avaliação da razoabilidade da resposta.

Considera que estas falhas podem dever-se à insegurança no domínio dos conceitos matemáticos. Verifica ainda que a formação que tiveram em resolução de problemas não foi suficiente para ultrapassar os obstáculos devidos a uma concepção da matemática em que os alunos se limitam a reproduzir procedimentos e a chegar a uma resposta para os exercícios propostos.

Borralho (1997), num estudo que procurava analisar a relação entre as práticas de ensino de futuros professores de matemática e a sua formação inicial num curso de Ensino da Matemática de uma Universidade, verificou que a formação inicial contribuiu pouco para a mudança das concepções dos futuros professores sobre a matemática e o seu ensino. De facto, embora tendo frequentado disciplinas em que se valorizou a reflexão sobre a actividade do professor, a resolução de problemas e o seu ensino, os futuros professores tenderam a reproduzir nas suas práticas os modelos dos seus professores do ensino secundário.

Num estudo desenvolvido por Cabrita (1997) com alunos dum curso de Ensino da Matemática duma Universidade envolvidos em tarefas de resolução de problemas ligados ao conceito de proporcionalidade foram constatadas algumas dificuldades ao nível da compreensão dos problemas e na diversificação das estratégias. Parece também haver uma certa contradição entre as suas concepções quanto à abordagem didáctica dos problemas e as práticas que dizem que implementariam.

Vale (2000) estudou as relações existentes entre as oportunidades de formação proporcionadas por duas disciplinas de Didáctica da Matemática, onde se privilegiou a resolução de problemas e a utilização de materiais manipuláveis, e o desenvolvimento de conhecimentos, concepções e práticas de quatro futuros professores, no âmbito da formação inicial de professores do ensino básico duma Escola Superior de Educação. A análise dos dados parece revelar uma clara relação entre as disciplinas de Didáctica da Matemática e as concepções, conhecimentos e práticas de futuros professores de Matemática. Na verdade, não só foi possível constatar tal relação no discurso utilizado pelos jovens futuros professores mas também nas suas práticas lectivas, nomeadamente ao nível das planificações das aulas e da sua concretização. Verificou-se ainda que a resolução de problemas e os materiais manipuláveis proporcionaram contextos de ensino, de aprendizagem e de formação claramente facilitadores do desenvolvimento profissional dos futuros professores de matemática. Este estudo permitiu ainda recolher informação relevante para que se desenvolva uma reflexão aprofundada sobre as disciplinas e o seu conteúdo, facilitando a sua reformulação e melhoria em aspectos relacionados com a resolução de problemas ou com o desenvolvimento profissional de professores. Consequentemente, foi possível elaborar algumas recomendações para futuras investigações. Em particular, será relevante responder a questões tais como: Que componentes da formação inicial incluir numa disciplina de Didáctica da Matemática? Que abordagens parecem favorecer o desenvolvimento de concepções mais consentâneas com os documentos programáticos mais consensuais por parte dos educadores e investigadores? Que tipo de materiais e de diferentes actividades é mais apropriado propor num programa das disciplinas de Didáctica da Matemática? Que relações estabelecer entre as disciplinas de didáctica e a prática pedagógica? Qual o entendimento das diferentes instituições sobre o papel da didáctica na formação inicial de professores?

Podemos dizer que a maioria dos trabalhos permite caracterizar as concepções, atitudes e desempenhos de professores relativamente à resolução de problemas e alguns ainda permitem identificar possíveis relações destes aspectos com a prática na sala de aula desses professores.

Parece-nos poder concluir que há pontos de convergência a salientar em alguns destes estudos: (a) pode-se ensinar a resolver problemas aos futuros professores e estes desenvolvem uma atitude positiva em relação à resolução de problemas; (b) há dificuldades sentidas nalguns aspectos das tarefas de resolução de problemas, nomeadamente de compreensão, de generalização, de argumentação; (c) a pouca qualidade dos conhecimentos matemáticos pode influenciar a capacidade de resolução de problemas; e (d) os módulos de ensino de resolução de problemas implementados parecem não ter sido suficientes para fazer os futuros professores mudar as suas concepções sobre a natureza da matemática e do seu ensino e essencialmente terem vontade ou capacidade para alterar as suas práticas relativamente aos modelos de ensino tradicionais veiculados pelos seus professores ao longo da sua escolaridade.

No segundo grupo de trabalhos de investigação começamos por referir o de Fonseca (2000) que descreve uma experiência, desenvolvida na disciplina de Seminário Temático, envolvendo alunos do 4º ano da Licenciatura em Ensino da Matemática, logo futuros professores de Matemática, na FCUL. Este Seminário foi um espaço dedicado às investigações matemáticas e ao seu papel educativo, proporcionando aos candidatos a professores um contacto aprofundado com este tipo de tarefas, tanto ao nível da implementação na sala de aula como a um nível mais geral. Os principais objectivos desta disciplina foram: (a) analisar as principais facetas do trabalho de investigação em Matemática; (b) dar a conhecer as potencialidades educativas das actividades de investigação matemática; (c) proporcionar a exploração e discussão de investigações matemáticas; (d) proporcionar a análise e discussão de aulas de investigação matemática; (e) desenvolver a capacidade de preparar e conduzir uma aula de investigação; e (f) considerar o papel do trabalho de colaboração e trocas de experiências entre professores no desenvolvimento deste tipo de trabalho.

Sendo a disciplina um espaço dedicado às investigações matemáticas, fez todo o sentido que ela própria fosse percorrida por uma lógica de investigação, e, por essa razão, ao longo das aulas, os futuros professores aprenderam investigando. Seguindo esta lógica, a disciplina foi dividida em três grandes partes: (a) Investigar as investigações em Matemática; (b) Investigar as aulas de investigação e o trabalho do professor; e (c) Investigar um tema matemático.

Ao longo destes três grandes segmentos, os alunos exploraram e discutiram quatro tarefas de investigação matemática sobre Geometria, Funções e Números. Esta componente da cadeira revelou-se fundamental para envolver os futuros professores na elaboração de tarefas investigativas, pois é essencial que um professor que pretenda implementar estas tarefas com os seus alunos, tenha ele próprio uma atitude investigativa e que explore as tarefas que propõe. O balanço que os alunos fizeram do trabalho foi muito positivo, considerando que: foi tratado um tema que os vai favorecer na vida profissional, relativamente a outros alunos que não tiveram um contacto tão aprofundado com ele; viram porque é que vale a pena o trabalho investigativo; foi muito bom eles próprios investigarem e sentirem o "gozo" que é investigar, pois só assim conseguirão transmitir aos alunos a importância de realizar investigações na sala de aula; é mais uma porta aberta! – era um tema que precisava de ser tratado para que os professores experimentem este tipo de trabalho nas suas aulas. No início do semestre, os candidatos a professores tinham um conhecimento reduzido sobre o trabalho investigativo, mas no final do ano saíram com confiança para o enfrentar pois perceberam as suas potencialidades, apesar de estarem conscientes das dificuldades com que se poderão deparar.

Brunheira (2000) desenvolveu um estudo que tinha por objectivo analisar o conhecimento e as atitudes de três professores estagiários associados à realização de trabalho investigativo na aula de Matemática. Na realização de investigações matemáticas estes professores revelaram uma preferência pela utilização de métodos analíticos em detrimento de estratégias informais e a quase ausência de estratégias geométricas. Ao longo do ano, a evolução mais notória foi a progressiva utilização de estratégias diferentes para resolver a mesma tarefa, utilizando processos mais ou menos intuitivos e formais. Relativamente às atitudes destes professores perante a realização de aulas de trabalho investigativo, todos lhes atribuíram importância, mas os argumentos utilizados para sustentar essa importância foram mudando à medida que vivenciaram determinadas experiências. Eles passaram a valorizar mais a realização de trabalho investigativo, tendo esta valorização emergido de si próprios.

Ponte (2001) apresenta um projecto, realizado por um grupo de professoras estagiárias, baseado no potencial que podem ter as investigações matemáticas no ensino desta disciplina. Estes professores, depois de recolherem alguma informação sobre as potencialidades de utilizar este tipo de tarefas na sala de aula e sobre o modo de conduzi-las decidiram implementá-las com os seus alunos. Durante esta implementação foram recolhendo dados que os ajudassem a reflectir sobre esta experiência, reflexão esta que foi apresentada num relatório final onde a experimentação das actividades foi apresentada como "estudos de caso". Para concluir este relatório as professoras estagiários referem:

> O trabalho que desenvolvemos durante este ano lectivo fez-nos considerar que as actividades de investigação são estimulantes para os alunos assim como para nós. Isto é porque pensamos que esta abordagem é uma "verdadeira actividade matemática" e desenvolve capacidades, atitudes e valores que outras estratégias pedagógicas não desenvolvem tão eficazmente." (Esteves et al., p. 47, citado em Ponte, 2001)

Nos trabalhos deste segundo grupo há também pontos de convergência, tais como: (a) a formação de professores sobre as potencialidades do trabalho investigativo com os alunos deve revestir, também ela, uma natureza investigativa; e (b) as opiniões dos futuros professores sobre o valor pedagógico das tarefas de investigação são tanto mais positivas quanto mais eles se envolvem pessoalmente na sua realização.

Analisados que foram alguns trabalhos com futuros professores centrados em resolução de problemas ou em tarefas de investigação, podem levantar-se algumas questões:

- Como conseguir, na formação inicial, um confronto entre as concepções e crenças enraizadas dos futuros professores sobre a matemática e o seu ensino e as novas tendências curriculares em que a resolução de problemas e as tarefas de investigação são um contexto universal de aprendizagem?
- Como conseguir que os futuros professores tenham gosto nas actividades de resolução de problemas e nas investigações?
- Será que é necessária uma maior "exposição" às actividades de resolução de problemas e às investigações do que aquela que tem vindo a ser feita na formação inicial?
- É realmente necessário um aprofundamento dos conhecimentos matemáticos dos futuros professores com vista a poderem ultrapassar as suas dificuldades na resolução de problemas e consequentemente sentirem-se mais à vontade para desenvolver este tipo de tarefas com os seus alunos?
- Que tipo de estratégias podem ser utilizadas durante a formação inicial?
- Será que esta é uma tarefa da exclusividade da matemática?
- Como movimentar e articular toda a formação inicial para esta tarefa?

O papel das investigações profissionais na formação inicial de professores

É reconhecido que as competências profissionais do futuro professor de Matemática são adquiridas através da realização de um grande número de actividades, em que o processo de reflexão é fundamental. Romper com a inércia construída durante anos de escolaridade e modificar as suas concepções implica conhecer e viver uma forma diferente de fazer Matemática, de aprender e ensinar Matemática. Se queremos que os futuros professores alterem as suas próprias ideias sobre o conhecimento matemático e a sua construção no contexto escolar, teremos que proporcionar situações formativas nas quais, mediante a investigação de problemas práticos profissionais, a dita mudança seja fazível (Serrazina, 2002). Pois "as experiências porque passam os futuros professores, enquanto alunos, têm uma ressonância na educação que proporcionam aos seus alunos" (NCTM, 1994, p. 130).

Segundo Crawford e Adler (1996), a experiência da maioria dos futuros professores de Matemática está associada a um ensino tradicional, baseado num modelo de ensino/aprendizagem transmissivo. Mesmo durante a sua formação inicial, as teorias da educação, incluindo as recentes teorias de aprendizagem são ensinadas e avaliadas de um modo tradicional. Desta maneira, os professores não desenvolvem outros modos de acção nem outras experiências que lhes permitam criar um ambiente de aprendizagem favorável à resolução de problemas ou à investigação de situações, continuando então a reproduzir o modelo de ensino utilizado na sua própria aprendizagem.

No sentido de contrariar esta tendência, Crawford e Adler (1996) dão ênfase à natureza investigativa que o modelo de formação inicial deve assumir. Segundo estas autoras, "a investigação sistemática e a reflexão realizadas com o objectivo de resolver um dilema ou responder a uma questão pessoalmente significativa – a actividade de investigação – resulta num conhecimento de um tipo diferente. O conhecimento que deriva da actividade de investigação é necessariamente pessoal" (p. 1189), constituindo a base para o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas e para a produção de mudança.

Também Ponte (1998) defende que a interiorização do processo investigativo constitui uma componente fundamental da formação (inicial e contínua) do professor, contudo refere ser problemática esta interiorização pelo facto de contrariar as expectativas de formação da maioria dos formandos e também por implicar mudanças significativas ao nível das instituições responsáveis pela formação. Segundo Ponte, "Um jovem biólogo, químico, psicólogo ou sociólogo completa o seu curso e conhece o essencial do processo de investigação na sua área. O mesmo não acontece, de um modo geral, com o jovem professor." (p. 13)

Este mesmo autor apresenta um conjunto de razões para justificar a integração da investigação na formação de professores: ajuda a construir conhecimento relevante do ponto de vista da prática profissional; favorece a compreensão da sua própria aprendizagem, investigando sobre ela, e consequentemente possibilita a compreensão desse processo nos alunos; desenvolve competências e valores decisivos, tais como o espírito crítico e a autonomia dos professores relativamente ao discurso das Ciências Humanas; e constitui um paradigma de trabalho que pode servir de base a uma prática reflectida.

Ruthven (2001) destaca igualmente a importância dos projectos de investigação no desenvolvimento profissional dos professores e apresenta o exemplo da sua universidade onde os alunos realizam pequenos projectos de investigação durante o tempo em que observam e leccionam aulas numas escola. Num destes projectos os formandos tinham de relatar pelo menos três episódios que tivessem ocorrido em aulas de trabalho investigativo em Matemática que tivessem observado ou leccionado e fazer uma análise crítica do contributo das investigações para a aprendizagem dos alunos. Esta metodologia estimulou a atenção dos formandos para aspectos importantes e promoveu a reflexão.

Azcaráte (1999) propõe um processo formativo baseado numa estratégia de formação em que aquele é considerado um processo de investigação a desenvolver pelos futuros professores à volta da resolução de problemas de carácter profissional. Para Serrazina (2002) em cada caso, os problemas de partida podem (ou devem?) ser diferentes, tendo em conta o contexto e os próprios implicados, de forma que seja um processo de indagação, reflexão e estudo por parte dos futuros professores e estes se sintam realmente implicados e interessados, constituindo, assim, uma peça-chave do seu desenvolvimento profissional (Day, 1993; Schön, 1987; Zeichnner, 1993).

A observação e vivência de situações de prática profissional pelos futuros professores proporciona oportunidades para reflectir, questionar e discutir e teorizar sobre a escola e o ensino-aprendizagem da Matemática, tendo por base material concreto, rico e partilhado. Ponte e Brunheira (2001) apresentam o caso da disciplina de Acções Pedagógicas de Observação e Análise (APOA), frequentada por futuros professores no ano anterior ao estágio pedagógico, e onde as actividades propostas constituem uma primeira experiência de investigação sobre a prática profissional. Nesta disciplina, os alunos identificam aspectos da realidade escolar que querem observar e questionar, recolhem dados, apresentam conjecturas e tiram conclusões. Os autores deste estudo consideram que este tipo de trabalho ajuda a desenvolver um discurso profissional e a assumir uma identidade profissional. Consideram ainda que, sem essas experiências pessoais, vividas na escola, é muito difícil analisar fenómenos relacionados com a prática profissional do professor. O constante questionar dos futuros professores, partindo da observação, reflectindo, identificando problemas e procurando soluções pode constituir importantes momentos formativos.

Relativamente às etapas de trabalho envolvidas numa investigação, Ponte (2001) refere que se começa por caracterizar o problema ou a situação problema que se quer explorar. Depois, planeia-se o trabalho, definindo-se as actividades a realizar, os instrumentos a usar, a calendarização a seguir, as fontes a mobilizar e o papel das pessoas que irão participar no trabalho. Segue-se uma fase de execução do plano com eventuais correcções necessárias. E por fim, avalia-se o trabalho, através de uma reflexão sobre o processo e o produto e identificam-se novas questões para posterior investigação. Para além disso, o mesmo autor defende que o problema a investigar pode ser um problema teórico ou pode ser um problema que surja de dificuldades concretas de prática, realizando-se neste caso aquilo a que se chama investigação-acção. Tanto num caso como no outro, o trabalho sobre a situação problemática leva a um aumento de conhecimento, mas no segundo caso pode lutar-se para alterar uma situação. Também Crawford e Adler (1996) utilizam o termo investigação-acção para descrever processos de investigação que tenham como objectivo provocar mudanças na prática profissional ou nas instituições sociais.

Para alguns autores desenvolvendo as capacidades investigativas dos professores em formação constrói-se um percurso de formação autónoma e reflexiva. A investigação-acção possui duas características principais que a tornam adequada para a melhoria da prática dos professores: 1) pode ser realizada pelo próprio professor, não se constituindo como investigação realizada por outrem sobre aquele e 2) lida com um problema específico, numa determinada situação e com a aplicação imediata ou a curto prazo dos seus resultados (Cohen e Manion, 1989). E porque a investigação-acção surge em resposta à necessidade constante de reflexão, avaliação e inovação no trabalho profissional e muitas vezes como extensão da prática lectiva de muitos professores, apresenta uma grande flexibilidade.

As potencialidades da investigação-acção residem no facto de se envolver directamente o futuro professor num processo de questionamento sistemático da sua prática. Segundo Moreira e Alarcão (1997) a investigação-acção pode constituir uma estratégia de formação reflexiva adequada ao contexto do ano de estágio pedagógico, consistindo:

- Na reflexão diária feita de modo sistemático e intensivo;
- No questionamento sistemático dos profissionais sobre a sua prática;
- Num modo de pensar que implica o uso da reflexão e do questionamento como forma de compreender os processos de

> mudança, a sua natureza, as condições que os sustentam ou inibem e os resultados que deles advêm.

Para aquelas autoras "a investigação-acção surge como uma potencial estratégia de formação inicial de professores que os pode ajudar a desenvolver capacidades e atitudes de contínuo questionamento da sua prática de ensino e dos contextos em que essa prática se insere". O envolvimento dos professores em formação inicial em projectos de investigação-acção tem potencialidades no aumento da sua compreensão do ensino, no aperfeiçoamento das suas capacidades de raciocínio e consciencialização, podendo levar a uma melhoria dos processos de resolução de problemas e a uma maior flexibilidade e abertura à mudança (Zeichner, 1987). Pode afirmar-se que a investigação-acção assume um papel importante na formação de professores na medida em que os professores que utilizam esta metodologia fazem mais perguntas sobre o ensino e do modo como o poderiam fazer diferentemente, solicitam ajuda para compreender os resultados das suas aulas e procuram informar-se para tomar decisões (Amaral, Moreira e Ribeiro, 1996). Pode assim funcionar como um meio de tornar os professores em formação inicial mais sistemáticos e rigorosos na sua reflexão e no seu ensino.

Moreira e Alarcão desenvolveram um projecto de investigação-acção com futuros professores de inglês no último ano de formação. Estas autoras afirmam que o envolvimento das estagiárias na investigação da sua prática profissional constituiu um meio para alcançar os fins da formação: formar professoras reflexivas, não investigadoras, na acepção clássica do último termo, parecendo ter alcançado o objectivo de "desenvolver atitudes favoráveis à prática e à formação, desenvolvendo a sua autonomia profissional, através da aplicação da investigação-acção como estratégia de formação reflexiva". Afirmam também que "ficou demonstrado que o projecto de investigação-acção teve alguma influência no modo como as estagiárias analisavam o seu ensino".

O desenvolvimento de projectos de investigação sobre a prática profissional parece ser um caminho prometedor quando se pensa na formação inicial de professores, mas colocam-se questões como:

- Como conseguir que os futuros professores se envolvam durante a formação inicial num processo de reflexão sobre a prática profissional?
- Será que é possível envolver os futuros professores em projectos de investigação-acção para resolver problemas ligados à prática profissional?
- Como conciliar o envolvimento dos futuros professores durante a prática profissional em projectos de investigação-acção e a avaliação sumativa no final dessa prática profissional?

- Como compatibilizar a formação em Matemática e Didáctica da Matemática e o envolvimento em projectos de investigação sobre a prática?

Discussão e conclusões

As comunicações apresentadas e discutidas neste grupo de trabalho: *Olha p´ro que eu digo mas não olhes p´ro que eu faço, O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura matemática, O conhecimento e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática* e *Aprender Matemática investigando: Um círculo de estudos on-line* abordaram diferentes aspectos do tema em análise, constituindo momentos ricos de discussão e análise.

O subtema *Investigações Matemáticas* na formação inicial de professores gerou uma troca de experiências e opiniões viva e rica a qual permitiu equacionar algumas questões que continuam em aberto e tirar algumas conclusões, de que destacamos as seguintes:

- Os futuros professores devem ser envolvidos em actividades do tipo das que se pretende que desenvolvam com os seus alunos;
- Os futuros professores devem ter gosto na realização de actividades de investigação e de resolução de problemas, consciencializando que isso implica investimento individual e de grupo;
- Não basta que as actividades de investigação e de resolução de problemas estejam presentes nas disciplinas ligadas à didáctica ou à metodologia; é necessário que as actividades de investigação também estejam presentes em todas as disciplinas da formação matemática dos futuros professores;
- É necessário que os docentes envolvidos na formação inicial possuam formação pedagógica adequada.

Em relação ao subtema *Investigações Profissionais* houve menos intervenções de todos os participantes, talvez porque há ainda um número reduzido de experiências no nosso país que abordem as investigações profissionais. No entanto, foi possível identificar algumas aspectos tais como:

- A importância do papel dos relatórios escritos e da reflexão sobre a prática;
- A necessidade de uma reformulação do modelo da prática pedagógica que vá de encontro ao princípio anteriormente formulado;
- A importância do ano de indução para os recém licenciados, que poderá assumir a forma de:
    - cursos *on-line*.
    - projectos de investigação-acção.

Do anteriormente exposto, e do vivido no grupo de trabalho, podemos afirmar que, embora as actividades de carácter investigativo tenham vindo a ganhar relevância na formação inicial de professores de Matemática, ainda existe um longo caminho a percorrer.

Referências

Amaral, M. J., Moreira, M. A., & Ribeiro, D. (1996). O papel do supervisor no desenvolvimento do professor reflexivo: Estratégias de supervisão. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores: Estratégias de supervisão* (pp 89-122). Porto: Porto Editora.

APM (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

Azcárate, P. (1999). Estrategias metodológicas para la formación de maestros. In J. Carrillo & N. Climent (Orgs.), *Modelos de formación de maestros en matemáticas* (pp. 17-40). Huelva: Universidad de Huelva.

Borralho, A. (1997). O ensino da resolução de problemas de matemática por parte de futuros professores: Relações com a sua formação inicial. In D. Fernandes, F. Lester, A, Borralho, & I. Vale. (Orgs.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 129-149). Aveiro: GIRP.

Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Cabrita, I. (1997). Resolução de problemas envolvendo o conceito de proprocionalidade: Desempenhos e perspectivas didácticas de futuros professores de matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A, Borralho, & I. Vale (Orgs.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 71-98). Aveiro: GIRP.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.

Cohen, L., & Manion, L. (1989). *Research methods in education.* Londres: Falmer.

Crawford, K., & Adler, J. (1996). Teachers as researchers in mathematics education. In K. C. A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.

Day, C. (1993). Reflection: A necessary but not sufficient condition for professional development. *British Educational Research Journal*, *19*(1), 83-93.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.

Fernandes, D. (1988). *Comparison of the effects of two models of instruction on the problem-solving performance of pre-service elementary school teachers and on their awareness of the problem-solving strategies they employ* (tese de doutoramento não publicada, Texas A&M University).

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: Investigação, ensino, avaliação e formação de professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. P. Ponte, & J. F. Matos, *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 45-104). Lisboa: IIE.

Fernandes, D. & Vale, I. (1994a). Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: Um estudo longitudinal de dois casos. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Orgs.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp.145-168). Lisboa: IIE.

Fernandes, D. & Vale, I. (1994b). Two young teacher's conceptions and practices about problem solving. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *PME XVIII* (pp. 328-335), Lisboa.

Fonseca, H. (2000). Aprender a ensinar investigando. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 177-188). Lisboa: APM.

Fonseca. L. (1997). Processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, & I. Vale. (Orgs.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 39-70). Aveiro: GIRP.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In Orton & G. Wain (Orgs.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). London: Cassel.

Moreira, M. A., & Alarcão, I. (1997). A investigação-acção como estratégia de formação inicial de professores reflexivos. In I. Sá-Chaves (Org.), *Percursos de formação e desenvolvimento profissional* (pp. 119-138). Porto: Porto Editora.

NACOME (1975). *Overview and analysis of school mathematics: Grades K-12*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM. [Tradução portuguesa: *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar,* Lisboa, APM/IIE, 1991].

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM. [Tradução portuguesa: *Normas profissionais para o ensino da matemática,* Lisboa, APM/IIE, 1994].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Research Council (1989). *Everybody counts.* Washington, DC: National Academy Press.

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classrooms: A pack for teachers*. University of Oxford & University of Warwick.

Pólya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Orgs.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P., & Brunheira, L. (2001). Analysing practice in pre-service mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Development*, *3*, 16-27.

Ponte, J. P. (1998). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H. & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ruthven, K. (2001). Mathematics teaching, teacher education and educational research: Developing "practical theorising" in initial teacher education. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Orgs.) *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 165-183). Dordrecht: Kluwer.

SchÖn, D. A. (1987). *Educating the reflective practioner.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Serrazina, L. (2002). A formação para o ensino da Matemática: Perspectivas futuras. In L. Serrazina (Org.), *A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico.* Cadernos de Formação de Professores, *3* (pp. 9-19). Porto: Porto Editora e INAFOP.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas: Um estudo longitudinal de dois casos* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, & I. Vale. (Orgs.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp.1-38). Aveiro: GIRP.

Vale, I. (2000). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis* (tese de doutoramento não publicada, Universidade de Aveiro).

Zeichner, K. (1987). Preparing reflective teachers: An overview of instructional strategies which have been employed in pre-service teacher education. *International Journal of Educational Research*, *11*(5), 565-575.

5

O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática

Cristina Martins
Escola Superior de Educação de Bragança
mcesm@ipb.pt

Ema Maia
Escola Superior de Educação de Coimbra
emaia@esec.pt

Hugo Menino
Escola Superior de Educação de Leiria
hmenino@clix.pt

Isabel Rocha
Escola Superior de Educação de Leiria
irocha@mail.telepac.pt

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação de Bragança
mvp@ipb.pt

Este texto, que constituiu uma base de discussão no grupo de trabalho *Investigações matemáticas na aprendizagem na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico*, pretende fazer uma síntese e problematizar o estudo do trabalho de natureza não rotineira, em particular de natureza investigativa, nas aprendizagens iniciais da Matemática desenvolvidas por crianças do pré-escolar e do 1º ciclo do ensino básico. Inclui-se, ainda, na parte final do texto, uma síntese da discussão entretanto havida no grupo de trabalho.

Na primeira parte – (dos) problemas (às) investigações – é recordado o percurso seguido pela abordagem ao trabalho não rotineiro, referindo estudos e analisando documentos que marcaram a evolução da educação matemática nas últimas duas décadas e que foram influenciando o currículo e a vida escolar dos professores e das crianças.

Na segunda parte – estudos e experiências na sala de aula – são apresentadas e discutidas algumas investigações e reflexões resultantes de experiências da sala de aula, onde se destacam diversas características que se podem associar ao trabalho investigativo e as consequentes implicações no ambiente e na dinâmica da aula de matemática.

Na terceira parte – questões emergentes – são apresentadas algumas questões que interessa ter presentes quando se lida com formas de trabalho, do tipo associado às investigações matemáticas, que apelam a competências multidimensionais e orientadas para níveis cognitivos complexos.

(Dos) problemas (às) investigações

Na década de 80 surgem vários documentos, de que são exemplo *Uma agenda para acção* (NCTM, 1980/1985) e *Renovação do currículo de matemática* (APM, 1988), que defendem a resolução de problemas (*problem solving*) como o centro do ensino e da aprendizagem da matemática. Igualmente, autores como Baroody (1993), Fernandes *et al*. (1994), Kantowski (1977) e Schoenfeld (1980) perspectivam um ensino através da resolução de problemas e um ensino de heurísticas, retomando o modelo proposto por Pólya (1945/1975) e contrariando a visão de que só é necessário dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais para mais tarde resolver problemas.

De facto, o conhecimento matemático deve emergir dos problemas e da experiência com a resolução de problemas, experiência essa que engloba processos como a exploração do contexto, a elaboração de novos algoritmos, a criação de modelos ou a própria formulação de problemas (APM, 1988; NCTM, 1980/1985). Acerca da natureza das actividades na aula de matemática, o documento português utiliza expressões como desenvolvimento de modelos matemáticos; actividades de exploração, investigação e descoberta; formulação de conjecturas, discussão e comunicação; argumentação e prova; construção de conceitos; resolução e formulação de problemas. A este propósito, Silver (1996) caracteriza a formulação de problemas como uma actividade de ensino de cunho investigativo e, mais recentemente, Ponte e Serrazina (2000) salientam a importância da formulação de problemas por parte dos alunos considerando-a como uma componente vital da resolução de problemas, pois ao formular um problema pode-se partir de uma questão não muito bem definida, ou conduzir a outras questões, e aí os alunos já estão a iniciar uma investigação.

Num contexto de *problem solving* e de desenvolvimento de projectos, "as actividades de exploração e descoberta surgem naturalmente" (APM, 1988, p. 47). Estas actividades de exploração são actividades abertas que implicam entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, reconhecer regularidades e padrões, estabelecer analogias, e têm um sentido de investigação e de descoberta. Esta exploração favorece a formulação de conjecturas, a argumentação e a demonstração. Os aspectos ligados à comunicação são, neste contexto, muito importantes, devendo a capacidade de argumentar de forma consistente e convincente ser desenvolvida ao longo da escolaridade, embora assumindo formas diferenciadas ao longo do tempo e em função dos alunos. Deste modo, destaque-se a valorização das actividades de exploração e de investigação no currículo como ideia central na renovação do ensino da matemática. Esta situação é ilustrada em APM (1988, p. 48) através do exemplo seguinte:

> O espaço a explorar não é agora o Atlântico, mas por exemplo uma página cheia de números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
...	...	...	...

> (...) as regularidades a detectar não são, neste caso, que a estrela Polar está fixa no céu (...) mas sim, por exemplo, que o resultado da adição de dois números da terceira coluna está sempre na primeira. Uma tabela como esta pode provocar, na sua simplicidade, explorações com diferentes alcances e níveis de profundidade. No decorrer dessas explorações, ocasiões não faltarão para pequenas descobertas que, por se tratar neste caso muito provavelmente de redescobertas, nem por isso deixarão de ser estimulantes e motivadoras.

Na mesma linha, o documento *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1989/1991) refere que o raciocínio matemático, no 1.º ciclo, deve envolver a "formulação de conjecturas e justificações que ajudem as crianças a perceber que a matemática tem sentido" (p. 37). Para desenvolver este tipo de raciocínio são apresentadas actividades, tais como a exploração de regularidades numéricas, a criação de padrões com materiais manipuláveis ou o reconhecimento de relações entre padrões. Também Lappan e Schram (1989) consideram que o desenvolvimento do poder matemático nas crianças dos primeiros anos de escolaridade passa pela criação de um ambiente em que aprendam a raciocinar e comunicar matematicamente, ou seja, a formular e validar as suas conjecturas e a ganhar confiança na discussão dos seus argumentos. Formular, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura, resolver problemas complexos que envolvam exploração, fazer tentativas, fazer erros e corrigi-los, são algumas das experiências em que os alunos devem ser implicados, para que adquiram mais poder matemático e se tornem cidadãos matematicamente alfabetizados (NCTM, 1989/1991). Este conceito tem evoluído para o de literacia matemática quando o foco se coloca não apenas na aquisição de conhecimentos, mas na capacidade de cada um mobilizar, transferir e usar esses conhecimentos quando necessários à realização de uma tarefa. Nas diferentes normas definidas para os anos de escolaridade K-4 (NCTM, 1989/1991), aparecem com frequência termos como explorar, justificar, resolver, construir, discutir, usar, investigar, descrever, prever. Por exemplo, para aprender geometria "as crianças precisam de investigar, experimentar, explorar" (p. 60) ou para estudar estatística e probabilidades é realçada a "importância de questionar, conjecturar e procurar relações, quando se formulam e resolvem problemas do mundo real. O espírito de investigação e exploração deve estar presente em todo o ensino da estatística" (p. 66). Como práticas de ensino recomendadas para este nível de ensino, surgem, entre outras, a abordagem através de situações problemáticas, a discussão de ideias, a colocação de questões e justificação de raciocínios.

Estas ideias tiveram influência nos programas oficiais portugueses da década de 90. As *Orientações curriculares para a educação pré-escolar* (DEB, 1997) destacam a importância do trabalho para além da aplicação de rotinas, nomeadamente, associando-o à resolução de problemas e à reflexão sobre situações do quotidiano ou sobre os processos utilizados. A resolução de problemas é referida como "uma situação de aprendizagem que deverá atravessar todas as áreas e domínios em que a criança será confrontada com questões que não são de resposta imediata, mas que a levam a reflectir no como e no porquê" (p. 78). Por isso, é recomendado que o educador apresente situações problemáticas, dando tempo às crianças para procurarem e debaterem as próprias soluções e apoiando a sua explicitação.

No programa de matemática do 1º ciclo do ensino básico (DGEBS, 1990) também é dada uma grande relevância ao trabalho não rotineiro a desenvolver pelos alunos nas suas experiências de aprendizagem. Parte-se do pressuposto de que as crianças aprendem melhor quando reagem dinamicamente a uma situação que lhes suscite interesse e responda à sua natural curiosidade. Embora o trabalho investigativo não seja referido explicitamente, é sugerido que "a resolução de problemas, quer na fase de exploração e descoberta, quer na fase de aplicação, deverá constituir a actividade fundamental desta disciplina (...) e um momento especial de interacção e de diálogo” (pp. 128, 129). São dadas indicações de situações de trabalho como, por exemplo, exploração de situações; explicitação de raciocínios ou exploração, descoberta e uso de regularidades e padrões.

Estas formas de trabalho são defendidas igualmente pela APM (1998) que recomenda que “a prática pedagógica deve valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (nomeadamente, resolução de problemas e actividades de investigação) e que diversifique as formas de interacção em aula, criando oportunidades de discussão entre alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto” (recomendação 3.1, p. 44).

Recentemente, o documento *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais* (DEB, 2001) define a competência matemática a ser desenvolvida pelos alunos ao longo da educação básica. Esta competência apela fortemente ao trabalho não rotineiro, aspecto já enfatizado em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), e exige, por exemplo, “explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações”, validar uma afirmação relacionando-a com a “consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior”, “discutir com outros e comunicar descobertas”, compreender a noção de conjectura, “entender a estrutura de um problema [e] desenvolver processos de resolução [ensaiando] estratégias alternativas” (p. 57). Neste sentido, os alunos devem ter oportunidade de se envolverem em diversos tipos de experiências de aprendizagem, nomeadamente, resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos e jogos, fazendo o documento a distinção entre estes tipos de tarefas. Assim, “os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução (...) a formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática dos alunos” (p. 68), sendo feito o contraponto com os exercícios de resolução mecânica, repetitiva e de aplicação directa de um algoritmo. Nas actividades de investigação, “os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões” (p. 68).

Com o mesmo sentido e como uma evolução das *Normas*, surge a publicação *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), que inclui para todos os anos de escolaridade, a norma da “argumentação e prova”. Esta norma define objectivos escolares que enquadram as investigações matemáticas como experiências de aprendizagem a incluir no currículo desde o pré-escolar. Refere que a escola deve habilitar os estudantes a “reconhecer a argumentação e a prova como aspectos fundamentais da matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova" (p. 56). A discussão feita e os exemplos apresentados apontam para aspectos que vão para além da resolução de problemas, e que se prendem com o processo investigativo no contexto de sala de aula.

As tarefas de exploração e investigação permitem que os alunos façam pequenas cadeias de raciocínio dedutivo, que fundamentem em evidências empíricas e em factos previamente aceites. Por outro lado, permitem a elaboração sistemática de conjecturas, que podem ser discutidas com base em argumentação consistente. Esta capacidade de argumentação desenvolve-se quando os alunos são encorajados a fazer conjecturas, lhes é dado tempo para procurar evidências que as apoiem ou contestem, e lhes é exigido que expliquem e justifiquem as suas ideias. Desde o pré-escolar as crianças fazem generalizações a partir de exemplos concretos e, como tal, os professores devem levá-las a usar exemplos e contra-exemplos para testar as suas conjecturas. No final do 1º ciclo, os alunos devem consciencializar-se que vários exemplos não são suficientes para provar uma conjectura e que os contra-exemplos podem ser usados para a refutar.

Quanto à natureza das tarefas, o documento do NCTM (2000) refere que esta se deve centrar nas relações matemáticas, sendo apresentados, como exemplos, a estrutura de um padrão, as semelhanças ou diferenças entre classes de figuras, as propriedades de operações. Os alunos devem aprender a raciocinar sobre classes de objectos (todos os triângulos, por exemplo), em vez dos objectos em particular (este triângulo). Raciocinar sobre classes de objectos desenvolve capacidades de classificação e permite que os alunos se apercebam do papel da definição em matemática.

O professor desempenha um papel central no desenvolvimento deste tipo de tarefas. Deve conseguir criar um ambiente, extremamente rico em materiais que possam ser explorados, em que os alunos sintam que os conceitos podem e devem ser entendidos e possam descobrir e demonstrar verdades matemáticas gerais usando exemplos específicos.

Vejamos um exemplo apresentado em NCTM (2000, p. 189):

> Num 3º ano de escolaridade, os alunos estavam a discutir como operar 4x8. Um aluno, Matt, explicou, 'Eu penso que 2x8 é 16, então tu simplesmente duplicas'. O professor pediu a vários alunos para pegarem na ideia e perguntou à turma: 'Pensam que a estratégia do Matt para multiplicar por 4 – fazendo o dobro e depois o dobro de novo – resulta noutras situações além do 4x8?'. Quando as respostas dos alunos estavam um pouco confusas, ele pediu aos alunos para experimentarem alguns exemplos, antes de discutir o método do Matt.

Como é referido no documento, este exemplo mostra como o professor pode aproveitar alguns aspectos para fomentar a argumentação matemática. Ao colocar a questão "Pensas que a estratégia resulta sempre?", ele desloca a discussão do problema específico, para uma questão geral da multiplicação: um factor de uma multiplicação pode ser factorizado e os novos factores podem ser multiplicado em qualquer ordem.

Continuando,

> Depois dos alunos trabalharem individualmente e em pares e de terem discutido se a estratégia era ou não válida, o professor reinicia a discussão. Os alunos respondem que a estratégia é válida e apresentam vários argumentos:
>
> Carol: Porque se tu tens 2 vezes 8 e 4 vezes 8, estás a dobrar o resultado. Resulta sempre.
>
> Malia: Tem de ser o dobro porque estás a repetir o processo. É como fazeres 2 vezes 8 é 16 e depois fazeres de novo 2 vezes 8 é 16, logo tem de ser 32.
>
> Steven: O que estás a fazer é contar os oitos, logo estás a contar para a frente, estás a saltar de 8 em 8. Estás a fazer outros dois deles, por isso é como fazer o dobro.
>
> Matt: Tentei ver se funcionava com triplos, por isso fiz 2 vezes 8 e 6 vezes 8, e funcionou. Multiplicas por 3 e o resultado é triplicado.

A exploração feita pelos alunos restringe-se a exemplos específicos, mas os argumentos apresentados podem conduzir a conclusões mais gerais. O professor deve ser sensível à riqueza matemática dos argumentos apresentados. Contudo, nenhum dos argumentos dos alunos é completo ou geral, estão ainda a começar a perceber o que significa conjecturar sobre relações matemáticas. Outro aspecto importante prende-se com a decisão sobre quais as conjecturas matematicamente significativas para os seus alunos. Para fazer isto, o professor deve ter em conta as capacidades, as necessidades e as metas que tem para aquela turma.

As tarefas mais abertas implicam que o professor faça um questionamento sistemático aos alunos, em tom de desafio, que prolongue e aprofunde as investigações e permita a formulação de conjecturas. No documento *Normas profissionais para o ensino da matemática* (NCTM, 1991/1994), no papel que é atribuído ao professor na forma de dirigir o discurso na sala de aula, é referida a prática da "argumentação", de modo a levar os alunos a conjecturar, a explorar exemplos e contra-exemplos na investigação de uma conjectura e a justificarem as suas conjecturas apoiando-se em argumentos matemáticos. Dar um papel central à argumentação na sala de aula significa responsabilizar todos os alunos para que mostrem e expliquem os seus raciocínios, mas também para que se esforcem por compreender a argumentação dos outros.

Existe algum consenso de que os dois conceitos, resolução de problemas e investigações, estão relacionados com a inquirição matemática (Ernest, 1996), sendo o objecto da inquirição o problema em si ou o ponto de partida da investigação. As diferenças parecem estar no processo de inquirição, sendo o processo de resolução de problemas uma actividade convergente, porque se procura um caminho para a resposta, enquanto que o processo de investigação é divergente, pois a ênfase está em explorar uma questão da matemática em todas as direcções. Ou seja, o termo "resolução de problemas" refere-se a uma actividade convergente em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, recorrendo a técnicas e a estratégias adequadas, enquanto que o termo "investigação" é visto como uma actividade mais divergente em que se incentiva a ser curioso, a procurar estratégias alternativas, a considerar o que sucederia se se alterassem certas condições ou a generalizar o problema (Chamoso e Rawson, 2001). Também Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) consideram os dois conceitos muito próximos, pois ambos se referem a processos matemáticos complexos e envolvem actividade fortemente problemática. Adiantam dois aspectos que permitem distingui-los: (a) a natureza da questão a estudar, geralmente especificada pelo professor na resolução de problemas e apresentada de forma vaga, necessitando o aluno de a tornar mais precisa, nas investigações; e (b) as estratégias a seguir, mais sugeridas pelas heurísticas na resolução de problemas e muito mais amplas nas investigações. Do mesmo modo, Ponte e Serrazina (2000) consideram que uma investigação matemática, tal como um problema, começa com uma questão, sendo esta algo imprecisa no caso da investigação. Formular e testar conjecturas (com possível rejeição e formulação de outras) serão as etapas seguintes de uma investigação matemática, concluindo com a validação e a comunicação de resultados.

Estudos e experiências na sala de aula

Nesta secção são abordados estudos e reflexões resultantes de experiências desenvolvidas na sala de aula, destacando características associadas ao trabalho investigativo. Embora a ênfase seja colocada em estudos com alunos mais novos (até 10 ou 11 anos), também aparecem algumas referências a trabalhos realizados com alunos de outras idades.

Tomando como ponto de partida algumas questões ontológicas e epistemológicas da Matemática, Mendes (1998) procura discutir e fundamentar a utilização das actividades de investigação na actividade matemática dos alunos. Do trabalho que desenvolveu concluiu que, quando se dá maior relevo ao envolvimento dos alunos com o trabalho matemático que estão a efectuar em vez do conteúdo ou tema matemático, o professor coloca a tónica essencial num processo activo e aglutinador que faz emergir uma noção de actividade matemática totalmente distinta do trabalho rotineiro desenvolvido em algumas aulas de matemática. Esta actividade matemática surge de propostas abertas em que os percursos são negociados pelos intervenientes; a definição destes percursos faz crescer, nos alunos, o espírito de iniciativa e autonomia, a persistência e a criatividade. Neste contexto, a competência de comunicação é extraordinariamente desenvolvida, o ambiente em que decorre o trabalho possibilita que os alunos levantem questões, formulem hipóteses, exprimam ideias e negoceiem o significado das palavras. Os alunos clarificam o seu pensamento matemático, dando assim valor à Matemática e contribuindo para o desenvolvimento de saberes que permitam uma melhor compreensão conceptual da Matemática e o desenvolvimento de capacidades de ordem superior.

Uma investigação matemática é definida por Brahier e Speer (1995) como um conjunto de tarefas adequadas à resolução de um problema que: (a) tem um conteúdo de múltiplas dimensões; (b) é uma situação *open-ended* (que, segundo Pehkonen (citado por Pires, 2001), é uma situação de partida exactamente explicada, mas com objectivo final aberto), podendo admitir várias soluções; (c) é uma actividade de exploração que requer todo o tempo de uma aula ou de várias aulas para ficar completa; e (d) está centrado num tema ou acontecimento e, muitas vezes integrado numa questão focalizada. Além disso, uma investigação matemática envolve uma variedade de processos, onde se incluem: (a) procurar fontes externas para obter informação; (b) recolher dados através de diversos meios, como sondagens, observações ou medições; (c) colaborar, com cada membro do grupo, que tem tarefas específicas; e (d) usar estratégias múltiplas para alcançar as soluções e as conclusões. Os autores sugerem uma investigação para o ensino elementar (do 3º ao 6º anos de escolaridade), que começa pela descrição, feita pelo professor, da seguinte situação: "Os vizinhos partiram para férias e pediram-me para tomar conta dos seus cães". Levantando uma lata de comida para cão, o professor coloca a questão: "Que quantidade de comida para cão vou precisar?". E esta questão vai levantar outras, como o número de cães, o tipo de cães, o tempo que os vizinhos vão estar ausentes... Salientam, igualmente, que o essencial não é só resolver o problema, mas ajudar os alunos a tomarem consciência de que, nas situações da vida real, é importante tomar decisões sobre a informação que é relevante para se alcançar a solução do problema. Como conclusão, os autores propõem que os professores encorajem os seus alunos a trazer problemas similares para a aula.

Num outro contexto, Lubinski e Thiesen (1996) relatam outra investigação matemática que consistiu numa experiência levada a cabo por uma professora, com crianças de 6 anos, a partir do livro *How big is a foot?* (Myller, 1990). Trata-se de uma narrativa sobre as desventuras de um aprendiz de carpinteiro, encarcerado por, supostamente, não ter cumprido as instruções do rei. Este, desejando oferecer uma cama à rainha no seu aniversário, fornecera as medidas em pés, sem especificar que se tratava dos seus próprios pés, assinalavelmente maiores que os do carpinteiro. Daí resultou o equívoco que conduziu o pobre aprendiz à prisão e, mais tarde, a um cargo honroso, pois soube justificar-se, explicando a causa da divergência entre a encomenda e a obra. A professora em causa, durante três semanas, desenvolveu actividades de descoberta sobre a medição de comprimentos, desde a construção e uso de modelos de unidades não padronizadas, passando pela construção de instrumentos de medida usando essas unidades, a necessidade da designação da unidade associada ao número para explicitar o comprimento, até ao reconhecimento e uso do centímetro como unidade e da régua como instrumento. As actividades tiveram como ligação a narrativa referida, centro de toda a exploração. As crianças, tomando consciência das dificuldades que advinham de alguns processos em situações reais, colocaram questões, procuraram resolver os problemas, desenvolveram estratégias, aperfeiçoaram em grupo técnicas e materiais, descobriram novos processos após discussão e alcançaram uma compreensão e vocabulário sobre a medição muito mais aprofundados e numa idade mais precoce do que habitualmente.

Também Oom (1997) se refere a experiências de medição realizadas no jardim de infância pelas sete crianças de 5-6 anos da sua sala. A partir de uma exploração inicial de labirintos, a questão surgiu entre as crianças quando quiseram saber qual é o "mais comprido" e ordenar os comprimentos dos percurso realizados. Para resolverem a questão, as crianças exploraram e discutiram a aplicabilidade de diversos materiais e unidades de medida (réguas, fios, fita métrica, sapatos), expuseram os seus raciocínios, fizeram sugestões para ultrapassar as dificuldades, experimentaram essas sugestões e, finalmente, tiraram as suas conclusões. A autora reconhece, assim, a importância de seguir as ideias das crianças, mesmo que teoricamente não sejam as mais adequadas, pois é experimentando que elas aprendem e verificam se as suas propostas são, ou não, correctas.

Ainda com crianças do pré-escolar, Harris (1999) relata como uma educadora aproveita a história *Benny's Pennies* (Brisson, 1993) para promover uma aprendizagem investigativa. A história trata de um rapazinho, Benny, que tem cinco *pennies* para gastar e compra cinco prendas, cada uma por um *penny* — uma rosa para a mãe, um bolo para o irmão, um chapéu para a irmã, um peixe para o gato e um osso para o cão. Durante alguns dias, a educadora expôs vários objectos relacionados com a história: rosas, bolos, chapéus, ossos e peixes, de tamanhos e formas variados, assim como duas latas, cada uma com cinco *pennies*. Deixou que as crianças os observassem e colocou por baixo etiquetas com os respectivos nomes. A fase seguinte foi de inquirição: sobre as múltiplas características dos objectos expostos, explorou características numéricas (quantos?, diferenças), medida ("mostra o tamanho com os teus dedos", estimação), geometria (formas, posições), incluindo questões abertas e fechadas, estimulando as crianças a descrever, clarificar, articular ideias e usar competências de resolução de problemas. Seguiu-se a leitura, conduzindo a novas questões e explorações. As crianças fizeram dramatizações, alterando o número de *pennies* e de objectos, descobrindo novas relações numéricas, nomeadamente através da divisão dos *pennies* em moedas menores, e cada uma fez um desenho, legendado por uma frase numérica que julgasse adequada, sobre a forma como gastaria os seus cinco *pennies*.

Aproveitando as possibilidades dos instrumentos de cálculo, Ribeiro (1997) realiza uma experiência com calculadoras numa turma do 2º ano e destaca que a utilização da calculadora permitiu aos alunos criar, de uma forma lúdica, situações de pesquisa e de descoberta e resolver problemas que envolviam situações de cálculo que, por vezes, não dominavam.

Estes aspectos são igualmente referidos por Mamede (2001) ao reflectir sobre o papel que a calculadora pode desempenhar, no 1º ciclo, em explorações numéricas e investigações matemáticas. Realiza uma investigação qualitativa tipo estudo de caso, numa turma do 4º ano, procurando responder a duas questões: como e quando é utilizada a calculadora na resolução de tarefas de estimação, de investigações numéricas e de aplicação da matemática à vida real? E como é que os alunos do estudo vêem a calculadora na sala de aula? É feito um balanço positivo da utilização da calculadora, na medida em que: (a) permitiu a determinação correcta dos cálculos, tornando possível a identificação de propriedades numéricas, o estabelecimento de generalizações e a determinação de padrões numéricos; (b) permitiu desenvolver o raciocínio dedutivo dos alunos, bem como a capacidade de generalização, independentemente destes possuírem, ou não, limitações no cálculo; (c) possibilitou a focalização da atenção dos alunos nas actividades desenvolvidas, sem se preocuparem com os cálculos, o que torna possível a existência de um trabalho interactivo produtivo; (d) permitiu o trabalho com números grandes, operando-os e descobrindo propriedades, sem que isso provocasse um desgaste significativo e desmotivador.

Nestes níveis etários, o recurso a materiais manipulativos é indispensável para uma abordagem com significado dos conceitos matemáticos. Neste sentido, Ferreira (1996) recorreu a jogos de dominó no tratamento de tópicos do programa oficial com o objectivo de ajudar crianças dos 3º e 4º anos a serem bons resolvedores de problemas. Verificou que os alunos com mais dificuldades de aprendizagem revelaram maior insegurança nas conclusões a que iam chegando e recorreram mais a estratégias do tipo tentativa e erro do que de dedução lógica.

Adiantou ainda que materiais como os dominós constituem uma fonte de motivação para as crianças e bons auxiliares para a resolução dos problemas.

Recorrendo ao geoplano, Araújo (1998) refere experiências de trabalho com tarefas geométricas realizadas por alunos dos 2º e 3º anos com alguns problemas de aprendizagem. Os alunos trabalharam aos pares para privilegiar situações de interacção e diálogo, sendo envolvidos em situações activas e de descoberta do tipo: "num geoplano 3x3, constrói todos os triângulos possíveis, com um dos vértice no prego do centro". Durante o desenrolar das actividades, a professora observou e registou o trabalho dos alunos, encorajou a experimentação, incentivou o confronto de experiências e opiniões e pediu aos alunos para explicitarem raciocínios, sensibilizando-os à demonstração e argumentação. Das experiências realizadas, registam-se algumas conclusões quer relativamente ao trabalho dos alunos quer à utilização do geoplano. Os alunos recorreram muitas vezes à estratégia da tentativa e erro, demonstraram sempre grande persistência na procura de soluções e pararam para observar e pensar, reflectindo sobre o que faziam. As tarefas desenvolveram ainda o pensamento imaginativo dos alunos e facilitaram a descoberta e análise de relações. O trabalho com o geoplano possibilitou a abordagem da Matemática pela resolução de problemas, promoveu a interacção dos alunos durante as actividades de grupo e permitiu algum desenvolvimento ao nível da linguagem matemática.

Uma experiência realizada com alunos do 3º ano, em que foi tratado o conceito de simetria axial, é descrita por Peixoto (1998). A experiência consistiu na realização de uma sequência de actividades, nomeadamente, visualização de vídeos, proposta de situações problemáticas, ilustração de azulejos e manipulação de materiais – papéis lisos e quadriculados, espelhos, lápis, cores, tintas, tesouras e picos. Verificou-se que as crianças desenvolveram um bom sentido estético e artístico e conseguiram conjecturar correctamente sobre figuras simétricas fazendo a aplicação de simetrias axiais por composição e com eixos horizontais ou verticais.

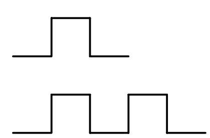
Numa turma do 4º ano, Nunes (1997) construiu ambientes propícios à resolução de problemas, através do desenvolvimento de estratégias e sua implementação, pretendendo que os alunos raciocinassem e comunicassem adequadamente, sentissem o prazer da descoberta e do sucesso na aprendizagem e desenvolvessem a auto-estima e confiança enquanto aprendizes. Para isso, os alunos trabalharam diferentes contextos – Problema Semanal, dinâmica de grupos nas Oficinas de Problemas, Calendário de Problemas – com actividades desenvolvidas individualmente ou em pares e utilizaram materiais didácticos, tais como computador, calculadora, tangram, geoplano, blocos lógicos e material Cuisenaire. As actividades propostas despertaram o gosto pelos problemas e, quase todos os alunos, no final, associaram a resolução de problemas à utilização de várias estratégias e não apenas à escolha de algoritmos conhecidos como acontecia inicialmente. Em relação aos contextos de resolução, os alunos preferiram, por ordem decrescente, as Oficinas de Problemas, o Problema Semanal e o Calendário de Problemas. Nas actividades das Oficinas de Problemas essa preferência foi: problema resolvido no computador, problema resolvido com auxílio de materiais manipulativos, problema resolvido com auxílio da calculadora, problema resolvido sem qualquer material auxiliar e, por último, a formulação de um problema.

Luís, Bártolo e Serrazina (1996) relatam actividades de exploração de regularidades e padrões que desenvolveram com os seus alunos do 1º ciclo. Consideram que este tipo de tarefas, permitindo observar, descobrir e comunicar matematicamente, ajudou as crianças a desenvolver capacidades de resolução de problemas e a utilizar significativamente vocabulário apropriado. Estas situações de trabalho mais abertas e de exploração estimularam os alunos com mais dificuldades, aumentando a sua confiança e auto-estima.

Também sobre regularidades, Correia (1996) reflecte sobre um trabalho efectuado por uma equipa de professoras com alunos do 3º ano. Aplicando ideias renovadoras dos programas, prepararam tarefas que constituíssem situações abertas, desafiadoras e com significado para as crianças e cuja resolução não dependesse unicamente da utilização de um processo rotineiro. Para além da importância da natureza das tarefas propostas, deram igual relevância ao modo de conduzir a sua resolução, valorizando o ambiente de aula onde os alunos puderam participar activamente, experimentando, explorando e interagindo. No desenvolvimento das tarefas, as professoras tiveram a preocupação de respeitar o ponto de vista dos alunos e de os ajudar na verbalização dos seus raciocínios. Verificou-se um grande interesse dos alunos em querer descobrir cada vez mais "coisas" e, curiosamente, a maior parte das descobertas foi feita pelos alunos considerados mais fracos.

Num estudo sobre actividades não rotineiras, Chamoso e Rawson (2001) debruçaram-se sobre o desenvolvimento de resolução de problemas e de actividades de investigação por alunos de 10-11 anos de idade. Para isso, observaram e gravaram em vídeo aulas de matemática em que os alunos resolveram tarefas do tipo:

> Pretende-se construir portas com palitos.
> É possível construir uma porta com 5 palitos,
> duas com 9, três com 13 e assim sucessivamente.
> Quantos palitos são necessários para construir dez
> portas? E em geral? (p. 36)



Posteriormente, a mesma tarefa foi resolvida e discutida por futuros professores e por professores em exercício. Durante o período de reflexão, foram também visionadas as imagens-vídeo gravadas na aula. Os autores verificaram que os alunos trabalharam de forma similar ao de um matemático ou investigador quando confrontado com uma situação – primeiro observaram, explicaram o que observaram e conjecturaram uma fórmula geral que depois comprovaram. Assim, os alunos resolveram as tarefas recorrendo a processos próprios de uma investigação, ou seja, foram construindo, experimentando, apoiando afirmações, divergindo, perguntando, deduzindo, corrigindo, comprovando, explicando, dirigindo a acção para outros, respondendo de forma crítica, justificando as afirmações produzidas, fazendo suposições, formulando hipóteses e conjecturas, generalizando... Os autores registaram ainda outras particularidades que podem ajudar a perceber melhor um ambiente de aula em que se trabalham investigações. Por exemplo, a professora da turma apresentava as tarefas e fazia comentários muito breves, deixando o trabalho e a iniciativa para os alunos. Quando solicitada para esclarecer dúvidas ou ajudar a ultrapassar uma dificuldade, geralmente "devolvia" a questão para ser vista de uma outra perspectiva, estimulando a comunicação e fomentando a qualidade dos registos escritos e orais. É reconhecido que a gestão do tempo pode ser problemática, pois o estudo de uma investigação pode demorar muito tempo, e que o trabalho de grupo e o recurso a materiais concretos constituem uma boa ajuda no processo. Outro aspecto muito interessante refere-se à importância dada pelos alunos à "superação de etapas", mesmo quando conseguiam pequenos êxitos, proporcionado-lhes alegria e confiança na resolução das tarefas.

Como se pode desenvolver, numa sala de aula do 1º ciclo, a capacidade de formulação e resolução de problemas foi objecto de estudo por Ferreira e Rocha (1993). Apresentam, como exemplo, uma actividade efectuada com alunos do 4º ano que consistiu na recolha, tratamento estatístico e reflexão sobre dados obtidos numa visita de estudo a uma feira de actividades económicas. Os alunos construíram e interpretaram gráficos de barras, fizeram estimativas, justificaram as estratégias utilizadas, recorreram a algoritmos e técnicas de cálculo mental e utilizaram a calculadora. As autoras concluíram que a resolução de problemas surgiu como um elemento integrador das diversas áreas do currículo, ajudando as crianças a compreender e interpretar o meio envolvente.

Igualmente num contexto de estatística, Cardoso, Manicas, Ferreira, Calaxa, Cunha e Machado (1999) relatam uma experiência de ensino-aprendizagem com actividades abertas, que surgiu num grupo de trabalho de professoras do 1º ciclo, com base na discussão do texto *Actividades do dia-a-dia para a análise de dados*. O tipo de tarefas apresentadas proporcionaram aos alunos: o desenvolvimento do pensamento crítico; um incremento do poder de comunicação; o desenvolvimento de conceitos matemáticos; a valorização da Matemática na realidade; e uma compreensão da importância de resolver e formular problemas em contexto vivido.

As autoras reflectem também acerca das implicações que este tipo de dinâmicas tem no papel do professor, referindo a necessidade de professores mais reflexivos, mais flexíveis e menos dominadores, de uma melhor preparação de aulas, e de prestar mais atenção às estratégias cognitivas dos alunos; salientam ainda a importância do trabalho de grupo entre professores.

Steele (2001) apresenta vários episódios de aulas de uma professora em que se realizaram investigações matemáticas essencialmente envolvendo conceitos geométricos. Das evidências recolhidas, refere a importância da professora no discurso da sala de aula, quer pelo tipo de investigações que sugeriu, quer pelo tipo de questionamento (*inquiry*) que fez. As actividades promoveram a interacção e o diálogo, desafiaram os alunos a raciocinarem e forneceram um contexto para que fossem recriados os conceitos matemáticos. As actividades eram não rotineiras e abertas, ou seja, os passos para a solução não eram evidentes nem havia utilização directa de algoritmos. Relativamente a este aspecto, cita Lappan (1993), afirmando que nenhuma outra decisão tem tanto impacto nas oportunidades de os alunos aprenderem e na sua percepção acerca do que é a Matemática como a selecção ou criação de tarefas com que o professor envolve os alunos. As actividades (e a exploração feita pela professora) ajudaram os alunos a pensar como matemáticos quando redescobriram, clarificaram e compreenderam definições e conceitos através de múltiplas representações; estabeleceram e defenderam conjecturas; reflectiram sobre a Matemática, expandindo o seu pensamento; e estiveram curiosos e animados com as suas descobertas.

A propósito do questionamento, Veia (1996) descreve uma experiência de observação de aulas numa turma do 1º ciclo em que a professora e os alunos revelavam concepções e atitudes bastante positivas relativamente à Matemática, valorizando a resolução de problemas. Na aula, habitualmente, havia o momento "Qual é o problema?" em que os alunos faziam propostas de situações a tratar e era escolhida uma delas para resolver. Seguia-se a fase da "entrevista" ao apresentador da tarefa seleccionada, em que os restantes alunos colocavam perguntas, procurando encontrar dados que lhes permitissem formular questões sobre a situação e os conduzissem à sua resolução. Esta fase da entrevista era o aspecto mais valorizado pela professora, pelo que "mais correcto do que afirmar que na turma se vivia uma atmosfera de resolução de problemas, será dizer que se vivia um ambiente de 'inquirição', pois que a procura de informação era no fundo a actividade fundamental na sala de aula" (p. 24).

Um estudo de Ponte e Segurado (1998), desenvolvido no âmbito do projecto *Matemática para todos: Investigações na sala de aula*, contribui para a compreensão das dificuldades que os alunos podem ter na realização de uma tarefa de natureza investigativa, a nível da compreensão da mesma e das estratégias a usar na sua resolução. Seguindo uma abordagem qualitativa, este estudo incidiu sobre um único aluno do 6.º ano, a quem foram propostas cinco tarefas de exploração e investigação nas suas aulas de matemática. Tratando-se de um aluno com uma "inclinação" natural para a matemática, este trabalho mostrou que é possível, pelo menos a alunos com estas características, proporcionar uma experiência matemática que inclua tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo a formulação e testagem de conjecturas e a elaboração de justificações dos resultados encontrados. Mostrou ainda que, com este tipo de tarefas, as concepções dos alunos relativamente à Matemática podem sair enriquecidas. O estudo aponta para a necessidade de estudar o modo como alunos com outras características e de outros níveis de escolaridade se envolvem neste tipo de tarefas.

Um estudo de caso de uma aluna do 3º ciclo realizado por Brocardo (2001) também apresenta indicações relevantes para o trabalho de cunho investigativo. A autora concebe a Matemática como uma ciência em que as investigações são uma componente importante e considera que se aprende Matemática, fazendo Matemática. O currículo foi organizado em torno destas duas concepções, procurando-se que a construção de conceitos e a aquisição de conhecimentos e técnicas se fizesse a partir da experiência matemática dos alunos, estabelecendo um paralelo com a actividade dos matemáticos. Tendo por base o estudo de caso efectuado, a autora alerta para alguns aspectos: (a) o sucesso e receptividade deste tipo de prática junto dos alunos é um processo que sofre recuos e avanços e que está intimamente relacionado com a organização de ensino adoptada e com o ambiente de aprendizagem gerado na turma; (b) a confiança na capacidade de fazer matemática é uma atitude que evolui no sentido positivo quando se realizam actividades de investigação; (c) a visão acerca do que é a Matemática evolui, salientando o gosto da aluna por um processo de aprendizagem em que tem um papel activo e em que pode trabalhar em pequenos grupos, questionando, conjecturando e testando.

Questões emergentes

O trabalho de natureza não rotineiro, particularmente as investigações matemáticas, pode permitir, entre outros aspectos, (a) o desenvolvimento de uma competência matemática, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos; (b) a oportunidade de abordar e relacionar dinamicamente conteúdos matemáticos, valorizando as suas conexões; (c) a realização de situações de trabalho diferenciado, atendendo às características individuais dos alunos, às suas competências e aos diferentes percursos escolares; e (d) uma compreensão global da natureza da actividade matemática, nomeadamente, dos processos de fazer matemática característicos das crianças mais novas como, por exemplo, representar, relacionar e operar (classificar, ordenar, calcular, estabelecer relações, interpretar), experimentar, explorar, identificar padrões e regularidades, formular, testar e validar conjecturas, generalizar ou comunicar. Deste modo, é importante estudar, reflectir e problematizar algumas dimensões – currículo, alunos (onde se incluem crianças do pré-escolar), professores (onde se incluem educadores), sala de aula – envolvidas e relacionadas com o trabalho não rotineiro, particularmente, com as investigações matemáticas, e que podem orientar o estudo, as práticas educativas e a investigação sobre o tema.

Currículo

- Qual a relevância destas actividades na educação pré-escolar? Qual a relevância destas actividades no 1º ciclo? Devem ser mais ou menos estruturadas?
- Que processos matemáticos estão envolvidos? Como avaliar esses processos?
- Que tipo de sugestões devem fornecer os normativos legais para a concretização deste tipo de experiência de aprendizagem?

Alunos

- Que influências exerce este tipo de actividades nas concepções desenvolvidas pelos alunos sobre a matemática escolar?
- Que relevância assume no trabalho matemático dos alunos?
- Como lidam com processos avançados do raciocínio matemático? Que dificuldades se podem identificar?
- De que forma os conhecimentos e a experiência dos alunos condicionam a realização destas actividades?

Professores

- Que implicações, exigências e rotinas produzem no trabalho dos professores?
- Como integrar este tipo de actividades na aula? Como convive com os outros tipos de actividades?
- Como integrar a participação dos alunos no desenvolvimento das actividades de investigação (apresentação, discussão, comunicação dos resultados)? Que ajudas se devem dar?
- De que forma os professores devem gerir o tempo dedicado às investigações? Que constrangimentos levanta esta gestão do tempo?

Sala de aula

- Que interacções se produzem quando os alunos realizam investigações matemáticas?

- Que influências tem a forma de organização dos alunos? Que vantagens apresenta o trabalho individual, aos pares, em grupo?
- Como devem os alunos fazer a apresentação e a discussão das conclusões das actividades? Que importância deve ser atribuída à comunicação?

Síntese da discussão do grupo de trabalho

O grupo de trabalho teve como principais objectivos problematizar, debater e aprofundar o papel das investigações matemáticas na aprendizagem na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico, tendo como base de trabalho o presente texto — onde, para além de uma síntese de estudos e experiências na sala de aula, foram apresentadas algumas questões emergentes distribuídas por quatro categorias principais: currículo, alunos, professores e sala de aula.

O debate foi enriquecido com a contribuição de seis comunicações orais, duas mais focadas na educação pré-escolar e quatro no 1º ciclo, que permitiram destacar o carácter multidimensional do trabalho de natureza exploratória e não rotineira, no qual as investigações se incluem. Alice Tinoco relatou uma sessão realizada num jardim de infância em que vinte e duas crianças de quatro ou cinco anos pretendiam organizar uma festa no baptizado das bonecas e responder à questão "quantas garrafas de sumo serão necessárias?", tendo destacado as interacções estabelecidas, a explicitação e comunicação dos raciocínios produzidos e o processo dos registos (cada vez mais rigorosos) efectuados pelas crianças. Célia Serra apresentou algumas situações desenvolvidas por cinco crianças surdas, com idades compreendidas entre os oito e doze anos e com algum atraso mental, na realização de tarefas de natureza exploratória que abordavam conceitos numéricos e geométricos, realçando a importância da utilização do computador (permitindo níveis de maior autonomia), da comunicação (gestual) das ideias e dos registos escritos dessas situações. Elda Tramm relatou experiências realizadas por duas turmas do 3º ano de escolaridade no desenvolvimento de um projecto utilizando a bola de futebol no estudo dos poliedros platónicos, destacando os caminhos e estratégias, por vezes surpreendentes, seguidas pelos alunos, a descoberta pessoal de propriedades de sólidos e o crescente aperfeiçoamento do vocabulário utilizado. Isabel Vizinho e Isabel Cabrita referiram um estudo sobre o desenvolvimento da unidade dos numerais decimais em que alunos do 4º ano de escolaridade resolveram problemas apoiados na exploração de materiais diversificados, verificando-se uma maior segurança e confiança na abordagem dos temas estudados e no estabelecimento e comunicação das conclusões a que chegavam. Graça Cebola apresentou uma revisão de literatura sobre a construção e desenvolvimento do número (natural) através do sentido de número, realçando a necessidade de valorizar as estratégias pessoais dos alunos e a importância de trabalhar frequentemente tarefas de natureza não rotineira. Ema Mamede apresentou um estudo sobre a utilização da calculadora por alunos do 4º ano de escolaridade num contexto numérico de resolução de situações exploratórias que conduziu a uma maior necessidade de verbalização e justificação dos raciocínios e processos seguidos e ao desenvolvimento de visões mais favoráveis à integração continuada da calculadora na aula de matemática.

Igualmente, muito importantes para a reflexão sobre o tema foram as múltiplas opiniões dos participantes, cerca de trinta e cinco educadores, professores ou investigadores, que, partilhando os seus estudos e as suas experiências pessoais, proporcionaram perspectivas de abordagem e reflexão bastante diversificadas.

Nos pontos seguintes, registam-se algumas ideias que atravessaram o debate no grupo de trabalho e que tentam reflectir as opiniões e comentários produzidos, bem como o ambiente de trabalho extremamente agradável e estimulante das sessões.

Ponto 1. É importante que os alunos, quando trabalham conceitos matemáticos, sejam confrontados com diferentes tipos de tarefas, quer sejam exercícios mais orientados para aspectos rotineiros, quer sejam problemas ou investigações apelando mais ao trabalho exploratório e não rotineiro. Por outro lado, também é importante a "qualidade" da tarefa, mas recorde-se que uma boa tarefa pode ser completamente desaproveitada por uma deficiente exploração ou que uma tarefa do tipo exercício pode, através de uma orientação ou exploração adequadas, conduzir a um trabalho investigativo. Embora os problemas e as investigações sejam conceitos próximos, pois ambos se referem a processos matemáticos complexos, é possível identificar alguns aspectos que os distinguem. De entre eles, destaque-se o carácter convergente da resolução de problemas — em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, sugerido pelo professor, seguindo estratégias adequadas — e o carácter divergente do processo de investigação — em que se parte de uma questão formulada de forma vaga, permitindo aos alunos a sua precisão, podendo ser seguidos diferentes caminhos de exploração e obter diferentes soluções.

Ponto 2. As investigações matemáticas permitem estabelecer ligações, no duplo sentido, entre a matemática e outras áreas, nomeadamente, outros saberes e a vida diária das crianças. Particularmente, na educação pré-escolar, as formas de trabalho mais exploratórias e de descoberta estão muito associadas à natural curiosidade e vontade das crianças em conhecer e compreender tudo o que as rodeia. Neste sentido, as investigações matemáticas estão muito ligadas às suas vivências e podem ajudá-las a promover interacções com os outros, a questionar, a sugerir, a aceitar (ou rebater) outros pontos de vista, a explicar o que pensam ou a ter mais confiança no trabalho que desenvolvem e nas descobertas que fazem.

Ponto 3. A dimensão exploratória das tarefas tem reflexo(s) no tipo de trabalho que se pode desenvolver na sala de aula. Com efeito, aulas em que a resolução de tarefas mais abertas é vivida como uma actividade regular podem conduzir a experiências mais significativas para os alunos, por exemplo, quando chegam ao mesmo resultado através de processos alternativos ou quando a mesma questão pode apresentar soluções diversificadas conforme as abordagens seguidas ou quando uma resposta não se reduz ao "certo ou errado". Podem, então, ser criadas e desenvolvidas novas dinâmicas na sala de aula em que as experiências e processos pessoais também sejam valorizados. As investigações podem proporcionar um maior envolvimento afectivo dos alunos resultante da sua maior confiança no trabalho matemático e promover, assim, concepções e ideias mais positivas sobre a matemática e sobre a sua aprendizagem.

Ponto 4. Numa investigação identificam-se várias etapas características: (a) formulação da questão a investigar; (b) formulação de conjecturas relativas a essa questão; (c) testagem das conjecturas e eventual reformulação; e (d) validação e comunicação de resultados. Todas estas etapas são igualmente importantes, exigem tempo e não faz sentido tentar eliminar ou esquecer qualquer uma delas. O tempo para a tarefa, e a sua gestão, é um aspecto muito determinante que é fortemente condicionado pela estrutura curricular (refira-se, a propósito, que esta situação pode ser atenuada na educação pré-escolar devido à inexistência de um currículo formal e nacional). Pode acontecer que, devido à pressão do tempo, haja a tentação de apressar, por exemplo, a etapa da comunicação de resultados. Deve ter-se presente que a discussão colectiva daí decorrente é fundamental, e onde o papel do professor é decisivo, para a "construção de significados" e integração dos novos conhecimentos por parte das crianças.

Ponto 5. A calculadora e o computador podem ajudar e ser instrumentos úteis para o trabalho investigativo, nomeadamente, na simulação de situações ou na testagem e verificação de conjecturas e hipóteses alternativas. Inversamente, o trabalho com questões mais abertas pode proporcionar aos alunos, em particular àqueles com mais dificuldades ou portadores de alguma deficiência, uma maior autonomia e desenvolver atitudes mais positivas relativamente à tecnologia, pois a relevância da sua utilização ultrapassa a tradicional obtenção ou verificação de resultados.

Ponto 6. Finalmente, e já visível em pontos anteriores, refira-se que o desenvolvimento da capacidade de comunicação é claramente o aspecto que envolve um maior consenso e uma maior evidência da relevância educativa das investigações matemáticas. De facto, no desenvolvimento de uma investigação, a actividade matemática surge de propostas abertas em que os possíveis percursos são negociados pelos intervenientes, possibilitando, por exemplo, que as crianças levantem questões, façam sugestões, formulem hipóteses, exprimam ideias, expliquem o que pensam, verbalizem processos, validem conclusões, registem descobertas, negoceiem o significado das palavras, refinam o vocabulário formal ou informal e, portanto, clarifiquem e potenciem o seu pensamento matemático.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.

Araújo, N. (1998). Resolução de problemas com o geoplano. *Educação e Matemática*, *47*, 37-40.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Baroody, A. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8*. New York, NY: Macmillan.

Brahier, J., & Speer, W. (1995). Nuts about mathematics. *Teaching Children Mathematics*, *2*(4), 228-230.

Brocardo, J. (2001). Investigações na aula de matemática: A história da Rita. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 155-161). Vila Real: APM.

Cardoso, A., Manicas, A., Ferreira, E., Calaxa, H., Cunha, F., & Machado, R. (1999). Uma questão de iogurtes. *Educação e Matemática*, *52*, 17-19.

Chamoso, J., & Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *SUMA*, *36*, 33-41.

Correia, G. (1996). Trabalhar regularidades com alunos do 3º ano de escolaridade: Reflexos de uma experiência. *Educação e Matemática*, *40*, 53-56.

Departamento da Educação Básica (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário (1990). *Ensino básico: Programa do 1º ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Fernandes, D., Borralho, A., & Amaro, G. (Orgs.) (1994). *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.

Ferreira, E., & Rocha, I. (1993). A resolução de problemas como elemento integrador das áreas do 1º ciclo. *Educação e Matemática*, *28*, 9-10.

Ferreira, M. D. (1996). Resolver problemas com o dominó. *Educação e Matemática*, *40*, 8-10.

Harris, J. (1999). Interweaving language and mathematics literacy through a story. *Teaching Children Mathematics*, *5*(9), 520- 524.

Kantowski, M. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163-180.

Lappan, G., & Schram, P. (1989). Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in mathematics. In P. Trafton, & A. Shulte (Orgs.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 14-30). Reston, VA: NCTM.

Lubinski, C., & Thiensen, D. (1996). Exploring measure through literature. *Teaching Children Mathematics*, *2*(5), 260-263.

Luís, A., Bártolo, F., & Serrazina, N. (1996). Padrões no 1º ciclo... Para quê?. *Educação e Matemática*, *40*, 44-46.

Mamede, E. (2001). A calculadora e o currículo de matemática para o 1º ciclo: Uma experiência de sala de aula. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 221-225). Vila Real: APM.

Mendes, E. (1998). A actividade matemática dos alunos em contexto de actividades de investigação matemática. In *Actas do ProfMat 98* (pp. 135-147). Guimarães: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1985). *Uma agenda para acção* (tradução do original de 1980) Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (tradução do original de 1989) Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática* (tradução do original de 1991). Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nunes, V. (1997). Construção de ambientes propícios à resolução de problemas no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, *43*, 29-34.

Oom, T. (1997). Uma actividade matemática numa sala de jardim de infância. *Cadernos de Educação de Infância*, *41*, 19-21.

Peixoto, A. (1998). Simetrias axiais no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, *49*, 34-36.

Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Pólya, G. (1945/1975). *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciência.

Ponte, J. P., & Segurado, I. (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, *7*(2), 5-40.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ribeiro, R. (1997). Algumas reflexões sobre a utilização da calculadora no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, *45*, pp. 23-25.

Schoenfeld, A. (1980). Heuristics in the classroom. In S. Krulik (Org.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 9-21). Reston, VA: NCTM.

Steele, D. (2001). Vozes entusiastas de jovens matemáticos. *Educação e Matemática, 62*, 39-42.

Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 139-162). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Veia, L. (1996). Qual é o problema? *Educação e Matemática*, *40*, 20-24.

6

Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior

Leonor Santos
Universidade de Lisboa
leonor.santos@fc.ul.pt

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação de Setúbal
jbrocardo@ese.ips.pt

Manuela Pires
Esc. Sec. Calazans Duarte
pirescaiado@mail.telepac.pt

Ana Isabel Rosendo
Universidade de Coimbra
arosendo@mat.uc.pt

A visão de que um ensino incidindo sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado das necessidades colocadas por uma sociedade que evolui rapidamente, tem enquadrado e determinado opções e decisões ao nível do desenvolvimento curricular em Matemática. Este facto toma uma importância ainda maior se atendermos ao alargamento da escolaridade obrigatória verificado nos últimos anos. Conceber e implementar programas educativos que assumam que todos os indivíduos (e não apenas uma elite) se podem tornar pensadores competentes tem constituído assim um grande desafio.

Ao nível da aprendizagem da Matemática tem vindo a ser destacada a ideia de que aprender Matemática deve consistir, essencialmente, em *fazer* Matemática. De facto, considera-se importante que os alunos tenham oportunidades de fazer

Matemática, particularmente através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória vivendo, ao seu nível de maturidade, uma experiência com características idênticas à dos matemáticos profissionais. Passa-se de uma visão do conhecimento matemático como um corpo de factos e procedimentos que trabalham com quantidades, medidas e formas de relações entre aqueles (Schoenfeld, 1992) para um entendimento da Matemática como uma ciência de padrões que se vai construindo por sucessivas tentativas, baseadas na observação e na experimentação.

As investigações matemáticas precisam de ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes – e têm importantes potencialidades educacionais (por exemplo, estimulam o tipo de participação dos alunos que favorece uma aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes facilitando o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões).

No nosso país, tal como em muitos outros, apesar das recomendações curriculares realçarem a importância das investigações, o lugar que elas ocupam no ensino da Matemática é ainda bastante limitado (APM, 1998). Este facto, em grande parte, despertou o interesse de vários investigadores para uma maior compreensão sobre a importância a atribuir-lhes no currículo, associada às potencialidades das investigações matemáticas, às dificuldades que se colocam ao nível da sua introdução no currículo e aos factores que contribuem para o êxito da sua realização na aula de Matemática.

Neste texto, procuramos problematizar e discutir diferentes aspectos relacionados com as investigações matemáticas, tomando por base um conjunto de estudos desenvolvidos em Portugal que incidiram nesta temática e que foram realizados com alunos e/ou professores do 2º e 3º ciclos do ensino básico e do ensino secundário. Começa-se por fazer uma breve clarificação do conceito de investigação matemática e por contextualizar os estudos que serão analisados, apresentando-se um resumo dos seus principais propósitos, da metodologia seguida, do número de investigações propostas e dos anos de escolaridade em que foram realizados. A apresentação e discussão dos estudos considerados neste trabalho organizam-se em duas partes: uma relativa aos professores e outra relativa aos alunos. Em cada uma delas, a análise desenvolvida faz-se a partir dos itens e especificações considerados na figura seguinte:

Itens	*Especificação relativa aos professores*	*Especificação relativa aos alunos*
Tipo de actividade	• Objectivos presentes nas investigações • Modo como prepara a introdução das tarefas na aula	• Ao longo de uma tarefa • Evolução ao longo de várias tarefas
Tipo de interacção	• Durante a exploração das tarefas na aula	• Durante a exploração das tarefas na aula
Estratégias de ensino	• Modos de organização do trabalho: na aula e de uma aula para outra	• Modo como os alunos vêem as estratégias de ensino
Produtos	• Pedidos	• Produzidos

Figura 1

O conceito de investigação matemática

Na tentativa de clarificar o conceito de investigação matemática vários autores recorrem à análise das diferenças e semelhanças entre a resolução de problemas e a actividade de investigação. Ernest (1996) considera que um primeiro aspecto distintivo é a formulação de problemas. De facto, na resolução de problemas as questões, de um modo geral, estão formuladas à partida, enquanto que nas investigações esse será o primeiro passo a desenvolver. Uma outra distinção entre resolução de problemas e actividade de investigação relaciona-se com os seus objectivos: num problema procura-se atingir algo que não é imediatamente acessível, procura-se a solução, e nas investigações o objectivo é a própria exploração. Deste modo, a exploração de uma investigação é um processo divergente e a resolução de problemas um processo convergente. Finalmente, apesar de tanto os problemas como as investigações poderem ser entendidos como uma abordagem pedagógica à Matemática, têm características diversas porque o papel do professor e dos alunos podem ser diferentes. Numa abordagem de resolução de problemas é ao professor que cabe colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar um caminho que o conduza à solução. O aluno pode ter alguma criatividade mas o professor, de um modo geral, controla tanto o conteúdo como o modo de ensinar. Numa abordagem pedagógica de investigação, o professor poderá escolher a situação de partida mas é o aluno que, em princípio, formula as questões sobre a situação proposta definindo, assim, os seus próprios problemas dentro dela. Desta forma, as relações de poder ao nível da aula de Matemática podem alterar-se.

Para Frobisher (1994), a ideia de que a exploração de uma investigação é uma actividade divergente é também bastante forte e é com base nesta característica que subdivide um conceito geral de problema (que designa como "problema") em problemas e investigações.

A identificação dos processos matemáticos que estão envolvidos na exploração de uma investigação além de contribuir para clarificar o conceito de investigação matemática, ajuda a perceber as características da actividade que se pretende que os alunos desenvolvam ao investigar.

Ponte e Matos (1992) precisam as características da actividade inicial de exploração: idealização e realização de experiências iniciais. Em seguida, segundo Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1998), é necessário começar por colocar questões produtivas e formular e testar as primeiras conjecturas. Este processo pode mostrar a necessidade de recolher mais dados, de abandonar as conjecturas formuladas inicialmente e de formular novas conjecturas. Torna-se então importante procurar estabelecer argumentos plausíveis e provas formais de modo a poder-se rejeitar ou validar as conjecturas resultantes do processo anterior. É ainda de notar que uma outra característica deste processo resulta de poderem, ao longo dele, emergir novas questões para investigar.

Brocardo (2001) salienta que a actividade de investigação é caracterizada por vários processos matemáticos que não podem ser apenas seguidos de uma forma linear e ordenada. A recolha e organização de dados, a formulação e teste de conjecturas, a prova, são fases do processo investigativo que devem ser percorridos tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interacções entre eles. A expressão "não linearidade" é usada por esta autora para resumir esta característica da actividade de investigação.

Breve caracterização dos estudos analisados

Este texto analisa trabalhos que foram realizados com o objectivo de estudar diferentes aspectos do trabalho investigativo. Na figura 2 resumem-se os principais propósitos de cada estudo, a metodologia usada, o número de tarefas de investigação propostas e os ciclos ou anos de escolaridade em que eles foram realizados.

Autor(es) e ano	*Principais propósitos*	*Metodologia*	*Nº de tarefas*	*Ciclo/ anos de escola-ridade*
(1991) Matos	Estudar as concepções e atitudes dos alunos de 8º ano em relação à Matemática, no contexto de actividades de projecto e de investigação com utilização da linguagem Logo	Qualitativa; estudo de caso	Em número variável (dependendo da dinâmica de cada grupo e dos problemas parcelares surgidos dos projectos)	8 º ano
(1997) Mendes	Analisar os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas de investigação na aula de Matemática	Qualitativa; estudo de caso	4	10º ano
(1997) Segurado	Perceber o modo como alunos de 6º ano de escolaridade se podem envolver em actividades de exploração e investigação na sala de aula e avaliar a sua influência na mudança das suas concepções.	Qualitativa; estudo de caso	5	2º ciclo
(1998) Cunha	Identificar os principais dilemas e dificuldades que os professores de Matemática encontram na realização de tarefas de investigações nas suas aulas, a sua origem e o modo como são resolvidos	Qualitativa; estudo de caso; narrativas	4	2º ciclo
(1998) Oliveira	Conhecer as perspectivas e práticas de professores no desenvolvimento de investigações matemáticas	Qualitativa; estudo de caso; narrativas	4	3º ciclo (8º ano)
(1999) Ponte *et al.*	Analisar os processos de pensamento do professor e dos alunos e as interacções e os papéis assumidos por estes dois actores na proposta e realização de investigações matemáticas	Qualitativa, estudo de caso	1	A tarefa foi proposta a várias turmas do 3º ciclo
(2000) Brunheira	Analisar o conhecimento matemático e didáctico do professor estagiário associado à realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, bem como as atitudes que manifestam, a forma como evoluem e as relações que estabelecem entre esses conhecimentos e atitudes.	Qualitativa, estudo de caso	3	3º ciclo e secundário

(2000) Fonseca	Analisar os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas de investigação na aula de Matemática, assim como o discurso promovido nessas mesmas aulas.	Qualitativa, estudo de caso	5	10º ano
(2000) Rocha	Compreender as percepções dos alunos face à Matemática e à calculadora gráfica e a sua relação com o uso que lhe é dado	Qualitativo; estudo de caso	5	10º ano
(2000) Varandas	Estudar o processo de avaliação do desempenho dos alunos na realização de investigações matemáticas na sala de aula	Qualitativa; estudo de caso.	4	10º ano
(2001) Brocardo	Estudar o modo como o desenvolvimento de um currículo, em que a exploração de tarefas de investigação é encarado como metodologia privilegiada, influencia a forma como os alunos aprendem e vêem a Matemática e quais os aspectos de carácter curricular que emergem da implementação de um tal projecto	Qualitativa, estudo de caso	13	3º ciclo

Figura 2

As investigações e o professor de matemática

Tipo de actividade

A integração das investigações no currículo de Matemática pode ser justificada por diversas razões. Por exemplo, Goldenberg (1999) aponta razões de três tipos. Uma, é relacionada com a natureza da própria ciência, isto é, é tão necessário conhecer uma parte do corpo dos resultados como saber como se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os modos de pensar que designa por "hábitos matemáticos de pensamento" (p. 37); outra, é porque as investigações motivam os alunos; e ainda, porque desenvolvem capacidades que contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem. Também se pode encontrar em Jaworski (1994) e Pirie (1987) argumentos na mesma linha de raciocínio, muito embora esta segunda autora acrescente uma quarta ordem de razões ligadas ao estabelecimento de um ambiente de aprendizagem vivo em que os alunos participam activamente. Mas poder-se-á perguntar em quem medida os estudos realizados em Portugal apontam igualmente para estas potencialidades das investigações?

Segundo Cunha (1998), as investigações motivam os alunos, ajudam a desenvolver capacidades de ordem superior expressas no programa, em particular, o raciocínio e a perspicácia, para além de constituírem um contributo significativo para que os alunos percepcionem a Matemática como uma ciência em evolução e construção. A mudança de concepções face à Matemática é também destacada por Segurado (1997). Esta autora acrescenta ainda o desenvolvimento de um espírito investigativo, de uma maior autonomia no trabalho e a valorização e reconhecimento das interacções entre pares. A realização de investigações é ainda potenciadora do desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática (Mendes, 1997).

Dada a natureza das actividades de investigação matemáticas, em particular a necessidade de se partir de uma situação aberta, desenvolver com os alunos investigações coloca novos desafios ao professor sobretudo ao nível da planificação. A necessidade de uma formação matemática sólida parece imprescindível (Goldenberg, 1999), não só para que o professor seja capaz de desenvolver e percepcionar níveis diversos de aprofundamento, como se aperceber quando uma via escolhida pelos alunos poderá levá-los para um território matemático por eles ainda desconhecido, isto é, apetrechar o professor de um sentido matemático indispensável para a gestão destas aulas de Matemática.

Do mesmo modo, a capacidade do professor recorrer a estratégias diversificadas de resolução é igualmente identificada como um factor essencial na actividade de planificação. Este aspecto é aliás salientado por Brunheira (2000) que refere as dificuldades levantadas durante a planificação de aulas quando os professores apresentam uma preferência clara pela utilização de métodos analíticos, em detrimento de estratégias informais e a quase total ausência de estratégias geométricas.

Uma atitude positiva face a este tipo de actividade é, no entanto, apontada como um factor facilitador para o trabalho a desenvolver pelo professor. O professor lida melhor com o imprevisto (dada a natureza aberta das investigações por muito exaustiva que seja a planificação da aula é sempre possível surgirem situações não previstas) e envolve-se com mais entusiasmo e motivação na resolução das tarefas (Brunheira, 2000).

Uma das principais actividades a desenvolver na planificação é a selecção, adaptação ou construção de situações possíveis de serem investigadas pelos alunos. No entanto, tal não é simples: "É um trabalho criativo (para o qual não há receitas)" (Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira, 1999, p. 100). É uma tarefa complexa que envolve a ponderação de diferentes aspectos, tais como as potencialidades e interesses dos alunos, os conhecimentos necessários, e os materiais envolvidos. O papel da experiência é neste caso determinante, muito embora não resolva todos os problemas a enfrentar, nem tão pouco dispense uma preparação cuidada deste tipo de aulas. Por exemplo, como aponta Varandas (2000), as professoras que participaram no seu estudo, ambas com larga experiência de ensino e tendo já no passado feito recurso nas suas aulas a investigações, tiveram uma posição consensual na escolha da tarefa, mas a sua formulação (grau de estruturação das questões a propor) foi objecto de discussão. Foi ponderado que uma tarefa mais estruturada poderia limitar a actividade de investigação dos alunos mas, em contrapartida, permitir-lhes uma maior autonomia, principalmente aos menos habituados a desenvolver trabalho de cunho investigativo.

A própria experiência pessoal vivida do professor em tarefas desta natureza poderá ajudar a desenvolver uma atitude de auto-confiança essencial para o desempenho da sua prática. Da experiência recolhida ao longo do projecto "Matemática para Todos" pode afirmar-se que, numa primeira fase, é natural que os professores comecem por utilizar tarefas produzidas por outros, introduzindo-lhes pequenas alterações para as ajustarem aos seus alunos, se for caso disso, e só posteriormente com a aquisição de alguma experiência neste tipo de trabalho é de esperar que comecem a criar novas tarefas de investigação. O grau de estruturação das tarefas tende também a diminuir sucessivamente à medida que o professor vai tendo mais experiência (Brunheira, 2000).

Diversos factores poderão influenciar a escolha das tarefas. Segundo Varandas (2000), a pressão no que respeita ao cumprimento dos conteúdos a tratar em cada período condicionou algumas das opções das professoras, nomeadamente a escolha de tarefas que tivessem uma relação estreita com os conteúdos a leccionar e a necessidade de reajuste na sua calendarização. Outro factor que condicionou a escolha de uma dada tarefa foi já ter sido anteriormente experimentada por uma das professoras, isto é, haver já um conhecimento prévio sobre a tarefa.

Mas planificar aulas com investigações matemáticas não se limita à selecção ou construção de tarefas possíveis de serem investigadas acompanhada da sua realização. É igualmente necessário preparar o modo como a tarefa vai ser apresentada aos alunos, escolher a metodologia de trabalho, decidir o modo como vão ser confrontados os processos usados, bem como a produção final que é esperada dos alunos e reflectir após as aulas para poder inflectir e reajustar as próximas planificações. Em particular, as indicações a dar aos alunos vão sendo definidas a partir das experiências desenvolvidas (Varandas, 2000). Por exemplo, num primeiro momento, os relatórios podem constituir um foco particular de atenção, dada a escassa experiência dos alunos. Num segundo momento, o foco de atenção passa para os cuidados a ter na distribuição do trabalho durante a elaboração da tarefa, devido ao facto de em muitos grupos haver apenas um aluno a fazer registos (Varandas, 2000).

O foco de atenção também é variável ao longo da experiência de planificação de aulas com tarefas possíveis de serem investigadas. Segundo Brunheira (2000), os professores estagiários que estudou, começaram, numa primeira fase, sobretudo a atender à resolução da tarefa com vista à previsão de cenários possíveis de desenvolvimento, para, depois, levarem a cabo uma preparação mais cuidada em termos do apoio a dar aos alunos, e para, posteriormente, também se focarem na preparação da apresentação e discussão conjunta da tarefa.

Tipo de interacções

Na sala de aula, o trabalho investigativo envolve em geral três fases: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final (Christiansen e Walter, 1986). Sejam quais forem as particularidades que diferenciam entre si estas fases, em qualquer uma delas pressupõe-se a existência de momentos de interacção entre o professor e os alunos. O papel do professor nesta interacção pode ser de dois tipos: modo afirmativo, quando faz uma afirmação, clarifica o sentido de uma afirmação, explica ou valida, e o modo interrogativo quando pede clarificações, questiona, ou pede justificações (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1999).

Na introdução da tarefa, o professor poderá tomar diversas decisões, nomeadamente na forma escrita ou oral com que é feita a sua apresentação e na maior ou menor informação que dá nessa fase. Com base na reflexão desenvolvida no seio do projecto "Matemática para Todos", um dos meios possíveis é o misto, incluindo a distribuição do enunciado escrito da tarefa completado por uma apresentação oral para toda a turma. Esta poderá ser constituída por uma leitura em grande grupo para os níveis mais baixos de escolaridade ou por um ou outro comentário que o professor julgue pertinente ou colocar questões-chave cujas respostas revelem se os alunos estão ou não a entender a proposta (Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, e Varandas, 1999). Estes autores alertam, por um lado, para o risco de demasiada informação ser uma limitação ao desenvolvimento da autonomia dos alunos e, por outro, se a tarefa não estiver suficientemente clara para os alunos poder vir a criar potenciais obstáculos ao trabalho dos alunos.

Ao longo do desenvolvimento da actividade de investigação, parece fundamental que o confronto de ideias se processe por meio da argumentação (Wood, 1999). A criação de tal ambiente de aprendizagem exige que o professor seja capaz de orientar o aluno sem contudo lhe dar respostas. Uma das maiores dificuldades sentidas pelo professor, apontadas por Rocha (2000), diz respeito ao apoio a dar aos alunos deixando-lhes no entanto a margem de liberdade indispensável neste tipo de tarefas. Ponte *et al.* (1998), referem as dificuldades dos professores em dosearem o apoio a prestar aos alunos. Os professores tendem a ficar embaraçados quando a discussão toma caminhos imprevistos" (p. 122), bem como em colocar boas questões que orientem os alunos sem lhes dizerem como se faz. Também em Varandas (2000) se encontra o reconhecimento do cuidado a ter por parte do professor de forma a que a sua intervenção junto dos alunos não ponha em risco a actividade investigativa destes. Encontrar o ponto certo de intervenção do professor não pondo em risco o desenvolvimento da autonomia dos alunos parece constituir um aspecto delicado, que tem a sua expressão mais forte nas primeiras experiências vividas pelos professores e pelos alunos.

Oliveira (1998) refere igualmente a importância da familiaridade com as actividades de investigação do próprio professor na forma como apoia os alunos. Embora as duas professoras que estudou tivessem a preocupação de promover a autonomia dos alunos era diferente o modo como cada uma apoiava os alunos. A que tinha menor experiência tinha uma maior tendência para conduzir o discurso dos alunos e para os orientar de modo a ultrapassarem os seus bloqueios. A professora que tinha mais experiência, fomentava a condução do discurso por parte dos alunos e atribuía-lhes em geral a responsabilidade de ultrapassar os obstáculos.

Também, no que respeita ao desenvolvimento do processo investigativo, o papel do professor pode ser distinto implicando diversas formas de contributo. Oliveira (1998) refere no seu estudo que a professora que controla mais o trabalho dos alunos, permite que sejam formuladas novas questões em torno da questão proposta e valoriza bastante a formulação e teste de conjecturas. A outra professora, que dá mais autonomia aos alunos, aceita a formulação de questões que se afastem da situação proposta, encara a formulação e teste de conjecturas e dá um grande destaque ao processo de justificação.

Por último, a realização de um momento de discussão final parece essencial em aulas deste tipo, dado que realizar uma investigação e não reflectir sobre ela é perder uma das suas grandes potencialidades. O confronto de resultados e processos constituirá um enriquecimento da própria actividade e ajudará os alunos a compreenderem melhor o significado de uma investigação matemática. Ainda da experiência e reflexão realizadas no âmbito do projecto "Matemática para Todos" se alerta para a necessidade deste terceiro momento da aula se pautar por uma cultura de argumentação. Contudo, este momento pode tornar-se mais difícil para o professor controlar o seu protagonismo e continuar a dar maior um papel mais activo aos alunos (Brunheira, 2000).

Estratégias de ensino

Uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se em tarefas matemáticas válidas e envolventes. Embora sendo uma condição necessária ela não é suficiente. Há igualmente que garantir um ambiente de trabalho estimulante e criar múltiplas situações onde os alunos possam ser matematicamente desafiados. Assim, o papel do professor é central tanto na proposta de situações que possibilitem um trabalho matemático rico, como na criação de tal ambiente de aprendizagem. Em particular, há um conjunto variado de opções a tomar que se relacionam com as questões ligadas à organização e gestão da aula, tão mais importantes quanto menor é a experiência do professor neste tipo de actividades.

Uma das opções que o professor tem de tomar é o modo como os alunos vão trabalhar, isto é, se vão trabalhar individualmente ou em pequenos grupos, como se irão constituir os grupos, e quando haverá momentos de trabalho em grande grupo. Nas diversas investigações realizadas em Portugal o mais comum é encontrarem-se os alunos a trabalhar em pequenos grupos enquanto desenvolvem a tarefa (por exemplo, Brocardo, 2001; Brunheira, 2000; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998) reconhecendo-se também vantagens em trabalhar colectivamente com toda a turma (Ponte *et al*., 1998), nomeadamente nos momentos finais de discussão. Em particular, Fonseca (2000) salienta que a discussão/apresentação das explorações feitas em grupo permitiu a apresentação e explicação de ideias matemáticas, a formulação de novas conjecturas, a justificação de conjecturas e a discussão de aspectos pouco *pesados* nos grupos.

Brocardo (2001), embora defendendo como adequada a opção de que a exploração de tarefas de investigação assenta principalmente numa organização de trabalho em pequenos grupos, considera importante complementá-la com a exploração de tarefas conduzidas no grupo-turma. Esta autora, referindo-se à experiência curricular que estudou, salienta que a exploração de uma tarefa no grupo-turma facilitou que os alunos precisassem ideias relativamente ao *processo* de investigar, permitindo, nomeadamente, clarificar o estatuto de uma conjectura e a necessidade de provar as conjecturas que resistiam a sucessivos testes.

Segundo Varandas (2000), havia a convicção à partida por parte das professoras que o trabalho individual era incompatível com a natureza do trabalho investigativo. Contudo, na sua fase de implementação, esta perspectiva alterou-se passando as professoras a reconhecer aspectos positivos na sua realização. Fica, assim a questão de saber se o trabalho individual não tem também o seu lugar, em particular fora da sala de aula, para o aprofundamento ou desenvolvimento da tarefa?

Diversos problemas de gestão da sala de aula podem colocar-se, exigindo uma forte sensibilidade pedagógica por parte do professor. É, por exemplo, o caso da necessidade de decidir qual a altura adequada para dar por terminada uma dada investigação para se passar a uma seguinte (Goldenberg, 1999). O risco de se parar cedo demais, não permitindo que o aluno viva a descoberta ou prolongando-a demais criando uma desmotivação e cansaço desnecessários. Parece, contudo, ser consensual que uma aula de 50 minutos é muito escassa para iniciar e terminar uma investigação matemática (por exemplo, Oliveira, 1998). Também a insistência em aspectos pontuais e pouco significativos por parte do professor pode vir a revelar-se pouco produtivo e redutor para uma maior criatividade por parte do aluno. Conduzir uma discussão quando todos os alunos querem falar ao mesmo tempo e mostram pouco interesse em ouvir os outros é outra dificuldade que pode surgir na gestão da aula.

Produtos

O reconhecimento da importância da reflexão sobre o trabalho desenvolvido numa investigação leva a que, na generalidade, os professores recorram ao pedido de um relatório sobre toda a actividade como produto final escrito. Esta situação é favorável a que o aluno desenvolva um processo de metacognição, isto é, que reflicta de forma consciente sobre o que fez e porque o fez e, simultaneamente, seja chamado mais uma vez a pôr em uso a sua capacidade de comunicação e de argumentação. Este tipo de produto foi usado em diversos estudos portugueses (por exemplo, Brunheira, 2000; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998). Menos frequentemente, faz-se recurso a outro tipo de produtos. É o caso de apresentações orais à turma (Varandas, 2000) ou ainda de uma sessão pública de apresentação do trabalho desenvolvido e da realização de uma sessão prática a professores do grupo da escola (Brocardo, 2001). A proposta de uma sessão pública de apresentação dos trabalhos surge como resposta ao sentimento que se foi gerando na turma de, o trabalho que estavam a desenvolver, ser mais exigente do que o pedido noutras turmas que estavam a viver outro tipo de experiências de ensino. Assim, esta apresentação teve como propósito que os alunos sentissem que o trabalho realizado era valorizado pela professora e por outras pessoas interessadas no ensino da Matemática para além de criar uma nova oportunidade de os alunos voltarem a pensar nas tarefas realizadas (Brocardo, 2001). Dado o sucesso desta medida, nomeadamente pelo entusiasmo com que os alunos se envolveram, e pela vontade expressa pelos professores do grupo em conhecerem um *software* que os alunos já dominavam, surgiu a proposta de uma sessão prática da responsabilidade dos alunos.

Ajustar os processos avaliativos a este novo tipo de actividade tem constituído um desafio para os professores. Pouca investigação em Portugal tem sido desenvolvida neste âmbito. Até à data, existe um único estudo que procurou experimentar novas formas de avaliação que fossem coerentes com a natureza e propósitos do trabalho de cunho investigativo (Varandas, 2000). Neste trabalho fez-se recurso a relatórios individuais e em grupo e à apresentação oral em grupo. Usou-se, como suporte, uma tabela de descritores que auxiliou as professoras a comentar os trabalhos dos alunos e a dar sugestões de aperfeiçoamento. Os processos de avaliação desenvolvidos privilegiaram a função reguladora da avaliação dada a necessidade que sentiram em desenvolver nos alunos o seu poder matemático. Contudo, as imposições do sistema (obrigatoriedade de atribuir uma classificação no final do período lectivo), influenciaram o seu próprio sistema de avaliação. Além de uma visão global sobre a forma como os alunos realizaram a investigação, os processos usados permitiram uma avaliação sobre aspectos específicos tais como o conhecimento matemático, o conhecimento de estratégias e as competências de comunicação. Para além disso, ajudou também a classificar os trabalhos.

A diversidade das formas de avaliação foi o aspecto mais marcante para as professoras, pois, na sua perspectiva, todas elas se revelaram úteis para obter informações bastante consistentes sobre a aprendizagem e o progresso dos alunos. Em particular, o relatório individual em tempo limitado foi o processo que ambas as professoras destacaram como o mais favorável para obter uma classificação para cada aluno, isto é, aquele que permitiu aceder melhor ao processo investigativo de cada aluno. Quando se pretendia uma avaliação global do trabalho da turma, uma das professoras optou pela apresentação oral dado envolver a participação obrigatória de todos os alunos do grupo.

É ainda de chamar a atenção para o duplo papel que os relatórios podem desempenhar. Por um lado, como foi referido, podem ajudar o aluno a estruturar e organizar ideias e aprendizagens que realizou, por outro, podem constituir um meio de o professor recolher informação sobre o nível de consecução dos objectivos definidos, isto é, dirigir-se a um momento de avaliação sumativa. Este segundo aspecto, olhado pelos alunos como uma imposição do professor, pode perder significado enquanto documento pessoal de trabalho (Mason, 1991). Segundo Oliveira (1998), este risco pode ter ocorrido, dado as professoras do seu estudo terem insistido com frequência na necessidade dos alunos fazerem registos e no final da aula recolherem essas folhas.

As investigações e os alunos

Tipo de actividade

Enquanto os alunos exploram uma tarefa de investigação é essencial que tenham uma certa noção do *processo* que estão a levar a cabo. É importante começar por conseguir conduzir uma exploração inicial que permita explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da investigação. Depois, torna-se necessário percorrer, de um modo tanto quanto possível autónomo, as principais etapas de uma actividade de investigação: formular questões, recolher e organizar dados, formular e testar conjecturas, reformular conjecturas e, finalmente, provar as que resistiram a sucessivos testes.

Os estudos analisados, que a seguir se apresentam, permitem identificar os processos matemáticos usados pelos alunos na exploração de uma tarefa de investigação, discutir o modo como os alunos os entendem e reflectir sobre as dificuldades que revelam em os usar.

Fonseca (2000) identificou a tendência dos alunos recorrerem aos seguintes processos: especialização, procura de regularidades, formulação de conjecturas, generalização, verificação, justificação e prova. Enquanto os primeiros foram utilizados de forma semelhante pelos alunos estudados, os de justificação e prova tiveram algumas características distintas. A formulação de conjecturas foi o processo mais frequentemente utilizado e o único que foi usado em todas as tarefas. Contudo, este processo teve uma maior presença nas tarefas em que os alunos recorreram a exemplos particulares, depreendendo-se uma forte relação entre a especialização e a formulação de conjecturas. Esta autora observou que a verificação esteve presente principalmente nas tarefas em que foi usada a especialização concluindo da relação entre os processos de especialização e o de verificação de conjecturas. A justificação, na maior parte das situações, não surgiu espontaneamente. No entanto, comparando a justificação com a prova, esta última teve uma presença mais fraca no trabalho dos alunos comparativamente com a primeira.

Brocardo (2001) resume da forma indicada na figura 3 as características da actividade de investigação e o modo como elas foram *entendidas* pelos alunos.

Analisando os resultados obtidos por estas duas autoras podemos identificar:

- Uma confluência relativamente às características da actividade desenvolvida pelos alunos mas diferentes nomenclaturas/níveis de generalidade para a caracterizar. De facto, Brocardo (2001) opta por considerar genericamente uma exploração inicial (que permite explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da investigação) e Fonseca (2000) especifica processos que tendem a estar presentes nesta fase: especialização e procura de regularidades. Também, Brocardo adopta o termo *prova* num sentido amplo – "um raciocínio que justifica determinado processo ou conclusão que pode ser considerado como convincente e suficientemente rigoroso no contexto de ensino em que é desenvolvido" (p. 118) – ao passo que Fonseca distingue *justificação* (processo de convencimento de outro) de *prova* (como argumento deduzido e independente da experiência);

- Uma certa facilidade na formulação e teste de conjecturas e uma maior dificuldade na compreensão da importância e significado de provar as conjecturas que resistem a sucessivos testes.

Características da actividade de investigação	***Modo como se revelam inicialmente***	***Modo como se revelam no final do ano***
Exploração inicial que permite explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da investigação.	Tendência em transformar num fim em si as experiências iniciais que lhes iriam permitir recolher dados; Dificuldade em entender a investigação como um *todo*.	Preocupação em relacionar as observações iniciais procurando clarificar o foco da investigação.
Após um certo trabalho de explicitação da situação proposta é importante formular questões produtivas e interessantes.	Depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o *modo interrogativo* mas sim, o *modo afirmativo* avançando não explicitamente várias conjecturas.	Depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o *modo interrogativo* mas sim, o *modo afirmativo* avançando explicitamente várias conjecturas.
É importante formular e testar conjecturas.	. Tendência para considerar uma conjectura que resistiu a um ou dois testes como uma *conclusão*; . Facilidade em testar conjecturas.	Compreensão do estatuto de uma conjectura.
A actividade de investigação é um processo *não linear.*	A actividade de investigação é um processo linear composta por três etapas: (1) recolha de um conjunto de dados; (2) organização dos dados e (3) análise dos dados de modo a tirar *conclusões*	A actividade de investigação é um processo *não linear.*
É importante provar as conjecturas que parecem ser verdadeiras.	A prova de conjecturas é uma *complicação* desnecessária introduzida pela professora.	Os alunos entendem o significado de provar uma conjectura e consideram a prova como parte integrante da actividade de investigação.

Figura 3. Características da actividade de investigação e o modo como elas foram *entendidas* pelos os alunos da turma (Brocardo, 2001, p. 536)

A estreita relação entre a visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem e o modo como se envolvem na exploração de tarefas de natureza investigativa é um aspecto realçado por vários dos trabalhos analisados (Brocardo, 2001; Matos, 1991; Segurado, 1997). A predominância de uma visão em que a Matemática consiste essencialmente num conjunto de conteúdos e técnicas e em que a aprendizagem deve decorrer das explicações do professor e da *prática das regras* que ele ensina, influencia uma falta de autonomia dos alunos e a existência de muitas dificuldades em prosseguir um trabalho investigativo.

Os trabalhos de Brocardo (2001) e Matos (1991) permitem especificar um pouco mais esta ideia geral:

- A tendência inicial dos alunos em desenvolver uma actividade *linear* composta por três etapas – recolha de um conjunto de dados, organização dos dados e análise dos dados de modo a tirar *conclusões* – embora muito relacionada com a pouca experiência dos alunos na exploração de tarefas de investigação, não pode ser dissociada de uma visão em que é predominante a vertente prática ou automatizada da Matemática[1] (Brocardo, 2001);
- A conceptualização da actividade matemática, como a resolução de tarefas com vista a ter sucesso escolar, influencia uma relação com a Matemática que é caracterizada por um grande pragmatismo, dificultando o gosto por um trabalho independente e propiciando uma aceitação acrítica de métodos e resultados (Matos, 1991).

Tipo de interacções

Durante a exploração de uma tarefa de investigação, as interacções aluno-professor e aluno-aluno assumem extrema importância. O confronto de opiniões que pode ocorrer quando os alunos trabalham em pequenos grupos pode conduzir à resolução de conflitos, levando-os a explicitar e procurar perceber diferentes pontos de vista, facilitando, deste modo, o desenvolvimento de explicações e argumentações (Laborde, 1994).

Esta ideia, pelo menos implicitamente, está presente nos estudos analisados. De facto, o trabalho em pequenos grupos é a opção-base adoptada para a exploração de tarefas de investigação com os alunos uma vez que se tratam de situações em que é importante explorar diferentes caminhos sendo particularmente relevante a discussão de pontos de vista diferentes e a cooperação. Segundo Varandas (2000), os alunos consideraram o trabalho de grupo como forma privilegiada para desenvolver uma actividade investigativa.

No entanto, os resultados de vários estudos indicam que a importância de partilhar e discutir ideias durante o trabalho investigativo é um aspecto que nem sempre está presente nos alunos e que muitos deles tendem a trabalhar individualmente e a procurar obter do professor as respostas para as suas dificuldades (Brocardo, 2001; Rocha, 2000; Segurado, 1997). A realização continuada de investigações e de exploração de tarefas abertas leva a que muitos alunos considerem fundamental colocar as suas questões e ideias no grupo e aproveitar as sugestões dos seus colegas para avançar no trabalho:

> Os casos destes dois alunos [Rita e Lino] (...) sugerem que embora se possa revestir de alguma complexidade, é possível trabalhar no sentido de os alunos viverem e reconhecerem as potencialidades deste tipo de trabalho. A Rita constitui um caso *exemplar* deste aspecto: de uma atitude altamente individualista passou a valorizar as sugestões das colegas reconhecendo que a discussão de ideias era fundamental para realizar um trabalho de maior qualidade. Também o Lino, embora tendo tido uma evolução diferente da Rita, reconhecia, no final do ano, a importância de poder discutir ideias e de colaborar com outros na exploração das tarefas propostas. (Brocardo, 2001, p. 552)

Durante o desenvolvimento de investigações, são também muito importantes as interacções professor-aluno. Por exemplo, Fonseca (2000) refere que o papel da professora – consistindo essencialmente em orientar os alunos no trabalho mas sem lhes reduzir a atitude investigativa – teve uma influência incisiva sobre os processos matemáticos utilizados pelos alunos. Algumas das orientações que deu, através do fornecimento de algumas indicações, da sugestão de selecção de informação e da colocação de questões, contribuíram para a análise de mais casos, para a formulação de conjecturas ou para a sua verificação. Em particular, o incentivo e apoio dada pela professora no sentido de justificar a validade geral das conjecturas formuladas foi determinante para que os alunos usassem o processo de justificação.

Estratégias de ensino

A estreita relação entre a visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem e o modo como é conduzido o ensino é estabelecida por vários autores (Borasi, 1990; Schoenfeld, 1989). Nos estudos analisados neste texto é saliente a ideia que a introdução de tarefas de investigação na aula constituiu uma certa *novidade* para os alunos. Assim, é naturalmente interessante perceber de que modo esta *nova* experiência alterou ou não o seu modo de ver a Matemática e a sua aprendizagem e, também, o que pensam de uma organização de ensino em que investigações são feitas com alguma frequência.

Segurado (1997) e Brocardo (2001) salientam que a realização de actividades de exploração e investigação contribui para a valorização de aspectos relativos à Matemática e ao seu ensino e aprendizagem que os alunos tendiam a não considerar anteriormente. Nomeadamente, estas investigadoras identificam (1) a evolução de uma visão da Matemática centrada na utilização de técnicas, para uma visão em que salientam o raciocínio e a realização de investigações reconhecendo que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento e onde os aspectos experimentais e indutivos têm um papel importante; (2) a consciencialização, por parte do professor, de que o seu papel não consiste essencialmente em a *dar a matéria*; (3) uma preferência, por parte dos alunos, por um processo de aprendizagem em que têm um papel activo, podendo ser eles a descobrir e experimentar relações e ideias; (4) uma visão positiva dos alunos relativamente ao trabalho em grupo valorizando a interacção com os colegas e a importância de partilhar ideias no desenvolvimento do trabalho investigativo.

Também Varandas (2000) concluiu que os alunos passaram a considerar que na Matemática o mais importante não é encontrar a *resposta certa* e que nas investigações podem chegar a conclusões diversas. Assim, diversos estudos apontam para que a visão dos alunos sobre a Matemática parece evoluir com a sua própria experiência em actividades de investigação. Contudo, não é claro até que ponto a concepção que os alunos têm à partida sobre a Matemática se relaciona com o grau de adesão que ao longo do tempo vão apresentando com este tipo de experiências matemáticas (Varandas, 2000).

É de salientar que vários estudos identificaram algumas reacções dos alunos menos favoráveis relativamente a uma experiência de aprendizagem que inclua a exploração de tarefas de investigação. Os alunos estudados individualmente por Rocha (2000), embora reconhecendo que a actividade investigativa favorece uma aprendizagem significativa, continuaram a manifestar a sua preferência pelas aulas em que o professor *explica*. Embora considerando que se deram bem com o novo *método* de trabalho e que ele facilita a aprendizagem, salientam que ele envolve um tipo de investimento que é difícil para os alunos.

Uma certa reacção de desalento dos alunos perante a *exigência* do trabalho investigativo foi também identificada (Brocardo, 2001). De facto, após a exploração das primeiras três tarefas, as dificuldades que os alunos sentiam em desenvolver uma actividade, de facto, investigativa vincaram a ideia de que na aula de Matemática lhes estava a ser proposto um trabalho bastante difícil e que nunca conseguiam desenvolver de forma adequada. No entanto, no final do ano, esta ideia foi completamente abandonada: a maioria dos alunos manifestava uma clara preferência pela realização de investigações e por um processo de ensino/ aprendizagem em que os alunos tinham um papel activo e a oportunidade de tomar decisões e discutir ideias em pequenos grupos. De um modo geral, reconheciam que o método usado nas aulas de Matemática não era tão cansativo e que ajudava a aprendizagem uma vez que eram os próprios alunos a descobrir as *coisas*. A Eva, uma das alunas estudadas individualmente, explicitou ainda um outro motivo em defesa do *método* usado:

> O que eu acho é que quando se chega à aula e nos explicam as coisas parece que as coisas aparecem assim. Pronto, Matemática é isto. Depois aprende-se a resolver exercícios e já está. Mas não é assim. Há maneiras de pensar, há conjecturas, há muitas maneiras de chegar a uma conclusão. E isso também faz parte da Matemática. (Brocardo, 2001, p. 526)

Embora este tipo de argumento apenas tenha sido explicitado por uma aluna, ele não deixa de ser significativo. De facto, salientar que um ensino centrado na exposição do professor e na resolução de exercícios por parte dos alunos veicula uma imagem incompleta do que é a Matemática uma vez que ela não é só caracterizada por *conteúdos*, mas, também, por *processos*, parece-nos requerer um nível de reflexão pouco usual em muitos alunos.

Produtos

Como foi referido anteriormente, a ideia de que a reflexão sobre as investigações que os alunos fazem é essencial para que possam tomar consciência dos processos seguidos parece ser determinante na opção de pedir aos alunos relatórios escritos descrevendo a investigação realizada. Relativamente aos relatórios produzidos pelos alunos Varandas (2000) e Brocardo (2001) consideram que a sua qualidade vai melhorando com o decorrer do trabalho em torno das tarefas possíveis de investigar. De facto, de uma tendência inicial em elaborar respostas curtas que incluíam sobretudo a referência aos produtos, os alunos evoluíram para a elaboração de textos que explicavam com mais detalhe o trabalho desenvolvido. Os seguintes extractos de dois relatórios, retirados de Brocardo (2001), correspondendo respectivamente à 3ª e à 9ª tarefas propostas aos alunos, ilustram esta conclusão:

> Na pergunta 3 eu consegui obter um quadrilátero losango.
> Nunca se conseguiria obter um quadrado.
> É impossível fazer um quadrado.

> Agora era-nos pedido para analisarmos funções do tipo y= ax+2, dando a *a* valores diferentes. Passado algum tempo de observação concluímos que quanto maior era o número multiplicado por x, maior era a inclinação. (...) voltámos atrás e completámos as outras questões (...) chegando à conclusão que ao multiplicarmos qualquer número por x e somarmos 2, esta função passa pelo ponto 2 do eixo dos y.

Varandas (2000) concluiu também que os relatórios podem constituir oportunidades para desencadear a utilização de certos processos, aprofundar a investigação ou melhorar a organização das ideias. Assim, muito embora seja reconhecido por diversos autores as vantagens das investigações matemáticas serem acompanhadas da elaboração de relatórios, é, no entanto, de chamar a atenção para que o pedido sistemático de relatórios poder, aos olhos dos alunos, tornar-se uma tarefa demasiado exigente e como tal causar uma reacção menos favorável da sua parte.

O trabalho de Brocardo (2001) documenta com algum detalhe a reacção dos alunos a dois tipos de produtos menos frequentes: uma sessão oral (em que os alunos apresentaram publicamente as investigações que tinham realizado) e uma sessão prática destinada aos professores de Matemática da escola. Ao longo do ano, estes dois tipos de iniciativas foram referidas com alguma frequência pelos alunos como exemplos do que mais tinham gostado de fazer. De facto, elas constituíram experiências marcantes e positivas que permitiram reflectir sobre o *processo de investigar*, que ajudaram a criar uma certa unidade ao nível da turma e um certo orgulho em participar num projecto que era valorizado por pessoas exteriores à aula de Matemática.

Considerações finais

Os estudos analisados neste texto permitem identificar confluências de resultados que passamos a destacar. Uma primeira ideia que se salienta relaciona-se com as potencialidades educativas deste tipo de actividade. De facto, a actividade de investigação permite proporcionar aos alunos uma experiência matemática significativa envolvendo a realização de experiências iniciais com o objectivo de clarificar o foco da investigação, a formulação, o teste e a reformulação de conjecturas, e a procura de argumentos que possam validar as conjecturas que resistiram a sucessivos testes. É de salientar que é possível encontrar nos estudos portugueses uma forte coerência entre as expectativas e razões apontadas pelos professores no que respeita às investigações matemáticas e o que foi observado nos alunos ao longo do desenvolvimento das tarefas. Contudo, há ainda diversas questões que carecem de resposta, como seja: O valor das investigações é o mesmo nos diferentes anos de escolaridade? Como trabalhar com os alunos, sobretudo os mais novos, a prova das conjecturas? As investigações têm valor em si mesmo ou devem sobretudo apoiar a aprendizagem de conteúdos? Como conciliar um currículo organizado por temas com o carácter divergente das investigações?

O modo como os alunos se envolvem na exploração de uma tarefa de investigação parece estar intimamente relacionado com a sua visão sobre a

Matemática e sua aprendizagem. Nos alunos, em que predomina uma visão *automatizada* da Matemática e de uma aprendizagem que decorre das explicações do professor e da prática de regras, verifica-se uma falta de autonomia que acaba por trazer muitas dificuldades no prosseguimento de um trabalho investigativo. No entanto, vários dos estudos analisados concluem que este tipo de trabalho pode influenciar uma evolução das concepções dos alunos no que respeita à Matemática – reconhecendo a importância do raciocínio e que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento e onde são fundamentais os aspectos experimentais e indutivos – e uma mudança significativa do que consideram ser o seu papel e o do professor no processo de ensino-aprendizagem. No entanto, não parecem consensuais as diferentes inferências que os diversos estudos apontam no que respeita à forma como se estabelece a relação entre as concepções e sua evolução e a atitude dos alunos face às investigações. Até que ponto certas concepções constituem um obstáculo? Até que ponto são possíveis de evoluir ao longo da experiência matemática com investigações?

A importância das interacções aluno-aluno e professor-aluno é outro dos aspectos que é salientado pelos estudos analisados. Relativamente às primeiras identifica-se uma evolução significativa de muitos alunos que passam a considerar fundamental colocar questões e discutir ideias com os seus colegas. As interacções professor–aluno revelam-se também fundamentais, tanto no sentido de ajudar os alunos a usar determinados processos matemáticos, como a incentivar o prosseguimento e discussão da investigação. Mas, dada a natureza específica das investigações, é requerido para o professor um novo papel, nomeadamente na forma e momentos de intervenção. Neste domínio, há ainda um largo campo a estudar: Como decidir qual o ponto certo de intervenção do professor? Como pode o professor apoiar os alunos a formularem questões? Como fazer quando um grupo de alunos não avança? Como fazer quando a exploração dos alunos parece pouco promissora? Será o professor capaz de fazer um juízo acertado sobre a potencialidade de uma estratégia por si não prevista?

Muito embora a maioria dos estudos portugueses tenham sido feitos em aulas onde as investigações foram trabalhadas em pequenos grupos, pode questionar-se até que ponto é de facto esta a metodologia mais adequada. Mais uma vez parece ter-se encontrado sintonia entre a perspectiva do professor e dos alunos quanto à valorização do trabalho em pequenos grupos. Mas será que existe uma metodologia preferencialmente adequada para trabalhar investigações matemáticas? Qual o papel do trabalho individual? Qual o peso a atribuir ao grupo turma?

Os produtos pedidos, que maioritariamente consistem na organização de relatórios, revelam-se como oportunidades para reflectir sobre o trabalho realizado, utilizar certos processos, aprofundar a investigação ou melhorar a organização das ideias. Contudo, apesar destas potencialidades reconhecidas por professores e alunos, identificam-se também alguns constrangimentos. É o caso do pedido sistemático de relatórios correr o risco de criar nos alunos a ideia de que investigar em Matemática é uma actividade muito exigente e como tal levá-los a desenvolver uma atitude menos positiva face às investigações matemáticas. Haverá produtos alternativos com potencialidades da mesma ordem? Que características deverão ter os produtos a pedir aos alunos de modo que estes adiram com entusiasmo à proposta de trabalho que lhes é apresentada? Que estratégias poderão ajudar os alunos a produzir relatórios bem elaborados?

Por último, é ainda de referir que apenas um dos estudos apresentados trata de questões referentes à avaliação. Sem dúvida que esta é uma área pouco estudada em Portugal e, em particular, quando diz respeito às investigações matemáticas. Como se regula o desenvolvimento de investigações matemáticas por parte dos alunos? Existem formas e instrumentos de avaliação particularmente adequados?

Em síntese, poder-se-á afirmar que existe em Portugal um corpo de saberes que se tem vindo a construir nos últimos anos à volta do papel das investigações matemáticas na aprendizagem da Matemática no ensino básico e secundário. Um número de estudos bastante significativo, tendo em conta a dimensão da comunidade de educação matemática portuguesa, discute diversas temáticas que se colocam na prática lectiva do professor e na aprendizagem dos alunos. Fica, contudo, a certeza de que muito há ainda que estudar e compreender para que se possa falar de uma teoria das investigações matemáticas na sala de aula de Matemática.

Notas

[1] Matos (1991) sugere a existência de duas concepções que coexistem nos diversos alunos mas que surgem com importâncias relativas diferentes: por um lado, os alunos consideram uma Matemática prática ou automatizada e, por outro, uma Matemática do raciocínio.

Referências

APM (1998). *Matemática 2001*: *Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

Borasi, R. (1990). The invisible hand operating in mathematics instruction: student's conceptions and expectations. In T. J. Cooney (Org.), *Teaching and learning mathematics education in the 1990s*. Reston, VA: NCTM.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Christiansen, B. & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Orgs.), *Perspective on mathematics education*. Dordrecht: Reidel.

Cunha, M. H. (1998). *Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs). *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In A Orton & G. Wains (Orgs.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). London: Cassel.

Goldenberg, E. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: a constructivist enquiry*. London: Falmer.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation? In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straber, & B. Winkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer.

Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK. *ZDM*, *1*, 14-19.

Mendes, E. J. (1997). *A actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de matemática: Aspectos da prática dos professores* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Ponte, J., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110), Lisboa: Projecto MPT e APM.

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom*. London: The Open University.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Orgs.), *Mathematical problem solving and new information techonogies: research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer-Verlag.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1998). Investigating mathematical investigations. *Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14), Setúbal: ESE de Setúbal.

Ponte; J. P.; Ferreira, C.; Brunheira, L.; Oliveira, H. & Varandas, J. (1999). *A relação professor aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 338-355.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-3709). New York, NY: Macmillan.

Segurado, M. I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca, & L Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 171-191.

7

A brincar... aprendemos matemática

Alice Tinoco
Jardim de Infância de Semide
alicetinoco@net.sapo.pt

Quando se fala de Matemática no jardim de infância colocam-se-nos muitas questões: Que Matemática? E, "como fazer a Matemática"?

A educação matemática não é, como a aprendizagem de uma língua estrangeira, por exemplo, uma actividade que podemos iniciar num qualquer momento da vida... Tal como a aprendizagem da língua materna ou do conhecimento do mundo, a aprendizagem da Matemática começa de forma espontânea com as primeiras experiências que são proporcionadas à criança no seu universo familiar.

É pelo jogo natural dos processos de abstracção que cada criança, a pouco e pouco tomará consciência dos diferentes conceitos, construindo-os e recriando-os. Gestos, palavras e grafismos desempenham um papel importante como instrumentos para pensar e comunicar. À linguagem verbal associa-se a linguagem gráfica, através da qual a criança traduz a sua representação de uma situação em que se apoia para a elaboração do seu pensamento.

E a vida do dia-a-dia no jardim de infância, rica e complexa, contém possibilidades matemáticas que permitem uma abordagem aos conceitos necessários para a sua posterior aprendizagem sistemática.

A actividade que apresentamos foi desenvolvida no Jardim de Infância de Semide, no ano lectivo de 2000/01, com um grupo misto de vinte e duas crianças. Nesta actividade as crianças exploram o sentido de medida da divisão procurando responder à questão "quantas garrafas de sumo precisaremos de comprar?" levantada no decorrer do projecto de organização da festa do baptizado das bonecas que queriam realizar.

Descrição da actividade

Na conversa com o grupo e na sequência do projecto que estávamos a desenvolver: "a festa do baptizado das bonecas" era necessário organizar o lanche.

Para o lanche precisávamos de comprar um bolo de baptizado e sumo. Colocou-se então a questão:

- *Quantas garrafas de sumo vamos comprar ao supermercado?*

- Uma garrafa (Manuel).

- Duas garrafas (Julia).

- Não, não chega... 10 garrafas (Vasco).

A Vera propõe comprar cem garrafas.

- Não, são demais... (Cláudia).

- Não sabemos quantas comprar (Pedro).

Coloco novamente a questão*: "Quantas garrafas de sumo precisamos de comprar?"*

O Manuel propõe comprarmos uma garrafa de sumo para cada menino. Os outros consideram que é muito... Uma garrafa de sumo para cada dois meninos, propõe ainda o Manuel. Os outros consideram que ainda é muito.

O João afirma: - com uma garrafa de sumo enchemos 4 copos.

Questionei de novo as crianças: - *Será verdade?*

Ficou tudo calado.

- Não o sabemos (Pedro).

Coloquei então a questão: "*Como poderemos sabê-lo?"*

- É preciso medir com uma garrafa de sumo e encher os quatro copos (Cláudia).

- Mas não temos sumo (Telmo).

- Podemos experimentar fazê-lo com a garrafa cheia de água (Vasco).

Foram buscar o material necessário para realizar a experiência: copos e uma garrafa com água.

Colocaram-se os copos em cima da mesa e a Cristiana encheu quatro copos.

Peço às crianças que verifiquem o que aconteceu.

- Depois de enchermos os quatro copos ainda há água na garrafa (Vera).

Constatamos, assim, que com uma garrafa podemos encher mais de quatro copos.

- O que vamos fazer?

- Encher outros copos (Julia).

Peço às crianças que contem quantos copos pudemos encher com uma garrafa de água.

- Com uma garrafa de água enchemos 6 copos (Vera).

- Quantas garrafas precisamos de comprar?

Ainda não sabemos. Mas sabemos que uma garrafa vai encher 6 copos... e seis copos correspondem a 6 meninos.

- Podemos colocar os meninos por seis... por grupos de 6 (João).
- A cada grupo corresponderá uma garrafa (Cláudia).

As crianças organizam-se espontaneamente por grupos de seis.

Verificamos que temos quatro grupos completos (cada um com seis crianças) e um grupo de quatro.

Coloco novamente a questão: *"Quantas garrafas de sumo precisamos de comprar?"*

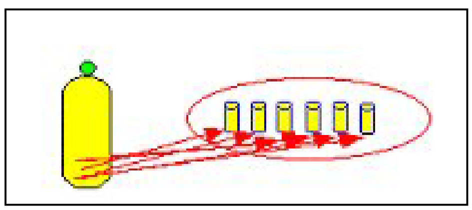
- É preciso comprar 4 garrafas, mas uma não será toda bebida, porque sobra.

Para nos lembrarmos da quantidade de sumo a comprar, vamos registar os resultados numa folha de cartolina.

As crianças propuseram:

- Cada um recorta um copo em papel (Pedro).
- Faremos grupos de seis copos (Cláudia).
- Ao lado de cada grupo põe-se uma garrafa recortada em papel (João).
- Tem que se pôr uma seta que vai da garrafa para chegar aos copos... a seta indicará uma garrafa para seis copos (Patrícia).

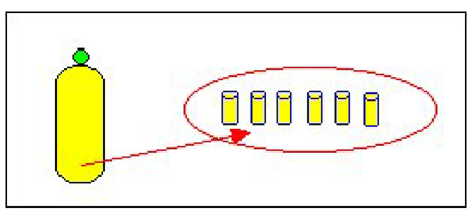
Experimenta o Manuel:



- Não está bem, não foi isso que dissemos (Cláudia).

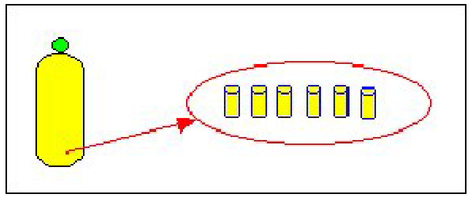
As outras crianças concordam.

A Cláudia propõe:

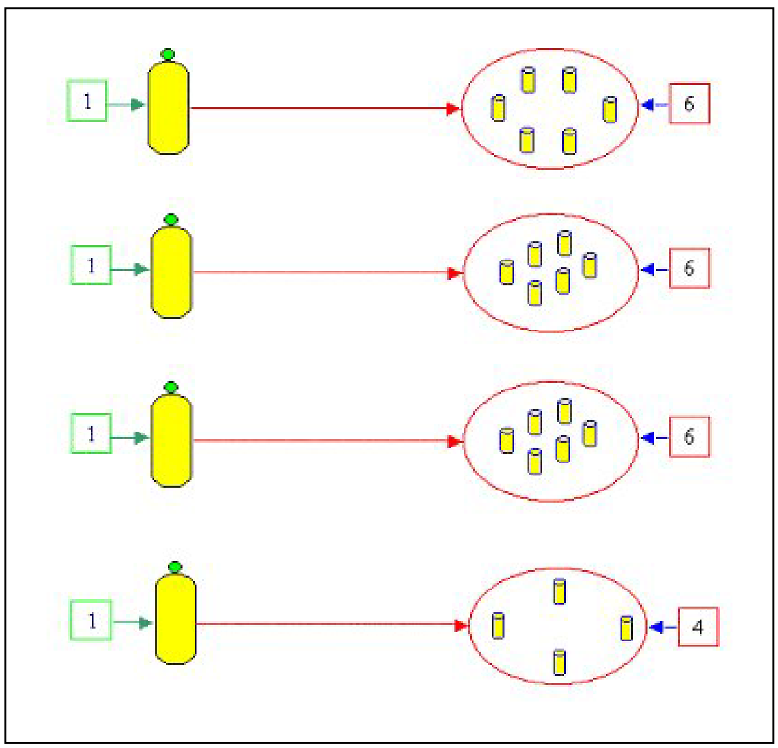


- Ainda não está bem, nós dissemos que “é preciso uma garrafa de sumo para um grupo de seis copos”(Patrícia).

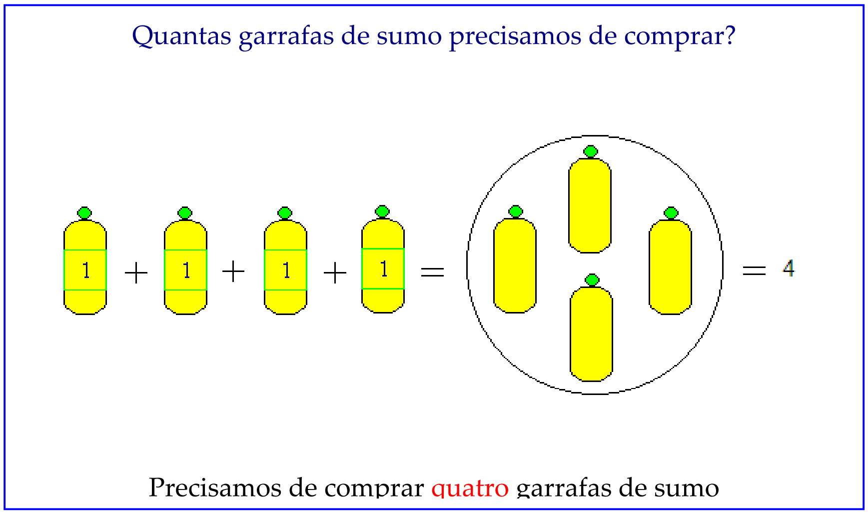
O João rectifica:



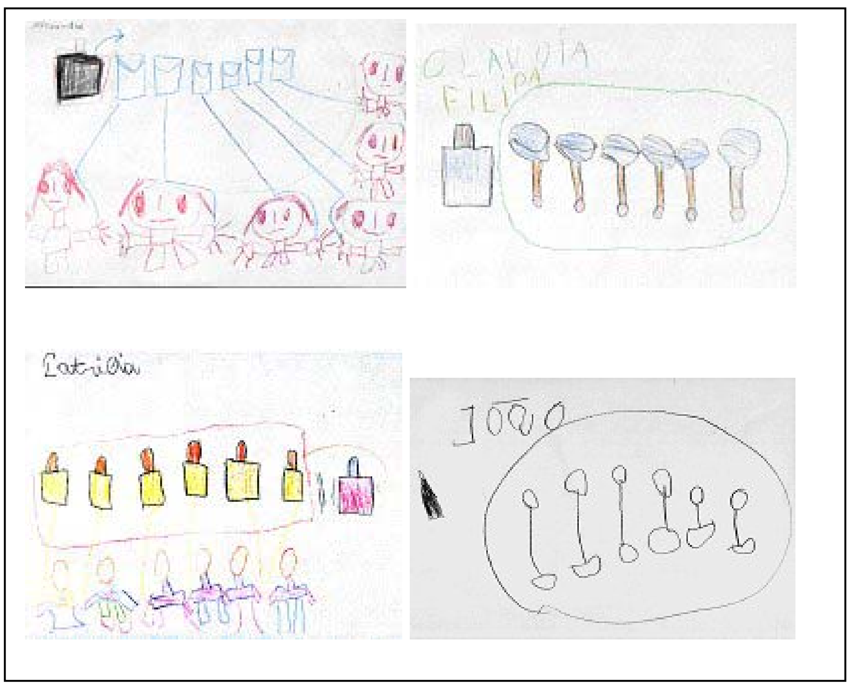
- Agora precisamos de fazer três grupos de seis copos para uma garrafa e um grupo de quatro copos para outra garrafa (Patrícia).



Por fim registamos o problema inicial e a sua resolução:



Após este momento de reflexão em grupo, cada criança elaborou, individualmente, o seu registo da actividade.



No momento de reunião do grupo, confrontámos os trabalhos executados individualmente por cada uma das crianças e seleccionámos os registos que iriam ser colocados no livro dos trabalhos do mês e os que iriam ser afixados no *placard* da sala.

Neste problema de divisão de uma quantidade contínua (líquido), as crianças são levada a calcular:

- Inicialmente estabelecem a relação: uma criança – um copo.
- Descobrem por tentativa e erro a quantidade de sumo uma garrafa: este corresponde à quantidade de sumo de seis copos.
- Simbolizam os copos e organizam-nos em grupos de seis.
- Procuram simbolizar "uma garrafa para um grupo de seis copos".

A iniciação à Matemática é, pois, ao mesmo tempo, uma iniciação a um melhor uso da língua materna.

A acção e a linguagem apoiam-se mutuamente. É assim que a criança aprende o vocabulário fundamental da linguagem matemática, que utiliza as expressões que descrevem a acção em vias de se realizar. Progressivamente a criança vai sendo cada vez mais capaz de associar uma acção real e uma expressão verbal, ou seja, é capaz de descrever as acções que realizou sem ter que as executar em simultâneo. Neste sentido, a criança regista verbalmente as suas vivências, reconta-as. E a sua linguagem traduz uma experiência real: a sua.

As suas descrições reúnem os elementos concretos de situações reais que podem ser completadas, enriquecidas e ascenderem à representação do pensamento matemático.

8

A calculadora no 1.º ciclo: Mero instrumento de verificação ou algo mais?

Ema Mamede
Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho
emamede@iec.uminho.pt

As orientações curriculares da DEB (1998), no que respeita à Matemática, mencionam a utilização da calculadora referindo que esta é uma ferramenta de exploração e descoberta. Contudo, este documento não apresenta qualquer orientação sobre a forma como aquele instrumento de cálculo pode ser usado e em que contextos deve ser usado.

Em muitas escolas do 1.º ciclo do nosso país parece ignorar-se a calculadora enquanto meio auxiliar de cálculo. Possivelmente, isto acontece devido ao pouco conhecimento das potencialidades da calculadora na resolução de problemas não rotineiros. A ideia da calculadora como instrumento que pode ocupar o lugar do cálculo escrito, ou o do cálculo mental, parece sobrepor-se à ideia da calculadora enquanto ferramenta facilitadora de explorações numéricas tão importantes no contexto de resolução de problemas.

De um trabalho de investigação centrado na utilização da calculadora na sala de aula, realizado com alunos do 1.º ciclo do ensino básico, onde se procurou perceber de que forma os alunos do 4.º ano de escolaridade utilizam este instrumento de cálculo na resolução de problemas, surgiram algumas reflexões a respeito do papel da calculadora nas explorações matemáticas levadas a cabo por estes alunos.

Apresentam-se aqui algumas considerações teóricas, seguindo-se uma breve descrição do estudo realizado, finalizando com a apresentação de alguns aspectos relevantes do papel da calculadora na resolução de problemas.

As orientações curriculares para a matemática no 1.º ciclo

Os princípios orientadores contemplados no *Programa do 1.º ciclo do ensino básico* destacam três grandes finalidades do ensino da Matemática, que consistem em desenvolver a capacidade de raciocínio, a capacidade de comunicação e a capacidade de resolver problemas (DEB, 1998). As orientações curriculares para o 1.º ciclo (DEB, 1998), bem como as *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1991), referem a resolução de problemas como foco central do currículo de Matemática, uma vez que esta é promotora do desenvolvimento do raciocínio e da comunicação, colocando os alunos numa atitude activa de aprendizagem. Para o NCTM (1991), a aprendizagem deve ser entendida como um processo activo, com lugar para explorar, descrever, justificar e desenvolver. Mais recentemente, para a Matemática, o documento das *Competências essenciais do currículo nacional do ensino básico* (DEB, 2001) refere, entre outros aspectos, a importância de: (a) explorar situações problemáticas; (b) procurar regularidades; (c) fazer e testar conjecturas; (d) formular generalizações; e (e) pensar de maneira lógica. Estes documentos parecem assim apontar para uma prática de sala de aula onde os problemas não rotineiros, ou exploratórios, têm lugar.

Os problemas não rotineiros

Em geral, a resolução de problemas rotineiros, que implicam um único passo, não coloca grandes dificuldades ao aluno. Isto porque este tipo de problemas facilmente vai de encontro ao conhecimento aritmético informal do aluno, dispensando-o, portanto, de ter de efectuar grandes análises para a sua resolução. O mesmo não acontece quando se trata de problemas não rotineiros ou de exploração.

Os problemas não rotineiros podem ser entendidos como aqueles em que a incógnita, os procedimentos de resolução e a solução não são evidentes. São problemas que requerem alguma análise, em que a simples identificação e aplicação de uma operação aritmética é insuficiente para a sua resolução (Baroody, 1994; Whimbey e Lockhead, 1993).

De acordo com Pólya (1978), a análise inerente à resolução de problemas não rotineiros comporta a definição do problema, a planificação de uma estratégia de resolução, a execução dessa estratégia planificada e a comprovação ou verificação dos resultados. Mas, segundo este autor, esta análise só é possível se existir: (a) compreensão do problema, isto é, se o aluno for capaz de identificar a incógnita ou o objectivo do problema, o que vai facilitar a selecção da informação necessária à resolução do problema, a eleição dos métodos adequados a essa resolução e a aceitabilidade de uma solução; (b) o conhecimento de técnicas, como por exemplo, os modelos de representação, ou estratégias úteis para a resolução de problemas, que ajudam o aluno a definir o problema e a eleger um procedimento para atingir a solução; (c) motivação para efectuar a análise, que resulta do interesse, autoconfiança e perseverança; e (d) flexibilidade, ou seja, adaptação rápida dos recursos existentes para satisfazer as exigências de uma nova tarefa.

Os problemas não rotineiros podem facilmente constituir desafios para os alunos, na medida em que estes se podem servir de várias estratégias e métodos de resolução. Na realidade, a resolução de problemas pode proporcionar momentos bastante enriquecedores na sala de aula, onde a descoberta, a exploração e as interacções podem constituir aspectos marcantes.

Neste quadro, a comunicação e as interacções são aspectos indissociáveis no contexto de resolução de problemas.

A comunicação

A comunicação desempenha um papel importante na construção de elos de ligação entre as noções informais e intuitivas das crianças e a linguagem abstracta e simbólica da Matemática, mas assume também um papel fundamental na construção de relações entre as representações físicas, pictóricas, simbólicas, verbais e mentais das ideias matemáticas. Neste nível de ensino, representar é uma forma de importante de comunicar ideias matemáticas. Envolve a tradução de um problema ou uma ideia numa nova forma, ou a tradução de um diagrama ou modelo físico em símbolos ou palavras. Portanto, representar pode ajudar a tornar claro o significado do problema (NCTM, 1991).

Mas, também a comunicação oral tem um papel de destaque, na medida em que ajuda as crianças a clarificar o pensamento e a estimular a compreensão (Shield e Swinson, 1996). Quando comunicam, as crianças aprendem umas com as outras. Encorajá-las a representar, falar e ouvir, ler e escrever facilita uma aprendizagem significativa.

A respeito da comunicação, particularmente na resolução de problemas, Bassarear (1997), distingue dois tipos essenciais de capacidades que devem ser estimuladas e desenvolvidas nos alunos, e que são: a capacidade de comunicar consigo mesmo perante um problema, possibilitando o desenvolvimento de estratégias de resolução que considere fazerem sentido na busca da solução; e a capacidade do aluno comunicar com os outros, partilhando as suas observações e soluções encontradas, mas também compreendendo as observações e soluções apresentadas pelos outros.

Ainda a respeito da comunicação oral, interessa ir sensibilizando os alunos para a utilização de uma linguagem rigorosa e concisa na transmissão de informação (Bassarear, 1997; Pimm, 1990). Uma das formas de o conseguir consiste em estimular o aluno a efectuar descrições de actividades ou objectos, de modo a poderem ser compreendidas, de maneira correcta, por alguém que esteve ausente (Pimm, 1990).

A comunicação escrita tem também o seu lugar de relevo. Escrever sobre a Matemática ajuda a aprendizagem dos alunos, na medida em que encoraja à reflexão e à clarificação de ideias, promove a discussão e fomenta a compreensão dos alunos sobre aquilo que se está a estudar (Grandgenett, Hill e Lloyd, 1995; Huiker e Laughlin, 1996).

As tarefas de carácter não rotineiro, onde se podem explorar diversas estratégias de resolução são mais susceptíveis de promover a comunicação (Balacheff, 1991; César, 1999; Greenes e Schulman, 1996; NCTM, 1991). São também o tipo de tarefas onde as interacções assumem um papel relevante. Pois, poder interagir com os colegas pode facilitar a construção do conhecimento, a aprendizagem de outras formas de pensar e a clarificação do seu pensamento (Greenes e Schulman, 1996).

O trabalho entre pares

Na resolução de problemas não rotineiros, torna-se então importante poder interagir com os colegas.

O pensamento partilhado que implica a coordenação de actividades em comum é de grande importância para que benefícios possam ser tirados da interacção. Um dos maiores benefícios parece dizer respeito à possibilidade dos participantes na interacção compreenderem outros pontos de vista ou participarem em destrezas mais complexas, quer mediante a observação activa, onde se observa o desempenho dos outros, quer mediante a participação conjunta na procura da solução para um problema (César, 1999; Rogoff, 1993; Tudge e Rogoff, 1995). A respeito deste último aspecto, Forman e Cazden (1998) referem que as tarefas colaborativas requerem por parte das crianças uma organização de informação, a planificação de estratégias e a implementação das mesmas, o que lhes concede um conjunto de experiências valorativas. Isto porque, este tipo de tarefas, desenvolvidas num regime colaborativo, exige a construção de hipóteses, procedimentos e identificação de informação pertinente aceitável pelas crianças envolvidas. Ou seja, exige que estas sejam capazes de gerir os seus conflitos e discordâncias de forma a que estes sejam convertidos num plano mútuo. Expor as crianças a este tipo de situação possibilita-lhes a resolução conjunta de problemas mais complexos, que dificilmente resolveriam sozinhos. Além disso, permite-lhes ainda observar e reflectir nos processos de resolução, elegendo o procedimento que consideram mais eficaz (Forman e Cazden, 1998).

Assim, resolver problemas podendo interagir cria a necessidade de comunicar ideias verbalmente, encoraja a auto-reflexão e aumenta a necessidade de responder às questões e desafios do par em causa.

A calculadora

A ideia da calculadora como instrumento que pode ocupar o lugar do cálculo escrito, ou do cálculo mental, parece sobrepor-se à ideia da calculadora enquanto ferramenta facilitadora de explorações numéricas e investigações matemáticas, tão importantes no contexto de resolução de problemas.

Ao longo do seu percurso, do 1.º ciclo até ao ensino secundário, espera-se que o aluno desenvolva e consolide um conjunto de métodos para as operações básicas, sem o uso da calculadora. Mas, também se espera que entenda e utilize as facilidades da calculadora ao planear um cálculo.

No que se refere aos meios de cálculo, distinguem-se o cálculo mental, o cálculo escrito e o cálculo realizado com a calculadora como formas de calcular com exactidão. Cada uma destas formas tem o seu lugar próprio no cálculo. Nenhuma deve substituir a outra, todas devem ser exploradas e trabalhadas na sala de aula de forma adequada, proporcionando ao aluno um maior número de opções. Tal como referem Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e o NCTM (1991), do aluno espera-se que seja capaz de eleger o melhor meio de cálculo a utilizar perante determinada situação. Também Wheatley e Shumway (1992) defendem que quando a calculadora é introduzida na sala de aula, torna-se importante sensibilizar os alunos no sentido de explorar e avaliar a eficácia do uso deste instrumento comparativamente a outros possíveis meios.

A falta de orientações mais precisas a respeito da utilização da calculadora na sala de aula, a ausência de referências a respeito desta utilização em muitos dos manuais escolares e a escassa investigação, na nossa realidade, a respeito da sua utilização, não parecem contribuir para as tão necessárias mudanças (Mamede, 2001b).

De acordo com o relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), a calculadora já adquiriu uma utilização significativa nos 2.º e 3.º ciclos e no ensino secundário. Mas, no que respeita ao 1.º ciclo, do mesmo relatório pode concluir-se que a utilização da calculadora continua a ser bastante escassa, sendo quase sempre entendida apenas como instrumento verificador de resultados.

Existem vários factores que podem ser citados como inibidores do desenvolvimento da calculadora na escola. Mas, de entre estes pode certamente encontrar-se a disponibilidade de recursos, além da forma como as calculadoras são tratadas pelo currículo oficial, que refere a utilização da calculadora pela segurança que dá em cálculos morosos e pelas possibilidades de exploração e descoberta que pode permitir quando usada com imaginação, sem apresentar qualquer sugestão de exploração. Também muitos dos manuais escolares continuam a omitir, ou então a atribuir à calculadora apenas o papel de instrumento de verificação.

Na tentativa de explicar as causas desta fraca utilização da calculadora no 1.º ciclo, podem levantar-se algumas questões pertinentes, tais como: Será que isto se deve à formação dos professores? Será que se deve às concepções que estes têm da Matemática? Serão problemas de articulação das calculadoras com os conteúdos programáticos? Será a ausência de orientações programáticas promotoras de integração das calculadoras nas práticas da sala de aula? Talvez seja difícil encontrar uma causa, talvez existam múltiplas causas (Mamede, 2001a).

Vários autores sustentam a ideia de que a integração da calculadora na aula de Matemática pode ser altamente vantajosa, mesmo no início do Ensino Básico. Segundo Campbell e Stewart (1993), a resolução de problemas utilizando a calculadora pode encorajar o aluno a entender e representar o problema e permitir uma abordagem investigativa. Por exemplo, o aluno pode perante um problema ter de definir uma estratégia de resolução e em seguida, com a ajuda da calculadora, poderá implementar essa estratégia e avaliar a sua eficácia. Desta forma a calculadora poderá ser entendida como elemento promotor da autonomia na resolução de problemas. Ainda neste sentido, Fielker (1986) defende que as calculadoras estimulam a actividade matemática na medida em que promovem a criação de hipóteses, componente de uma actividade matemática mais aberta, na qual as crianças exploram problemas numéricos com pouca direcção do professor, com mais oportunidade para tomar decisões e maior liberdade para discutir.

Na resolução de problemas, a utilização da calculadora facilita a focalização de atenção no processo de resolução do problema, o que nem sempre acontece quando se fazem algoritmos por rotinas (Campbell e Stewart, 1993; Duea, Immerzeel, Ockenga e Tarr, 1980). Isto não dispensa uma boa compreensão dos conceitos nem a capacidade aritmética mental desenvolvida. Tal como referem o relatório Cockcroft (1985) e Abelló (1997), a disponibilidade da calculadora não reduz de alguma maneira a necessidade do seu utilizador compreender Matemática.

Na realidade, a tecnologia pode beneficiar a aprendizagem da Matemática quando utilizada adequadamente, o que pressupõe a existência de materiais de apoio para o trabalho com a calculadora na sala de aula, mas também pressupõe que seja proporcionado aos professores formação e apoio para que possam usufruir com confiança e imaginação da calculadora.

Na tentativa de diluir um pouco as resistências à utilização da calculadora no 1.º ciclo, realizou-se um trabalho de investigação centrado neste instrumento auxiliar de cálculo.

O estudo

Atendendo às características dos problemas não rotineiros, à importância da comunicação entre os alunos e ao valor que as interacções podem ter nas tarefas não rotineiras, realizou-se um trabalho de investigação centrado na utilização da calculadora por alunos do 4.º ano, durante a resolução deste tipo de problemas.

Procurou-se perceber que papel os alunos atribuíam à calculadora, no contexto de resolução de problemas. Para tal tentou-se compreender de que forma os alunos utilizariam a calculadora na resolução de determinados problemas, que papel lhe atribuiriam e que benefícios poderiam tirar desta utilização.

O trabalho realizado incidiu sobre três grupos de alunos, com competências matemáticas distintas, o dos bons alunos, o dos alunos razoáveis e o dos alunos com mais dificuldades em Matemática. A selecção dos alunos e a sua distribuição pelos grupos foi da inteira responsabilidade da professora.

Embora aparentemente todos os alunos tivessem participado de todos os trabalhos realizados na aula, na realidade apenas os seis alunos seleccionados fizeram parte do estudo. No início dos trabalhos foi estabelecido um acordo entre os alunos, a professora da turma e a investigadora onde ficaram definidos os direitos e deveres de cada um destes intervenientes.

A recolha de dados foi feita com recurso a vídeo, registos áudio, registos escritos dos alunos e notas de campo da investigadora.

A análise dos dados centrou-se, fundamentalmente, no tipo de utilização que os alunos fazem da calculadora, nos contextos em que essa utilização é feita, nas estratégias de resolução de problemas desenvolvidas e nas interacções desenvolvidas entre os pares.

Descobriram-se alguns aspectos interessantes que permitem olhar a calculadora para além de instrumento de verificação.

Comentários aos resultados

De um modo bastante sucinto, concluiu-se que uma utilização da calculadora proveitosa para alunos deste nível de ensino parece ser conseguida em contextos muito específicos.

1. Os grandes benefícios da disponibilidade da calculadora na sala de aula pressupõem a existência de competências matemáticas desenvolvidas, como destrezas de cálculo mental e escrito, o sentido de operação e o valor posicional. Alunos pouco competentes nestes aspectos parecem não conseguir aproveitar as potencialidades da calculadora.

Para alunos algo competentes, dispor da calculadora no contexto de resolução de problemas parece ser proporcionar o desenvolvimento de capacidades consideradas fundamentais, inerentes às competências básicas mencionadas para este nível de escolaridade.

2. Alunos com sentido de operação e valor posicional algo desenvolvidos, e com algumas competências de cálculo, ainda que manifestem dificuldades ao nível da praticabilidade deste, parecem encontrar na calculadora uma forma de ultrapassar as limitações no cálculo provocadas pela falta de treino.

Aqui, não posso deixar de salientar que o objectivo das tarefas de resolução de problemas exploratórios não é exercitar destrezas de cálculo nem desenvolver competências nesse sentido. É antes promover situações que permitam desenvolver competências como ser capaz de estabelecer um raciocínio lógico e ser capaz de analisar um problema.

Assim, a calculadora parece dar, aos alunos com destrezas de cálculo pouco desenvolvidas, a possibilidade de desenvolverem competências básicas como o ser capaz de raciocinar logicamente, ou de resolver um problema (Duea, Immerzeel, Ockenga e Tarr, 1980). Na realidade, será justo não proporcionar a um aluno as condições para o desenvolvimento de tais capacidades apenas porque este manifesta falta de treino no cálculo?

3. O desenvolvimento da comunicação no contexto de resolução de problemas também aqui merece algum reparo. Pedir aos alunos que expliquem como pensaram ou como fizeram pode parecer uma tarefa difícil. Mas, progressivamente os alunos vão ultrapassando as dificuldades encontradas na verbalização dos processos de resolução ou do raciocínio.

No que respeita à comunicação oral, a presença da calculadora parece oferecer benefícios. Pois, na resolução de problemas entre pares, a existência de níveis de facilidade de cálculo entre alunos pode inibir a discussão de processos de resolução, já que os alunos centram mais a atenção nos processos de cálculo do que no desenvolvimento de estratégias de resolução.

Disponibilizar a calculadora neste contexto pode significar promover um trabalho interactivo na definição e implementação de estratégias de resolução entre alunos com níveis de facilidade de cálculo distintos.

4. Em alguns casos, a calculadora permitiu ainda a alunos do mesmo par ir mais longe nas suas pesquisas. Pois, em vários momentos, alunos do mesmo par manifestaram preocupação em apresentar soluções distintas para o mesmo problema.

5. A utilização da calculadora parece estar associada a um sentimento de vergonha. Alguns alunos associam o uso da calculadora ao mau funcionamento das suas capacidades de cálculo. Talvez isto aconteça pelo facto de existir uma ideia negativa a respeito do seu uso, encarando-a como um instrumento que impossibilita o desenvolvimento de competências de cálculo e também pelo facto dos alunos estarem demasiado habituados a utilizar a calculadora apenas para verificarem resultados obtidos por outros meios.

Conclusão

Talvez valesse a pena proporcionar aos alunos um contacto mais frequente com problemas exploratórios, onde os processos de resolução não são normativos, onde os alunos têm de explorar estratégias para encontrar a solução, onde várias soluções podem ser igualmente correctas, onde a discussão com o parceiro é promovida e pode ser altamente proveitosa, onde a calculadora pode desempenhar um papel para lá de mero instrumento verificador.

Referências

Abelló, F. U. (1997). *Aritmética y calculadoras*. Madrid: Síntesis.

Abrantes, P., Serrazina, M. L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e a aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Orgs.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 13-38). Dordrecht: Kluwer.

Baroody, A. J. (1994). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor.

Bassarear, T. (1997). *Mathematics for elementary school teachers*. Boston, MA: Houghton Mifflin.

Campbell, P., & Stewart, E. (1993). Calculators and computers. In R. J. Jensen (Org.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 251-268). New York, NY: Macmillan.

César, M. (1999). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. *Actas da Escola de Verão: Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 5-46). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan* (tradução espanhola da versão publicada em inglês em 1982). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

DEB (1998). *Organização curricular e programas*. Lisboa: Ministério da Educação.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competência essenciais*. Retirado em Outubro de 2001 de http://www.deb.min-edu.pt/newforum/LivroCompetenciasEssenciais/LivroCompetenciasEssenciais.pdf.

Duea, J., Immerzeel, G., Ockenga, E., & Tarr, J. (1980). Problem posing using calculator. In S. Krulik & R. Reys (Orgs.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 177-126). Reston, VA: NCTM.

Fielker, D. (1986). *Usando las calculadoras con niños de diez años*. Valencia: Generalitat Valenciana.

Forman, E., & Cazden, C. (1998). Exploring vygotskian perspectives in education: the cognitive value of peer interaction. In D. Faulkner, K. Littleton, & M. Woodhead (Orgs.), *Learning relationships in the classroom* (pp. 189-206). New York, NY: Open University.

Grandgenette, N., Hill, J. & Lloyd, C. (1995). Connecting reasoning and writing in student "how to" manuals. In P. House & A. Coxford (Orgs.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 142-146). Reston, VA: NCTM.

Greenes, C., & Schulman, L. (1996). Communication process in mathematical explorations and investigations. In P. Elliot & M. Kenney (Orgs.), *Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 159-169). Reston, VA: NCTM.

Huinker, D, & Laughlin, C. (1996). Talk your way into writing. In P. Elliot & Zweng (Orgs.), *Estimation and mental computation* (pp. 45-54). Reston, VA: NCTM.

Mamede, E. (2001a). *O papel da calculadora na resolução de problemas: Um estudo de caso no 1.º ciclo do ensino básico* (tese de mestrado não publicada, Universidade do Minho).

Mamede, E. (2001b). O currículo de matemática para o 1.º ciclo e a calculadora. *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 197-207), Lisboa: APM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Pimm, D. (1990). *El lenguage matematico en el aula*. Madrid: Morata.

Pólya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Rogoff, B. (1993). *Aprendices del pensamiento: El desarrollo cognitivo en el contexto social*. Barcelona: Piados Ibérica.

Shield, M., & Swinson, K. (1996). The link sheet: A communication aid for clarifying and developing mathematical ideas and processes. In P. Elliot & M. Kenney (Orgs.), *Communication in mathematics, k-12 and beyond*. Reston, VA: NCTM.

Tudge, J., & Rogoff, B. (1995). Influencias entre iguais en el desarrollo cognitivo: Perspectivas piagetiana y vygotskiana. In P. Berrocal & M. Zabal (Orgs.), *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Wheatley, G., & Shumway, R. (1992). The potential for calculators to transform elementary school mathematics. In J. Fey & C. Hirsch (Orgs.), *Calculators in mathematics education* (pp. 1-8). Reston, VA: NCTM.

Whimbey, A., & Lockhead, J. (1993). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Visor.

9

Abordagem dos numerais decimais no 1º ciclo do ensino básico sustentada por actividades significativas de resolução de problemas

Isabel Vizinho
Escola EB1 da Gafanha da Nazaré
isavizinho@netpaginas.pt

Isabel Cabrita
Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa, Universidade de Aveiro
icabrita@dte.ua.pt

O presente trabalho, realizado no âmbito do Mestrado em Gestão Curricular — 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) —, incide no estudo do processo de ensino e de aprendizagem que se articula na gestão do currículo escolar do 1º CEB, focalizando, como exemplo, a área curricular da Matemática. Mais especificamente, analisa-se o desenvolvimento da unidade didáctica dos Numerais Decimais, tema que se inicia no 3º ano e continua no 4º ano de escolaridade.

Desenvolvida à luz do mais recente conhecimento sobre o assunto, a investigação perseguiu, como principal finalidade, avaliar se uma diferente abordagem da Matemática, evidenciando conexões várias (com outras áreas disciplinares, com outros conteúdos matemáticos e com o dia a dia) e apoiada numa adequada exploração de materiais diversificados, produzidos e/ou seleccionados, enquanto suporte do desenvolvimento de actividades matemáticas significativas, contribui para uma mais sólida construção dos conceitos em causa, para o desenvolvimento profissional de professores do 1º ciclo e, em última instância, para a construção de uma nova cultura matemática.

Assim, formularam-se as seguintes questões de investigação que nortearam o estudo implementado — poderá uma visão diferente da educação matemática que sustente a utilização de estratégias inovadoras, evidenciando conexões várias e apoiadas por uma adequada exploração de materiais seleccionados/produzidos para o efeito, contribuir:

- *Para uma mais sólida construção dos conceitos em causa?*
- *Para o desenvolvimento profissional de professores do 1º ciclo?*
- *Para a construção de uma nova cultura matemática?*

Metodologia geral utilizada

Temos como ponto de partida que a metodologia é a lógica dos procedimentos científicos e que, portanto, ela deve ajudar a explicar não apenas os produtos da investigação científica mas, principalmente, o seu próprio processo de construção.

Campo da investigação, população e amostra

O campo onde se desenrola a investigação é constituído por professores e alunos do 1º CEB, programas do 1º CEB, programa da área de Matemática do 1º CEB, mais especificamente a parte relativa aos Numerais Decimais e materiais escolares relativos ao tema.

O estudo preparatório envolveu 36 professores do 1º ciclo, 24 dos quais se encontravam a frequentar o curso de complemento de formação científica e pedagógica para obtenção do grau de licenciatura no 1º CEB, estando 6 outros professores a leccionar numa escola do meio urbano (cidade) e os restantes numa escola de meio semi urbano/semi rural (vila).

Directamente envolvidos na parte experimental estão um professor do 1º CEB e seus 19 alunos, a frequentar o 4º ano de escolaridade, num meio semi urbano de uma escola do distrito de Aveiro, distrito onde se desenvolve esta investigação.

Recolha e tratamento da informação

A recolha de informação foi efectuada através de seis instrumentos principais: programas oficiais actuais e anteriores e manuais escolares do 4º ano de escolaridade relativamente aos quais focalizámos a nossa atenção, principalmente no que respeita ao assunto dos Numerais Decimais; inquérito por questionário aplicado a 36 professores do 1º CEB; teste de avaliação das aprendizagens de 19 alunos do 1º CEB que é aplicado por três vezes — pré-teste, pós-teste 1 e pós-teste 2 — respectivamente, no momento anterior à abordagem da Unidade dos numerais decimais, no momento subsequente à mesma e, por último momento, no final do ano lectivo; “diário de bordo” composto por registos de observação participada das sessões de implementação da planificação por nós construída, que se constitui pela observação directa e mesmo pela própria vivência prática de situações de implementação em sala de aula, desenvolvidas quer pela professora da turma quer, por vezes, pela própria investigadora com os mesmos alunos; inquérito por questionário aplicado àqueles alunos do 1º CEB; e entrevista à professora desses alunos que connosco colaborou.

Usamos como método privilegiado o 'estudo de caso' — porque proporciona conhecer, em relação ao mesmo objecto de estudo "Numerais Decimais", múltiplas situações referentes a alunos, a professores, ao próprio tema em estudo, e às relações que entre estes se estabelecem, por recurso a tratamentos qualitativos e quantitativos dos dados — de tipo exploratório, pois pretende abrir caminho para outros estudos. A quantificação dos dados é feita para se poder mais fácil e objectivamente proceder à análise qualitativa. Acontece, também, que o estudo tem pontos de ligação com a investigação-acção já que, no presente caso, verificou-se uma observação com elevado grau de participação, já que o permitiram as relações de entreajuda, entre a professora directamente ligada à parte experimental e a investigadora, tendo em atenção o maior respeito pelas questões de ética profissional dos estatutos presentes no contexto de sala de aula.

O paradigma em que nos posicionamos para perceber a realidade (que nunca é estável), é, assim, o que permite perceber-nos e perceber a experiência de forma crítica, na interacção construtiva que se estabelece com as diversas posturas de diversos referentes teóricos, confrontados, continuamente, numa perspectiva crítica, interpretativa e meta-analítica da experiência vivida e reflectida e que, continuamente, se reorganiza.

Principais etapas do percurso efectuado e organização da tese

Neste contexto, numa primeira parte, do contacto inicial com os diversos discursos de autores actuais sobre a Matemática, sua natureza e a dos seus objectos de estudo, demos conta da contínua referência destes a várias correntes filosóficas (e seus autores), pelo que foi necessário fazer uma primeira e breve incursão sobre as perspectivas filosóficas dominantes de Matemática.

Assim, o contexto teórico da tese versa sobre: definições de Matemática, perspectivas filosóficas de Matemática, contrapondo perspectivas absolutistas e "falibilistas" da Matemática; epistemologias da educação matemática; a natureza dos objectos matemáticos e sua desdogmatização; a Didáctica da Matemática como ciência e parte integrante da educação matemática; compreensão e significados dos conceitos, teoria das funções semióticas; significados (de referência histórica e cultural e significados institucionais locais) e respectiva construção de significados pessoais; dimensão epistemológica da avaliação; e gestão curricular.

Seguidamente procedeu-se à análise dos programas e de manuais escolares do 1º CEB, principalmente no que respeita ao tema em análise. Após a construção, validação, reformulação e testagem, aplicaram-se os questionários a professores desse nível de ensino, com o intuito de recolher informação quer sobre as suas representações sobre a Matemática, o seu ensino e o processo de aprendizagem, e sobre os factores que poderiam ter exercido influência nas concepções e práticas de Matemática quer, mais especificamente, sobre o processo de ensino e aprendizagem dos Numerais Decimais, ao nível da planificação e da implementação.

A segunda parte da dissertação é, assim, composta pelo contexto preparatório, no qual se reflecte sobre o "estado da arte" acerca do processo de ensino e de aprendizagem dos Numerais Decimais, com base na análise, retrospectiva, de programas em vigor em Portugal e de manuais escolares. Discute-se ainda os principais resultados dos dados obtidos por aplicação de um questionário a professores do 1º CEB.

Paralelamente estabelecemos contactos de negociação com a escola e com a respectiva professora (PP) com quem iríamos desenvolver a parte empírica do nosso trabalho. Após um diálogo com a turma atribuída a essa professora procedeu-se a uma breve avaliação de diagnóstico das aprendizagens dos alunos sobre os Numerais Decimais, no intuito de poder elaborar um teste que, simultaneamente, teria a função de diagnóstico, de pré e de pós testes. Ou seja, vários procedimentos e análises decorreram em simultâneo, pro e rectroagindo, num percurso pautado pelo carácter recursivo das acções que o compunham.

Abalizados por professores e investigadores, o teste bem como a planificação da unidade temática, sistematicamente negociada e discutida com a professora, sofreram a necessária reformulação após a qual se procedeu à sua aplicação/implementação. Durante a experiência a investigadora, com vista a uma adequada implementação da unidade didáctica, dinamizou várias sessões com a professora, que contemplavam, nomeadamente, a reestruturação da planificação desenhada inicialmente, atendendo às situações novas que sempre surgiam e a simulação de situações de ensino e de aprendizagem insistindo na dinâmica da aula — tipo de tarefas e formas de trabalho dos alunos, exploração dos próprios materiais didácticos, ênfase nos aspectos comunicativos e nas conexões com outras áreas disciplinares e com o dia a dia.

Relativamente ao tipo de tarefas apostou-se numa grande diversidade, privilegiando-se a resolução de problemas, as situações problemáticas, as investigações matemáticas, estabelecendo-se pontes com outras áreas disciplinares, com outros conteúdos matemáticos e, essencialmente, com o dia a dia.

No que respeita às formas de trabalho, intercalavam-se actividades individuais, em díade, em pequeno ou grande grupo, atribuindo ao aluno o papel principal no processo de construção dos conhecimentos, no qual a comunicação, a vários níveis e formas, assumia um lugar de destaque.

As actividades desenvolvidas, valorizando-se a importância da vertente lúdica como uma das formas de contribuir para uma visão mais adequada e favorável da própria Matemática, foram sustentadas pelos mais diversos materiais, incluindo a calculadora e o computador (aplicação Excel), grande parte dos quais especificamente criados para o efeito:

- *O decimate* (opaco e transparente) é um material facilmente manipulável, composto por 4 figuras, em que a unidade (1ª figura) é sempre o mesmo rectângulo que inicialmente não tem qualquer divisão (unidade inteira), na 2ª figura se encontra dividido em 10 partes iguais (1,0), na 3ª em 100 partes (1,00) e na quarta em 1000 partes iguais (1,000). A apresentação do mesmo material impresso em suporte opaco e em acetato, faculta a *manipulação* e sobreposição permitindo a visão e a compreensão dos conceitos das relações entre as ordens representadas – unidade, décima, centésima e milésima. Por exemplo, visualizar e perceber, pela sobreposição efectuada, que 0,35 < 0,5; que 0,3 = 0,30 = 0,300; e que 0,125>0,076.
- *Domideci – dominó da décima –* é um jogo cujas peças apresentam, na lógica do dominó, numa parte 12 quadros representativos de uma ou mais unidades divididas em 10 partes iguais, e na outra parte 12 quadros onde se encontram inscritos os numerais decimais. O objectivo deste jogo é a associação de cada numeral à quantidade que representa, e vice-versa, ajudando a construção do significado dos numerais decimais e, portanto, a resolução de problemas que os envolvam, a leitura, escrita, composição/decomposição e colocação por ordem desses mesmos numerais.
- *Domicenti – dominó da centésima –* é um jogo composto por 12 peças que apresentam, na lógica do dominó, numa parte quadros representativos de uma unidade dividida em 100 partes iguais, algumas das quais pintadas, e, na outra parte, numerais decimais e fraccionários. O objectivo deste jogo é a associação de cada numeral à quantidade que representa, e vice-versa, ajudando a construção do significado dos numerais decimais e, portanto, a resolução de problemas que os envolvam, a leitura, escrita, composição/ /decomposição e colocação por ordem desses mesmos numerais.
- *Domimulti* – dominó que evidencia as relações entre a multiplicação e a divisão de numerais decimais, contribuindo para a compreensão de que multiplicar um número por 0,1; 0,01 ou 0, 001 é igual a dividi-lo por 10; 100 ou 1000, respectivamente ou que dividir por 0,1; 0,01 ou 0, 001 é igual a multiplicar por 10; 100 ou 1000.

- *Loto-puzle decimate* é um *puzzle* e simultaneamente um loto. É formado por 6 cartões – dois de décimas, dois de centésimas e dois de milésimas, cada um dos quais decomposto em várias figuras. Existe um outro cartão com os números correspondentes a cada uma das figuras que compõem os cartões referidos. Quando um aluno indica um dos números do 'loto' os colegas procuram a peça correspondente para colocar no *puzzle*. Ganha quem conseguir construir o *puzzle* correctamente. Com o jogo Loto-puzzle decimate pretende-se ajudar a construir, evidenciando o aspecto lúdico, as relações entre as diversas unidades decimais e entre estas e a unidade.

Tais materiais deram origem a diversas actividades subsequentes, a maior parte das quais inventadas pelos próprios alunos.

O contexto experimental integra, então: a preparação da experiência; a planificação dos numerais decimais, acompanhada das reflexões que se foram fazendo da observação directa da sua implementação no "diário de bordo"; a apresentação e discussão dos dados recolhidos relativos ao teste (pré, pós 1 e pós 2), ao questionário aos alunos e à entrevista professora que colaboraram neste estudo.

A tese, da qual se darão a conhecer os principais aspectos nesta comunicação, termina com um capítulo de conclusões e implicações do estudo.

Principais conclusões e implicações deste estudo

Diversos factores que, em investigações futuras, deveriam ser tidos em conta, poderão ser apontados como limitações à própria experiência:

- Ter-se alargado muito a amplitude da planificação, dada a necessidade de se perseguirem objectivos considerados pré requisitos para iniciar o tema, que a turma não dominava, estendendo por demasiado tempo a sua implementação;
- A experiência não ter decorrido com alunos da própria investigadora, o que facilitaria a gestão curricular do tema e a respectiva observação e registo, já que um elemento externo à turma traz sempre alguma perturbação à vida da mesma;
- Várias sessões terem sido implementadas pela investigadora (em estreita combinação com a professora da turma - PP) com alunos que não eram os seus, com todas as questões inerentes ao estatuto de professora que não é a da turma;

- O pós-teste 1 ter sido aplicado dois dias depois do términus da implementação do tema, dificultando uma conveniente apropriação dos significados construídos;
- O pós-teste 2 ter sido aplicado na penúltima semana do terceiro período, em que os alunos já apresentam grande cansaço e menor capacidade de concentração, manifestando até desinteresse em responder de forma mais implicada, dado que já o estavam a fazer pela terceira vez.

Não obstante tais limitações, a resposta à primeira questão de investigação equacionada — a utilização de estratégias inovadoras, evidenciando conexões várias e apoiadas por uma adequada exploração de materiais seleccionados/produzidos segundo uma perspectiva de resolução de problemas em ambiente de sala de aula, poderá contribuir para uma mais sólida construção dos conceitos relativos aos numerais decimais? —parece-nos ser, francamente, positiva.

De facto, na análise e comparação dos resultados obtidos pelos alunos no teste, estes registaram ganhos relativos acentuados entre o pré e o pós teste 1, e, principalmente, entre o pré-teste e o pós-teste 2. Por outro lado, em termos de processo, também podemos afirmar que houve mudanças positivas, do ponto de vista qualitativo, já que as formas de resolver as mesmas questões evidenciaram alterações que não se traduzem apenas em ganhos quantitativos, mas em ganhos qualitativos.

O "diário de bordo", parece vir, ainda, reforçar esta situação dado que a presenciámos e dela demos conta, ao longo de toda a acção. Exemplo disso foi o que aconteceu relativamente ao conceito de parte da unidade. De facto, os alunos, na sua totalidade, consideravam que a décima parte de uma unidade era maior que a quinta parte dessa mesma unidade. A discussão de ideias provocada pela resolução de problemas, onde se exploraram materiais (Cuisenaire) levou, nessa sessão, em que não estava planificado um trabalho sobre esse assunto, a uma reformulação do conceito em questão que culminou na construção de significados pessoais muito próximos dos respectivos significados institucionais pretendidos.

Por outro lado, aquando do inquérito aos alunos, na maioria das respostas, relativamente às actividades que mais os ajudaram a entender os numerais decimais, referiram usar o computador para fazer os gráficos com os números decimais (figura 1); observar, pensar, conversar e inventar perguntas sobre o "decimate transparente" e construir e discutir em grupo os "puzzles" das décimas, centésimas e milésimas.

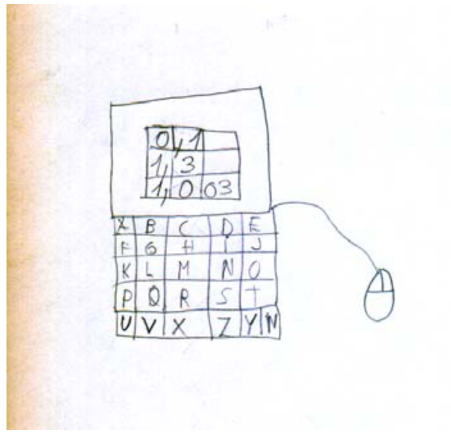


Figura 1. Representação pictórica do material com que
um aluno mais gostou de trabalhar – o computador.

Expressaram, em relação ao trabalho que mais teriam gostado de fazer, em primeiro lugar a construção, em grupo, do dominó das décimas e das centésimas (figura 2), o que nos leva a crer que, embora muito jovens, os alunos sabem distinguir entre aquilo que mais os ajudou e aquilo com que mais gostaram de trabalhar.

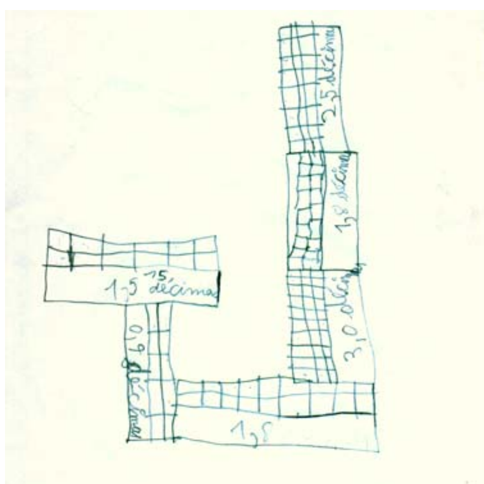


Figura 2. Representação pictórica do material com que
um aluno mais gostou de trabalhar – dominó.

Finalmente, há também que ter em conta as suas afirmações sobre a importância de trabalhar a Matemática desta forma, que vão no sentido de valorizar a "facilidade na aprendizagem" que redunda em "mais aprendizagem".

Em relação à segunda questão de investigação – poderá uma visão diferente da educação matemática que sustente a utilização de estratégias inovadoras, evidenciando conexões várias e apoiadas por uma adequada exploração de materiais seleccionados/produzidos segundo uma perspectiva de resolução de problemas, em ambiente de sala de aula, contribuir para o desenvolvimento profissional de professores do 1º ciclo? – e tendo por base, principalmente, os resultados da entrevista à professora que se refere a esta experiência como tendo constituído um valoroso momento de formação profissional, já que decorreu em ambiente de práticas e levou a uma nova perspectiva de encarar este tema, parece-nos que a resposta é sim.

Na entrevista, a Professora da Prática (PP) salientou que o que mais apreciou foi a situação de "comunicação", que lhe parecia, anteriormente, muito difícil de acontecer, na qual os alunos participavam, dando opiniões sobre os assuntos, apoiados na exploração de materiais, sobressaindo, para isso, a necessidade que há do professor não se pronunciar de imediato, aquando da expressão dos alunos sobre o seu pensamento exposto, quer seja para o apoiar como correcto, quer seja para o corrigir por estar errado.

Apontou, como factores importantes, a reflexão, que se fazia, em conjunto, durante as práticas de discussão sobre os assuntos, a reflexão sobre a reflexão que, no pós acção se fazia, a planificação dos temas e a preparação da exploração dos materiais, assim como, o confronto com outras práticas, estratégias, materiais e formas de estar.

Atentando nas opiniões dos professores recolhidas no inquérito, no que concerne às dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem dos numerais decimais, em que se denota uma forte relação com a falta de materiais, a precária formação quer inicial (e mais a nível didáctico que científico) quer contínua sobre este tema e a fraca abordagem que os manuais escolares fazem sobre ele, parece-nos que o presente trabalho reúne condições que podem contribuir para a formação de professores, como proposta de discussão ao nível da gestão curricular, quer no que diz respeito ao próprio objecto de estudo dos numerais decimais e seus significados pessoais e institucionais (de referência e locais), como às questões didácticas que lhe estão associadas, onde se perspectivam e avaliam estratégias e materiais, como, ainda, aos materiais de apoio, nomeadamente, programas oficiais e manuais escolares.

Relativamente à terceira questão de investigação – poderá uma visão diferente da educação matemática que sustente a utilização de estratégias inovadoras, evidenciando conexões várias e apoiadas por uma adequada exploração de materiais seleccionados/produzidos segundo uma perspectiva de resolução de problemas, em ambiente de sala de aula, contribuir para a construção de uma nova cultura matemática? – estamos consciente que esta experiência, porque acto isolado, por si só não irá mudar o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

No entanto, vista à luz do quadro de mudanças que se pretendem levar a efeito no sentido de melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem dos nossos alunos, parece-nos, pelo exposto, que ela se afigura como um contributo para esta mudança.

Assim, o presente trabalho pode vir, assim o esperamos, a provocar novos impactos, não pela sua aplicação com carácter prescritivo, mas como proposta de gestão e desenvolvimento curricular útil na planificação e implementação do tema, principalmente aos professores e alunos do 1º CEB.

Considera-se que, em futuras investigações, seria necessário proceder à análise de questões relativas a recursos utilizados pelos professores na selecção de tarefas e à planificação da avaliação. Era importante perceber porque é que o recurso alunos é apontado em primeiro lugar na selecção de tarefas. Concordamos que estes podem e devem colaborar na selecção das tarefas, mas será este o motivo que está subjacente à escolha dos professores? Ou será que a participação dos alunos na selecção das tarefas está muito condicionada pelo seu comportamento? Ou ainda, a diversidade de competências dos alunos será vista como variável a ter em conta nesta questão?

Também consideramos que seria importante perceber porque é que os professores recorrem aos manuais de fichas de avaliação, em detrimento dos programas, para planificarem a avaliação. Terá a ver com o facto dos professores valorizarem exemplos concretos, em detrimento das orientações gerais explicitadas naquela fonte? De facto, esta é mais uma situação que abona em favor da ideia de que os manuais continuam a ter uma grande responsabilidade neste processo, por um lado e, por outro, evidencia-se a necessidade dos programas conterem orientações de carácter mais específico, podendo, assim, constituir-se como um recurso de imprescindível e criteriosa utilização.

Referência

Vizinho, I. (2002). *A abordagem dos numerais decimais no 1º ciclo do ensino básico e a construção duma (nova) cultura matemática* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Aveiro).

11

A bola de futebol como um importante aliado na aquisição de novos conhecimentos

Elda Vieira Tramm
Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Brasil
Centro de Formação de Professores da APM, Portugal
etramm@netcabo.pt

Contextualização

Esta comunicação é fruto de um trabalho de cunho investigativo, que tem os seus pressupostos assentes em leituras que venho realizando na última década, nomeadamente, relacionadas com as contribuições para a educação feitas por Piaget (1985), Vygotsky (1979, 1996), Freudenthal (1978, 1983), Paulo Freire e D'Ambrósio (1986).

Assim, concebo o educando como um sujeito inteligente[1], social[2] e que possui seus próprios desejos e a sua cultura[3]. Ao planear e implementar a presente intervenção, tive em conta estes aspectos bem como o ambiente de aprendizagem, visto que o educando deverá ser o agente de sua própria formação.

Para que um ambiente de aprendizagem se torne facilitador e significativo entendo que deve, minimamente, atender duas condições. Em primeiro lugar, a aprendizagem tem que ter significado para o educando e este significado deve estar vinculado à sua funcionalidade, ou seja, os conhecimentos adquiridos devem ser efectivamente utilizados. Em segundo lugar, o processo mediante o qual se produz a aprendizagem requer uma intensa actividade por parte do educando, ranto de natureza externa como de natureza interna[4]. Por esta razão a actividade pedagógica deverá ter cunho investigativo, uma vez que ela favorece a construção de objectos, a exploração, a descoberta de conceitos matemáticos embutidos, a conjectura de situações que surgem no decorrer da intervenção, sejam elas intencionais ou não. O aprendiz, desta forma, torna-se um sujeito activo na sua aprendizagem, apropriando-se do saber, ao tornar este processo uma viagem única e intransmissível.

Agradeço aos matemáticos, que nos brindaram com a classificação dos poliedros convexos, o que me levou a identificar, de imediato, o elemento da cultura do educando, e ao Prof. Hans Freudenthal, pela sua luta a favor da inclusão da Geometria[5] no ensino da Matemática, que assumi como verdadeira e passível de ser concretizada. Estes apoios indirectos deram-me segurança e ousadia para investir na elaboração de propostas pedagógicas.

É neste contexto que nasceu a presente intervenção pedagógica, cujo objectivo era explorar e investigar os poliedros, nomeadamente os de Platão, tendo como meta a construção da bola de futebol, surgindo esta última como um elemento do desejo e da cultura do educando. Eis o elo que precisávamos para matematizar a sua realidade.

Esta intervenção tem subjacente aideia que a Geometria é a compreensão do espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor. Utilizo a Geometria (espaço e plano) porque ela se presta muito bem para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas que sendo feitas com os próprios olhos e mãos são mais convincentes e surpreendentes. Freudenthal trabalhou para abrir a Matemática para todos e nunca diminuiu a exigência de um intelectual, de um pensador científico.

Espero que esta comunicação contribuía para enriquecer o debate e para clarificar o tipo de actividade de investigação que nós, educadores, desejamos para nossas escolas no pressuposto que a Matemática é "assunto de todos e todos somos responsáveis por tornar este instrumento de organização do mundo, da vida, do quotidiano, acessível às crianças e jovens deste país" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

A investigação proposta

Atentemos na seguinte questão: "Existe um elemento na cultura do aluno, que faça parte do seu desejo, que nos sirva de ponte para o estudo da Geometria, do nível 1, no ensino básico?" Para lhe podermos responder, é necessário que haja um acompanhamento destes alunos, que sofreram a intervenção pedagógica, em diferentes momentos da sua vida académica posterior ao 1º ciclo (prova de aferição, desempenho no 2º ciclo).

A intervenção pedagógica que é referida neste relato tem sido por mim realizada através de professores do ensino básico e dos seus alunos 3º e 4º anos de escolaridade, em Portugal. Encontra-se, portanto, em fase de testagem da metodologia, das actividades e dos materiais pedagógicos bem como o campo conceptual escolhido (poliedros de Platão).

Como esta fase se traduz numa rica experiência/caminhada realizada, em parceira, com professoras[6] e seus alunos, acredito ser válido socializar esta etapa, esperando com isto conquistar algum interesse de algum pesquisador, desta área. O ponto central deste relato é as reacções dos alunos, frente às actividades propostas. Mas sei, de antemão, que ficará o sentimento que falta algo a contar mas por outro lado, tendo a certeza que meu esforço não será inútil.

A metodologia de trabalho

Esta intervenção pedagógica pode resumir-se em três momentos: (i) construção do contrato de trabalho, (ii) estudo de poliedros, nomeadamente, os de Platão, e (iii) construção da bola de futebol.

Momento I – Construção do contrato de trabalho

Este momento tem por base a seguinte proposta: que tal construir uma bola de futebol? (tema lançado) Geralmente esta proposta é aceite com muito entusiasmo pelos alunos. Depois, vamos pensar juntos o que precisamos para construir a bola de futebol (planeamento).

Com a bola de futebol em mãos, passamos a discutir e planear com os alunos, o que será necessário fazer para construir uma bola de futebol. Chegamos à conclusão que a ferramenta que nos ajudaria, seria o estudo dos poliedros. Firmamos deste modo, um contrato de trabalho verbal, pois sabemos que a aquisição de conhecimentos significa um trabalho árduo, com muita persistência, organização e disciplina.

Feito isto, passamos à acção.

Momento II – Estudo de poliedros, nomeadamente, os de Platão

Etapa 1: Descoberta de poliedros regulares (regras/limites)

a) Construção e descoberta dos deltaedros (só triângulos equiláteros, usando palhinhas, anexo 1). Nesta fase, introduzimos a necessidade de etiquetar os poliedros feitos, com os seguintes dados:

- Nome do poliedro (que é inventando pelo aluno),
- Número de palhinhas utilizadas (que em momento oportuno é substituído por arestas),
- Número de triângulos utilizados (que em momento oportuno é substituído por faces (naturalmente, subentendem-se polígonos regulares),

- Número de bicos (que em momento oportuno é substituído por vértices).

Logo na primeira aula, os alunos demonstram o interesse pelos poliedros, ao solicitar à professora o consentimento para levar o poliedro construído para casa. A professora não permite de imediato pois precisa dos poliedros para continuar a investigação. Depois consente que levem para casa e sugere que levem palhinhas e agulhas para continuar a tarefa em casa.

Nas três intervenções realizadas, a instrução por si só não basta. O aluno procura clarificar entre eles as regras colocadas pela professora para a construção dos poliedros. De início os alunos trabalham em equipa mas cada um por si. Depois naturalmente trabalham aos pares (se ajudam) (ver anexo 2).

Como numa aula os alunos não esgotam a investigação dos deltaedros, a professora prepara um espaço na parede da sala, com o título Poliedros, para que os alunos afixem seus poliedros, devidamente etiquetados. Desta forma ela dá condições para que os alunos possam ter uma visão global dos poliedros construídos. A visão do todo, ajuda-os a descobrir regularidades, a classificar e organizar o pensamento do aluno. No final preenchem a ficha de registo.

b) Construção e descoberta do cubo/hexaedro (só quadrados, usando palhinhas). Aqui, as crianças descobrem com surpresa, que o mesmo não fica em pé (anexo 3). Não aceitam este facto, cuja descoberta constitui uma desilusão. Propõe de imediato colocá-lo de pé.

Surgem então diversas conjecturas.

1º caso (2000) – E.B.1 10 – Setúbal: "Coloca-se uma palhinha atravessada". Mesmo com problemas na linguagem a professora incentiva-os a desenhar sua ideia, o que é feito de imediato. Mas quando vão colocar em prática verificam que o tamanho da palhinha não é suficiente e dizem logo: "não dá".

A professora socializa para a turma a conjectura (a descoberta), perguntando o porquê daquilo acontecer. Os alunos sabem que precisam de uma palhinha maior. A professora explica que a conjectura da diagonal é boa e pergunta se eles são capazes de dizer exactamente a medida da diagonal. Uns envolvem-se em cálculos, outros usam o fio de lã para medir o trajecto da diagonal. A professora não aceita e pede que se desenrasquem com o que eles sabem. Ela aproveita para conversar sobre o papel da Matemática e a sua importância no nosso dia a dia.

Surgem, então, várias conjecturas que são eliminadas por falta de argumentos convincentes até à conjectura do balão, o que toda a turma de imediato aceita. A professora (que está surpresa e eu também) solicita minha ajuda. Digo que é uma excelente sugestão e que nunca havia pensado nisto. Então peço que expliquem mais a ideia.

O aluno explica para os demais. Então, todos adoptam o balão. Fica-se com a sensação que não é uma boa conjectura mas foi a que eles puderam chegar.

2º caso (2º semestre de 2000/01) – E.B.1 nº 09 – Setúbal. Passou-se da mesma forma que a anterior (nesta acção de formação as professoras construiram o dodecaedro com o polidron e o zoomtool).

3º caso (1º semestre de 2001/02) – E.B.1 nº 15 – Lisboa. Neste grupo surgiram duas conjecturas:

- Colocar plasticina nos vértices. A professora socializa para a turma a conjectura (a descoberta), perguntando o porquê daquilo acontecer. Eles concluem que assim a palhinha fica em pé. Neste momento a professora pergunta qual o papel da plasticina. Depois de muita troca de ideias e da condução da professora, chega-se à conclusão que amarra as 3 palhinhas (arestas);
- Colocar 2 palhinhas em cruz (que são os eixos de simetria, horizontal e vertical).

Ambas as conjecturas foram aceites.

Estes alunos não aceitaram o balão (anexo 4). Estas professoras utilizaram o *polidron* na construção do dodecaedro. Só no 3º curso concluímos que o material mais adequado seria as palhinhas no início (deltaedros e hexaedro) e, em seguida o *polidron*. O uso de palhinhas na construção dos deltaedros e do cubo facilita a descoberta da rigidez (triângulo) e a representação do cubo (espaço) no plano (papel). Ao movimentar o cubo em palhinhas fica visível linha paralela, ângulos, etc.

c) Construção e descoberta do dodecaedro (só pentágonos, usando palhinhas e polidron, ver anexo 5).

d) Descoberta do impedimento na construção de um poliedro (só hexágonos, usando palhinhas e *polidron*, anexo 6). Finalmente os alunos descobrem que com hexágonos, é impossível construir poliedros. Neste momento eles percebem que se trata de situação análoga à dos deltaedros (quando o número de triângulos equiláteros é 6). A professora incentiva-o a desenhar as duas situações e socializa para todos, a conjectura descoberta, perguntando o porquê daquilo acontecer. Surge assim um óptimo gancho (motivação) para trabalharmos a construção do desenho do hexágono (representação) com as ferramentas da matemática (transferidor, compasso), a medida de ângulos, e a circunferência *versus* seis triângulos…

Etapa 2: Formalização

O pensamento formal (presente no ensino da gramática da língua materna e no ensino da Matemática) alfabetiza a criança, mas não se desenvolve de forma natural. Precisa de acções educativas para que o aluno se aproprie desta competência. Já o pensamento intuitivo, concreto, se aprende de maneira natural. Isto não significa que o aluno seja alfabetizado.

Esta etapa envolve as seguintes actividades:

- Descobrindo regularidades;
- Registando os elementos, de cada poliedro construído, na folha de registo;
- Classificando os poliedros construídos em relação as faces (formados por triângulos, por quadrados, por pentágonos).

Cada aluno possui sua folha de registo preenchida.

Etapa 3: Poliedros regulares ou de Platão

Finalmente, os alunos identificam aqueles que sempre apresentam a mesma imagem, apesar de trocarmos de posição. Eles chamaram estes poliedros de certinhos. A professora diz que estes poliedros (certinhos) têm o nome de Regulares ou de Platão, contando-lhes que cada um representa um dos 5 elementos do universo, segundo a interpretação de Kepler (ver Veloso, 1998).

Momento III – Construção da bola de futebol

Os alunos concretizam seu objecto de desejo ao construir a bola de futebol, que reconhece como um icosaedro truncado – poliedro semi-regular ou arquimediano). Deste modo desenvolve a sua auto estima e confiança em si e na escola (educação formal).

Reflexão final

Este processo de ensino-aprendizagem foi regulado com base nas observações das reacções dos alunos e na análise das opiniões obtidas através das redacções dos alunos nas actividades. As três experiências realizadas permitiram-me fazer as seguintes conjecturas que mereceram a minha atenção e que agora partilho convosco.

- A construção da bola de futebol se apresenta como um forte elo de ligação que aproxima a realidade do aluno dos conteúdos matemáticos;
- O campo conceptual trabalhado – Poliedros de Platão – apresenta-se como adequado para se trabalhar geometria neste nível de ensino;

- O material de apoio utilizado presta-se à descoberta de propriedades (rigidez de figuras) e à identificação de todos os elementos que compõem um poliedro;
- As regras/limites impostas para a construção e descoberta de poliedros funcionam como regras de um jogo, pois foram aceites sem nenhum obstáculo;
- As crianças gostaram de trabalhar este tema (poliedros regulares) estando sempre muito absorvidas pelas tarefas;
- As tarefas que envolviam organização, sistematização e formalização de conteúdos matemáticos ajudam na realização de tarefas interdisciplinares;
- Os professores envolvidos estiveram bastante entusiasmados com os resultados alcançados por seus alunos;
- O despertar do interesse do professor pelo ensino da Matemática teve um papel preponderante no resultado alcançado;
- O tempo gasto no estudo dos poliedros vem sendo diminuído de experiência para experiência;
- Os sujeitos envolvidos na experiência (formador, formadores e alunos) evoluíram ao longo do percurso (acção de formação, intervenção e reflexão crítica dos resultados), modificando sua atitude em relação ao papel da matemática.

Transcrevo, a seguir, a reflexão que os professores da EB1 nº 15 – Lisboa fizeram a respeito de si próprios, ao finalizar a intervenção pedagógica em uma sala de aula:

> O professor iniciouum percurso de inovação, reflexão e reorganização do ambiente de aprendizagem que ultrapassam a área de Matemática.
>
> Despertou a curiosidade das comunidades envolventes, especialmente, a família…

Notas

1 Piaget via a "criança como um construtor activo de suas estruturas intelectuais..." pode-se concluir que o homem não nasce inteligente, ele torna-se inteligente.

2 Para Vygotsky, "a relação entre o significado de uma palavra, o pensamento e a linguagem é tão estreita que é quase impossível distinguir entre o fenómeno da fala e um fenómeno do pensamento".

3 Paulo Freire e D'Ambrósio "… ao se considerar de forma integrada conteúdos, objectivos e métodos, considerações de natureza socio cultural estarão permanentemente em jogo. É aí que é fundamental a capacidade do professor de reconhecer no aluno um determinante na definição dos objectivos na prática pedagógica."

4 Nesta, o aprendiz estabelece relações entre o novo conteúdo e os elementos já disponíveis em sua estrutura cognitiva; julga, decide ou não a pertinência deste conteúdo e finalmente

constrói novas matizes. A este processo de natureza interna Piaget denomina-o de assimilação e acomodação deste objecto/conteúdo.

[5] Freudenthal sempre defendeu "a inclusão da geometria na aprendizagem matemática e se possível o mais cedo possível. Não defendia a matemática euclidiana como objecto ideal para pensar dedutivamente". Para ele, "Matemática é organizar áreas de experiência; a geometria, neste sentido se presta para matematizar experiências espaciais. Eis uma óptima oportunidade para a criança experimentar a organização local." (1978, pp. 276-292).

[6] Esta caminhada dá conta das três intervenções realizadas até ao momento. Estas intervenções sofreram a influência das actividades desenvolvidas na acção de formação "Novos ambientes de aprendizagem no ensino da Matemática", dinamizadas por mim. As Escolas Básicas envolvidas até então foram:

- E.B.1 nº 10 – Setúbal, que envolveu duas professoras (apenas uma delas participou da acção de formação) e duas turmas do 3º ano. A escola ganhou o concurso AMM2000;
- E.B.1 nº 10 que envolveu 7 professoras e 5 turmas, do 1º ao 4º ano;
- E.B.1 nº 15 que envolveu 7 professoras e 5 turmas, do 1º ao 4º ano. A escola participa no Concurso Pedro Nunes.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: DEB do ME.

D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à ação: Reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomelogy of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Piaget, J. (1985). *O possível e o necessário: A evolução dos possíveis na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Veloso, E. (1998). *Geometria, temas actuais: Materiais para professores.* Lisboa: IIE.

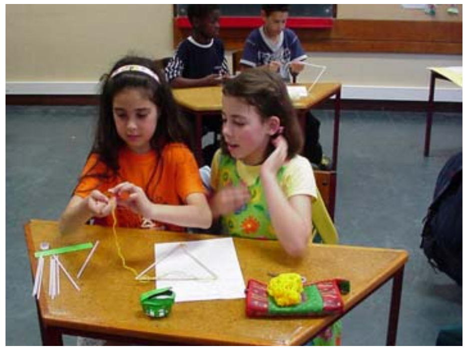
Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e linguagem* (Tradução de M. Resende). Lisboa: Edições Antídoto.

Vygotsky, L. S. (1996). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Anexos

1.

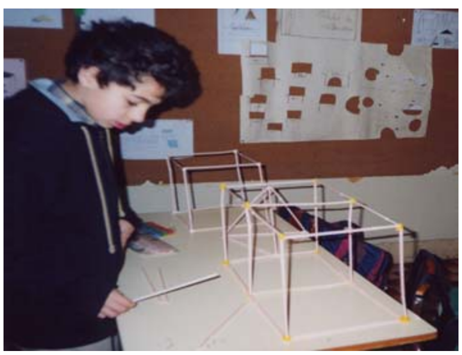
2.



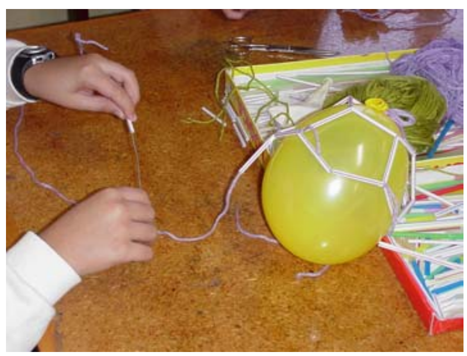
3.

4.

5.



6.



12

Alunos/investigadores no ensino superior no século XIX

Helmuth Malonek
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
hrmalon@mat.ua.pt

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
jaimecs@mat.uc.pt

Teresa Costa
Escola Secundária de Montejunto
teresa.costa-751@clix.pt

Nos Estatutos da Universidade de 1772 são definidos com muito detalhe quais os trabalhos a realizar pelos alunos na sala de aula. Em particular os "exercícios escritos" deveriam incluir uma "dissertação":

> Haverá todos os Mezes hum Exercicio Geral. Para elle determinaráõ os Lentes hum assumpto tal, que peça discussão, e dê materia a huma breve Dissertação. (Liv. III, Part. II, Tit. V, Cap. IV)

Este tipo de trabalho manteve-se até aos princípios do século XX, conforme várias "dissertações" hoje ainda existentes mostram. Falaremos de algumas dessas "dissertações" e mostraremos como, no caso de Gomes Teixeira, ainda aluno, deram origem a um trabalho de investigação de alto nível, muito elogiado por Daniel da Silva.

A avaliação na reforma pombalina

Os Estatutos de 1772 são não apenas uma organização genérica dos estudos universitários e das estruturas universitárias, mas também um inventário muito detalhado das matérias a ensinar, da metodologia do ensino, da avaliação da aprendizagem e dos níveis a atingir. Por exemplo, aí é apontada a criação dos "Gremios das Faculdades" e da "Congregação Geral das Sciencias para o adiantamento, progresso e perfeição das Sciencias Naturaes"[1] de modo a "que os descubrimentos, que se fizerem, e approvarem na Congregação Geral das Sciencias, passem logo a transfundir-se nas Lições, reduzidos a huma fórma elementar; e que os Estudantes (principalmente os Ordinarios) se criem desde o principio no espirito da mesma Congregação; para depois se fazerem habeis a entrar nella (...) e para continuarem o fio das mesmas indagações."[2]

No que diz respeito à avaliação é regulamentada tanto a avaliação dentro de cada disciplina, como a dos exames finais de cada ano, a dos de licenciatura e a dos de doutoramento.

A avaliação de cada disciplina compreendia os "Exercicios *Vocaes*, *Práticos* e por *Escrito*"[3]. Note-se que a aprovação em cada ano dependia apenas do exame final pelo que esta avaliação da disciplina não era feita tendo em vista o exame final mas sim "dous objectos igualmente importantes. O Primeiro he, fazer que os Discipulos fixem bem na memoria as verdades Elementares das Lições; e entendam perfeitamente as Demonstrações. O Segundo, que evolvam todas as forças do engenho, para combinarem por si mesmos as ditas verdades; procurarem novos usos dellas; e indagarem outras verdades desconhecidas"[4]. Nota-se aqui um afastamento do ensino tradicional em que os alunos se limitavam a repetir o que o mestre afirmava. Além da memorização das "verdades Elementares das Lições" era também necessário compreender a Matemática ao ponto de os alunos "indagarem outras verdades desconhecidas". Os Estatutos de 1772 são na realidade bastante ambiciosos, mas como seria atingido tal objectivo?

Os "Exercicios *Vocaes*" são regulamentados detalhadamente em 13 parágrafos podendo ser "*Diarios*, *Semanarios*, e (…) *todos os Mezes*". Os Estatutos preocupam-se em particular em determinar que aproveitamento deve o professor fazer dos sucessos e insucessos dos alunos nesses exercícios. Uma das indicações responde parcialmente à questão levantada de como se ensinam os alunos a "indagarem outras verdades desconhecidas". Dizem o seguinte os Estatutos: "Cuidaraõ tambem muitos os Lentes, em que os Discipulos se ponham no caminho dos Inventores: Presentando-lhes para isso algumas materias pelos passos, que se deram, ou podiam dar, até se chegar ao descubrimento das verdades, que nellas se contém: Mostrando-lhes os indicios, por onde se suspeita, e conjectura primeiro o que se poderá achar; e os meios, e tentativas, que se applicam para o descubrir: E dando-lhes huma idéa circumstanciada da evolução dos descubrimentos Mathematicos, e de como por degráos se passou de huns aos outros: Porque este assumpto merece particulares reflexões; em razão de servir de exemplo a quem pertende empregar-se utilmente nestas Sciencias"[5].

Nos "Exercicios *Práticos*" recomenda-se veementemente (em 6 parágrafos) que se junte a teoria e prática em cada um dos anos do curso de Matemática.

Nos "Exercicios por *Escrito*" os alunos tinham de realizar trabalhos escritos durante as aulas, tanto para exercícios relativos a problemas "que não requerem discussão alguma, mas tão somente uma resolução breve, e elegante, ainda que sejam muito difficultosos"[6], como para um assunto "que peça discussão" e sobre o qual os alunos deviam elaborar uma pequena dissertação.

Em que medida esta ideia de avaliação foi praticada? Os dados são escassos, mas sabemos, através da controvérsia entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha, que pelo menos uma parte das determinações dos Estatutos não era concretizada. Escreve Anastácio da Cunha: "O mestre repetia ou pelo livro ou de cór litteralmente as proposições da lição; e no dia seguinte cada estudante satisfazia repetindo de cór a proposição que lhe perguntavam. Nem se mostrava o uso das proposições, nem se resolviam problemas; ninguem ainda viu o lente do 1º anno no campo ensinando as praxes que os Estatutos mandam. Debalde solicitei os instrumentos necessarios: não me consta que a Universidade tenha ainda nem uma prancheta."[7]

José Anastácio da Cunha pode ter exagerado na sua ira contra Monteiro da Rocha e certos hábitos universitários conimbricences. Mas pelo menos num ponto tem razão: apenas na Acta da Congregação da Faculdade de Matemática de 17 de Fevereiro de 1807 aparece uma referência a uma diligência para que o material de Geometria fosse comprado, 35 anos depois da Reforma Pombalina…

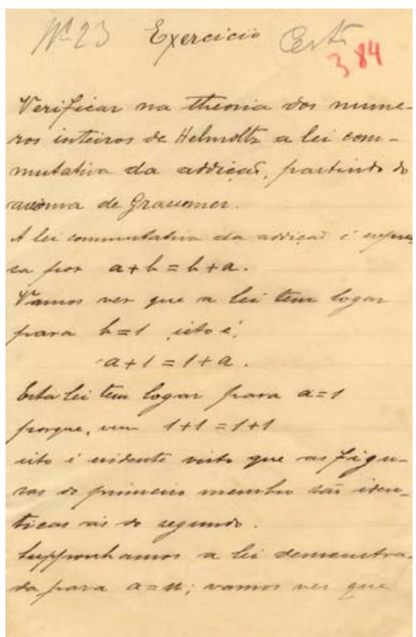
As dissertações

De acordo com os Estatutos o exame final era realizado por um júri de quatro professores. O aluno era interrogado primeiro sobre uma "Dissertação, que deverá ter composto sobre algum assumpto relativo às Lições do mesmo Anno; e semelhante aos que os Lentes hão de passar para os Exercícios de todos os Mezes"[8]. O resto do exame incidia sobre pontos tirados à sorte 24 horas antes do exame (estes pontos eram considerados o assunto principal do exame).

O tema da dissertação era escolhido pelo aluno mas devia ter a aprovação do professor. O professor corrigia ainda uma primeira versão do texto da dissertação e no exame o tempo dedicado à análise da dissertação não podia ser inferior a um quarto de hora.

Depois de terem feito o exame do quarto ano os alunos eram considerados Bachareis. Mas apenas com um exame suplementar eram considerados "formados" (com a categoria de Bacharel Formado). Neste exame de formatura os estudantes eram interrogados sobre a matéria de cada um dos anos do curso e tinham ainda de apresentar uma "Dissertação no ponto, que bem lhes parecer, relativo a qualquer das partes do Curso Mathematico"[9].

Estas dissertação fizeram, pelo menos parcialmente, parte da prática pedagógica até aos princípios do século XX. No espólio de Sidónio Pais[10] encontram-se vários trabalhos de alunos, realizados em diferentes anos lectivos para cadeiras de matemática, que entram nas duas categorias acima referidas: "Achar o quarto differencial total de $\theta = f(u, v, w)$" (3 pp., s/d), "Verificar na theoria de numeros inteiros de Helmholtz a lei commutativa da addição, partindo do axioma de Grassmer"(3 pp., 1899), "Lei commutativa a+b = b+a" (3 pp., 1899), "Verificar que a lei commutativa tem logar para a somma" (3 pp., 1899) (ver figura 1), "Exercício: Decompor a função racional fraccionária $\frac{x^4 - 2x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1)(x - 4)}$ em fracções simples" (12 pp., 1902), que entram na primeira categoria, e dissertações maiores como "Integral definido simples. Critérios de integrabilidade. Funções integráveis" (43 pp., 1900), "Integração das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem lineares" (32 pp., 1900), "Integral intermedio" (6 pp. 1899), ou "Integral intermedio geral das equações ás derivadas parciaes de 2ª ordem"(9 pp., 1899), que entram na segunda categoria visto se tratarem de pequenas dissertações sobre um assunto "que peça discussão" (podem também ser dissertações usadas na avaliação final).


Nº 23 Exercicio 384

Verificar na theoria dos numeros inteiros de Helmholtz a lei commutativa da addição, partindo do axioma de Grassmer.
A lei commutativa da addição é expressa por a+b = b+a.
Vamos ver que a lei tem logar para b=1, isto é:
a+1 = 1+a.
Esta lei tem logar para a=1 porque, vem 1+1 = 1+1
isto é evidente visto que as figuras do primeiro membro são identicas ás do segundo.
Supponhamos a lei demonstrada para a=n; vamos ver que

Figura 1. Primeira página do exercício de um aluno

No espólio de Francisco Miranda de Costa Lobo[11] encontramos, também, uma colecção de dissertações de alunos de cursos entre 1870 e 1899 (ver figura 2) (as dissertações são todas escritas à mão com grande exactidão e carinho, encadernadas com fitas azuis)[12]. Entre elas encontram-se as de Almeida Garret, do próprio Costa Lobo, e duas que se distinguem por razões diferentes. A dissertação da primeira mulher que estudou na Universidade de Coimbra, referimo-nos a Domitilla Hormizinda Miranda de Carvalho[13] (figura 3) e, a de Francisco Gomes Teixeira escrita já em 1871 e intitulada "Cálculo das variações" e elaborada no fim do segundo ano do Curso de Matemática (ver figura 9).

DISSERTAÇÕES DE **FRANCISCO MIRANDA COSTA LOBO**

DISSERTAÇÕES	DATAS
5° ano de Matemática: "O problema dos 3 corpos"	1884 ?? v
1° ano de Matemática: "Superficies com centro de 2ª ordem"	24/Junho/1880 v
Chimica: "Crystallographia e caracteres ópticos dos crystais. Lei do isomorfismo"	21/Junho/1980
4° ano de Matemática: "Geodesia e triangulação"	11/Junho/1883
Botânica: "Vegetais Gymnopermicos"	19/Junho 1883
Zoologia: "Divisão do reino animal em typos"	25/Maio/1884
Physica (1ª parte): "Estática" ???	20/Junho/1881
Mineralogia: "Formas cristalinas" ??	9/Julho/1883
Chimica orgânica: "Analyse orgânica" ??	9/Julho/1883
Theses de Mathemática, Apresentação: Álgebra; Mechanica Racional; Astronomia; Geodesia, Mechanica Celeste, Physica Matemática	Visto e aprovado em conferência de 22/Fevereiro/1885: Luis Costa e Almeida Joaquim Pereira Falcão José .... de Sousa ......

Figura 2.

No mesmo ano, em 1871, Gomes Teixeira escreveu o seu primeiro trabalho de investigação, a que deu o título "Desenvolvimento das funções em fracção contínua", impresso na tipografia da Universidade e dedicado a Antonio de Almeida Soeiro de Gamboa.

O número de dissertações que permaneceu no espólio de Sidónio Pais é interessante por revelar que o trabalho exigido aos alunos tinha um carácter sistemático. Não se sabe como e quando este hábito terá desaparecido, mas convém recordar que os primeiros quinze anos da Universidade de Coimbra no século XX foram particularmente agitados.

Figura 3. Primeira página da dissertação de Domitila de Carvalho

Olhemos um pouco para a dissertação intitulada "Integral definido simples. Critérios de integrabilidade. Funções integráveis"(43 pp., 1900), feita pelo aluno Eusébio Barbosa Tamagnini que mais tarde foi Ministro da Educação.

Esta dissertação apresenta uma capa manuscrita em que as páginas são unidas com fitas atadas com dois laços com as cores da Faculdade de Matemática, branco e azul (figura 4). Tal como o título indica, o trabalho divide-se em três partes e é apresentado de forma argumentada desde a definição de integral definido e sucessivas generalizações até às condições de integrabilidade de várias classes de funções. Trata-se provavelmente de uma dissertação apresentada para exame devido à data (16 de Junho de 1900) e devido ao facto de conter inúmeras anotações a lápis, com observações, correcções e perguntas como, por exemplo, se pode ver logo na página 2 aqui reproduzida (figura 5). A quantidade e o detalhe das anotações faz pensar que a discussão do exame não deveria ser superficial.

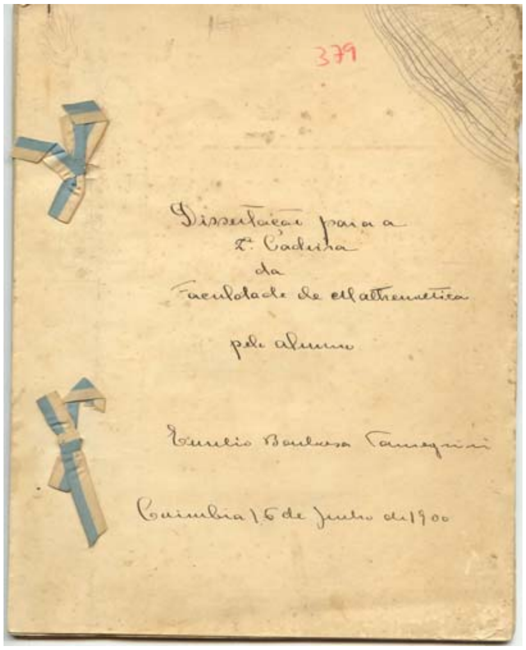
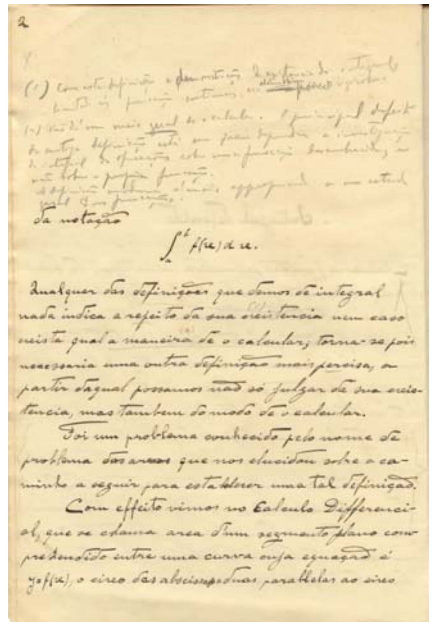

Dissertação para a
2ª Cadeira
da
Faculdade de Mathematica
pelo alumno
Eusebio Barbosa Tamagnini
Coimbra 15 de Julho de 1900

Figura 4. Capa da dissertação de Eusébio Barbosa Tamagnini (1900)


da notação

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Qualquer das definições que demos de integral nada indica a respeito da sua existencia nem caso exista qual a maneira de o calcular; torna-se pois necessaria uma outra definição mais precisa, a partir da qual possamos não só julgar da sua existencia, mas tambem do modo de o calcular.

Foi um problema conhecido pelo nome de problema das areas que nos elucidou sobre o caminho a seguir para estabelecer uma tal definição.

Com effeito vimos no Calculo Differencial, que se chama area d'um segmento plano comprehendido entre uma curva cuja equação é $y=f(x)$, o eixo das abscissas e duas parallelas ao eixo

Figura 5. Página 2 da dissertação de Eusébio Barbosa Tamagnini (1900)

A capa da dissertação de José Marques Pereira Barata reforça a ideia de as dissertações serem um hábito sistemático, visto estarmos em presença de uma capa impressa; o facto de haver um espaço para indicar o nome da Faculdade significa em particular que o mesmo hábito existiria para outras Faculdades (ver figura 6).

Esta ideia é reforçada por uma dissertação da Faculdade de Filosofia (Natural) que, além do mais, dá uma ideia do modo como decorriam os exames (ver figura 7). O aluno (não referido pois a dissertação não tem nome nem data) tirou dois pontos à sorte na 7ª cadeira da Faculdade, Geologia, e na 8ª cadeira, Antropologia. O exame desse aluno (um exame de ano e não de cadeira) deve então ter incluído os dois temas referidos nos pontos e a discussão da dissertação.

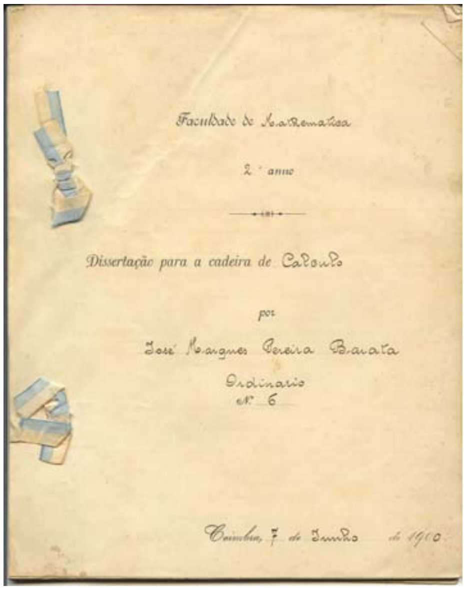


Figura 6. Capa da dissertação de José Marques Pereira Barata

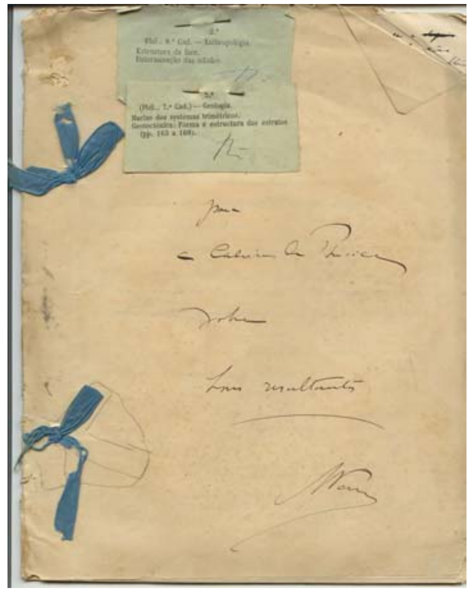


Figura 7. Dissertação para a Cadeira de Phisica sobre Sons resultantes

Francisco Gomes Teixeira enquanto aluno já investigador

Figura 8. Gomes Teixeira

"Nesse caso tire-se à sorte" disse Gomes Teixeira pai. E a sorte destinou Gomes Teixeira para Matemática.[14]

Na verdade, era vontade de seu pai que seguisse uma carreira eclesiástica, contudo um primo aconselha o pai a mandá-lo estudar Matemática. Inquirido sobre a sua preferência Gomes Teixeira responde ser-lhe indiferente uma ou outra carreira, seguiria o que o pai quisesse.

A sorte parece ter sido feliz, Gomes Teixeira desde muito cedo se destacou como um notável investigador em Matemática.

Ainda como aluno, Francisco Gomes Teixeira elaborou uma dissertação no fim do segundo ano do Curso de Matemática, intitulada *Calculo das variações* (ver figura 9).

É notório o rigor com que expõe os assuntos, sempre associado a preocupações de carácter pedagógico. O autor define o cálculo de variações, realçando as suas aplicações. Na exposição dos assuntos utiliza figuras para facilitar a sua compreensão, apresentando ao mesmo tempo, um desenvolvimento detalhado dos assuntos que pretende tratar (ver figura 10).

Sem queremos entrar em muito pormenor, convém realçar que, no início da sua dissertação, Gomes Teixeira mencionou alguns matemáticos bem conhecidos, como Lagrange e Euler. Podemos concluir que consultava os textos originais dos fundadores do cálculo das variações, apesar de ser apenas um aluno do segundo ano do Curso de Matemática.

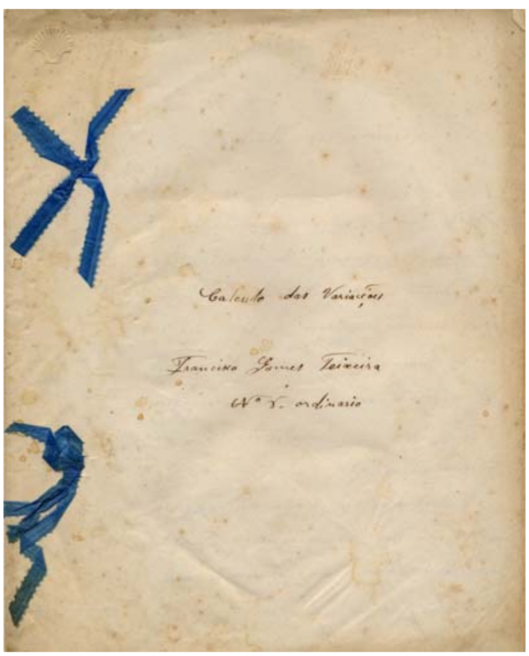


Figura 9. Primeira página da dissertação de Francisco Gomes Teixeira

Figura 10. Algumas equações apresentadas na dissertação de Gomes Teixeira

A dissertação de Gomes Teixeira divide-se em seis partes:

I. Muito breve introdução histórica, onde (apenas) são citados os nomes de Euler, dos Bernoullis e de Lagrange. Referência às muitas aplicações, citando a mais importante

> "determinar a curva, em que um integral dado é máximo ou mínimo, relativamente as outras curvas."

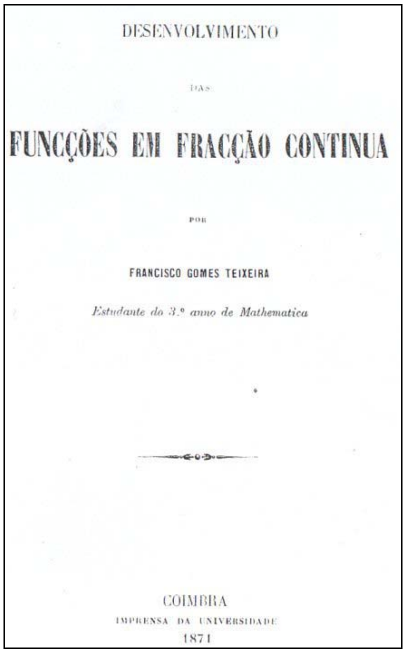
II. Definição de variação segundo Euler.
III. Os princípios fundamentais (do cálculo das variações; o único subtítulo).
   1º A variação da differencial de uma quantidade é igual à differencial da variação.
   2º A variação do integral é igual ao integral da variação.

IV. Exposição do calculo das variações. Dedução da condição para que o integral seja maximo ou minimo.
V. Dedução das condições entre os límites designados.
   1º Se os limites são fixos.
   2º Se os limites são independentes.
VI. Dedução da relação entre as variáveis independentes e dependentes para que o integral seja um máximo ou mínimo.

Merece ainda particular atenção o facto de, no decorrer do mesmo ano, 1871, Gomes Teixeira ter escrito o seu primeiro trabalho de investigação, a que deu o título de *Desenvolvimento das funções em fracção contínua*. Nele o autor apresenta fórmulas para desenvolver as funções em fracções contínuas e transforma, em seguida, estas em fracções ordinárias, aplicando as fracções contínuas ao cálculo integral e à determinação das raízes das equações, observando que por este método se obtêm resultados mais convergentes do que pelos métodos de Newton e de Lagrange[15].

Podemos concluir que o génio de Gomes Teixeira se manifestou desde tenra idade e o próprio considerou que

> A paixão pelo estudo das sciências matemáticas, que foi em mim assaz desordenado pelo excesso, desde muitos anos se tem reduzido às proporções modestas de amor platónico.
> (...)
> Restou-me, porêm, das ruínas do meu passado scientífico a afeição admirativa, o vivo interêsse de simpatia que me ligam sempre àqueles que se distinguiram dum modo notável na sciência, objecto das minhas predilecções. Dizer, pois, que estimo desde lá cordialmente o autor da mémória que recebi, é muito mais que um cumprimento epistolar: é o simples enunciado duma condição inevitável da minha organização.



DESENVOLVIMENTO

DAS

FUNCÇÕES EM FRACÇÃO CONTINUA

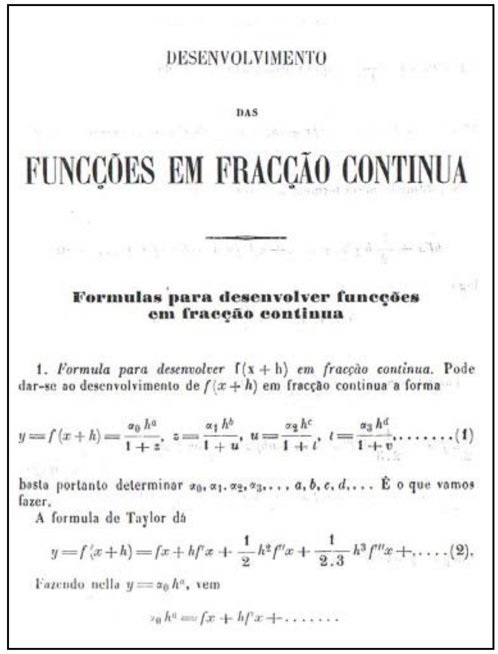
POR

FRANCISCO GOMES TEIXEIRA

Estudante do 3.º anno de Mathematica

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1871

Figura 11.



DESENVOLVIMENTO

DAS

FUNCÇÕES EM FRACÇÃO CONTINUA

Formulas para desenvolver funcções em fracção continua

1. *Formula para desenvolver* f(x + h) *em fracção continua.* Pode dar-se ao desenvolvimento de $f(x+h)$ em fracção continua a forma

$$y = f(x+h) = \frac{\alpha_0 h^a}{1+z},\ z = \frac{\alpha_1 h^b}{1+u},\ u = \frac{\alpha_2 h^c}{1+t},\ t = \frac{\alpha_3 h^d}{1+v}, \ldots\ldots (1)$$

basta portanto determinar $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ a, b, c, d, \ldots$ É o que vamos fazer.

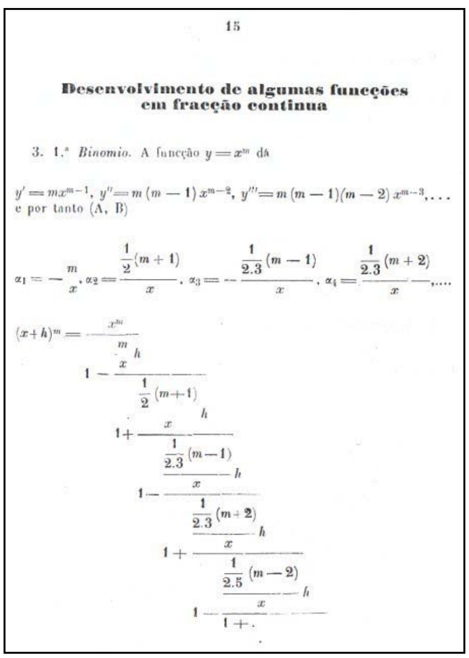
A formula de Taylor dá

$$y = f(x+h) = fx + hf'x + \frac{1}{2}h^2 f''x + \frac{1}{2.3}h^3 f'''x + \ldots (2).$$

Fazendo nella $y = \alpha_0 h^a$, vem

$$\alpha_0 h^a = fx + hf'x + \ldots\ldots$$

Figura 12.



15

Desenvolvimento de algumas funcções em fracção continua

3. 1.ª *Binomio.* A funcção $y = x^m$ dá

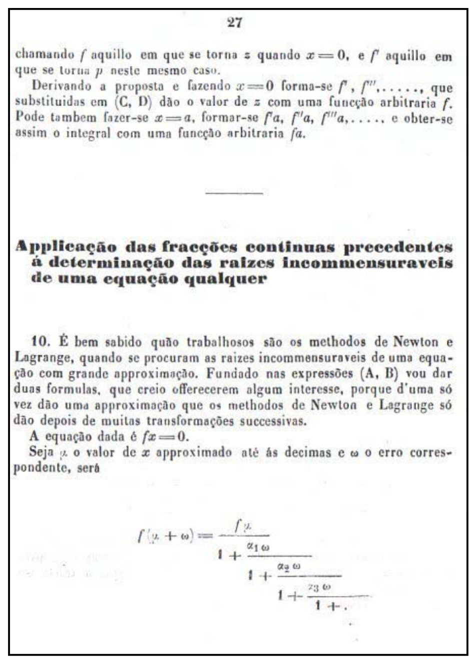
$$y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2},\ y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \ldots$$

e por tanto (A, B)

$$\alpha_1 = -\frac{m}{x},\ \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}(m+1)}{x},\ \alpha_3 = -\frac{\frac{1}{2.3}(m-1)}{x},\ \alpha_4 = \frac{\frac{1}{2.3}(m+2)}{x}, \ldots$$

$$(x+h)^m = \cfrac{x^m}{1 - \cfrac{\frac{m}{x}h}{1 + \cfrac{\frac{\frac{1}{2}(m+1)}{x}h}{1 - \cfrac{\frac{\frac{1}{2.3}(m-1)}{x}h}{1 + \cfrac{\frac{\frac{1}{2.3}(m+2)}{x}h}{1 - \cfrac{\frac{\frac{1}{2.5}(m-2)}{x}h}{1+.}}}}}}$$

Figura 13.



27

chamando f aquillo em que se torna z quando $x = 0$, e f' aquillo em que se torna p neste mesmo caso.

Derivando a proposta e fazendo $x = 0$ forma-se f', f'', ..., que substituidas em (C, D) dão o valor de z com uma funcção arbitraria f. Pode tambem fazer-se $x = a$, formar-se $f'a$, $f''a$, $f'''a$, ..., e obter-se assim o integral com uma funcção arbitraria fa.

Applicação das fracções continuas precedentes á determinação das raizes incommensuraveis de uma equação qualquer

10. É bem sabido quão trabalhosos são os methodos de Newton e Lagrange, quando se procuram as raizes incommensuraveis de uma equação com grande approximação. Fundado nas expressões (A, B) vou dar duas formulas, que creio offerecerem algum interesse, porque d'uma só vez dão uma approximação que os methodos de Newton e Lagrange só dão depois de muitas transformações successivas.

A equação dada é $fx = 0$.

Seja μ o valor de x approximado até ás decimas e ω o erro correspondente, será

$$f(\mu+\omega) = \cfrac{f\mu}{1 + \cfrac{\alpha_1 \omega}{1 + \cfrac{\alpha_2 \omega}{1 + \cfrac{\alpha_3 \omega}{1+.}}}}$$

Figura 14.

Francisco Gomes Teixeira continuou a ter interesse em problemas relacionados com o desenvolvimento de funções em série (série de Lagrange) e, desde muito cedo foi notório a determinação da sua área de especialização bem como, uma grande abertura para o mundo e interesse na divulgação de trabalhos na área da Matemática em Portugal, o que foi conseguido através de um jornal científico que viria a fundar[16].

Conclusão

Apesar de todo este historial, no ensino superior em Portugal não temos presentemente nada que se lhe assemelhe na área da Matemática (excepto, muito parcialmente, o programa da Fundação Calouste Gulbenkian "Novos Talentos em Matemática").

Não deixa de ser curioso que muitos matemáticos que se debruçaram sobre a problemática do ensino da matemática em Portugal tenham chamado a atenção para estas questões. Por exemplo Hugo Ribeiro criticou vigorosamente a situação do ensino da Matemática em Portugal nos anos 50 e defendeu um certo número de princípios para a formação de matemáticos e professores de Matemática:

> O objectivo deve ser contribuir para melhorar a qualidade do futuro ensino através duma melhor formação matemática dos professores. O método deve ser o trabalho de seminário (…) de nível adaptado a cada caso individual ou de pequenos grupos - com o fim de desenvolver ou criar hábitos de estudo correctos e fazer viver a experiência de obtenção de resultados próprios em problemas das fronteiras do conhecimento.

Sebastião e Silva não podia ser mais claro, no guia de apoio a um dos manuais que escreveu para o ensino secundário[17]:

> Os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação.

Tudo isto não nos deveria fazer reflectir e levar a repensar a situação actual a nível do ensino superior?

Notas

[1] Lemos, F., *Relação Geral do Estado da Universidade (1777)*, Coimbra, 1980, p. 107.

[2] *Estatutos* (1772), liv. III, Parte II, tít. VIII, Cap. I, § 4.

[3] Idem, liv. III, Parte II, tít. V, Cap. I, § 3.

[4] Idem, ibidem.

[5] Idem, liv. III, Parte II, tít. V, Cap. II, § 12.

[6] *Estatutos* (1772), liv. III, Parte II, tít. V, Cap. IV, § 4.

[7] Cunha, J. A., "Factos contra calumnias", in Ferraz, M. L., Rodrigues, J. F., & Saraiva, L. (Orgs.), *Anastácio da Cunha - 1744/1787 - o matemático e o poeta*, INCM, Lisboa, 1990, p. 387.

[8] *Estatutos* (1772), liv. III, Parte II, tít. VI, Cap. I, § 3.

[9] Idem, liv. III, Parte II, tít. VI, Cap. II, § 2.

[10] Agradecemos ao Dr Armando Malheiro da Silva ter facultado acesso a este espólio.

[11] Agradecemos ao Professor Jubilado Manuel Leal da Costa Lobo, neto de Francisco Miranda de Costa Lobo, o facto de nos ter facultado o acesso a estes documentos.

[12] R. Fueter (1880 – 1950) menciona no seu artigo sobre Coimbra este tipo de trabalhos e, podemos mesmo estabelecer um paralelo com as ainda praticadas *monografias*, nos nossos cursos universitários, 100 anos depois.

[13] Domitila de Carvalho matriculou-se na Faculdade de Matemática no ano lectivo 1891/1892 e, pensa-se que realizou a referida dissertação em 1894.

[14] Conclusão do curso:
Exame de licenciado a 8 de Janeiro de 1875
Acto de conclusões magnas a 30 de Junho de 1875
Dissertação inaugural apresentada a esse acto: Integração das equações às derivadas parciais de segunda ordem
18 de Julho de 1875 – doutoramento; FGT não foi classificado como licenciado, só como doutorado.

[15] Gomes Teixeira pretendia completar o seu primeiro trabalho no ano seguinte que foi apresentado por Daniel da Silva a Academia das Sciências de Lisboa em 1 de Maio de 1872:

Aplicação das fracções contínuas à determinaçâo das raízes das equações (publ. no jornal da 1ª classe, 1ª série t.IV (1872-1873) pp. 89-94)

[16] Referimo-nos ao jornal de *Sciencias matemáticas e astronómicas*.

[17] Silva, J. S. (1965-66). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (2º vol., pp. 107-111). Lisboa: GEP.

13

O conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de matemática

Lina Brunheira
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
lbrunheira@netcabo.pt

Nesta comunicação analisarei o conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de aulas de trabalho investigativo. Este estudo tem por base a realização de um projecto de formação desenvolvido por um núcleo de estágio da licenciatura em Ensino da Matemática. Nesse projecto, três jovens professores trabalharam o tema das investigações na aula de Matemática, procurando identificar e resolver os aspectos problemáticos da integração desta metodologia nas suas práticas. O projecto teve por base a realização de ciclos de trabalho envolvendo a preparação conjunta de aulas de investigação, a sua condução, a reflexão individual do professor e redacção do respectivo relatório e, finalmente, a discussão com a orientadora de estágio. Partindo da análise da evolução do conhecimento e das atitudes da professora, bem como dos aspectos que fomentaram tal evolução, proponho algumas implicações sobre as potencialidades que um projecto desta natureza poderá ter e o papel que deve assumir o orientador de estágio.

Introdução

Nos últimos anos, a investigação empírica tem mostrado resultados pouco satisfatórios relativamente ao conhecimento com que os futuros professores concluem a sua formação inicial e abordam a aula de Matemática. Esse conhecimento exibe várias fragilidades, nomeadamente, no que diz respeito à sua vertente didáctica (Brown e Borko, 1992), ao conhecimento dos alunos, de si próprio e do contexto (Kagan, 1992), os quais não se esperariam muito desenvolvidos se assumirmos que a prática tem um papel importante a desempenhar na aprendizagem destes aspectos. Contudo, para além destes resultados, a investigação mostra também que os professores principiantes não possuem um conhecimento da sua disciplina suficientemente aprofundado, mesmo quando o modelo de formação integra uma forte componente de estudos nessa área (Brown e Borko, 1992). Mais do que isso, estes professores parecem bastante influenciados pelos conhecimentos e imagens (sobre a Matemática e o seu ensino) que adquiriram muito antes de iniciarem a sua formação para a profissão, os quais persistem, por vezes, apesar dessa formação (Ball e McDiarmid, 1990; Kagan, 1992; Llinares, 1993).

Assim, associada à importância que reconhecemos à formação inicial, estão os vários desafios que se levantam, nomeadamente, às instituições de formação, aos seus formadores e às escolas. Por exemplo, Comiti e Ball (1996) analisaram vários sistemas de formação inicial de professores do ensino básico e de professores de Matemática do ensino secundário em diferentes países, e sugerem que estes programas devem procurar, entre outros aspectos, ajudar os futuros professores a promover um ensino baseado em experiências matemáticas significativas. Para isso, é necessário que a sua visão da Matemática e de como se ensina Matemática seja questionada, já que estas se baseiam, na maioria dos casos, em experiências de aprendizagem num ensino tradicional, onde a memorização e a destreza em procedimentos rotineiros são sobrevalorizadas e em que o aluno desempenha um papel passivo. Mas é também necessário ajudar o futuro professor a construir situações de aprendizagem consentâneas com as novas orientações.

Deste modo, o estágio pedagógico apresenta-se como uma oportunidade de formação com características específicas que pode resultar numa aprendizagem particularmente significativa. Aliás, esta ideia é também sublinhada pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), no documento *Normas profissionais para o ensino da matemática* (1991):

> As primeiras funções como professor e as estruturas de apoio desempenham um papel significativo no desenvolvimento da forma de encarar a profissão e nos compromissos que vão assumindo em relação à mesma. [...] São confrontados com novos desafios e os conhecimentos e capacidades vão-se construindo dia a dia, no contexto de ensino, de uma forma mais significativa do que através de um programa formal de formação contínua (p. 126).

Contudo, se a estrutura de trabalho é muito importante, não menos determinante é a natureza do trabalho a desenvolver. A investigação, em particular, aparece como uma ideia poderosa na formação, quer ao nível do conhecimento disciplinar, quer ao nível do conhecimento profissional. Neste último caso, a investigação assume contornos diferentes daquela que é realizada pelos investigadores profissionais. Como indicam Crawford e Adler (1996), trata-se sobretudo de "investigação e de processos de pesquisa, conduzidos com o objectivo de mudar a prática profissional e as instituições sociais, através da participação activa e transformadora daqueles que trabalham num contexto particular, num processo de investigação" (p. 1194), ideia que é frequentemente designada pelo termo de *investigação-acção*.

Também Ponte (1998) defende a integração da investigação na formação de professores. De facto, e como constatam as autoras anteriores, nesta formação persiste ainda um modelo tradicional, baseado na transmissão de informação, mesmo quando os conteúdos dessa formação dizem respeito teorias que contradizem o método usado. Como refere Ponte, esta realidade é consequência de um problema de articulação entre o conhecimento teórico, fornecido pela didáctica, com o desenvolvimento profissional do professor, particularmente em momentos de formação inicial ou contínua. Mais especificamente, o problema reside na aparente oposição entre uma formação que privilegie a actividade do professor como motor da sua aprendizagem, e uma formação que valorize o contributo que a didáctica, como domínio científico, pode fornecer. Ponte propõe uma forma de lidar com este problema, baseada na ideia de incluir uma parte prática nos programas de formação inicial e contínua, numa lógica de trabalho investigativo:

> De uma maneira geral, a investigação é um trabalho feito de modo sistematizado e rigoroso, com o objectivo de resolver um dilema ou responder a uma questão pessoalmente significativa. Os investigadores profissionais procuram produzir conhecimentos gerais, organizados e transmissíveis no âmbito de uma dada disciplina científica ou área do saber. No entanto, não é nesta perspectiva que os professores têm interesse em se envolver em trabalho investigativo. O seu principal objectivo é resolver problemas de natureza local, modificar aspectos concretos da sua situação de trabalho, da sua prática, ou dos seus resultados (p. 69).

Para o autor, há diversas razões que justificam a integração da investigação na formação de professores: (a) favorece a construção de um conhecimento relevante do ponto de vista da prática profissional; (b) promove a compreensão do professor relativamente à sua própria aprendizagem através da investigação, o que possibilita a compreensão do mesmo processo nos alunos; (c) desenvolve competências e valores decisivos como o espírito crítico e autonomia dos professores face ao discurso das ciências humanas; e (d) constitui-se como um paradigma transponível para o quadro de uma prática reflectida.

Do ponto de vista pessoal, a experiência que tenho tido em projectos de investigação leva-me a crer que estes constituem uma metodologia com muitas potencialidades para a aprendizagem e desenvolvimento profissional do professor. Para além disso, como formadora de futuros professores, sinto também a responsabilidade e os desafios que esta função me coloca, pelo que procuro estratégias que sejam facilitadoras da aprendizagem dos jovens candidatos a professores. Por isso questiono-me em que medida será a investigação uma actividade apropriada no âmbito do formação inicial e, em particular, na fase do estágio pedagógico e, se assim for, qual o papel que cabe ao orientador de estágio.

Voltando ainda à necessidade ajudar o futuro professor a construir situações de aprendizagem consentâneas com as novas orientações, retomo a ideia de investigação, agora a outro nível. Na última década temos assistido a uma crescente valorização das actividades de investigação matemática. O trabalho desenvolvido pelo projecto MPT (*Matemática para Todos*) permitiu, entre muitos outros aspectos, expor e aprofundar o interesse deste tipo de actividades na aprendizagem da Matemática:

> De facto, as actividades de investigação lidam com o essencial da natureza da actividade matemática (formulação e resolução de problemas); permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática (experimentar, explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar); estimulam o pensamento globalizante (relacionando tópicos da matemática); permitem de forma significativa trabalho diferenciado de alunos com diferentes competências e estilos cognitivos em matemática; facilitam o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos. (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999, p. 75)

Mas esta crescente valorização é também visível nos programas de Matemática de alguns países ou em documentos de referência. Apesar de, frequentemente, o termo investigação não ser explícito, as recomendações apontam para a realização de actividades cuja natureza coincide com a actividade de investigação. O documento da Associação de Professores de Matemática (APM), *Renovação do currículo da matemática escolar* (1988) considera "essencial o trabalho à volta de situações problemáticas variadas e envolvendo processos e actividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar" (p. 41), aspectos que são centrais na actividade de investigação matemática. No que diz respeito aos programas de Matemática dos 2º e 3º ciclos do ensino básico embora também não se fale em investigações, encontram-se muitas referências aos processos presentes neste tipo de actividade, principalmente entre as orientações metodológicas. Por exemplo, no programa do 3º ciclo refere-se que

> Relativamente ao raciocínio, continua a ser importante a exploração de situações que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio indutivo e são propostas outras em que o raciocínio dedutivo assume uma importância maior: o aluno vai verificar conjecturas, justificar propriedades, fazer pequenas cadeias de raciocínio, defender um processo de resolução, eventualmente fazer uma demonstração (Ministério da Educação, 1991, p. 195).

Mais recentemente, e ainda no que diz respeito ao ensino básico, as orientações sobre o tipo de trabalho a desenvolver na sala de aula têm vindo a reforçar a importância das investigações. No documento de apoio aos professores *Matemática na educação básica* (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) é indicada como uma competência matemática que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica,

> A predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica (p. 41).

No documento de trabalho *Matemática: Competências essenciais*, da responsabilidade do Departamento de Educação Básica, do Ministério da Educação (1999), sugere-se que a competência matemática dos alunos desenvolve-se através de uma experiência matemática rica e diversificada, da qual deve fazer parte a realização de actividades de investigação.

Finalmente, no que diz respeito ao programa de Matemática em vigor para o ensino secundário, podemos afirmar que, de todos os programas portugueses, este é o que faz mais alusão às actividades de investigação. Por um lado, continuamos a encontrar referências que valorizam o seu desenvolvimento, por exemplo, entre as finalidades da disciplina neste ciclo de ensino: "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (Ministério da Educação, 1997, p. 3). Mas, por outro lado, neste programa e, mais precisamente, nas indicações metodológicas podemos encontrar pela primeira vez referências explícitas a estas actividades: "no estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações" (p. 20).

É assim que, associando duas formas de investigação – a investigação para aprender matemática e a investigação para aprender a ensinar –, surge o problema do presente estudo, que tem por base a realização de um projecto de formação de carácter investigativo desenvolvido por um núcleo de estágio da licenciatura em Ensino da Matemática. Este problema visa analisar:

- O conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática;
- As potencialidades de um projecto de formação de cunho investigativo, bem como o papel que cabe ao orientador de estágio (papel que assumi no ano em que trabalhei com estes estagiários).

Metodologia do estudo

O presente estudo realiza-se no quadro de uma abordagem qualitativa, sendo o estudo de caso uma opção de especial relevo. Na base do estudo está a realização de um projecto de formação desenvolvido por um núcleo de estágio da licenciatura em Ensino da Matemática e localizado numa escola secundária do centro de Lisboa. Nesse projecto participaram duas professoras e um professor estagiários, sendo que este estudo se debruçará apenas sobre o caso de uma das professoras: Ana.

No início do ano lectivo, negociei o plano de trabalho com os professores estagiários, no qual se decidiu a realização de ciclos de trabalho que envolvessem quatro fases: a preparação de aulas de investigação, a realizar em reuniões conjuntas (os três estagiários e eu); a realização das respectivas aulas, a observar sempre que possível; a reflexão individual do professor e redacção do respectivo relatório; finalmente, discussão conjunta entre o professor e a orientadora com base no referido relatório.

Inicialmente, pensou-se repetir este ciclo quatro ou cinco vezes, por forma a não sobrecarregar os estagiários com muitos relatórios, muito embora eles pudessem desenvolver mais aulas de trabalho investigativo. Paralelamente, os estagiários deveriam ler alguns textos acerca do tema das investigações matemáticas, a sugerir por mim, de modo a aprofundarem os seus conhecimentos sobre o que são estas tarefas, qual o seu papel no currículo e na aprendizagem dos alunos e como podem ser realizadas na aula. Estas leituras deveriam dar origem a um texto onde os estagiários sintetizassem as ideias analisadas. Conforme as necessidades, a referida bibliografia poderia ser também analisada em conjunto. No fim do ano, cada estagiário deveria escrever a sua reflexão relativamente ao trabalho realizado.

Foi este o plano delineado de início, aceite pelos estagiários e cumprido praticamente na integra. Na verdade, realizaram-se apenas três ciclos de preparação, realização e reflexão sobre actividades de investigação mas, em contrapartida, efectuaram-se ainda reuniões de trabalho em que se analisaram planificações de unidades e a utilização de determinadas tarefas de natureza investigativa.

A recolha de dados recorre a várias técnicas próprias da investigação qualitativa, nomeadamente o diário de bordo (escrito pela investigadora), o relatório (escrito pela professora estagiária), a entrevista e a observação. A utilização destes diferentes instrumentos constitui uma forma de obtenção de dados de diferentes tipos, a qual proporciona a possibilidade de cruzamento de informação.

Aspectos das atitudes e do conhecimento didáctico de Ana relativamente à realização de investigações na aula de Matemática

Importância das investigações e seu lugar no currículo

No início do ano, Ana mostrou ter algumas ideias sobre a natureza e lugar das investigações na aprendizagem dos alunos. Embora o seu discurso sobre este assunto denote muita incerteza, é clara a associação que estabelece entre este tipo de actividades e alguns conceitos. Para ela, investigar envolve primeiro que tudo a descoberta pelo aluno, em oposição à exposição pelo professor. Considera que esta "é outra forma de aprender" e que tem algumas vantagens, pois a seu ver enquanto "eles vão descobrindo, vão assimilando quase sem darem por isso", o que pode ser melhor para alunos menos motivados.

Para além de constituírem outra forma de aprender, pensa que as investigações possibilitam o desenvolvimento de algumas capacidades e atitudes, o que não seria possível através de uma abordagem tradicional. A autonomia é a que refere com maior ênfase, sendo por isso outro conceito claramente associado a este tipo de trabalho; através dele, o aluno liberta-se da dependência que tem relativamente ao professor para aprender, pois a actividade está centrada em si. Finalmente, pensa que o desenvolvimento de uma atitude de interesse pelo conhecimento, de vontade de aprender, também pode ser promovida através das investigações:

> Porque acho que com estas actividades... o objectivo é mais criar um aluno, não digo autodidacta, mas assim que tenha interesse em investigar certas coisas [...] Prepará-los para o futuro... para receber mais informação diferente. Porque acho que quando se faz uma actividade de investigação, é a tal coisa deixa-se em aberto muitas portinhas lá nas cabeças deles, ou pelo menos devia ser assim! (1ª entrevista)

Portanto, é possível afirmar que a professora valoriza a realização de actividades de investigação pelas potencialidades que lhes reconhece, mesmo numa fase inicial em que ainda não as experimentou na sala de aula. Para além disso, considera que os programas oficiais da disciplina de Matemática contemplam a realização deste tipo de trabalho na sala de aula, muito embora com uma ênfase maior no ensino secundário do que no 3º ciclo do ensino básico. Na sua perspectiva, e relativamente a este nível, a orientação é mais "disfarçada", enquanto que no ensino secundário e particularmente no que se refere ao 10º ano, o programa é mais explícito:

> Pelo menos nestes programas que eu estive a ver acho que são muito contempladas, sobretudo no 10º ano. Se calhar vêm contempladas e ninguém sabe muito bem o que é que há-de fazer... (1ª entrevista)

No fim do ano, ao realizar uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido em torno das investigações matemáticas, Ana reforça algumas das suas ideias e alarga a sua visão relativamente às potencialidades destas tarefas:

> Com as actividades de investigação os alunos, para além de contactarem um pouco mais com o trabalho que é realizado pelos matemáticos, ficam com uma visão mais ampla e completa desta ciência que, ao contrário do que muitos pensam não se resume a um conjunto de fórmulas, teoremas, definições nem exercícios para memorizar, mas sim a uma forma de pensar. O carácter aberto das actividades de investigação, permite que o aluno tenha acesso ao que é o pensamento matemático e que uma vez envolvido na tarefa avance até onde quiser. [...] Apesar dos constrangimentos de tempo para cumprir o programa do 10ºano ao nível dos conteúdos, achámos que com as investigações estaríamos a cumprir outros objectivos que também são muito importantes, e vêm referidos no programa. Por outro lado, o facto de proporcionarmos aos alunos momentos de criação matemática e descoberta encorajou-nos, uma vez que consideramos que as investigações permitem uma aprendizagem significativa para o aluno. É muito diferente o aluno contactar com determinado assunto exposto pelo professor ou investigado e descoberto por si. (relatório final)

Expectativas e confiança da professora

> No início, quando escolhemos esta actividade de investigação, estávamos pouco convictos de que os nossos alunos conseguissem chegar a algumas conclusões. Apesar de a termos escolhido tendo em conta a matéria que estávamos a dar, penso que acreditámos pouco nas capacidades e potencialidades dos nossos alunos. Agora reflectindo sobre isso, sou

> tentada a dizer que os meus alunos reagiram melhor às actividades de investigação do que eu. A insegurança neste tipo de metodologia e incerteza do que poderia acontecer assustou-me. O novo assusta sempre, e apesar de acreditar que com a realização destas actividades os meus alunos iriam ganhar algo, eu sentia-me pouco preparada para conduzir uma aula desta natureza. Portanto, gostava de referir que a planificação desta aula com a professora Lina e os meus colegas foi para mim fundamental, pois fiquei mais confiante e certa de que se houvesse necessidade conseguiria ajudar os meus alunos na investigação sem ser demasiado directiva. (1º relatório)

Nesta reflexão, Ana expõe a sua insegurança relativamente à condução destas aulas. Há a ideia de que o sucesso das mesmas depende em grande parte do seu desempenho, mesmo que a tarefa tenha sido cuidadosamente preparada. O seu maior receio – manter uma atitude investigativa, sem orientar demasiado – está claramente associado às expectativas que tem sobre as capacidades dos seus alunos: dificilmente conseguirão descobrir algo e por isso será necessário uma grande ajuda por parte da professora. Porém, o trabalho conjunto de preparação das aulas parece ter constituído uma base de suporte a partir da qual foi possível encarar a experiência mais positivamente e com um conjunto de ideias a que poderia recorrer.

Apesar das dificuldades que alunos e professora tiveram nesta experiência, Ana faz um balanço positivo. Considera que, mais importante do que as conclusões a que os alunos chegaram, foi a adaptação que iniciaram a este tipo de actividades e que constituiu um bom ponto de partida para futuras investigações. Quanto a si, afirma:

> Fico contente por não ter desistido da realização desta actividade com os meus alunos, pois se considero que eles ganharam alguma coisa com ela, eu ganhei muito mais, não só com a experiência destas duas aulas mas também com a planificação das mesmas. (1º relatório)

Esta experiência e as consequências que ela teve na confiança e expectativas da professora, ilustram de certa forma a importância que este projecto teve para a professora. Aos poucos, a condução de aulas de investigação foi-se tornando menos complicada e, por isso, encarada com maior segurança. Quanto às expectativas sobre a qualidade da investigação desenvolvida pelos seus alunos, houve um episódio que surpreendeu a professora pela positiva e parece ter tido várias consequências na forma como viveu esta experiência. Já durante a aula, quando andava a circular por entre os grupos, parou junto de um deles e teve uma surpresa:

> Nesta aula, aconteceu uma situação bastante agradável para o professor, com a qual penso que todos os professores anseiam quando realizam com os alunos uma investigação: um aluno formulou uma conjectura que transcendia o que era pedido na investigação, isto se tiver sentido pensarmos em barreiras quando realizamos uma actividade de investigação. Dizia ele: *Será que existe alguma relação entre o número de números consecutivos que eu somo e o resultado obtido?* (3º relatório)

A preparação das aulas de investigação

A escolha ou adaptação da tarefa de investigação é o elemento chave na preparação das aulas e a decisão relativamente ao seu grau de abertura foi um aspecto que mereceu bastante ponderação. O facto de os alunos não terem hábito de resolver este tipo de tarefas é algo que influencia directamente a estrutura a apresentar. Assim como os seus colegas, Ana considerou que "será prudente não começar com actividades de investigação pouco guiadas" (2º relatório), de maneira a que os alunos não se sintam perdidos. Mais tarde, o episódio em que o seu aluno pensou em explorar a tarefa numa direcção não prevista, suscitou uma reflexão a propósito da relação entre a estrutura da tarefa e a investigação realizada pelos alunos:

> O facto de a actividade ser estruturada pode limitar a investigação, mas não é necessariamente um factor limitativo da investigação dos alunos. Limita se os alunos encararem a investigação como a resolução de um exercício, em que têm só que responder às perguntas. (discussão das aulas, 3ª investigação)

Assim, no fim do ano, Ana enuncia o que aprendeu com esta experiência:

> Outra coisa de que me apercebi no decorrer das investigações foi da importância destas serem mais ou menos estruturadas. Quanto mais abertas são as investigações mais aliciantes são para os alunos, no entanto, é necessário estruturar a investigação colocando algumas questões. Estas não devem ser uma lista imensa mas devem dar algumas indicações de coisas que os alunos podem investigar, caso contrário o aluno não sabe por onde começar. O facto de eu dizer que não devem ser uma lista enorme está relacionado com a ideia que os alunos devem reter de que aqueles são apenas alguns exemplos de coisas que podem investigar, mas caso tenham interesse e curiosidade podem tentar testar outras conjecturas que pensam ser verdadeiras ou que se verificam para alguns exemplos. (relatório final)

Para além de alguns princípios que devem orientar a construção ou adaptação das tarefas de investigação, a professora refere ainda alguns aspectos em que estas podem diferir, caso digam respeito a níveis de ensino diferentes ou temas matemáticos distintos. No caso de se tratarem de tarefas para o ensino secundário, considera que deve-se procurar estreitar a relação com os conteúdos matemáticos a leccionar para que simultaneamente se cumpram vários objectivos programáticos, optimizando assim a gestão do programa. Esta preocupação não é tão sentida no que diz respeito ao ensino básico, visto considerar que a pressão para o cumprimento do programa não é tão grande. Relativamente aos temas matemáticos em que as investigações se inserem, considera que a Geometria é um terreno particularmente propício à investigação, sendo mais fácil encontrar uma tarefa mais aberta. Esta ideia parece ter sido reforçada pela experiência com a investigação sobre funções polinomiais, onde notou que a exploração converge mais facilmente para os mesmos resultados:

> As investigações que realizámos no 10º ano, são um pouco diferentes na medida em que tentámos juntar o útil ao agradável, ou seja, por um lado abordar certos conteúdos, por outro, deixar que sejam os alunos a chegar às conclusões, investigando. Assim o aluno compreende melhor os conteúdos e constrói o seu próprio conhecimento estabelecendo conexões com o que já sabia. No que diz respeito aos conteúdos que estas abordavam, considero que as investigações no campo da Geometria são mais abertas. (relatório final)

Depois de escolhida a tarefa, o aspecto central da preparação das aulas de investigação é, para Ana, a sua exploração. Esta deve ter em conta a perspectiva dos alunos, já que o seu objectivo principal é antecipar as resoluções que eles poderão realizar e as dúvidas que poderão ter, por forma a permitir que a professora prepare o seu modo de acção:

> Como tal, depois de *resolvermos a actividade para nós*, tentámos prever qual seria a forma como os alunos a abordariam. É importante e necessário que o professor perceba como os alunos organizam o seu pensamento, caso contrário não conseguirá auxiliar os alunos no decorrer da investigação. (3º relatório)

> Penso que a planificação destas aulas foi bastante importante, pois existem um conjunto de *pistas* e *dicas* que se podem dar aos alunos como forma de resposta às suas perguntas. O importante não será tanto prever tudo o que poderá acontecer, mas sim estar alertado e prevenido para certas situações. (1º relatório)

Naturalmente, esta atenção está relacionada com aquelas que são as fontes principais de insegurança da professora e que referi anteriormente. Ao longo do ano, a preparação das aulas de investigação continuou sujeita a esta tónica, contudo, outros aspectos passaram a ser atendidos pela professora. Particularmente, as fases de introdução da tarefa e discussão de resultados, inicialmente negligenciadas, passaram a ser contempladas durante a preparação das aulas:

> Acho que no início não estava muito consciencializada para as várias fases de uma investigação. Apesar do que uma pessoa lê, não consegue, sem nunca ter experimentado, perceber o que é importante. E, por exemplo, acho que a introdução é uma parte muito importante. (última entrevista)

Condução das aulas de investigação

As três fases da aula

A experiência que viveu e a sua reflexão levam-na a atribuir um significado mais pessoal à fase de introdução da tarefa. Ana compreendeu o que é e para que serve, mas foi mais longe avançando com o modo como ela se pode processar:

> Em relação à introdução, eu acho que o professor deve tentar fazer alguma ligação entre coisas que já aconteceram na aula ou coisas que já deu e o que está a fazer. Tentar sempre, nem que seja a mínima coisa mas que para eles faça algum sentido, tentar fazer alguma ligação para que a investigação apareça de uma forma mais natural. Também tentar arranjar algum interesse em fazer a actividade de investigação. (entrevista final)

A fase em que os alunos realizam a investigação e em que o professor interage com os alunos de forma a apoiá-los foi, desde o início, o momento que exigiu maior preparação por parte dos professores estagiários, incluindo Ana. A esta fase está associada uma postura do professor diferente daquela que habitualmente mantém, menos afirmativa, mais interrogativa e menos interveniente na dinâmica de trabalho, já que a actividade está centrada no aluno. Estas ideias sobre o papel a desempenhar parecem ter sido adquiridas ainda durante a formação nas disciplinas da Didáctica da Matemática, visto que elas estão presentes desde o início do ano:

> Acho que faz mais de orientador, acho que o professor aí orienta. Acho que o professor aí tem de tentar incentivar os alunos [...] é indo dando umas dicas, mas não é dizer tudo, é tentar que eles próprios descubram as coisas. (1ª entrevista)

Já no seu papel de professora, e durante a condução de aulas com investigações, Ana procura que o seu papel seja consonante com as ideias expressas anteriormente. Para isso, apoia e orienta os seus alunos fornecendo sugestões, formulando perguntas, propondo prolongamentos da actividade, evidenciando ou corrigindo erros dos seus alunos. Outro aspecto do papel que desempenha e que considera importante destacar, é a influência que pode exercer no modo como os alunos encaram a actividade. Ana pensa que o entusiasmo que o professor evidencia é um factor que contribui positivamente para a motivação dos alunos. Esta ideia apareceu pela primeira vez a propósito da tarefa *Números em escada* (anexo 2), de que parece ter gostado muito e cujos resultados em aula a fizeram interrogar-se sobre a influência positiva que pode ter exercido junto de alguns alunos.

> Eu gostei, gostei mesmo muito da actividade, para mim. Não sei se lhes transmiti essa ideia, algum entusiasmo em relação às coisas, o achar engraçado as relações, não sei... Acho que estava mais convicta que aquilo tinha piada e acho que eles conseguiram sentir isso também. (discussão das aulas, 3ª investigação)

> O papel do professor nestas aulas é um pouco diferente, não querendo isto dizer que é reduzida a sua importância, pelo contrário, nas aulas em que se realizam actividades de investigação, é o professor que em certa medida contagia a turma e que faz a turma estar mais ou menos motivada. O professor deverá dar sugestões, colocar questões pertinentes, orientar toda a turma... (relatório final)

Finalmente, apesar das intenções firmes de não orientar demasiado o trabalho dos alunos e do esforço de preparação que fez nesse sentido, as situações que lhes surgiram em aula tentaram-na a fazer o contrário. Contudo, a professora parece ter resistido sempre e, nalguns casos, optou por alterar o seu plano de aula adiando o termo da actividade. Porém, note-se que posteriormente Ana afirmou que tal atitude seria mais ponderada caso se tratasse da turma de 10º ano, visto ser mais difícil de gerir o tempo para cumprir o programa:

> As dificuldades que os alunos sentiram em avançar na investigação eram tantas, que várias vezes senti-me encorajada em dar-lhes algumas respostas mais dirigidas. No entanto, os grupos foram progredindo e optei por lhes dar mais uma aula para concluir a investigação. (3º relatório)

À semelhança da fase de introdução da tarefa, a apresentação e discussão de resultados com toda a turma foi uma fase quase ignorada inicialmente. Claro que havia a ideia de que, de alguma forma, era necessário corrigir o trabalho dos alunos. Contudo, além desse objectivo, não parecia haver motivos para esta fase final. A primeira investigação realizada com o 7º ano sugeriu que a exposição de diferentes resoluções, por parte dos alunos, poderia ser um dos aspectos mais significativos deste momento final de trabalho:

> Depois de conhecer as resoluções dos grupos, escolhi dois alunos representativos das resoluções existentes, um do grupo que chegou à regra contando os fósforos por linha e colunas (2 x n x (n+1)) e outro do grupo que mais progrediu na resolução por recorrência, utilizando os múltiplos de quatro. (1º relatório)

No fim do ano, e atribuindo já um significado muito pessoal a esta fase, Ana afirma que a discussão serve para os alunos apresentarem o que fizeram, como o fizeram e o que é que se pode saber com o que se descobriu. Houve situações que mostraram claramente que este último aspecto não deve ser desprezado:

> Quando eu fiz a pergunta *Então digam-me lá um número em escada maior que 1000?*, eles próprios acharam engraçado conseguirem dizer. Eu notei a satisfação da Sandra quando ela disse *Ah! 1001 dá! Porque é um ímpar!* E eu acho que isto é que é mostrar a utilidade e o interesse de fazer uma coisa deste género, e eles aperceberam-se disso." (discussão das aulas, 3ª investigação)

Trata-se, portanto, de valorizar a reflexão sobre a actividade realizada. Como a professora afirma, "às vezes eles começam a trabalhar mas não têm... não se consciencializam muito bem dos vários passos que foram dando ou como é que foram trabalhando" (entrevista final) e, nesse sentido, a fase de discussão pode servir para rever o que foi feito, analisando globalmente os resultados e os processos

Ambiente, cultura e aprendizagem

Durante as aulas de investigação, Ana procura apoiar os seus alunos mas mostra estar também atenta a aspectos transversais da aula de Matemática, como sejam o ambiente de aprendizagem e a cultura de sala de aula. Por exemplo, a professora mostrou-se bastante sensível à forma como as concepções dos alunos afectam o trabalho de grupo. Uma das influências importantes deriva da concepção que cada um tem sobre as suas capacidades e as dos seus colegas. A existência de um líder no seio do grupo é algo muito frequente e a sua escolha passa, quase invariavelmente, pelo reconhecimento do aluno *mais capaz* que, habitualmente, corresponde aquele que é mais conotado como bom aluno. A dinâmica do grupo fica assim marcada pela existência deste elemento — a orientação do trabalho, a assunção de certas responsabilidades e a validação das ideias, passam muitas vezes por ele. Todos estes aspectos foram detectados e comentados por Ana:

> Depois há uma tendência para... eles têm um líder no grupo. Há ali uma pessoa, no grupo da Carla é a Carla, no grupo do António é o António e no da Ana Teresa é a Ana Teresa... porque são os melhores naquele grupo e então os outros têm necessidade que eles comandem. Não se aceita as ideias de um como se aceita do outro, as dela têm muito mais importância porque ela sabe muito mais! Ela é muito mais inteligente e então acreditam muito mais no que ela diz, mesmo que... Por exemplo, a Eva que é uma pessoa que até se estava a esforçar para fazer, que estava a acompanhar, acreditam menos nela... Há um bocado... Apesar de eu achar que a Eva está muito integrada no grupo dela, que elas até partilham muita coisa, mas, por exemplo, se alguém tiver que levar para casa para passar, se calhar vai levar a Carla e não leva outro porque depois pode... Aliás, foi ela que passou o trabalho e até o melhorou. (discussão das aulas, 2ª investigação)

Para Ana, a confiança que os alunos sentem no seu próprio trabalho influi nas relações e no trabalho dentro do grupo, mas não só. Assim como o *melhor* aluno pode liderar o trabalho, também o professor que personifica a autoridade científica, exerce uma influência importante no trabalho dos alunos. No caso das turmas desta professora, essa influência traduz-se na sua solicitação pelos alunos para explicar o que deveriam fazer ou para validar as suas ideias:

> Uma das dificuldades sentidas pelos alunos, no decorrer das actividades de investigação, é acreditar no trabalho que estão a realizar. Por um lado, o facto de não existir um verdadeiro trabalho em grupo leva a que os alunos não discutam a veracidade das conjecturas que levantam, por outro, a habituação que têm em validar as suas opiniões junto do professor não auxilia a confiança em si mesmos. Nas primeiras investigações, os alunos sentiam necessidade que o professor fosse junto deles esclarecer o que é que era para fazer, antes mesmo de pensarem ou lerem o que propunha a actividade. Com a continuação das actividades, os alunos melhoraram, mas muitos deles ainda não começam sem o professor explicar primeiro o que é que é para fazer. (relatório final)

Ana procura estar atenta aos desempenhos dos seus alunos enquanto estes realizam as investigações mas, para além de observar, Ana tende a problematizar as situações que observa, procurando encontrar padrões de comportamento e razões que os justifiquem. Estas poderão dizer respeito, por exemplo, aos conhecimentos que os alunos possuem ou à sua maturidade ao nível de raciocínio matemático, como o seguinte excerto ilustra:

> No decorrer da aula senti que os alunos tiveram bastantes dificuldades, primeiro em perceber o que era pedido, segundo em como chegar à tal regra de que a professora falava que permitia generalizar a investigação

> para um quadrado de lado qualquer. A palavra generalizar é para os alunos desta idade muito vaga, o que não é de estranhar para alunos que ainda estão tão ligados ao concreto, e portanto olhar para os números a que chegaram e descobrir relações, foi para eles difícil, sobretudo porque os alunos não estavam recordados de conceitos a que podiam recorrer, por exemplo o de múltiplo de um número. (1º relatório)

Ou ainda, essas razões poderão relacionar-se com os hábitos de trabalho dos alunos:

> Mais uma vez, não foram os melhores alunos, ao nível de conhecimentos, os que mais depressa chegaram a conclusões, pelo contrário. Esses alunos, estão demasiado ligados aos conteúdos e não conseguem investigar sem saber com que matéria é que aquilo está relacionado. Esta investigação, exige que os alunos sejam sistemáticos e que *olhem para os resultados com olhos de ver*, e não que efectuem inúmeros cálculos e cheguem a um resultado. (3º relatório)

Ana comenta também atitudes que os alunos manifestam. Algumas prendem-se com a noção que têm de cumprir o que é proposto na tarefa. Os seus alunos de 10º ano propunham várias conjecturas, realizando poucos testes e mantendo-as mesmo quando falhavam nalgum caso. Isto parece decorrer de uma vontade de apresentar vários resultados, mas implica também uma concepção errada do que é a Matemática e de como se constrói este tipo de conhecimento:

> Alertei várias vezes os grupos para o perigo de estarem a generalizar factos verificados apenas com dois ou três exemplos, mas de pouco serviu. Penso que os alunos sentem necessidade de mostrar que descobriram uma espécie regularidade, acredito que mesmo que tivessem verificado que aquilo não se passava para um caso, voltariam a escrever, pois para eles foi uma descoberta, parece que resulta, talvez só não resulte para o outro caso... (2º relatório)

Reflexão sobre as aulas de investigação

O acto de reflectir é algo que parece ser natural em si. No ponto anterior referi exemplos de situações em que a professora descreve as observações que fez dos alunos e procura ir mais além problematizando-as. Mas Ana também parece disponível para rever as suas posições, sempre que algo sugira que o deva fazer:

> Quando, no início, lia nos textos que o professor tem de ter um espírito investigativo para que a investigação corra bem, eu não entendia muito bem... Mas porquê? Quer dizer, a pessoa também faz muitas coisas de que não gosta! Mas por que é que tem de ter um espírito investigativo, se os

> alunos é que vão investigar? Se calhar não compreendia muito bem o que é que aquilo queria dizer, mas acho que agora estou mais consciencializada para isso...” (entrevista final)

Quanto ao grau de profundidade com que Ana reflecte sobre a prática e, em particular, sobre a realização de aulas de investigação, diria que existem evidências que a caracterizam de forma muito positiva. Atendendo a que esta é uma jovem professora, no seu primeiro ano de carreira, há alguns comentários seus que surpreendem pela forma como consegue chegar ao cerne dos problemas. A título de exemplo, apresento uma reflexão sua a propósito das concepções dos alunos sobre a Matemática e da desvalorização que muitos atribuem ao trabalho investigativo, fruto de uma contradição entre o discurso do professor e a sua prática:

> Com o tempo, os alunos aderem muito melhor a este tipo de actividade. Por exemplo, se for só uma por período eu acho que é muito pouco. Fica assim fora do contexto... [...] Para eles também não faz sentido, por que é que a gente há-de levar 10 aulas a fazer exercícios e por que é que não fazemos investigações se também se aprende? Acho que é culpa do professor a ideia que eles têm da Matemática: se a pessoa faz sempre aquilo, então aquilo é que é importante, não é? Se só de vez em quando é que faz as outras... (entrevista final)

O projecto de formação e o papel de orientadora

Analisando os aspectos que contribuíram para a evolução do conhecimento e das atitudes de Ana relativamente à realização de actividades de investigação na sala de aula, é possível identificar quatro: a experiência, a reflexão, a interacção com colegas e orientadoras e a leitura de alguns textos relativos ao tema. Claro que estes quatro elementos não se podem separar, pelo contrário, é a sua conjugação que promove em grande medida a aprendizagem. No caso desta professora, pode-se dizer que há um elemento chave entre estes: a reflexão. De facto, considero que o apoio que a estrutura do núcleo de estágio lhe forneceu e, em particular, a minha orientação foram fundamentais para que implementasse um certo tipo de trabalho. Por exemplo, se enquanto orientadora não tivesse sugerido que os estagiários fizessem uma apresentação da tarefa à turma, provavelmente essa não teria sido nunca realizada, ou pelo menos numa fase inicial. A experiência que daí adveio foi também determinante para a sua aprendizagem. Contudo, foi a reflexão que realizou a partir das discussões que tivemos e da prática da sala de aula que realmente favoreceu a atribuição de significados pessoais. Note-se que, mesmo o contributo que retirou da leitura de alguns textos, passa pela reflexão sobre as ideias neles contidas. Veja-se o caso que a própria refere, onde se questiona sobre o significado uma afirmação:

> Quando, no início, lia nos textos que o professor tem de ter um espírito investigativo para que a investigação corra bem, eu não entendia muito bem... Mas porquê? (entrevista final)

Desta forma, considerando que foram a experiência vivida, a reflexão sobre a mesma, a interacção com colegas e orientadora e ainda a leitura de textos, os aspectos que mais contribuíram para a evolução do conhecimento e das atitudes de Ana, e estando estes intrinsecamente ligados ao projecto de formação desenvolvido, não posso deixar de considerar a sua maior importância. De facto, e apesar de pensar que este projecto poderia ser melhorado (na forma que discutirei mais à frente), considero que os vários testemunhos que apresentei demonstram o valor que um trabalho de cunho investigativo pode ter também na formação de professores.

Quanto ao papel que assumi enquanto orientadora, e no que directamente diz respeito ao projecto de formação, as actividades anteriormente relatadas mostram que ele se desenvolveu em três modos, correspondentes a três grandes categorias: (i) desafiar, (ii) apoiar e (iii) promover a reflexão. O primeiro modo teve a sua maior expressão com a proposta de realização de actividades de investigação na aula de Matemática pois, muito embora estas estejam previstas nos programas da disciplina, a sua integração constitui ainda uma novidade em muitas salas de aula e uma tarefa complexa para qualquer professor. Assim sendo, é natural a insegurança registada por estes professores e exemplificada aqui através do caso de Ana, pelo que se torna absolutamente necessário o segundo modo — apoiar. E são várias as acções que cabem dentro desta categoria, nomeadamente: apoiar a planificação das unidades; ajudar a preparação das aulas, tanto na concepção das tarefas como no planeamento dos vários momentos da aula; resolver tarefas de investigação com os professores, por forma a que também eles se tornem bons resolvedores. O terceiro modo, promover a reflexão, corresponde mais a uma atitude face aos professores estagiários e que percorre todo o trabalho que com eles é desenvolvido. Este modo consubstancia-se em acções como questionar, criticar e discutir. No caso do projecto aqui apresentado, a reflexão foi especialmente promovida através dos relatórios das aulas escritos pelos professores e da sua respectiva discussão com a orientadora.

Um outro aspecto que considero relevante discutir, diz respeito à minha aprendizagem enquanto orientadora de estágio. O trabalho de desenvolvi com este núcleo baseou-se no pressuposto de que é importante que os professores estagiários utilizem o contexto particular em que se desenvolve o estágio, particularmente o seu carácter eminentemente colaborativo, para investirem na resolução de problemas emergentes da sua prática lectiva. Seja a realização de trabalho investigativo, seja a utilização de tecnologia na aula de Matemática, o recurso ao trabalho de grupo, etc., a identificação dos aspectos problemáticos no ensino da Matemática, o planeamento e execução de estratégias de resolução, bem como a reflexão sobre os seus resultados, são aspectos fundamentais da profissão de professor, já que ela própria tem uma natureza problemática. Assim, parece-me que é desde o início da sua carreira que o professor deve assumir esta postura, naturalmente apoiado pelos seus colegas e orientadores.

As características deste trabalho aproximam-se do que muitos autores denominam por investigação-acção, uma ideia que apresentei anteriormente. De facto, e apesar de considerar que o trabalho com os participantes deste estudo não tenha cumprido todos os requisitos de um projecto desta natureza, hoje considero que ele tem muitas potencialidades enquanto projecto de formação, nomeadamente: (i) envolve os professores na problematização da sua prática, (ii) desenvolve capacidades de resolução de problemas, (iii) fomenta a reflexão e (iv) estabelece uma ligação entre o conhecimento teórico e a prática. A experiência que relatei apresenta várias evidências destas potencialidades. Relativamente a (i), todo o projecto tem como plano de fundo um problema que era verdadeiramente genuíno para os professores: Como realizar aulas de investigações matemáticas? Associado a este problema estão várias questões a que o grupo também esteve atento ao longo do tempo, tais como: Quais as potencialidades destas tarefas? Que problemas levantam? Que atitudes manifestam os alunos perante este tipo de metodologia? etc. A forma como os estagiários evoluíram ao longo do tempo, por exemplo, mostrando uma maior confiança na sua capacidade de responder no momento às dificuldades dos alunos, como foi mostrado com o caso de Ana, é outro indício que nos mostra como este tipo de trabalho poderá (ii) desenvolver a capacidade de resolver problemas da prática. Quanto a (iii), houve uma promoção da reflexão ao longo de todo o trabalho, mas nos momentos de produção dos relatórios das aulas e subsequente discussão ela assumiu maior relevo. O caso de Ana foi, mais uma vez, um exemplo claro de como um projecto com estas características pode promover a reflexão. Finalmente, a forma como a professora analisou um texto de carácter teórico, comentando um aspecto que reconhecia como problemático na sua prática, mostra como se (iv) estabelece a ligação entre o conhecimento teórico e a prática.

A experiência que desenvolvi permite-me delinear uma proposta de trabalho para os professores estagiários, na linha de um projecto de investigação-acção, com a respectiva definição do papel do orientador (em princípio, o orientador pedagógico). Essa proposta encontra-se de seguida esquematizada:

Caracterização da situação problema[1]
Escolha de um tópico
Formulação dos objectivos e questões

Elaboração de um plano de acção[3]
(e.g., construção de materiais para usar na aula, preparação de um conjunto de aulas usando trabalho de grupo,...)

Elaboração do plano de investigação[4]
Escolha da metodologia
Selecção de métodos de recolha e análise de dados

Implementação do plano[5]

Implementação do plano

Reflexão sobre o trabalho realizado[6]
Construção do relatório ou outra forma de apresentação

Leitura e análise de textos seleccionados[2]

Papel do orientador:

1. Sugere (eventualmente) alguns tópicos; discute e clarifica o problema/questões; avalia a sua pertinência e exequibilidade
2. Fornece bibliografia e discute alguns textos ou ideias-chave
3. Apoia a elaboração do plano de acção
4. Discute a metodologia mais adequada
5. Acompanha a implementação do plano
6. Discute os dados recolhidos e as conclusões retiradas

Figura 1. Projecto de investigação-acção

Comparando com o trabalho desenvolvido com os professores no âmbito desta investigação, diria que há neste esquema uma maior definição das várias fases que organizam o projecto, assim como um destaque maior da componente relativa ao plano de investigação. Em particular, dá-se mais atenção à formulação explícita do problema a investigar e discutem-se outras questões como as técnicas de recolha de dados a usar pelos professores. A inclusão destes aspectos introduz, na minha perspectiva, uma mais valia no que diz respeito à organização do trabalho e acrescenta uma formação ao nível da investigação educacional que ajudará os professores a compreenderem e criticarem os resultados da investigação educacional, tendo em vista a integração nas suas práticas.

Ainda sobre o esquema proposto, devo notar que a sequência *Implementação do plano-Reflexão sobre o trabalho realizado*, não implica que a última fase seja realizada após a conclusão da primeira. Ou seja, como aconteceu com o trabalho realizado pelos participantes deste estudo, a reflexão deve decorrer a par da implementação do plano, inclusivamente, podendo dar origem à sua reformulação. A reflexão que é realizada no final deverá fazer o balanço global do trabalho realizado, tirando partido de experiências isoladas mas analisando-as no seu conjunto.

Esta proposta é o resultado de uma investigação que, numa perspectiva, incide sobre a minha prática com o objectivo de desenvolver estratégias que a possam melhorar e, nesse sentido, é também ela uma investigação-acção. Também eu parto de um problema que emerge da minha actividade: proporcionar experiências significativas que facilitem a aprendizagem e o desenvolvimento profissional do jovem professor. E se as conclusões sobre as potencialidades de um projecto de investigação-acção que extraí neste estudo se devem exclusivamente à análise do desenvolvimento dessa actividade pelos estagiários, a verdade é que toda a minha experiência e o que aprendi com ela servem para corroborar essas mesmas conclusões.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

Ball, D. L. & McDiarmiad, G. W. (1990). The subject-matter preparation of teachers. In W. Houston (Org.), *Handbook of research on teacher education* (pp 337-349). New York, NY: Macmillan.

Brown, C. A., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grows (Org.) *Handbook of research on teaching and learning mathematics* (pp. 209-239). New York, NY: Macmillan.

Comiti, C., & Ball, D. L. (1996). Preparing teachers to teach mathematics: A comparative perspective. In A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1123-1151). Dordrecht: Kluwer.

Crawford, K., & Adler, J. (1996). Teachers as researchers in mathematics education. In A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.

Kagan, D. M. (1992). Professional growth among preservice and beginning teachers. *Review of Educational Research, 62(2)*, 129-169.

Llinares, S. (1993). Aprender a enseñar matemáticas: Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. In L. Montero & J. Vez (Orgs.*), Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago: Tórculo Edicions.

Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas do 3º ciclo do ensino básico* (volume I). Lisboa: Imprensa Nacional.

Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas do 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1999). *Matemática: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM.

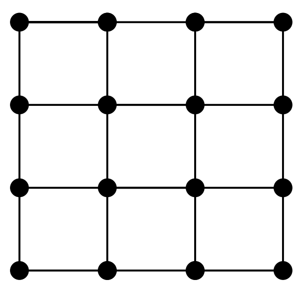
Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro, & H. A. Sá (Orgs.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.

Putnam, R. T., & Borko, H. (1997). Teacher learning: Implications of new views of cognition. In B. J. Bridlde, T. L. Good, & I. F. Goodson (Orgs.) *International handbook of teachers and teaching* (Vol. 2, pp. 1223-1296). Dordrecht: Kluwer.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1998). O currículo de matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.) *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Anexos

Quadrados com fósforos



- Quantos fósforos foram utilizados na construção deste quadrado?
- Investiga quantos fósforos são necessários para construir qualquer quadrado deste tipo.

Números em escada

Chamam-se *números em escada* aos números que podem ser escritos como a soma de números naturais consecutivos.

Por exemplo:

5 é número em escada, pois pode escrever-se como 2+3;
12 também é 3+4+5;
4+5+6 ou 1+2+3+4+5 são duas formas de representar o 15.

- Que números podem ser escritos como soma de dois números consecutivos?
- Quais podem ser expressos como uma soma de três números consecutivos? E utilizando quatro números consecutivos?
- Descobriste números que não sejam em escada?
- Que números têm uma única representação em escada?

Investiga outros aspectos relacionados com estes números.

14

“Olha p´ro que eu digo mas não olhes p´ro que eu faço”

Lina Fonseca
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
linamaria@vizzavi.pt

Na formação inicial de professores de Matemática e Ciências da Natureza para o 2º ciclo do ensino básico tentamos passar a mensagem de que no ensino da Matemática se deve privilegiar a resolução de problemas, como “contexto universal de aprendizagem”, a reflexão sobre diferentes tarefas propostas, o debate de ideias, a comunicação, a aceitação de opiniões fundamentadas, o desenvolvimento de espírito crítico, mensagem esta concordante com as orientações curriculares actuais para o ensino básico. A sua concretização acontece nas disciplinas da Didáctica da Matemática e da Prática Pedagógica. E o que se faz nas disciplinas de Matemática? O que se deve ou pode fazer? Que relações entre estes dois âmbitos da formação inicial: união de facto ou casamento de conveniência? Que imagem constroem ou consolidam os futuros professores sobre a Matemática?

Este texto pretende descrever alguns aspectos que caracterizaram uma experiência realizada na ESE de Viana do Castelo (ESEVC). Contextualiza-se a experiência, explicita-se o problema em estudo e a questão que o orientou. Descrevem-se os procedimentos e apresentam-se alguns resultados.

Introdução

Este título pode ser considerado pouco ortodoxo para uma comunicação num encontro de investigação onde se reflecte sobre a formação inicial de professores. No entanto, o título retrata, no meu entender, o que por vezes acontece na formação inicial. O que aconteceu comigo.

Nas disciplinas de Didáctica da Matemática e Prática Pedagógica, seguindo indicações da investigação em educação matemática e das teorias da aprendizagem (*e.g.*, Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; Lester e Schroeder, 1989; NCTM, 1991, 1995, 2000; Shoenfeld, 1985, 1988) tentava passar a mensagem de que, por exemplo, era necessário dar aos alunos um papel activo na construção do seu saber, dando a *todos* a possibilidade de participar activamente no desenrolar das tarefas/problemas, de expor os seus pontos de vista mesmo que integrando erros, de questionar, de partilhar diferentes modos de resolução, de reflectir sobre o trabalho desenvolvido e de o avaliar, de raciocinar, de comunicar.

A dada altura comecei a aperceber-me que o discurso que utilizava não estava alinhado com a prática que praticava, nas disciplinas de Matemática! Não aplicava o conteúdo da mensagem que tentava passar, a fim de ser utilizado com crianças da escolaridade básica, nas minhas aulas das disciplinas de Matemática. Assim, estava a contribuir para acentuar as concepções, por vezes pouco positivas, que os futuros professores adquirem, a maior parte delas, desde os tenros anos nos bancos da escola, relativamente ao que se espera da função do professor e do aluno na aula de Matemática, concepções essas moldadas pelas suas próprias experiências como alunos (*e.g.*, Pajares 1992; Thompson, 1985, 1992). As concepções que os professores foram criando acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática e que se desenvolveram a partir de experiências bem sucedidas apresentam impedimento sério para as mudanças exigidas por reformas educativas orientadas por princípios como os defendidos pelo NCTM para a educação matemática (Malone, 1996).

Para que os futuros professores interiorizem princípios deste tipo "têm que experimentá-los na sua própria formação – não é suficiente reconhecê-los apenas mentalmente" (Hefendehl-Hebeker, 1998, p. 122). A formação deve aplicar a si própria os princípios que defende. Todas as componente de um curso de formação inicial de professores para a escolaridade básica devem concorrer para a construção de uma imagem sobre a Matemática, sobre ensinar e aprender Matemática.

Como os professores tendem a ensinar como vivenciaram a aprendizagem mais do que como lhes disseram que ensinassem (*e.g.*, Boero, Dapueto e Parenti, 1996; Carrillo e Contreras, 2000; Crawford e Adler, 1996; Dykstra, Jr., 1996; Hiebert e Carpenter, 1992; Kloosterman e Mau, 1997; Thompson, 1985; Villani, 1998) importa que as disciplinas da Matemática e da didáctica sejam concordantes, sejam compatibilizadas, a bem dos professores e da formação inicial. Resultados da investigação apontam para esta necessidade, quer se trate de resultados mais antigos, mas plenos de actualidade, quer de resultados mais recentes, defendendo a mesma linha de actuação.

Na opinião de Thompson (1985) os programas de formação inicial devem ir para além do simples treino para ensinar Matemática; devem *educar* os professores em Matemática. Esses programas devem fornecer aos professores experiências que aumentem os seus conhecimentos *de* Matemática e *acerca* de Matemática, visto que sem estes conhecimentos os professores terão dificuldades em lidar efectivamente com discussões abertas com os alunos e em explorar e tirar partido das suas ideias.

> Há evidências da investigação de que as concepções e as práticas, especialmente dos professores em início de carreira, são influenciadas largamente pelas experiências escolares anteriores à frequência de disciplinas sobre metodologias de ensino […] É necessário explorar *modos de articular* as *disciplinas da Matemática* […] com *as de metodologia*, por forma que as experiências de aprendizagem e as abordagens de ensino das primeiras sejam *consistentes* com o que é advogado nas segundas. (Thompson, 1985, p. 292)

Também Dykstra, Jr. (1996) defende uma actuação próxima da de Thompson quando refere que aprender os conteúdos ensinados de modo consistente com o ponto de vista construtivista, juntamente com cursos de metodologia, ajudaria os futuros professores no processo de virem a ensinar de modo diferente.

Perseguindo este ponto de vista Harel e Trgalová (1996) referem que parece ser consensual entre os educadores matemáticos que o objectivo central de uma formação superior em educação matemática, em geral, se afaste de um formalismo e de um rigor prematuros e se concentre na aquisição de ideias e conceitos profundos. Infelizmente a ênfase colocada nos procedimentos rotineiros e na aplicação de regras ainda é dominante. É necessário um esforço concertado para fazer da Matemática um mundo de exploração e resolução de problemas aos olhos dos alunos. Para a consecução deste objectivo alguns educadores optam pela modelação matemática no sentido de interessarem os seus alunos e de facilitarem a reconciliação entre o formal e o intuitivo, utilizando a tecnologia e criando ambientes de sala de aula que encorajem as discussões em grande grupo e a aprendizagem em pequenos grupos.

Volrath (1994) refere que para muitos futuros professores a formação superior em Matemática permiti-lhes ser, de certo modo, criativos na resolução de problemas, mas não lhes pede para formar conceitos novos. O autor observa que alguns alunos escrevem poemas, pintam quadros, compõem melodias, fazem experiências na física, química, biologia, mas não desenvolvem Matemática por eles próprios. Geralmente os alunos não pensam na matemática como um assunto onde podem ser criativos.

Que fazer na formação inicial de professores? Onde devem surgir as mudanças? As mudanças parecem urgentes nas disciplinas de Matemática (Análise Matemática, Geometria, Teoria dos Números, Álgebra Linear, Transformações Geométricas…), relativamente ao *modo* como são trabalhados os conteúdos.

Metodologia

Experiência

Assim, realizou-se uma experiência que pretendeu compreender de que modo(s) um ambiente de aprendizagem, que valoriza a resolução de problemas, a experimentação, o raciocínio indutivo, o questionamento, a formulação, avaliação e justificação de conjecturas, a partilha de opiniões, o trabalho em grupo, se relaciona com a competência matemática que os futuros professores manifestam no domínio da geometria.

Esta competência matemática pode incluir, entre outros aspectos (a) a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* específico, (b) a predisposição para procurar e explorar invariantes em figuras geométricas, (c) o gosto em investigar propriedades e relações geométricas, (d) a aptidão para resolver problemas, (e) a aptidão para argumentar em favor das suas opções.

A experiência foi orientada por uma questão geral: *Como se caracteriza o desempenho dos futuros professores nas tarefas de resolução de problemas/investigação, nomeadamente, o que pensam, o que fazem e o que sentem?*

Trabalhando-se no âmbito da formação inicial de professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico, e pretendendo-se uma escolaridade para *todos* e onde *todos* tenham realmente acesso a vários tipos de conhecimento e possam desenvolver hábitos de aprender em várias situações e aprender sempre (Matemática para todos e aprender ao longo da vida) foram objectivos da experiência, para além da tentativa de alinhamento do discurso com a prática, ajudar os futuros professores a ganhar confiança nas suas capacidades de resolução de problemas no contexto da Geometria, a desenvolver atitudes positivas face à resolução de problemas e à Matemática, alargar as concepções dos futuros professores sobre a Matemática, promover aprendizagem com compreensão.

Participantes

Nesta experiência participou uma turma de alunos da variante de Matemática e Ciências da Natureza da ESEVC durante a frequência do 2º e 4º anos do curso, nas disciplinas de Geometria e de Transformações Geométricas. Estes alunos ingressaram no ensino superior no ano lectivo 1998/99. A sua experiência no ensino secundário foi anterior à introdução das calculadoras gráficas, dos trabalhos em grupo, à elaboração de relatórios. Antes de iniciarem esta experiência os alunos frequentaram as disciplinas de Análise Matemática e de Matemática I (disciplina do tronco comum). Nesta última disciplina abordaram um módulo de resolução de problemas do ponto de vista do resolvente: contactaram com várias definições de problema, com diferentes tipologias de problemas, com o modelo de resolução de problemas de Pólya, com várias estratégias de resolução, bem como com a resolução de vários problemas, principalmente problemas de processo.

Procedimentos

Nas disciplinas de Geometria e Transformações Geométricas onde se realizou a experiência adoptou-se uma metodologia de ensino onde, para além de momentos de exposição por parte do professor, se valorizou a resolução de problemas, a experimentação, o raciocínio indutivo, o questionamento, a formulação, avaliação e justificação de conjecturas, a partilha de opiniões, o trabalho em grupo. A formação, quer de Matemática quer de Didáctica, necessita de fundamentar as suas análises e explicações nas questões práticas do ensino. A aprendizagem activa é necessária e possível em todos os níveis (Hefendehl-Hebeker, 1998). Dois pilares em que deve assentar a aprendizagem da Matemática são a experiência matemática e a reflexão sobre essa experiência. Na sala de aula foram valorizados os problemas, as tarefas de exploração e de investigação. Utilizavam-se tanto para introduzir assuntos como para aplicar e descobrir novos conhecimentos. Pretendeu dar-se ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, generalizar, formular, avaliar, reformular, argumentar, demonstrar conjecturas e reflectir, sem pretender mistificar que "os alunos são capazes de descobrir sozinhos todos os teoremas da Matemática"!, mas mostrar-lhes, concretamente, a necessidade de agir matematicamente para compreender a Matemática.

> As questões [dos alunos], as soluções, os argumentos, verdadeiros ou falsos, são necessários para construir sentido das teorias abstractas, ultrapassar a ingenuidade natural, para construir a ponte entre a teoria e a prática, entre a Matemática e as outras ciências, entre os conceitos e os algoritmos. (Legrand, 1998, p. 3)

A experimentação com recurso a materiais manipuláveis e a uma aplicação de geometria dinâmica – *The Geometer's Sketchpad* (*GSP*) – pretendia acentuar a componente indutiva da Matemática, à qual se aliavam a justificação e a demonstração. A formulação das conjecturas, o testar, avaliar, o reformular das mesmas, o argumentar tornou-se natural nestas duas disciplinas. O analisar de conjecturas revela a utilidade de se ser capaz de trabalhar com a contradição, no sentido de respeitar quem pensa de modo diferente do nosso, sendo útil também ter, partilhar e defender as próprias ideias porque diferentes pontos de vista ajudam todos a compreender melhor aspectos delicados.

A selecção de problemas para propor a alunos reveste-se sempre de dificuldades, pelo facto de se desconhecerem as suas experiências anteriores. As tarefas propostas foram problemas, pelo menos para estes alunos. Foram desafiadoras, motivaram-nos, não foram excessivamente difíceis mas também não revelaram imediatamente o processo de resolução nem a solução, estavam relacionadas com os conteúdos da Matemática, permitiam diferentes abordagens e interligavam diferentes assuntos da Matemática.

Com algumas das tarefas pretendia-se que os alunos descobrissem factos matemáticos específicos. Com refere Goldenberg (1999) se não se pedir aos alunos a generalização é possível que alguns deles descubram "a regra", mas assim não se teria ido além da simples exploração, sem conduzir à descoberta.

A apresentação das tarefas tanto ocorreu oralmente, como se iniciou oralmente e depois foram distribuídos enunciados escritos aos alunos. Para não se perderem aspectos que podiam ser importantes na discussão e na resolução entre os alunos, não se respondia a questões que, por vezes, os alunos colocavam quase de imediato, remetendo-se essas questões para o pequeno grupo ou quando se tratava de uma questão generalizada a discussão passava para a turma.

Na sala de aula os alunos trabalhavam tanto individualmente, como em grupos de dois ou três alunos, organizados por eles próprios. Laborde (1994) refere que as soluções produzidas pelos grupos são geralmente melhores do que por aluno individualmente e que o trabalho em grupo parece fornecer impacto positivo na aprendizagem a longo termo. A autora observa que de acordo com a teoria do conflito sociocognitivo as contradições provenientes de pontos de vista diferentes são mais prontamente percebidas e não podem ser refutadas tão facilmente como quando surgem num indivíduo. Este, sozinho, pode não se aperceber da contradição ou não a ter em linha de conta quando é necessário optar entre dois ou mais pontos de vista. Para ultrapassar uma contradição os alunos têm de coordenar esforços para obter uma opção aceite por todos. Esta opção corresponde a um conhecimento de nível superior.

Nas tarefas que exigiam explicitamente a utilização do computador e da aplicação de geometria dinâmica, a turma foi dividida em dois turnos, e os alunos dispunham cada um o seu computador, mas continuavam a comparar, discutir, reflectir, trocar ideias com os colegas do lado. Pretendia-se que construíssem conhecimento, mais do que se limitassem a reproduzi-lo. Assim, a tónica na formulação de conjecturas, na sua avaliação, reformulação foi sempre colocada. Pretendia-se também passar à fase seguinte, de levar os alunos a convencerem-se, convencerem os colegas de grupo e os outros, bem como o professor. Utilizaram-se questões como "porquê?", "como sabe que é sempre assim?", "o que há de semelhante nessas situações?", "como explica isso?", "porque é que isso acontece?"

como forma de provocar o raciocínio dos alunos e de os levar a fortalecer os seus argumentos.

Pluvinage (2001) defende o desenvolvimento, na sala de aula, de um modo de expressão que designa de democrático, visto que "a Matemática não conhece argumentos autoritários". Uma afirmação é aceitável independentemente de quem a emite, sendo a falsidade dependente de definições já aceites e de resultados obtidos. Uma voz é uma voz e esta forma democrática é uma condição de bom funcionamento. Como não existe este ambiente democrático sem a participação dos alunos, a sua participação depende da confiança que tenham na sua capacidade para contribuir para as discussões. Essa capacidade pode ser auxiliada (a) pela simplicidade das recomendações fornecidas no sentido de facilitar o impulso inicial, (b) pela curiosidade que as tarefas suscitam ou pelo seu aspecto estético, (c) pela natureza das tarefas, que suscitam o gerar de conjecturas, (d) pelas ferramentas disponibilizadas aos alunos.

Tentava privilegiar-se o desenvolvimento de atitudes questionadoras, de persistência, de confiança, onde o à vontade, a criatividade e o desenvolvimento de ideias próprias fosse uma constante. Pretendeu criar-se um ambiente onde a colocação de todas as questões fosse aceite, por forma a desenvolver nos alunos atitudes positivas face às suas capacidades para fazer Matemática.

Como se tratava da primeira experiência destes alunos com tarefas deste tipo apresentaram-se tarefas estruturadas, já que durante o ensinos básico e secundário foram sujeitos a um ensino tradicional. Pretendiam cativar-se os alunos e não desmotivar alguns deles pelo facto de poderem ficar à deriva numa tarefa mais aberta, mas faze-los sentir mais à vontade. As tarefas estruturadas oferecem mais pontos de orientação para guiar os alunos durante a resolução. Tarefas mais abertas podiam ter produzido o efeito contrário e afastá-los dos problemas e da metodologia de trabalho adoptada.

Depois da resolução reflectia-se sobre o trabalho realizado. Os alunos eram confrontados com questões que podiam não lhes ter surgido durante a resolução da tarefa, com estratégias diferentes de resolução, com justificações diferentes das que tinham apresentado, com pedidos de esclarecimento por parte de colegas.

Recolha de dados

Atendendo ao problema em análise realizou-se um estudo de natureza qualitativa, em ambiente natural de sala de aula. Para a recolha de dados utilizaram-se a observação participante, notas de campo, dados pessoais dos alunos, tarefas de resolução de problemas, questionários, trabalhos escritos dos alunos, reflexões finais individuais.

Tarefas utilizadas

Nesta experiência não se pretendeu utilizar investigações, mas problemas, apesar de se constatar que as tarefas propostas apresentam algumas das características que rotulam as investigações, como por exemplo a possibilidade de formular, testar e justificar conjecturas. Algumas tarefas utilizadas são investigações das apresentadas na página "Investigar e aprender" – por exemplo, *Construindo os sólidos platónicos*; outras surgem no documento "A Matemática na Educação Básica" – por exemplo, *Investigar o quadrilátero obtido quando se unem os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer*. Procuraram-se problemas que, fundamentalmente, pretendiam levar o aluno a formular conjecturas, avaliar, procurar contra-exemplos, reformular as conjecturas e justificar. Consideraram-se as investigações como sendo problemas – outros problemas, mais latos e com contornos menos definidos.

Na disciplina de Geometria utilizaram-se várias tarefas, como por exemplo:

Tarefa - Pontos Médios dos Lados de um Quadrilátero (1) (adaptada de *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*, Colecção de Adendas, 9-12, p. 32)
Construa um quadrilátero dinâmico.
1. Marque os pontos médios dos seus lados
2. Una os pontos médios. O que obteve?
3. Arraste um dos vértices do polígono inicial. O que acontece?
4. Formule uma conjectura.
5. Prove a conjectura.
6. Investigue em que condições obteria
6.1. um rectângulo.
6.2. um quadrado.

Tarefa do rectângulo (2) (Adaptada de *Duval*, 1998)
1. Construa um rectângulo dinâmico e trace uma diagonal.
2. Considere um ponto P qualquer da diagonal e por ele trace rectas paralelas aos lados do rectângulo.
3. Compare as áreas dos dois rectângulos que não estão cortados pela diagonal.
4. Investigue para várias posições de P. O que pode concluir quanto à área desses rectângulos? Explique porquê.

Tarefa do triângulo equilátero (3)
Num triângulo equilátero onde se localiza o ponto cuja soma das distâncias aos lados do triângulo é a menor?

As tarefas (1) e (2) foram propostas explicitamente para a utilização do computador e do GSP. Ao lerem a tarefa (3) os participantes pensaram tratar-se de um problema de optimização e revelaram-se surpreendidos quando tal não aconteceu.

Na disciplina de Transformações Geométricas um dos assuntos abordados foi a composição de isometrias. Depois de se ter explorado e reflectido sobre composição de duas translações e de várias translações, composição de duas meias-voltas, tanto com o mesmo centro como com centros diferentes, composição de duas rotações com o mesmo centro, composição de várias rotações com o mesmo centro, usando tarefas análogas às seguintes, passou-se para o estudo das reflexões.

Propôs-se aos alunos investigar a composição de duas reflexões. Alguns questionaram logo "E os eixos como são?", "Pode depender. Tens de ver as duas [possibilidades: paralelos e concorrentes]", "Paralelos". E foi assim que se iniciou a tarefa. Foram distribuídos aos alunos os enunciados e eles começaram a trabalhar primeiro individualmente e quando iam surgindo as dúvidas trocavam ideias, debatiam pontos de vista, questionavam os colegas.

> *Tarefa "Composição de reflexões de eixos paralelos"* (Adaptada de *Adendas "Geometria dos 2º e 3º ciclos"*, p. 77)
>
> A. Considere duas rectas x e y paralelas. Considere uma figura – F1 – e construa o seu transformado pela composição de reflexões $R_y o R_x$
>
> 1) Observe e compare F1 e o seu transformado. O que conclui sobre a posição de F1 e do seu transformado por $R_y o R_x$?
>
> 2) Compare com as conclusões dos seus colegas.
>
> 3) Será possível obter o <u>mesmo</u> transformado de F1 por uma única transformação? Caracterize qual.
>
> B. Repita o procedimento anterior considerando agora $R_x o R_y$.
>
> C. Compare os resultados obtidos em A. com os obtidos em B. Apresente uma conclusão geral, explicando como pensou.

Uns começaram por usar o GSP, outros fizeram apenas esquemas com papel e lápis. Estes preferencialmente usaram eixos horizontais (13/27, porque seria? Não apresentaram nenhuma razão especial para esta opção. Os eixos verticais e oblíquos repartiram-se igualmente pelos restantes alunos). Usaram como figura um segmento de recta tal com tinham feito nos casos anteriores. Apesar dos alunos questionarem sobre a distância entre os eixos e sobre a localização da figura inicial verificou-se que nenhum aluno fez o esboço colocando o segmento de recta paralelo ou perpendicular aos eixos. Questionados sobre essa possibilidade referiram tratar-se de "caso particular". Isto parece mostrar que estes alunos, apesar de terem podido escolher casos particulares se preocupam com um esquema que represente uma situação mais geral.

A elaboração dos esquemas também merece alguma atenção. Escolhidos os eixos x e y, como na primeira questão se referia a composição $R_y o R_x$ todos os alunos, excepto um, colocaram a figura (segmento de recta) no exterior da banda definida pelas paralelas e mais próxima do eixo da primeira reflexão. Mais próxima de x. O aluno que foi excepção colocou o segmento de recta no interior da banda.

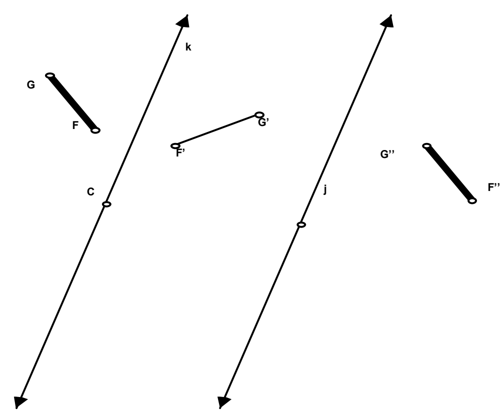
Construído o transformado da figura inicial, voltavam ao enunciado "o que é que queremos saber?", "só uma transformação", alguns concluiram que "Não pode ser reflexão", "Porquê?", "É paralelo", "E depois?", "Nas simetrias não dá sempre paralelo", "É uma translação. Só a translação transforma segmentos em [segmentos] paralelos". Depois de pensarem e discutirem durante algum tempo concluíram sobre a existência de outros casos em que original e transformado têm os lados paralelos. "Há outros casos mas não é sempre". Podia acontecer nas rotações em que era possível obter a imagem paralela ao objecto se fosse uma meia-volta, apesar de inverter a figura. Na reflexão se o segmento estivesse paralelo ao eixo, a imagem era paralela ao objecto, mas isto acontecia apenas em casos particulares.

Os alunos que trabalhavam com o GSP confirmavam "É sempre paralelo. Não interessam os eixos [a sua direcção] nem a distância [entre os eixos]". Questionei: "Não interessam os eixos. O que quer dizer?". "Não é isso. Devem interessar. Os segmentos dão sempre paralelos, independentemente de como estão os eixos. Só pode ser translação, nas outras não dá sempre paralelo" [A grande vantagem da utilização do GSP].

A utilização do GSP convencia-os do paralelismo, portanto da translação. Esse convencimento de quem trabalhava com GSP dava garantia aos que trabalhavam apenas em papel. Confiavam nas opiniões dos colegas que confirmavam os seus esquemas. Faltava saber "porquê?"

Se não existiam dúvidas quanto a ser translação, o mesmo não se pode dizer relativamente ao vector dessa translação.

Distance(F to F'') = 7,6 cm
Distance(G to G'') = 7,6 cm
Distance(C to Line j) = 3,8 cm



Durante algum tempo os alunos procuraram concluir sobre a posição do vector. Unindo original e transformado concluiram que o vector é perpendicular aos eixos.

"Porquê?" "Só pode ser. As imagens fazem-se na perpendicular aos eixos". A definição de reflexão ajudava a concluir sobre a direcção do vector relativamente aos eixos das reflexões. Alguns alunos pareciam dar-se por satisfeitos em saber a direcção, mas outros questionavam logo "e o resto?" Faltavam sentido e comprimento.

Quer os que trabalhavam com o GSP quer os outros, comparando esquemas, verificaram que o comprimento do vector dependia da distância entre os eixos. Como dependia é que era preciso saber. Mediram o comprimento do vector e a distância entre os eixos, concluindo então que se tratava do dobro. Logo surgiu a questão "Porque é que é o dobro?" Os alunos já não se contentavam em medir. Sabiam o que acontecia, mas queriam saber porquê. No papel foram marcando os segmentos congruentes e explicando o pretendido.

Nem todos os alunos tinham o mesmo tipo de esquema. Alguns esquemas (como o anterior) em que não ocorriam sobreposições entre figuras e eixos e em que as reflexões pareciam seguir uma certa ordem tornaram mais simples o processo de justificação. A localização inicial da figura e a ordem das reflexões tornou nalguns casos mais complicada a construção da justificação.

Os alunos concluiram:

> A composição de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação em que o comprimento do vector é o dobro da distância entre os eixos da reflexão, a direcção é perpendicular aos eixos da reflexão e o sentido é do eixo da primeira reflexão para o eixo da segunda.

Alguns resultados

Os resultados que se apresentam foram obtidos a partir de uma primeira análise dos dados recolhidos.

O que pensam os futuros professores

A maioria dos alunos considerou a metodologia adoptada inovadora, pelo facto de serem eles a chegar aos resultados, podendo conduzir a uma aprendizagem mais significativa e podendo contribuir, se fosse utilizada nas várias disciplinas de Matemática, para minimizar as suas dificuldades:

> Penso que posso classificar quer as aulas de Geometria quer as aulas de Transformações Geométricas como aulas "diferentes". Quando digo diferentes refiro-me ao modo como se trabalhavam os conteúdos […] na maioria dos casos sermos nós a chegar às definições, conjecturas, a tirar as conclusões… Nós chegamos por nós próprios aos objectivos pretendidos. Neste sentido penso que a aprendizagem é mais significativa, pois tudo o que é por nós pensado é mais duradoiro.

> Penso que este tipo de metodologia deveria ser adoptado nas diversas cadeiras da área de Matemática, pois deste modo talvez muitas dúvidas fossem esclarecidas e as dificuldades dos alunos minimizadas.
>
> Só com uma metodologia deste tipo é possível estimular os alunos a recorrer no seu futuro como professores a planificações/aulas que privilegiem o método de resolução de problemas.

Talvez justificando as dificuldades que foram tendo ao longo da resolução das tarefas alguns referem o facto desta metodologia não ser muito utilizada e, por isso, não terem adquirido o hábito de reflectir e relacionar diferentes assuntos da Matemática.

> Este tipo de metodologia não é muito utilizado por outros professores, logo nós também não estamos habituados a pensar e a relacionar conhecimentos de outras áreas da Matemática.

A maioria dos participantes reconheceu a importância da colocação de dúvidas, questões, a discussão dos diferentes pontos de vista, sem receio de expor, perante os colegas "falta de conhecimentos". No entanto, nem todos se mostraram à vontade para o fazer. Justificam com o facto de serem mais introvertidos, terem dificuldade em precisar as dúvidas, considerarem o ritmo da aula por vezes excessivo e precisarem de mais tempo para as tarefas:

> Permitia-nos questionar sem receios e discutirmos sempre as ideias de todos […] fiquei sempre com a sensação que estas não são aulas como as outras, pois aprendemos muito mais, e sobretudo, é um método que nos obriga a compreender, e não só a memorizar, como por vezes acontece. […] Foram duas disciplinas que mudaram radicalmente a minha visão da geometria.
>
> O ritmo que foi aplicado nestas aulas […] algumas vezes foi excessivo.

Relativamente às tarefas nem todos os alunos se pronunciaram sobre elas, na apreciação final que fizeram das disciplinas. Dos que se pronunciaram e apesar de também as considerarem interessantes, diversificadas e imaginativas, a maioria considerou-as difíceis:

> As tarefas puxaram sempre ao máximo pelas nossas capacidades, recorrendo aos nossos conhecimentos (por vezes já esquecidos).
>
> Diversificadas e por vezes muito imaginativas.
>
> Interessantes, apesar de uma ou outra serem complicadas.

O que sentem os futuros professores

A maioria dos participantes revelou sentir-se motivada e à vontade para expor os seus pensamentos, nas aulas das disciplinas. O “nervosismo” que inicialmente acompanhou alguns foi-se desvanecendo à medida que as aulas iam decorrendo, talvez à medida que ganhavam mais confiança nas suas capacidades para fazer Matemática. A questão do tempo foi referida por alguns como sendo um aspecto *stressante*:

> Foram aulas para as quais me senti motivada uma vez que fui muitas vezes confrontada com situações problemáticas que eram propostas como desafios […] sempre me senti à vontade para colocar os meus pontos de vista e opiniões acerca da matéria que estava a ser leccionada o que é muito importante visto que se gerou um ambiente muito benéfico.
>
> Foram aulas em que me senti motivada.
>
> Não tínhamos medo de errar e expúnhamos sempre as nossas dúvidas e pontos de vista.
>
> Não tinha tempo suficiente para realizar as tarefas.
>
> Descobri que sabia várias coisas e que podia construir vários raciocínios que eu pensava que não era capaz.

O que fazem os futuros professores

As tarefas propostas foram seleccionadas com o objectivo de permitir formular conjecturas, avaliar, procurar contra-exemplos, reformular, generalizar e argumentar. Como a grande maioria das tarefas propostas necessitava da elaboração de um esquema, os participantes revelaram a preocupação de elaborar esquemas que representassem situações gerais, apesar de passarem pelos casos particulares. Alguns alunos revelaram dificuldade em fazer os esquemas, o que mostra que nem sempre é “natural” a aplicação do conhecimento das definições dos conceitos (ex.: rotação). A utilização do GSP por vezes “mascara” estas dificuldades, que transparecem com recurso ao papel e lápis. Foi notória a evolução na capacidade de formular e avaliar conjecturas, principalmente se trabalhavam com o GSP. Persistiam na avaliação das conjecturas e na procura de argumentos; apesar de estarem convencidos de que as conjecturas que formulavam eram válidas queriam saber “porquê?” Este aspecto associa-se às funções da demonstração na sala de aula quando se utiliza, paralelamente, uma aplicação informática. Da função de convencer a demonstração passa a ser fundamental, por exemplo, para explicar e aumentar a compreensão sobre os assuntos tratados.

Algumas reflexões

Depois da experiência que pretendeu trazer para as disciplinas de Matemática da formação inicial de professores de Matemática e Ciências da Natureza os princípios que defende, importa reflectir, por exemplo, sobre as aprendizagens dos alunos envolvidos e da professora. As apreciações dos futuros professores mostram que eles são unânimes em dizer que aprenderam "muitas coisas" e de modo "diferente do habitual… aprendemos a pensar, a reflectir". Aprenderam que "o mesmo problema se pode resolver de vários modos", que na resolução das tarefas "tanto raciocínio como explicação são importantes" e ainda que "diferentes assuntos podem ser relacionados". Pelo facto de se envolverem muito mais parece que os futuros professores compreendem melhor os assuntos com que trabalham. Empenham-se mais. Esforçam-se mais, mesmo que terminem as aulas cansados.

Como professora, esta experiência foi muito significativa. Organizar o ensino de disciplinas de Matemática segundo a metodologia utilizada é difícil. É matemática, pedagógica e pessoalmente difícil. É matematicamente difícil porque não é possível "preparar" todas as dificuldades que os alunos podem vir a apresentar, visto que não se sabe que caminhos irão vir a trilhar, se esses caminhos vão ser produtivos e o que os faz ser assim. É pedagogicamente difícil porque é necessário decidir quando intervir, como intervir, que sugestões dar a cada aluno ou a cada grupo sempre que surge uma situação de impasse e como gerir o tempo necessário para as tarefas. É pessoalmente difícil pelo facto de, por vezes, o professor se sentir na posição de não saber, o que é desconfortável e pouco usual. Como defende Buckhardt, referido por Schoenfeld (1992), trabalhar bem sem saber todas as respostas requer experiência. A experiência adquire-se experimentando e reflectindo.

Constatei que nem sempre actuo como pretendia fazê-lo. Quando os alunos questionam "está certo?", em vez de uma resposta metacognitiva deixava-me empolgar e por vezes dava a minha opinião, para além do desejável. Como diz Mason (1999) o professor precisa de saber para agir. Quando os alunos se encontram num impasse é difícil decidir o que fazer: esperar mais algum tempo ou lançar alguma questão que ajude. Como se aprende a resolver problemas resolvendo, também se aprender a usar esta metodologia de ensino usando-a.

Aprendi que também sofro com a pressão do programa. Não um programa emanado da tutela, mas um programa que redigi e que queria cumprir. Cumprir porque tudo o que contém era importante e interessante para os alunos. Houve momentos em que foi necessário decidir entre a fidelidade à metodologia ou aos conteúdos. Optei pela metodologia.

A experiência confirmou a necessidade de organizar uma "bolsa de tarefas" para adaptar às diferentes situações, para interligar com diferentes assuntos, para responder a solicitações e questões que os alunos podem ir colocando.

Aprendi que vale a pena trazer para a prática os princípios teóricos defendidos para a formação inicial de professores.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Boero, P., Dapueto, C., & Parenti, L. (1996). Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1097-1122). Dordrecht: Kluwer.

Carrillo, J. & Contreras, L. (2000). El amplio campo de la resolución de problemas. In J. Carrillo & L. C. Contreras (Orgs.), *Resolución de problemas en les albores del siglo XXI: Una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Huelva: Hergué.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Orgs.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. Dordrecht: Kluwer.

Dykstra Jr., D. (1996). O ensino da física elementar a alunos de liceu. In C. Fosnot (Org.), *Construtivismo e educação: Teoria, perspectivas e prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Goldenberg, P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-50). Lisboa: APM.

Harel, G. & Trgalová, J. (1996). Higher mathematics education. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs.), *International handbook of mathematics education* (pp. 675-700). Dordrecht: Kluwer.

Hefendehl-Hebeker, L. (1998). The practice of teaching mathematics: experimental conditions of change. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Orgs.), *The culture of the mathematics classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hiebert, J. & Carpenter , T. (1992). Learning and teaching with understanding? In D. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York, NY: Macmillan.

Kloosterman, P. & Mau, S. (1997). Is this really mathematics? Challenging the beliefs of preservice primary teachers. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A, Borralho, & I. Vale (Orgs.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 217-248). Aveiro: GIRP.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation?. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer.

Legrand, M. (1998). *Scientific debate in mathematics course*. La lettre de al preuve, Nov./Dez. (2000): http://www-didactique.imag.fr

Lester, F. & Schroeder, T. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton & A. Shulte (Orgs.), *New directions for elementary school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Malone, J. (1996). Preservice secondary mathematics teachers´ beliefs: two case studies of emerging and evolving perceptions. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Orgs.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 313-320), Valência, Espanha.

Mason, J. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 135-161.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM. [tradução portuguesa, 1994].

NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pajares, M (1992). Teacher´s beliefs and educational research: Cleaning up a messing construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332.

Pluvinage, F. (2001). *Role du professeur dans l'acquisition du raisonnement au college*. http://www.ac-creteil.fr/maths/puissances/N6/rolepro.htm

Ponte, J. P. (1994). Do tangram ao cálculo das áreas: Procurando pôr em prática os novos programas. *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-50). Lisboa APM.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, *23*(2), 145-166.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Thompson, A. (1985). Teacher´s conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. In E. A. Silver (Org.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiples research perspectives*. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

Thompson, A. (1992). Teacher´s beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Villani, V. (1998). The way ahead. In C. Mammana & V. Villani (Orgs.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. Dordrecht: Kluwer.

Vollrath, H-J. (1994). Reflections on mathematical concepts as starting points for didactical thinking. In R. Biehler, R. Schlz, R. Stäßer, & B. Winkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 61-72). London: Kluwer.

15

Do número ao sentido do número

Graça Cebola
Escola Superior de Educação de Portalegre
gracacebola@mail.esep.ipportalegre.pt

Partindo das definições elementares de *número* (entenda-se que, não sendo dito o contrário, nos referimos aos números naturais) percebe-se que, a nível escolar, elas não são suficientemente amplas para permitir uma plena construção deste conceito.

Assim sendo, pretende-se, neste trabalho, reflectir sobre a importância da construção e desenvolvimento do número através do *sentido do número*. Apresentam-se, primeiramente, várias definições do sentido do número que, não sendo contraditórias, se complementam nas ideias e processos evocados. De seguida, realça-se o papel do cálculo mental e do cálculo por estimação na sua ligação estreita ao sentido do número. E, por último, ligam-se algumas orientações curriculares ao sentido do número e exemplifica-se como este deve ser trabalhado e explorado numa aula de Matemática do ensino básico.

Como se pode constatar não há a intenção de abordar o número formalmente mas antes de um modo mais informal, o qual deve permitir uma aprendizagem significativa na área do cálculo numérico.

Definir número

Uma ideia que normalmente surge é a de que os números são aquilo que permite contar e, como tal, responder a questões do tipo: "Quantos são?". Desta forma, o número é encarado como o *cardinal* de um dado conjunto, isto é, descreve a quantidade dos seus elementos. No entanto, o número pode ser usado num sentido diferente, por exemplo, se dissermos que numa corrida participam três crianças, o três é o cardinal, mas se mencionarmos que o João chegou em terceiro lugar, o três já não é encarado da mesma forma mas antes como *ordinal* do número, ou seja, como a ideia que o permite localizar numa dada sequência.

Sob o ponto de vista da história da Matemática, os autores divergem quanto à ordem pela qual estes conceitos surgiram. Do mesmo modo, sob o ponto de vista da psicologia da aprendizagem os psicólogos divergem quanto à sua primazia e facilidade de compreensão.

Por outro lado, se mencionarmos o número de fila de um supermercado, o número do bilhete de identidade, o número de código do cartão de crédito, o número de telefone e muitos outros ligados ao quotidiano actual, nenhum dos dois conceitos anteriores parece adequado. Aqui a ideia é apenas o uso do número como uma identificação, como um nome, sem qualquer preocupação de quantidade ou de sequência numa série. Surge, assim, o conceito *nominal* do número que, ao contrário dos anteriores, não tem qualquer significado matemático. Por exemplo, faz pouco sentido efectuar uma média dos números de telefone de uma determinada localidade, assim como dizer que determinado número de cartão de crédito é maior ou menor que um outro. Sem ser matematicamente importante é certo que o carácter nominal do número é, nas sociedades actuais, imprescindível ao dia a dia do cidadão comum e deve ser referido desde o início da escola básica.

Mas referir o número apenas pelas suas definições elementares é demasiado limitativo quando, sob o ponto de vista da educação matemática, pretendemos realçar quer o seu carácter utilitário no mundo actual e na vida do cidadão comum, quer o seu carácter uniforme e global. Desta forma, nos anos 80 e início da década de 90, desenvolveu-se uma expressão que parece adequada ao ensino e à aprendizagem: o sentido do número.

Definir sentido do número

Ao procurar definir sentido do número, muitas das caracterizações focam-se na sua natureza intuitiva, no seu desenvolvimento gradual e nos processos pelos quais se pode evidenciar. Em 1989, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) refere que o *sentido do número* é uma intuição acerca dos números, traçada a partir de todos os significados que estes possam ter. Desta forma considera cinco componentes:

- *Desenvolvimento dos conceitos elementares de número*. Incluem-se aqui os conceitos de cardinal e de ordinal.
- *Exploração das relações entre os números através de materiais manipuláveis*. A composição e decomposição de conjuntos de objectos permite escrever um número de diferentes formas. Por exemplo, pode referir-se que 50 são 5 dezenas, 2 vezes 25 ou 4 dezenas e 10 unidades.
- *Compreensão do valor relativo dos números*. A comparação de dois números, evidenciando, por exemplo, que o 31 é grande quando comparado com o 4, mais ou menos do mesmo tamanho que o 27,

cerca de metade de 60 ou pequeno relativamente ao 92; a contagem um a um de dois números, através da calculadora (se possível, utilizando a tecla da constante), permite também estabelecer o valor relativo desses números (nota-se que é bastante mais demorado contar rapidamente até 1000 do que até 100).

- *Desenvolvimento da intuição do efeito relativo das operações nos números*. Neste ponto o realce vai para o sentido da operação (explicitado a seguir) o qual permite efectuar decisões profundas sobre se o resultado obtido é, ou não, razoável.
- *Desenvolvimento de referenciais para medir objectos comuns e situações do mundo que nos rodeia*. Perceber, por exemplo, que não tem sentido um aluno do 4º ano ter 316 cm de altura e pesar 8 kg, o professor ter 96 anos de idade e o pão custar 117 €. Isto é, ter conhecimento de um intervalo que seja sensato para estas medidas permite criar um suporte para analisar se os resultados são, ou não, razoáveis.

Mencionado anteriormente, o *sentido da operação* apresenta, ainda de acordo com o NCTM (1989), quatro componentes:

- *Compreender a operação*, isto é, reconhecer, em situações do mundo real, as condições que indiquem que determinada operação pode ser útil nesse caso.
- *Ter conhecimento dos modelos e das propriedades de uma operação*. Por exemplo, a nível elementar, a multiplicação é, muitas vezes, encarada apenas como um processo de combinar grupos com igual número. É necessário que outras situações (combinações, área, …) sejam também exploradas.
- *Identificar relações entre as operações*. A adição e a subtracção podem relacionar-se, pois uma é a inversa da outra. Com a primeira procura-se o todo, com a segunda procura-se uma parte.
- *Tomar consciência dos efeitos de uma operação num par de números*. Por exemplo, ao adicionar 5 a 25 deve reparar-se que a mudança é muito mais pequena do que se se multiplicar 25 por 5. Pode também analisar-se o que sucede quando, dados dois números numa adição ou numa multiplicação, se diminui uma unidade num e se aumenta uma unidade no outro.

Estas componentes permitem afirmar que o sentido da operação interage com o sentido do número e possibilita um suporte para o desenvolvimento conceptual dos procedimentos do cálculo mental e escrito.

Por outro lado, o *sentido do número* pode ainda definir-se como sendo a compreensão genérica que cada pessoa tem dos números e das operações. Esta compreensão inclui não só a capacidade mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvam números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação de informação, na resolução de problemas. Evidencia-se a expectativa de cada um quanto à utilidade dos números e à regularidade da própria matemática (Reys, 1998).

O *sentido do número* é, desta forma, algo impreciso, pessoal e personalizado, que está relacionado com as ideias que cada um foi estabelecendo sobre os números e as operações e que nem sempre é fácil de descrever. McIntosh *et al.* (1992) apresentam um modelo para a caracterização do *sentido do número básico*, ou melhor, um conjunto de ideias e processos que permitem evidenciá-lo. Este modelo surge dividido em três grandes blocos, cada um com vários pontos específicos.

Bloco 1. Conhecimento e destreza com os números

Sentido da regularidade dos números

Compreender o sistema de numeração hindu-árabe, percebendo como este sistema posicional está organizado, auxilia na análise e na crítica dos números e permite a sua aplicação quer aos números inteiros quer aos números decimais. A compreensão do sistema de numeração ajuda também a organizar, comparar e ordenar mentalmente os números. Por exemplo, quando o aluno aprende a contar a partir do 20, começa a identificar, oralmente e por escrito, padrões que são inerentes ao sistema de numeração. Estes padrões, uma vez identificados, proporcionam um suporte importante para que o processo de contagem continue e se generalize.

Múltiplas representações dos números

Reconhecer que o número pode apresentar várias formas e ser pensado e manipulado de diferentes maneiras, consoante a situação em causa. Compreender que perante um dado problema, existem representações que são mais úteis do que outras. Por exemplo, reconhecer que $2+2+2+2$ é o mesmo que 4×2 é uma relação conceptual importante entre a adição e a multiplicação.

Englobam-se, neste ponto, a decomposição/recomposição do número, isto é, o modo de expressar um número de diferentes formas, todas elas equivalentes, e que resultam de reconhecer como esta nova notação facilita a operação com os números recompostos. Ao supor, por exemplo, que numa ida ao supermercado a despesa é de 8,53 €. Podemos pagá-la com uma nota de 10 € e receber de troco 1,47 € ou podemos dar ao empregado uma nota de 10 € e 3 cêntimos e receber como troco apenas duas moedas, uma de 1 € e outra de 50 cêntimos. A decomposição de 8,53 € em 8,50 € + 0,03 € dá-nos a justificação formal que nos permite pagar a referida quantia e não encher a carteira de trocos.

Embora desenvolvida num ponto mais à frente (*Sistemas de referência*), surge também aqui a comparação com um número de referência, ou seja, a utilização de uma marca no sistema de numeração que é normalmente útil para efectuar comparações.

Sentido das grandezas relativa e absoluta dos números

Reconhecer o valor relativo de um número ou de uma quantidade relativamente a outro número ou quantidade; possuir a sensibilidade relativamente à grandeza de um determinado número ou quantidade. Perguntar, por exemplo, a um aluno do 3º ano do ensino básico, se já viveu mais, ou menos, do que 1000 dias, dá-lhe uma oportunidade de pensar acerca do 1000 num contexto pessoal e ajuda-o a entender melhor o valor do 1000 noutros contextos.

Sistemas de referência

Utilizar referências para avaliar uma resposta ou arredondar um número, de modo a facilitar o cálculo mental. Por exemplo, reconhecer que a soma de dois números de dois dígitos é inferior a 200, que 0.98 está próximo de 1 e que $\frac{4}{9}$ é ligeiramente inferior a um meio. Nos casos anteriores as referências são valores numéricos desprovidos de qualquer contexto e que podem desenvolver-se com a experiência. No entanto, as referências podem também surgir de atributos pessoais ou inesperados. Por exemplo, uma pessoa pode usar a sua altura para estimar a altura de uma outra pessoa.

Bloco 2. Conhecimento e destreza com as operações

Compreensão do efeito das operações

A plena conceptualização de uma operação implica compreender o seu efeito com diferentes números, incluindo inteiros e não inteiros. Com esta ideia, os modelos são frequentemente utilizados para auxiliar os alunos na compreensão da acção da operação. Por exemplo, modelar a multiplicação como uma adição repetida permite ajudá-los a pensar a multiplicação de um modo concreto. No entanto, é importante que sejam explorados vários modelos para a multiplicação (linha numérica ou modelo geométrico) de modo que os alunos se habituem a ver esta operação em vários contextos e modelos.

Reflectir sobre as interacções entre as operações e os números e investigar o que se passa no resultado, tendo em atenção a alteração de uma das componentes da operação. Por exemplo: “O que acontece quando dois números inferiores a 1 são multiplicados?"; "O que acontece se um dos factores é inferior à unidade e o outro superior?".

Compreensão das propriedades matemáticas

Aplicar intuitivamente as propriedades das operações aritméticas em processos de cálculo inventados. Por exemplo, quando mentalmente multiplicamos 36×4, pode-se pensar em 4×35 e 4×1, ou seja, $140 + 4$ ou 144. Nesta solução aplicou-se a propriedade comutativa, mudando a ordem dos factores, e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo 4×36 em $4 \times 35 + 4 \times 1$. Podia também ter-se pensado em $4 \times 40 - 4 \times 4$ ou $30 \times 4 + 6 \times 4$ e, em qualquer dos casos, fica realçado o sentido do número. O objectivo aqui é o de ilustrar a importância de ligar as aplicações práticas ao desenvolvimento e compreensão das propriedades matemáticas.

Compreensão da relação entre as operações

Conexões entre as operações permitem obter diferentes formas de pensar e resolver os problemas. Por exemplo, quando um aluno considera a questão: "Quantas rodas têm 8 triciclos?" pode: pensar e aplicar um processo de contagem (contando uma a uma as rodas dos triciclos); aplicar a adição repetida (adicionando o número de rodas de cada triciclo: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$); agrupar e adicionar (fazendo 4 grupos de 2 triciclos cada: $6 + 6 + 6 + 6$); ou aplicar a multiplicação (8×3). Cada uma destas soluções reflecte ligeiras diferenças de pensar a questão, assim como diferentes graus de eficiência.

Identificar e utilizar conexões entre as várias operações e, em particular, entre uma operação e a sua inversa, permite também pensar no problema de uma outra forma. Por exemplo, quando se pergunta "Qual é o quociente de $480 \div 8$?", pode pensar-se na questão "Qual é o número que multiplicado por 8 vai dar 480?" ($8 \times ? = 480$), onde o problema passou a ser multiplicativo em vez de um problema de divisão.

É de notar que para compreender as relações entre as várias operações é necessário primeiramente perceber cada uma das operações e depois entender que essas relações aumentam à medida que se passa das operações com números naturais para as operações com números não inteiros.

Bloco 3. Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo

Compreender a relação entre o contexto do problema e os cálculos necessários

Compreender que o contexto do problema fornece pistas para a utilização, não apenas das operações apropriadas, mas também do tipo de números a tratar. É também aqui que se realça um olhar diferente sobre a solução com o propósito de analisar se esta deve ser exacta ou aproximada. Ao considerar, por exemplo, a situação: "O João gastou 2.88 € em maçãs, 2.38 € em bananas e 3.76 € em laranjas". Várias questões se podem colocar e dependendo delas escolher entre uma resposta exacta ou um valor aproximado. Desta forma, se a pergunta for "Quanto gastou o João na fruta?", é necessário considerar os valores indicados e aplicar um qualquer método de cálculo (mental, escrito ou com a calculadora) para que a resposta seja exacta; por outro lado, se a pergunta for "Será que o João pode pagar a despesa com uma nota de 10 €?", então podemos usar a estimação para rapidamente e com confiança responder afirmativamente.

Consciencialização da existência de múltiplas estratégias

Reconhecer que, frequentemente, existem diferentes estratégias de resolução para um dado problema e perceber que, se uma estratégia inicial parece improdutiva, o formular e aplicar uma nova estratégia deve ser um caminho a seguir.

Apetência para utilizar uma representação ou um método eficiente

Ter consciência de que, num determinado momento, algumas estratégias ou algumas ferramentas de cálculo são mais eficientes do que outras. Por exemplo, um aluno do 2º ano de escolaridade perante a pergunta "Quanto é 8 + 7?" não deve utilizar a estratégia de contar um a um, mas antes modificar a questão e pensar em 7 + 7 + 1 ou em 8 + 2 + 5, baseado no conhecimento que já possui de 2 vezes 7 ser 14 e de 8 + 2 = 10, respectivamente.

Sensibilidade para rever os dados e o resultado

Possuir sentido do número é examinar a solução obtida à luz do problema original, para determinar se a resposta "faz sentido". Esta análise é geralmente feita rapidamente, naturalmente, e torna-se parte integrante do processo de resolução de problemas.

Sem estar em desacordo com o modelo anterior mas evidenciando mais alguns pontos, Greenes *et al.* (1993) referem que quando falamos acerca do sentido do número em Matemática, nos referimos à *capacidade de obter decisões inteligentes* baseadas numa clara compreensão das relações matemáticas e no contexto ou aplicação dessas relações. Uma estreita compreensão da relação entre os números, as suas utilizações e o contexto do problema compõem o sentido do número.

Desta forma, e de acordo com estes autores, pelo menos sete competências devem ser desenvolvidas na escola básica:

1. *Reconhecer as várias utilizações dos números.* Os alunos devem ser capazes de reconhecer que os números são usados de muitas formas, incluindo para quantificar, para rotular, para medir e para localizar. Quando dizemos que "O saco contém 6 maçãs", o número 6 é usado para quantificar, para referir quantas; quando mencionamos que "O jogador com o '56' na camisola apanhou a bola", o 56 é usado como um nome ou rótulo; quando indicamos a distância percorrida, a altura ou o peso de alguém, os números são usados como medidas; quando mencionamos que "O João vive na segunda casa a partir da esquina", o número é utilizado para identificar um local ou uma posição.
2. *Reconhecer a adequação dos números.* Alguns números, pela sua natureza, são apropriados em determinadas situações e noutras não. Por exemplo, 53 pode ser o número de páginas de um livro mas não pode ser um dia do mês, uma vez que o mês pode ter no máximo 31 dias. O número 42.5 pode ser uma média de classificação mas não pode ser o número de alunos na turma, uma vez que uma fracção de pessoa não tem qualquer nexo. Os alunos devem reconhecer que o tipo de número (inteiro ou não inteiro) está relacionado com o contexto.
3. *Associar números de diferentes grandezas com objectos, acontecimentos e situações reais.* Com base no conhecimento prévio de vários temas e acontecimentos, os alunos devem ser capazes de julgar quais os números que são mais apropriados para descrever esses temas ou acontecimentos. Por exemplo, quando se identifica o número que melhor descreve a percentagem de água num sumo, os alunos devem saber que a percentagem não pode exceder 100; no entanto, quando se refere o aumento de preços, em época de inflação, esse valor pode exceder os 100 %.
4. *Estimar os resultados de operações.* Estimar somas, diferenças, produtos e quocientes é útil para verificar os resultados obtidos e para assegurar que as respostas estão dentro de um parâmetro correcto. Por exemplo, quando se estima o preço de cinco camisolas, cujo valor unitário é 29 €, os alunos devem reconhecer que o valor total será cerca de 150 €, em vez de 100 €, 200 € ou 1500 €.
5. *Identificar relações entre números e entre medidas*. Grupos de números partilham, frequentemente, determinada teoria ou relação de ordem numérica. Por exemplo, os alunos devem estar aptos a identificar as seguintes relações: 5 é um factor de 30; 30 é um múltiplo de 5; 5 é

menor que 30 e 30 é maior que 5. Em termos de medidas, os alunos devem saber, por exemplo, que 1 hora é igual a 60 minutos ou que 1 quilómetro são 1000 metros.

6. *Reconhecer conjuntos e subconjuntos, ou relações entre as partes e o todo.* Reconhecer relações entre as partes e o todo facilita as decisões sobre a grandeza dos números. Por exemplo, reconhecendo que o País é composto por várias províncias, os alunos devem saber que a população de uma das províncias tem que ser inferior à população do País.
7. *Compreender aspectos que estabeleçam relações matemáticas bem como relações temporais.* Muitos problemas de aplicação usam aspectos que estabelecem relações matemáticas tais como maior que, menor que, no máximo, no mínimo, cinco vezes mais e para todos. A capacidade de interpretar estes aspectos é a chave para encontrar a solução destes problemas. Outros problemas podem incluir aspectos que estabeleçam relações temporais, tais como cedo, tarde, antes, depois e a partir de agora. Perante afirmações como "O João nasceu cinco anos antes do Carlos", os alunos devem perceber que o João é mais velho do que o Carlos, que o Carlos é mais novo que o João e que a diferença entre as suas idades é de 5 anos.

Em síntese, analisando as definições anteriores podemos sublinhar que, embora sob perspectivas diferentes, as características associadas ao sentido do número, a explorar no decurso do ensino básico, e referidas explicitamente por, pelo menos, dois dos autores são:

- As múltiplas utilizações do número;
- O reconhecimento do valor relativo dos números;
- A selecção e o uso de referências;
- A decomposição e recomposição de números;
- A compreensão dos efeitos relativos das operações nos números;
- A adequação dos números ao contexto ou à situação real.

O sentido do número, o cálculo mental e o cálculo por estimação

Reys (1998) menciona também que as características tipicamente associadas com o sentido do número incluem a flexibilidade e a performance apropriadas ao cálculo mental e à estimação. Sowder e Shappelle (1994), por seu lado, realçam que o cálculo por estimativa surge muitas vezes como suficiente na resolução de problemas e conjuga as seguintes componentes do sentido do número: o valor do número e o valor posicional. Segundo as autoras, para estimar há que coordenar as capacidades de arredondar e calcular mentalmente.

O cálculo mental e o cálculo por estimação são, portanto, duas formas de chegarmos ao sentido do número. Ambos podem proporcionar oportunidades para uma aplicação flexível dos conceitos de número e das operações, para inventar processos de resolver novos problemas, e para reflectir sobre os números e os seus significados no contexto de um dado problema.

Assim, de modo a maximizar o desenvolvimento do sentido do número, o ensino do cálculo mental deve encorajar os alunos a explorar diferentes maneiras de resolver os problemas e as discussões efectuadas devem ser guiadas de modo a permitir a inclusão de razões plausíveis que justifiquem que uma determinada forma é mais eficiente do que outra ou que não tem qualquer interesse no processo como o problema é resolvido.

Especificando um pouco o que se entende por *cálculo mental*, Sowder refere (1988) que é uma capacidade necessária para a competência numérica e que inclui a capacidade de efectuar operações com números inteiros com dois ou três dígitos. Um cálculo mental eficiente utiliza necessariamente algoritmos diferentes dos que estão usualmente ligados aos cálculos de papel e lápis. Sowder menciona igualmente que os algoritmos mentais têm características interessantes que fazem deles uma manifestação importante da existência do sentido do número. Assim, na sua opinião, os algoritmos mentais são:

- Variáveis. Há, por exemplo, vários métodos para calcular $83 - 26$ e, algumas possibilidades podem ser: $83 + 3 - 26 - 3$, ou $86 - 26 = 60$ e $60 - 3 = 57$; $26 + 4 = 30$, $30 + 50 = 80$, e $80 + 3 = 83$. Logo, $4 + 50 + 3 = 50 + (4 + 3)$, isto é, 57; $(70 + 13) - (20 + 6) = (70 - 20) + (13 - 6)$, ou seja, 57.
- Flexíveis e podem ser adaptados para satisfazer os números em causa. Por exemplo, cada uma das diferenças, $83 - 79$, $83 - 51$ e $83 - 7$, pode ser calculada de maneira diferente: $83 - 79$ pode ser resolvido procurando qual é o número que adicionado a 9 vai dar 13 e reduz–se à ideia básica de $9 + ? = 13$ ou $13 - 9$ e, provavelmente, de uma forma inconsciente $83 - 79$ é reconhecido como sendo o mesmo que $(70 + 13) - (70 + 9)$, ou $(70 - 70) + (13 - 9)$; o problema $83 - 51$ é provável que seja pensado como $(80 + 3) - (50 + 1)$ ou $(80 - 50) - (3 - 1)$, onde $80 - 50$ é uma extensão da ideia básica $8 - 5$; por fim, $83 - 7$ pode ser encontrado através da contagem de 7, três a três ou quatro a quatro, desde o 83 ou pensando que $13 - 7$ é 6, logo o resultado é 76 (este último processo depende do conhecimento de 83 ser o mesmo que $70 + 13$).
- Activos, na ideia que permitem ao utilizador escolher, conscientemente ou não, um método.
- Globais uma vez que tratam os números como um todo e não cada dígito individualmente.

- Construtivos uma vez que começam, frequentemente, com o primeiro dos números. Por exemplo: 37 + 28 é 37, 47, 57, 67, 65.
- Requerentes de uma total compreensão e o seu uso vai-a desenvolvendo.
- Indicadores de uma primeira aproximação da resposta uma vez que normalmente os cálculos começam pelos dígitos da esquerda.

Como se pode observar pela multiplicidade de métodos existentes, a flexibilidade aumenta e as escolhas podem ser feitas na base da rapidez e da facilidade. Uma vez que não há apenas uma resolução única, isto é, uma escolha única na forma dos números serem trabalhados, o cálculo mental é extremamente criativo e inventivo. Desta forma, ter facilidade com o cálculo mental é uma manifestação do sentido do número.

É também de referir que no nosso dia a dia usamos mais o cálculo mental do que os algoritmos aritméticos escritos. As diferenças entre os algoritmos escritos e os algoritmos mentais são indicadas por Plunkett, citado por Sowder e Kelin (1993), que refere que enquanto os algoritmos formais escritos têm a vantagem de criar uma rotina tipo que servirá para todos os números – pequenos ou grandes, inteiros ou decimais – têm também a desvantagem de não corresponderem à maneira como as pessoas tendem a pensar nos números e desencorajam os alunos a pensar nos números em causa enquanto efectuam um cálculo.

O objectivo do cálculo mental é obter uma resposta exacta do problema numérico a resolver. Por outro lado, segundo Sowder (1988) o *cálculo por estimação* utiliza-se quando o objectivo não é necessariamente obter uma resposta exacta e consiste, basicamente, no processo de converter os números exactos em números aproximados (de notar que a capacidade de aproximar números depende da capacidade de os comparar) e operar mentalmente com esses números para obter uma resposta razoavelmente próxima do resultado exacto.

Por fim, podemos dizer que o sentido do número é uma rede bem organizada de conceitos sobre a informação do número que possibilita relacionar os números e as operações para resolver problemas de uma forma flexível e criativa (Sowder, 1988).

O sentido do número e as orientações curriculares

Em 1989, o National Research Council referia-se ao sentido do número como um objectivo importante da matemática escolar elementar e o NCTM indicava-o como uma componente essencial do currículo.

Aproximadamente uma década depois, o sentido do número continua a ser referenciado pelo NCTM (2000), como sendo uma parte importante da educação matemática elementar, a par da compreensão dos números e das operações e da fluência do cálculo aritmético. Reforça-se a ideia do sentido do número defendendo que os documentos programáticos, desde o jardim de infância até ao final ao ensino secundário, devem possibilitar a todos os alunos uma significativa compreensão dos números, nomeadamente: o que são; como se representam com objectos, numerais ou em rectas numéricas; como se relacionam uns com os outros; como se englobam em sistemas estruturados e com propriedades; e como se utilizam conjuntamente com as operações para resolver problemas.

De modo similar, em Portugal, menciona-se que o sentido do número "constitui uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos" (Abrantes *et al.*, 1999, p. 46). Assim, de acordo com estes autores, as competências matemáticas no domínio dos números e das operações que os alunos do ensino básico devem desenvolver e que estão ligadas ao sentido do número são:

- A compreensão do sistema de numeração indu-árabe;
- O reconhecimento da diversidade de representar os números bem como da sua adequação a determinadas situações ou problemas;
- O reconhecimento do valor relativo de um número ou quantidade relativamente a outro número;
- A compreensão conceptual das operações;
- A resolução de problemas onde o decidir que tipo de respostas é adequado, que tipo de instrumentos de cálculo é adequado, que tipo de estratégia se deve aplicar e a plausibilidade do resultado face ao problema são aspectos importantes;
- O reconhecimento de que são possíveis múltiplas estratégias para um determinado problema.

No documento *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais* realça–se também que "ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática" (ME, 2000, p. 57) que devem ser desenvolvidos ao longo de toda a educação básica e que inclui, entre outras:

- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos. (p. 57)

E, como se pode notar, o conteúdo destes pontos é mencionado em, pelo menos, uma das definições de sentido do número anteriormente apresentadas.

Desta forma, no domínio específico dos números e do cálculo, a competência matemática que deve ser desenvolvida por todos os alunos inclui os seguintes aspectos:

- A compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;
- O reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como das propriedades das operações nesses conjuntos;
- A aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação;
- A sensibilidade para a ordem de grandeza dos números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem;
- A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados. (p. 60)

Mais uma vez, estes aspectos são o decalque fiel do sentido do número tal como ele deve ser explorado e desenvolvido.

Por último, é de notar que a nível de orientações curriculares, enquanto para o NCTM, o *sentido do número* continua a ser um conceito explícito a ter em consideração e a desenvolver ao longo de toda a escolaridade, em Portugal, o *sentido do número* nunca surge ao longo dos documentos oficiais que orientam a aplicação dos programas do ensino básico. No entanto, as ideias gerais aí propostas, e anteriormente realçadas, seguem de muito perto o que é referido por Abrantes *et al.* (1999) e permitem uma identificação nítida com a maioria dos pontos das definições de *sentido do número* apresentadas.

O sentido do número e a prática lectiva

Considerando, tal como é referido no início, que o *sentido do número* é uma intuição sobre os números e, como tal uma intuição matemática (Renisk, citado por Sowder e Kelin (1993), caracteriza intuição matemática como uma evidência própria de cada um e que é facilmente acessível através da sua memória), podemos perguntar, afinal, "Como é que se auxiliam as crianças a desenvolverem uma forte intuição acerca dos números?", ou seja, "Como é que se ensina o sentido do número?".

Apesar de alguns dizerem que o sentido do número é algo que ou se tem ou não se tem (Turkel e Newman, 1993), é notório, perante a exposição anterior, que algumas das capacidades a ele associadas podem ser desenvolvidas e reforçadas. Desta forma, se pretendermos desenvolver o sentido do número nas aulas de matemática elementar, podemos referir alguns elementos educativos que o propiciam e que, de acordo com Sowder e Schappelle (1994), são:

- O fazer sentido, o qual deve ser realçado em todos os aspectos do ensino e da aprendizagem da matemática e, em particular, nos aspectos relacionados com os números;
- O ambiente da sala de aula que deve ser conducente ao fazer sentido. Deve ser um espaço de discussão sobre a matemática e que pode ocorrer quer em pequenos grupos quer na turma como um todo;
- A matemática deve ser encarada como uma partilha de aprendizagens sobre uma prática intelectual. Desta forma, aprender matemática é mais do que a simples aquisição de competências e informações. As crianças aprendem a fazer e a defender conjecturas matemáticas, a raciocinar matematicamente e a resolver problemas.

Trafton e Hartman (1997) relatam mesmo o ambiente de aulas de matemática onde, perante uma prática diferente, se pretende desenvolver o sentido do número. Os autores referem que o conhecimento e as capacidades dos alunos relacionadas com os números e o cálculo são desenvolvidos de uma forma continuada. Surgem ao longo do ano e, perante uma determinada expressão, há uma exploração que dura vários dias, o que permite a todos os alunos ter várias oportunidades para desenvolver a sua compreensão e reflectir nas estratégias utilizadas. Não estão delineadas fronteiras entre as operações, o valor posicional, os tipos de computação e o tamanho dos números. Os algoritmos inventados aparecem no início do ano e são enfatizados ao longo de todo o ano. Assim, tornam-se naturais para as crianças e estão intimamente ligados à sua intuição e ao desenvolvimento do sentido do número. As estratégias dos alunos são valorizadas nas apresentações que cada um faz do seu trabalho. Não são ensinadas estratégias particulares. Quando surge uma estratégia importante, ela é discutida com os alunos em seminário e estes são encorajados a aplicá-la em outras situações. Como ferramentas adicionais para encontrar soluções e validar raciocínios são utilizados os blocos de base 10 e a tabela dos 100. Cada material tem uma característica particular que ajuda a desenvolver o sentido do número e as diferentes estratégias de cada um. Os alunos usam-nos de forma a que façam sentido para os próprios. Os algoritmos usuais de papel e lápis não são muito enaltecidos ao longo do ano, no entanto, são frequentemente mencionados e discutidos como uma maneira de pensar. Os algoritmos são vistos pelos alunos e pelos professores como mais um meio, não o melhor, para encontrar uma resposta.

Neste tipo de aulas é tido como importante o papel do aluno na sua própria aprendizagem e consoante o seu ritmo próprio. É importante a discussão e a justificação de ideias e processos, assim como é permitida a utilização de material manipulável sempre que o aluno sinta necessidade. Podemos dizer que estas aulas são um exemplo de aulas de carácter construtivista viradas para a construção do sentido do número e para uma matemática com sentido.

É ainda de salientar que, segundo Fosnot e Dolk (2001), tradicionalmente os professores de Matemática pensaram que ensinar para o sentido do número significava ajudar as crianças a fazer conexões entre as suas acções e os objectos reais. Usavam-se, por exemplo, os blocos multibásicos e propunham-se actividades que ajudassem as crianças a compreender o reagrupar. Falava-se acerca da conexão entre o concreto, o pictórico e o simbólico. Mas todas estas técnicas pedagógicas eram usadas para ensinar os algoritmos. O objectivo do ensino da aritmética era os algoritmos, independentemente da sua compreensão.

Entretanto, nos anos 80 os educadores discutiram seriamente se o objectivo dos cálculos aritméticos deveria ser de todo os algoritmos. As autoras mencionam que as investigações de C. Kamii a levaram a insistir que ensinar os algoritmos é prejudicial para o desenvolvimento matemático das crianças. E, tal como afirmam Ponte e Serrazina (2000), não tem qualquer nexo tentar ensinar um algoritmo de uma operação a um aluno que ainda não compreendeu o significado dessa operação. Os algoritmos não devem, portanto, ser o objectivo principal do ensino do cálculo aritmético.

Usar os algoritmos, as mesmas séries de passos em todos os problemas, é contraproducente ao cálculo com sentido do número. Os algoritmos permitem tratar as operações de uma forma mecanizada, onde não é necessário pensar muito sobre o assunto, basta seguir os passos definidos à partida. No entanto, calcular com sentido do número significa que cada um deve olhar primeiramente para os números e depois decidir por uma estratégia que se coadune e seja eficiente.

No que diz respeito aos algoritmos de papel e lápis, anteriormente referidos como mais um meio entre outros para a resolução de problemas de cálculo, Ralston (2000), numa posição bastante mais radical, propõe mesmo o fim do ensino da aritmética de papel e lápis no ensino elementar, substituindo-o por um ensino que enfatize o cálculo mental e a utilização da calculadora. Na sua opinião, o sentido do número é desta forma mais evidenciado do que na execução de meros processos rotineiros de aplicação dos algoritmos aritméticos de papel e lápis.

No entanto, ao abandonar o caminho de ensinar os algoritmos, não estamos a permitir que os alunos aprendam menos, estamos a levá-los a aprender mais.

Estamos a levá-los a matematizar, a pensar como os matemáticos e a olhar os números antes de calcular (Fosnot e Dolk, 2001).

Em conclusão

Focou-se, ainda que de uma forma sumária, o que se entende *por sentido do número*. Ligou-se este conceito ao cálculo mental e ao cálculo por estimação e sublinhou-se a questão, ainda que polémica, da importância dos algoritmos de papel e lápis no ensino dos números e do cálculo aritmético elementar.

Assinalou-se o sentido do número nas orientações curriculares e na prática lectiva da aula de matemática e não se negligenciou que ao sermos todos os dias bombardeados com números, estatísticas, publicidade e informações similares – na rádio, na televisão e nos jornais – necessitamos de uma boa habilidade mental e de um bom sentido do número para podermos avaliar essa publicidade, estimar quantidades, calcular eficientemente os números com que lidamos todos os dias e avaliar se estes cálculos são razoáveis, analisar as contas do restaurante e determinar percentagens iguais, interpretar dados e estatísticas, etc..

Desde sempre e, tal como afirma Caraça (1984)

> *O maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições da vida económica* (...); quanto mais intensa é a vida de relação, quanto mais frequentes e activas as trocas comerciais (...), maior é o conhecimento dos números. (p. 5)

Em conformidade com esta ideia é hoje notório que as crianças e os adultos necessitam de um maior sentido do número do que em épocas passadas e, de acordo com McIntosh *et al.* (1992), a era tecnológica em que vivemos faz com que o possuir o sentido do número seja uma das características que permite distinguir o ser humano do computador. O século XXI trará, portanto, segundo estes autores, razões que nos levam também a acreditar num foco crescente no desenvolvimento e manutenção do sentido do número.

Para finalizar, e por tudo o que atrás foi mencionado, talvez seja interessante referir que, na opinião de Ponte *et al.* (1998), faltam trabalhos de investigação em Portugal que procurem caracterizar o sentido do número.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Caraça, B. J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Greenes, C., Schulman, L., & Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher, 40*(5), 279-284.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8, 44.

Ministério da Educação, (2000). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ralston, A. (2000). Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática, 58*, 13-15 e *59*, 36-41.

Reys, R. E. (1998). Computation versus number sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(2), 110-112.

Reys, R. E., & Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237.

Shirley, L. (1995). Nominals: Numbers as names. *Teaching Children Mathematics, 2*(4), 242-245.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Behr (Orgs.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: NCTM.

Sowder, J. T., & Kelin, J. (1993). Number sense and related topics. In D. T. Owens (Org.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 41-57). New York, NY: Macmillan.

Sowder, J., & Schappelle, B. (1994). Number sense-making. *Arithmetic Teacher, 41*(6), 342-345.

Trafton, P. R., & Hartman, C. L. (1997). Developing number sense and computational strategies in problem-centered classrooms. *Teaching Children Mathematics, 4*(4), 230-233.

Turkel, S., & Newman, C. M. (1993). Qual é o teu número? Desenvolvendo o sentido de número. *Educação e Matemática, 25*, 31-33.

16

A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele

Mário José Miranda Ceia
Escola Superior de Educação de Portalegre
mario.ceia@mail.esep.ipportalegre.pt

Introdução

Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele desenvolveram um modelo de raciocínio em geometria, onde identificaram diferentes níveis de pensamento que se caracterizam por apresentarem estruturas de raciocínio progressivamente mais complexas.

Embora o modelo tenha sido intensivamente experimentado e testado apresenta, segundo alguns autores, algumas debilidades. Um dos aspectos que tem sido mais criticado neste modelo é a forma pouco precisa como estão definidos os vários níveis de desenvolvimento, o que impede a determinação de forma clara e inequívoca do nível de desempenho de um indivíduo.

Por exemplo, Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991, in Clements e Battista, 1992) identificaram alunos que aparentemente desenvolviam, simultaneamente, competências de dois níveis consecutivos, chegando a apresentar aquisições de um nível superior antes das aquisições correspondentes ao anterior.

Por outro lado, não está suficientemente estudada a possibilidade de coexistirem competências de níveis distintos para diferentes conceitos, ou seja, não é claro se quando um indivíduo apresenta um conjunto de competências relativas a um determinado conceito, significa que o seu nível de desenvolvimento relativo a outros conceitos é idêntico.

Por fim, parece ser plausível defender que o desempenho não esteja exclusivamente dependente das capacidades cognitivas, pelo que poderia apresentar características distintas durante a realização de uma determinada tarefa.

Na comunicação que se segue aborda-se uma possível explicitação de eventuais sub-categorias no interior do nível de *Análise* do modelo de van Hiele, baseada na taxonomia SOLO, e refere-se a necessidade de o foco da análise se deslocar das capacidades dos alunos para as suas produções ou respostas.

Para tal, consideraremos que a análise deixa de incidir sobre as capacidades dos indivíduos para se debruçar sobre as respostas que estes produzem durante o desempenho de uma qualquer tarefa pré-estabelecida (Biggs e Collis, 1982).

Tal pressuposto implica que, de um ponto de vista prático, passaremos a atribuir uma categoria à resposta que um indivíduo é capaz de produzir no desempenho de certa tarefa, avaliando unicamente o seu desempenho (Estrutura dos produtos de aprendizagem observados – SOLO), em vez de pretender avaliar a estrutura cognitiva desse indivíduo (Estrutura Cognitiva Hipotética – HCS) (Biggs e Collis, 1982).

Desta forma, explicitaremos de forma sumária os níveis do modelo de van Hiele e a taxonomia SOLO, apresentendo-se, em seguida, alguns exemplos de respostas produzidas por alunos do terceiro ano de escolaridade durante o desempenho de uma tarefa, em que se pretendia avaliar o seu conhecimento acerca das figuras planas, em particular o quadrado e o rectângulo.

O modelo de van Hiele

O modelo de raciocínio em geometria estruturado por van Hiele estabelece que os indivíduos, quando são sujeitos a um processo de aprendizagem adequado, desenvolvem o seu pensamento geométrico passando por cinco níveis, de forma que cada indivíduo só atingirá um determinado nível depois de ter passado por todos os anteriores (Fuys, Geddes e Tischler, 1988).

Os níveis, segundo Crowley (1987), são os seguintes:

Nível 0 - Visualização: Os indivíduos adquirem uma concepção de espaço como qualquer coisa que existe à sua volta. As figuras geométricas são entendidas pela sua forma, como entidades globais, não possuindo componentes ou atributos. Neste nível os indivíduos não reconhecem as partes das figuras, não se apercebem das relações entre as componentes das figuras nem entre as figuras.

Nível 1 - Análise: Inicia-se a análise dos conceitos geométricos. Através de observações e experimentações os indivíduos começam a discriminar algumas características das figuras. Estas propriedades vão ser utilizadas na criação de classe de figuras. São reconhecidas partes das figuras, as quais passam a ser identificadas por essas partes. Neste nível ainda não é possível explicar as relações entre as diversas propriedades, entre as figuras, e as definições não são compreendidas.

Nível 2 - Dedução informal: Neste nível as relações entre as propriedades das figuras ou entre figuras já é compreendida. Os indivíduos são capazes de deduzir as propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes e as definições são compreendidas. É possível seguir ou produzir um argumento informal, mas a dedução não é compreendida como um elemento de construção de uma axiomática. Assim, é frequente a utilização de resultados empíricos a par de técnicas de dedução, o que torna possível seguirem provas formais.

Nível 3 - Dedução formal: A dedução é entendida como um caminho para estabelecer uma teoria no interior de um sistema axiomático, sendo compreendido os papeis dos elementos constituintes de uma axiomática (termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações). Os indivíduos são capazes de construir uma demonstração, seguindo caminhos diversos, de compreender a diferença entre condição necessária e condição suficiente e de distinguir uma proposição da sua contrária.

Nível 4 - Rigor: Os indivíduos são capazes de trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos, euclideanos ou não, e compará-los. É atingido um nível de abstracção capaz de estabelecer a diferença entre os objectos e a sua essência.

Van Hiele (1959 in, Fuys, Geddes e Tischler, 1984) e Fuys, Geddes e Tischler (1988) apresentam formulações para os níveis do modelo semelhantes, embora na formulação de van Hiele apareçam apenas quatro níveis (o nível 4 – *Rigor*, não é explicitado).

Como se pode constactar pelo que anteriormente foi afirmado, trata-se de um modelo sequencial e hierárquico, sendo defendido que a progressão através dos níveis não é dependente da maturação dos indivíduos, mas antes dos métodos de ensino utilizados, sendo considerado que cada nível tem uma linguagem específica que a não ser respeitada pode provocar uma ausência de progresso na aprendizagem (Crowley, 1987; Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Hoffer, 1983).

A taxonomia SOLO

Na perspectiva de Biggs e Collis aprender significativamente quer dizer dar significado ao conhecimento existente, envolvendo o sujeito que aprende em duas tarefas: conhecer factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas; e usar aqueles factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas (1982).

Avaliar uma aprendizagem deste tipo exige conhecer quantos factos foram aprendidos pelo sujeito e que qualidade tem a aprendizagem desses factos. E é a qualidade da aprendizagem, baseada em critérios bem definidos e pré-estabelecidos, que nos vai preocupar.

Biggs e Collis (1982) defendem que é sustentável avaliar o desempenho num determinado momento, como afirmamos anteriormente, não fazendo inferências sobre a estrutura cognitiva dos indivíduos.

Como consequência imediata será plausível admitir que, em circunstâncias distintas, o desempenho possa ser diferente, dependendo de factores diversos, sem que tal signifique que as capacidades individuais se modificaram.

Biggs e Collis, através da taxonomia SOLO pretendem responder a estas questões. A taxonomia, descrita a seguir, desenvolve-se em cinco níveis, sendo definido para cada um dos níveis três tipo de características, as quais permitem descriminar as diferentes categorias de respostas ou produções que lhe correspondem: as capacidades, o tipo de estrutura das respostas e a consistência e capacidade de elaborar conclusões.

A figura 1, apresentada à frente, sintetiza a descrição desta taxonomia utilizando a especificações já indicadas.

Capacidade, na segunda coluna, refere-se à quantidade de memória de trabalho, ou de tempo em que a atenção está mobilizada, requeridas por cada um dos diversos níveis da taxonomia SOLO.

O número de factos que é possível recordar e o tempo de mobilização da atenção é maior no nível abstracto, ou seja, neste nível é necessário recordar vários factos simultaneamente, bem como prolongar os períodos de atenção de modo a estabelecer diversas relações entre aqueles factos. No nível pré-estrutural poderá nem ocorrer um período de atenção suficiente para recordar pelo menos um aspecto relevante, pelo que as respostas não farão sentido.

A terceira coluna diz respeito ao *Relacionamento de Operações*, ou seja, a forma como as respostas produzidas são adequadas às questões formuladas. No nível pré-estrutural não se verifica qualquer relação lógica entre as questões e as respostas. Poderemos encontrar situações em que o sujeito nega envolver-se nas tarefas propostas, reformula a questão sem modificar qualquer aspecto (tautologia), tenta adivinhar a resposta formulando uma resposta que poderá envolver aspectos perceptivos ou emocionais.

Ainda, no que diz respeito à relação entre as questões e as respostas é estabelecido o conceito de indução significando que o sujeito é capaz de tirar uma conclusão geral a partir de um acontecimento particular ou, em determinado contexto, relacionar um aspecto específico com a conclusão tirada. Uma resposta uni-estrutural invocará apenas um aspecto relevante, enquanto numa resposta multi-estrutural serão apresentados vários aspectos relevantes, mas sem qualquer ligação lógica entre eles. No nível relacional a resposta mostrará que o indivíduo é capaz de estabelecer algumas ligações lógicas entre os aspectos referidos, como no caso da multi-estrutural, mas não consegue ter uma visão global do conceito envolvido.

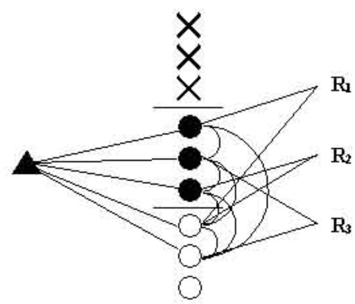
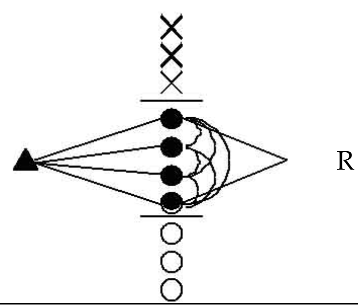
Níveis SOLO	*Capacidades*	*Relacionamento de operações*	*Consistência e capacidade de concluir*	*Estrutura das respostas* *Sugestão* *Resposta*
	- Quantidade de memória necessária ou atenção requerida exigidas pelos diferentes níveis.	- A forma como as sugestões e as respostas se inter-relacionam	- Necessidade de chegar a uma qualquer conclusão; - Elaborar conclusões consistentes, ou seja, que não sejam contraditórias com os dados, nem com outras possíveis conclusões.	Tipo de informação: - irrelevante ou desadequada; - relevante e dada no início; - relevante e hipotética, não fornecida inicialmente.
Abstracto (*Extended Abstract*)	Capacidade máxima de encontrar sugestões, discorrer informação relevante, estabelecer inter-relações e elaborar hipóteses.	Dedução e indução. Capacidade de generalizar a situações que não foram experimentadas.	Inconsistências resolvidas. Não surgem respostas fechadas – as conclusões mantêm-se abertas ou permitindo possíveis alternativas logicamente válidas (R_1, R_2 ou R_3)	
Relacional (*Relational*)	Capacidade alta de encontrar sugestões, discorrer informação relevante e inter-relações.	Indução. Pode generalizar em contextos dados ou experimentados utilizando aspectos relacionados.	Não existem inconsistências dentro do sistema estabelecido, mas como a conclusão é única, poderão ocorrer inconsistências quando sai para fora do sistema.	

Figura 1. Estádios de desenvolvimento cognitivo e descrição do tipo de respostas

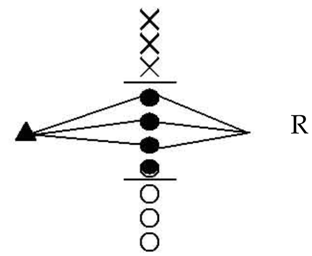
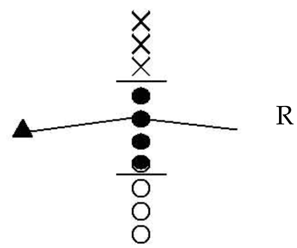
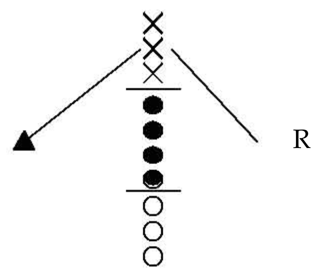
Multi-estrutural (*Multistructural*)	Capacidade mediana para descobrir sugestões e reconhecer os dados relevantes.	Consegue generalizar mas apenas em termos de um número limitado e independente de elementos.	Apesar de ter necessidade de ser consistente, pode ser inconsistente por concluir demasiado cedo, dado que está demasiado preocupado com os dados isoladamente, não sendo capaz de tirar conclusões distintas do mesmo grupo de dados.	
Uni-estrutural (*Unistructural*)	Fraca capacidade de encontrar sugestões ou dados relevantes.	Consegue generalizar apenas em relação a um único aspecto	Não sente necessidade de ser consistente, concluindo demasiado cedo: salta para a conclusão tendo por base apenas um aspecto, podendo ser muito inconsistente.	
Pré-estrutural (*Prestructural*)	Capacidade mínima de encontrar sugestões, dando respostas confusas.	Nega ou repete o problema. Utiliza o senso comum para especificar.	Não sente necessidade de ser consistente. Conclui sem sequer dar a necessária atenção ao problema.	

Figura 1. Estádios de desenvolvimento cognitivo e descrição do tipo de respostas (continuação)

Uma resposta abstracta vai para além da indução a partir dos dados fornecidos, introduzindo a dedução lógica. Será formulado um princípio geral abstracto, sendo possível deduzir desse princípio várias consequências.

No que diz respeito à *Consistência e Capacidade de Concluir*, sintetizadas na quarta coluna, transparecerão dois fenómenos, quase contraditórios: a necessidade de chegar a uma conclusão; e a necessidade de tornar consistentes as conclusões, isto é, sem contradições quer entre a conclusão e os dados fornecidos, quer entre possíveis conclusões distintas. Quanto mais rápida for a obtenção da conclusão menos informação será utilizada e, portanto, maior será o perigo de criar contradições entre os dados e a conclusão. Por outro lado, uma maior necessidade de obter resultados consistentes conduzirá à utilização de mais informação e, sempre que possível, a conclusões com um maior grau de generalidade.

Desta forma uma resposta pré-estrutural será caracterizada pela obtenção de uma conclusão muito rapidamente, mas sem consistência. No caso das respostas uni-estruturais teremos diversas conclusões, que podem ser correctas, mas que não são coerentes entre si. Nas respostas multi-estruturais a conclusão é determinada pelo envolvimento de um número maior de aspectos, mas que não estão relacionados entre si, podendo apresentar algumas inconsistências.

A resposta relacional apresenta uma conclusão capaz de relacionar todos os aspectos relevantes, evidenciando uma coerência global. Contudo a conclusão final, óptima num contexto, poderá mostrar-se falível noutros, mostrando uma forte ligação aos aspectos concretos. Só a resposta abstracta mostrará uma consistência global, estabelecendo princípios aplicáveis a qualquer situação.

Na última coluna está esquematizado o possível relacionamento entre os dados ou sugestões iniciais e as respostas produzidas. Foram utilizados três símbolos para indicar o tipo de informação em presença: ✕ - irrelevante ou desadequada; ● - relevante e providenciada no início, eventualmente em lições anteriores ou na tarefa proposta; ○ - relevante e hipotética, não fornecida inicialmente, que poderá estar implícita nos elementos fornecidos anteriormente.

No nível pré-estrutural a questão inicial e a resposta podem estar relacionadas através de uma informação irrelevante. No nível seguinte, uni-estrutural, aquela ligação poderá estar estabelecida através de uma única peça de informação relevante. Nas respostas correspondentes ao nível multi-estrutural a ligação entre a questão inicial a a conclusão pode ocorrer através de diversas ligações, mas estas ligações ainda não estão relacionadas entre si.

No nível relacional, tal como no anterior, aparecem várias ligações relevantes, relacionadas entre si, formando um esquema conceptual. Por fim, as resposta do nível abstracto apresentarão, para além das mencionadas ligações, outro tipo de ligações ancoradas em informação hipotética ou implícita nas tarefas propostas.

Convém notar que em certos momentos as respostas podem ser confusas e não corresponderem a um preciso nível. Tal confusão ou eventual inconsistência são geradas pelo facto do aluno ainda não ser capaz de utilizar mais informação do que aquela com que é capaz de trabalhar ou ainda não domina a complexidade da estrutura exigida pelo nível seguinte.

Para designar a fase de transição do nível pré-estrutural para o uni-estrutural utiliza-se o símbolo 1A, do uni-estrutural para o multi-estrutural 2A, do multi-estrutural par o relacional 3A e do relacional para o abstracto 4A.

Análise de respostas de alunos do 3º ano de escolaridade

Os exemplos que se apresentam foram obtidos de um conjunto de entrevistas realizadas com alunos do terceiro ano de escolaridade, imediatamente antes de abordarem na sala de aula as características das figuras planas, logo após esta abordagem e três meses depois.

Os diálogos pretendem ilustrar duas questões distintas. No primeiro grupo deles procura-se mostrar como em momentos próximos, os alunos produzem respostas com características distintas, mais ou menos complexas, o que poderá não corresponder a níveis de desenvolvimento distintos segundo o modelo de van Hiele.

Por outro lado, não parece credível que, em condições normais, um aluno evidencie um retrocesso nas suas capacidades de desempenho de uma tarefa, parecendo antes verificar-se que em contextos distintos as respostas produzidas podem ser de categorias distintas.

O segundo grupo de diálogos evidenciará produções de respostas distintas, envolvendo conjuntos de características muito diferentes, sem que se possa considerar que correspondem a níveis do modelo de van Hiele distintos.

Para ilustrar estas situações escolheu-se a primeira fase da entrevista em que os alunos eram conduzidos a identificar e descrever figuras planas representadas numa ilustração, em particular quadrados e rectângulos. Durante a discussão o entrevistador preocupou-se em que o aluno explicitasse o melhor possível as suas ideias, questionando sempre que qualquer aspecto não parecesse suficientemente claro.

Analisemos a primeira das situações. No exemplo estamos perante uma situação em que o aluno A não distingue um losango de um quadrado (Na figura o Sol era representado por um losango).

A - O quadrado...
E - Por exemplo o Sol... o Sol aqui!... o Sol é uma figura geométrica, mas não disseste que figura geométrica é.
A - É um quadrado.
[O Sol tem a forma de um losango]
E - É um quadrado, o Sol?
A - Quadrado...
(A - 1)

De acordo com o modelo de van Hiele estaríamos perante um aluno que apresenta um desenvolvimento característico do nível de Visualização, sendo de esperar que as respostas seguintes apresentassem as mesmas características.

De facto, não foi o que ocorreu. Um pouco adiante, quando o entrevistador o lhe pediu para explicar porque é que determinado elemento era uma quadrado, o aluno A indicou que se tratava de um quadrado por que tinha quatro lados iguais e quatro vértices:

E - Ah! Também tem dois lados iguais dois a dois e quatro vértices. Pronto. E agora falaste-me em quadrados também, não foi?
A - Sim.
E - Então diz-me lá os quadrados.
A - As janelas...as janelas, porque têm quatro lados... iguais e quatro vértices.
(A – 1)

Agora este aluno é capaz de indicar algumas características do quadrado, o que nos levaria a admitir que as suas capacidades estariam ao nível da Análise, no modelo de van Hiele.

Na terceira entrevista encontramos uma ocorrência semelhante, mas o aluno começa por apresentar uma capacidade de nível da Análise, seguida quase de imediato por um comportamento ao nível da Visualização:

E - Explica-me lá, porque é que as copas dessas árvores, as que tu apontastes aqui... são quadrados.
A - Porque têm quatro lados iguais, quatro vértices, os lados iguais e quatro ângulos.
(A – 3)

E - Sim senhor. Muito bem! E o sol? Disseste que era também um quadrado?
A - Hum, hum.
[Confirmou afirmativamente com a cabeça]
E - Sem dúvida?
A - Sem dúvida.
(A – 3)

A aluna B tem um comportamento semelhante na primeira entrevista. O seu desempenho é numa primeira fase característico do nível de Visualização, mas a continuação da discussão mostra que é capaz de evidenciar capacidades do nível seguinte.

B - Aqui um quadrado.
E - As copas dessas árvores também são quadrados.
B - São um quadrado.

E - Sim. São quadrados. Porque é que são quadrados?
B - Porque as árvores... que aqui estão desenhadas, é um quadrado.
(B – 1)

E - ... é um quadrado. Agora quero saber porquê. Porque é que tu disseste isso? Porque é que não lhe chamaste triângulo?
B - Porque não é igual ao triângulo.
E - Então o que é que tem de diferente do triângulo?
B - Porque o triângulo tem três vértices, e tem três lados. E o quadrado não. O quadrado tem quatro vértices e quatro lados.
(B – 1)

Este fenómeno, em que os alunos apresentam capacidades de nível distinto em momentos diferentes, parece querer indicar que não estaremos a analisar as capacidades dos alunos em causa, pois elas não se modificariam tão rapidamente, mas antes a avaliar a qualidade das respostas produzidas, como defendem Biggs e Collis.

Podemos encontrar situações idênticas, demonstradas pelo aluno A, quer noutras actividades, quer envolvendo o rectângulo. Acresce que o padrão de desenvolvimento das capacidades demonstradas por estes alunos, ao longo das três entrevistas, mostra uma tendência para decrescer ou, no mínimo, manter-se.

Ora seria de esperar que os fenómenos de maturação e o desenvolvimento continuado do ensino provocasse um aumento das capacidades destes alunos, reforçando-se a hipótese de se tratar de situações em que os alunos apenas demonstram um desempenho pontual e não as suas capacidades.

Vejamos a questão seguinte, ou seja, se os níveis de van Hiele se mostram suficientemente discriminatórios, permitindo distinguir claramente as respostas dos alunos.

Tomemos um primeiro exemplo:

E - ... E depois disseste que esta parte aqui de baixo é um rectângulo. Porquê?
[O entrevistador apontou para o tronco da árvore]
A - Porque tem dois lados iguais dois a dois e quatro vértices.
E - Tem... dois lados... desculpa lá... repete lá que eu não...
A - Tem dois lados iguais dois a dois.
E - Sim.
A - E quatro vértices.
E - Sim. Sim senhora. E tu disseste que havia mais rectângulos. Vamos lá recordar que agora eu já não me lembro!... Tu disseste tão depressa que não deu tempo para!...
A - Que era a porta!
E - A porta também é um rectângulo. Mas é um rectângulo, porquê?

A - Porque também tem dois... quatro lados iguais dois a dois e os quatro vértices.

(A – 1)

A - Um rectângulo para mim é como... aqui... aqui onde está o desenho e é aqui a capa, também é rectangular.

[Aponta para os contornos da figura e da folha de papel]

E - Porquê, porque é que dizes que é rectangular?

A - Tem quatro lados iguais dois a...

E - Ias a dizer...

A - Iguais dois a dois, quatro vértices dois lados para... dois lados paralelos e dois perpendiculares.

E - Quais são os perpendiculares?

A - Este, este, este, este.

[Apontou correctamente os lados perpendiculares]

(A – 2)

Os dois extractos da entrevista com o aluno A mostram respostas que indiciam uma capacidade do nível de Análise, segundo o modelo de van Hiele. Nos dois casos o aluno discrimina várias características do rectângulo, mas não as consegue relacionar, nomeadamente, o paralelismo dos lados com a sua dimensão.

Considerando a taxonomia SOLO poderíamos estabelecer algumas distinções entre as duas respostas. Na primeira delas refere o número de lados, a igualdade dos lados opostos e o número de vértices, elementos que exigem uma mobilização limitada da memória e não transparece qualquer necessidade em relacionar as diferentes características (a existência de quatro vértices decorre do facto de se tratar de um quadrilátero).

Na segunda resposta, ocorrida durante a segunda entrevista, o aluno apresenta mais características do rectângulo, referindo-se à perpendicularidade e ao paralelismo, aspectos relacionados com a compreensão espacial.

Parece que, apesar de corresponderem ao mesmo nível de van Hiele, a primeira poderá ser considerada como uma resposta Uni-estrutural, enquanto a segunda poderá ser considerada Multi-estrutural.

Outros exemplos de respostas que podem ser consideradas no nível de Análise, segundo van Hiele, e de categoria Uni-estrutural, conforme estabelecido na taxonomia SOLO, são apresentados a seguir:

E - E por exemplo aqui os troncos destas árvores?

B - São rectângulos, é um rectângulo.

E - São um rectângulo. Então porque é que dizes que são um rectângulo? Qual a diferença entre um rectângulo e um quadrado?

B - Porque o quadrado tem quatro lados iguais, e aqui o rectângulo, é... dois lados igu... lados iguais dois a dois.

E - Que queres dizer com isso de lados iguais dois a dois, explica-me lá.

B - Quer dizer que este é igual a este, pode ser o de cima é igual a este cá de baixo. São iguais dois a dois.

[Aponta num tronco os lados opostos como sendo iguais]

E - Sim.

B - E este é mais comprido do que no quadrado. E o rectângulo não é assim tão largo como o quadrado.

[Acompanhou a explicação com o gesto]

(B – 1)

E - Sim. Olha, tu disseste que as árvores que estão além, no lado esquerdo, aqui, são quadrados.

C - Sim.

E - Porquê?

C - Porque o quadrado tem dois, tem os lados todos iguais. Tem os lados todos iguais, e quatro vértices...

(C – 3)

Vejamos, agora, dois exemplos de respostas que podem ser consideradas no nível de Análise, segundo van Hiele, e de categoria Multi-estrutural, segundo a taxonomia SOLO:

E - E a porta do moinho, o que é que te parece?

B - É quadrada.

E - É um quadrado? Porquê?

B - Porque tem... o triâng... o triângulo não, porque tem três lados e o quadrado tem quatro lados. O triângulo tem três vértices e o quadrado tem quatro vértices.

E - E tem outra característica ainda.

B - Pois...

E - Como é que são os lados, em relação uns aos outros? Os lados do quadrado...

B - São todos iguais.

E - São todos iguais. E mais?

B - Esta linha...

E - Diz!

B - É paralela a esta...

E - Sim senhora.

B - E esta é perpendicular a esta.

E - Perpendicular! Sim senhora! Os lados consecutivos são perpendiculares.

B - Perpendiculares.

(B – 2)

E - ... Olha, e os troncos das árvores são alguma figura geométrica que tu conheças?
C - São.
E - Que figuras são?
C - Rectângulos.
E - Porque é que dizes que são rectângulos?
C - Ora, porque no rectângulo...
[Virou a folha para que os rectângulos ficassem com os lados opostos aproximadamente na posição horizontal e apontou os lados opostos e consecutivos correctamente]
C - ...esta é paralela a esta, e esta é perpendicular a esta então fazem assim.
(C – 2)

Como se pode verificar, parece ser possível considerar no nível de Análise de van Hiele, pelo menos, duas categorias de respostas, correspondendo, respectivamente, às categorias Uni-estrutural e Multi-estrutural da taxonomia SOLO:

- A primeira delas corresponde a enunciação de uma ou duas características da figura plana, eventualmente algumas características irrelevantes surgem misturadas com as relevantes, e não se evidenciando qualquer capacidade de as relacionar; e
- A segunda correspondendo ao enunciado de múltiplas características, eventualmente todas relevantes, sem as conseguir relacionar, mas referindo a perpendicularidade ou o paralelismo.

Conclusão

Os exemplos apresentados parecem indicar que, por um lado, é mais adequado analisar as produções dos indivíduos ao desenvolverem uma determinada tarefa do que inferir sobre as suas capacidades cognitivas e, por outro, que é possível estabelecer sub–categorias dentro do nível de *Análise* do modelo de van Hiele.

No que concerne à primeira situação, os exemplos parecem suportar a ideia de ser mais adequado avaliar o desempenho de um indivíduo num determinado momento não fazendo inferências sobre a estrutura cognitiva dos indivíduos (Biggs e Collis, 1982), dadas as rápidas mudanças de qualidade no desempenho observado.

Segundo Fuys, Geddes e Tischler (1988), as diferenças observadas no desempenho dos alunos, originando respostas de categorias distintas em momentos diversos, pode ser atribuída aos diferentes tipos de interacção que estabelecem entre alunos e professores, mostrando que a análise se deve deslocar para as produções observadas e não para as capacidades cognitivas intrínsecas.

No respeitante ao segundo argumento, alguns autores, citados por Clements e Battista (1992), indicam que alguns alunos possuem um desenvolvimento que não corresponde precisamente ao descrito no modelo de van Hiele, sugerindo a necessidade de uma formulação mais precisa dos referidos níveis.

No trabalho realizado parece existir alguma evidência que aponta para que a taxonomia SOLO possa contribuir para uma definição mais precisa dos níveis de van Hiele. No que respeita ao nível de Análise, no caso dos quadriláteros, parece ser possível afirmar que uma primeira sub–categoria seria caracterizada por os alunos apresentarem resposta contendo:

- Um número limitado de características referidas;
- As características referidas não demonstram qualquer relação entre elas.

Na outra sub–categoria os alunos apresentariam respostas contendo:

- Um número significativo de características referidas;
- Algum tipo de relação entre as características;
- Referência à perpendicularidade ou ao paralelismo, propriedades que envolvem um importante nível de percepção visual.

Referências

Biggs, J. B. (1992). Modes of learning, forms of knowing, and ways of schooling. In A. Demetriou, M. Shayer, & A. Efklides (Orgs.), *Neo-piagetian theories of cognitive development* (pp. 31-51). London: Routledge.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: Macmillan.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of teometric Thought. In M. M. Lindquist (Org.), *Learning and teaching geometry, k-12 (1987 Yearbook)* (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Crowley, M. L. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the van Hiele geometry test. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 238-241.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Orgs.) (1984). *Selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele*. New York, NY: Brooklyn College, CUNY.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Reston, VA: NCTM.

Fuys, D. J., & Liebov, A. K. (1993). Geometry and spatial sense. In R. J. Jensen (Org.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 195-222). New York, NY: Macmillan.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria: el modelo de van Hiele. In S. Llinares, & M. V. Sanches (Orgs.), *Teoria e prática en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

17

Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização

Conceição Costa
Escola Superior de Educação de Coimbra
ccosta@esec.pt

Este texto, deverá ser entendido só como um conjunto de notas para reflexão, um olhar para o pensamento matemático avançado como parte do processo vivo do pensamento humano. De modo algum pretendo fazer uma cobertura exaustiva das questões que me proponho abordar. Uma primeira parte discute o que se entende pelo termo "pensamento matemático avançado", algumas características do pensamento matemático avançado e como difere do elementar, e os processos mentais considerados subtis e complexos envolvidos no pensamento matemático avançado. Uma segunda parte deste artigo, refere processos mentais e modos de pensamento associados à visualização em certas tarefas geométricas propostas a crianças da escola elementar. Será procurada a interacção entre estes pensamentos e alguns processos mentais.

Pensamento matemático elementar e avançado

O termo "pensamento matemático avançado"

Vou apresentar não uma definição do termo "pensamento matemático avançado" mas o sentido desse termo, segundo alguns educadores matemáticos. Procurarei assim identificar vários aspectos da natureza deste pensamento.

Dreyfus (1991) diz que o pensamento matemático avançado consiste numa grande série de processos que interagem entre si, como por exemplo os processos de representar, visualizar, generalizar, ou ainda outros tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar sintetizar, abstrair ou formalizar.

Tall (1995) expressa que o pensamento matemático avançado, hoje, envolve usar estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de actividades matemáticas para construir novas ideias que continuam a construir e alargar um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados. Acrescenta ainda que se pode aceitar como hipótese que, no indivíduo, o crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado se faz partindo da "percepção de" objectos do mundo exterior e da "acção sobre" esses mesmos objectos e construindo estruturas de conhecimento então, segundo dois desenvolvimentos (caminhos) paralelos. Um destes desenvolvimentos vai de visual-espacial para o verbal-dedutivo; o outro é constituído por encapsulações sucessivas de processo-para-conceito, acompanhadas do uso de símbolos manipuláveis. E o uso destes dois desenvolvimentos chega a inspirar pensamento criativo baseado em objectos definidos formalmente e em prova sistemática. A figura 1 representa a ideia de Tall sobre os tipos de desenvolvimento matemático avançado.

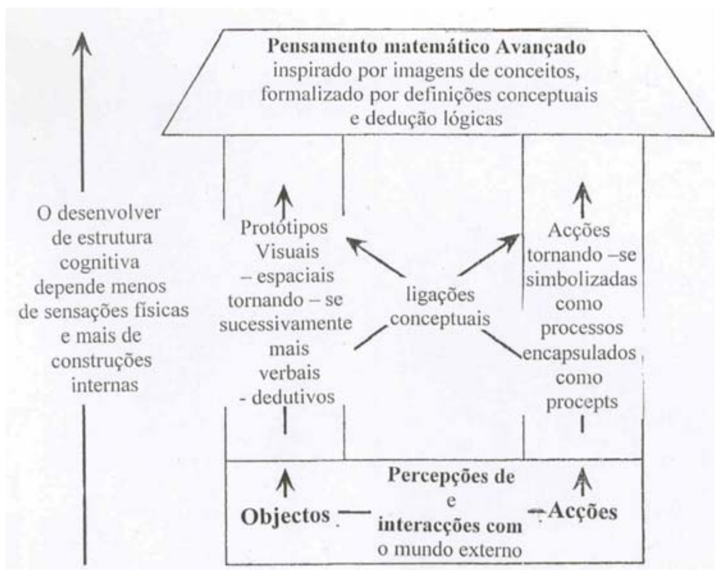


Figura 1. Esboço do desenvolvimento cognitivo da criança
ao matemático investigador (Tall)

Gray (1999) diz que o termo "pensamento matemático avançado" tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Acrescenta ainda que esse termo também se aplica ao pensar dos estudantes a quem lhes foi apresentado definições e teoremas criados por outros e se lhes pede a construção dum conceito. As actividades cognitivas envolvidas no pensamento matemático avançado, diz Gray podem diferir grandemente de um indivíduo para outro, incluindo aqueles que constróem de imagens e intuições à maneira de um Poincaré e aqueles outros, tal como um Hermite, mais logicamente orientados para a dedução simbólica. Os conhecimentos matemáticos obtidos, para estes estilos diferentes de pensamento matemático avançado, são muitos diferentes e enfrentam sequências diferentes de reconstrução cognitiva, embora ambos acabem na prova formal. Quando os estudantes estão envolvidos a usar as definições que lhes foram fornecidas, tentando dar significado, uns, podem criar estruturas formais poderosas apoiadas por uma variedade de imagética visual, cinestésica ou outra. Estes estudantes podem estar em conflito contínuo quando reconstroem a imagética informal para dar um significado rico à teoria formal. Outros estudantes podem concentrar-se antes na definição, usando-a e repetindo-a quando necessária até a escrever sem esforço, assim o foco está nas definições e nas deduções. Para este segundo tipo de estudantes, as imagens visuais e as intuições jogam um papel menos proeminente. Esta forma de abordagem pode produzir uma imagem formal do conceito capaz de usar as definições e provar teoremas quando se lhes é pedido.

Estas três ideias sobre pensamento matemático avançado parecem fazer transparecer diferentes significados, uma quer dar relevo à importância dos processos envolvidos e suas interacções para a compreensão da Matemática avançada, outra tende a dar uma perspectiva da construção matemática do conhecimento humano e a outra refere-se aos tipos de actividade cognitiva que sustentam tal pensamento.

Características do pensamento matemático avançado e seu contraste com o pensamento matemático elementar

Se no pensamento matemático avançado nos focarmos na definição de conceitos e o no ciclo completo de actividade em pensamento matemático, destacamos as palavras de Gray (1999) que aponta que em Matemática avançada, as definições dos conceitos são formuladas e os conceitos formais são construídos por dedução. Ou seja, para os conceitos matemáticos avançados são dadas propriedades como definições axiomáticas e a natureza do próprio conceito é construída estabelecendo as propriedades por dedução lógica. Os estudantes manejam o uso de definições do conceito de várias maneiras, ou reconstruindo as suas compreensões para chegar à teoria formal ou construindo por dedução, das definições do conceito, uma compreensão independente das formalidades.

Gray reforça que a Matemática avançada toma a noção de *propriedade* como fundamental, usando propriedades em definições de conceitos, dos quais é construída a teoria formal sistemática.

Relativamente ao ciclo completo de actividade em pensamento matemático avançado Tall, (1991) identifica-o desde o acto criativo de considerar um contexto problema em pesquisa Matemática que conduz à formulação criativa de conjecturas até ao estádio final de refinamento e prova. Tall apela também para uma clara compreensão deste ciclo onde realça a necessidade para começar com conjecturas e debate, a necessidade para construir significado, para reflectir sobre definições formais, construir o objecto abstracto cujas propriedades são aquelas e só aquelas que podem ser deduzidas da definição.

Estes aspectos diferem no pensamento elementar matemático?

Tall (1991) postula que muitas das actividades que ocorrem no ciclo completo de actividade em pensamento matemático avançado também ocorre na resolução de problemas da Matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um factor que distingue o pensamento matemático avançado. Gray (1999), referindo-se aos conceitos matemáticos elementares, diz que estes têm propriedades que podem ser determinadas actuando sobre eles, isto é as propriedades são manipuladas dos objectos, enquanto que os objectos em pensamento matemático avançado são criados de propriedades (axiomas).

Onde está a transição do pensamento matemático elementar para o avançado?

Van Hiele, citado em Schalkwijk e outros (2000), diz que não há nenhuma transição gradual dicotómica da Matemática elementar para a Matemática avançada, pois são níveis separados de pensamento, enquanto que David Tall (1991) distingue, dois níveis de Matemática: o nível elementar e o nível avançado. Ele diz que o movimentar do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado envolve uma transição significativa: a passagem do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica baseada em definições. É a transição da coerência da Matemática elementar para a consequência da Matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através das deduções das definições formais. Tall (1995) ainda acrescenta que a linha separadora entre o pensamento matemático avançado e o pensamento matemático elementar é aquela que localiza a mudança cognitiva ocorrida com a introdução do método axiomático, onde os objectos têm um estado cognitivo novo como conceitos definidos construídos de definições verbais. Também Gray (1999) referencia a transição para o pensamento matemático avançado, dizendo que o mover da construção objecto $\rightarrow$ definição para a construção definição $\rightarrow$ objecto é considerado uma parte essencial da transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. Esta construção definição $\rightarrow$ objecto envolve seleccionar e usar critérios para as definições de objectos e isto pode inverter as experiências anteriores de relações e envolve uma transposição da estrutura do conhecimento.

Há aspectos do pensamento matemático avançado que são específicos para a aprendizagem de matemática avançada?

Robert e Schwarzenberger (1991) apontam que a pesquisa sobre características únicas que são específicas da aprendizagem de Matemática avançada não é conclusiva; muitas características propostas para a aprendizagem de Matemática avançada são vistas como mostrando uma forte continuidade da aprendizagem da Matemática das crianças mais jovens, contudo parece que, quando todas essas características são tomadas em conjunto, há uma mudança quantitativa: mais conceitos novos a ensinar em menos tempo, necessidade cada vez maior de capacidade de reflexão, maior capacidade de abstracção, menos problemas significativos, mais ênfase na prova, necessidade cada vez maior de uma aprendizagem versátil, maior necessidade de um controlo pessoal sobre a aprendizagem. A confusão provocada por definições novas coincide com a necessidade de um pensamento dedutivo mais abstracto. Estas mudanças quantitativas tomadas em conjunto geram uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. Estudos sobre as capacidades dos estudantes manejarem as estruturas lógicas em particular a negação de frases envolvendo quantificadores (Barnard, 1995), foram pouco conclusivos na correlação do progresso na transição de uma visão descritiva da Matemática para uma de definição e dedução.

Processos mentais envolvidos no pensamento matemático avançado

A natureza do pensamento matemático está inextricavelmente interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. O pensamento matemático envolve diferentes processos de pensamento tal como é assinalado por Dreyfus (1991): processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades (o processo de representar-visualização, a mudança de representações e a tradução de uma formulação de um problema ou frase matemática para uma outra formulação, a modelação), processos envolvidos na abstracção (generalização e síntese são pré-requisitos básicos para a abstracção), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e ainda processos que podem incluir entre outros a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição. Dreyfus (1991) expressa também que:

- Em muitos processos, relevantes para a compreensão da aprendizagem e do pensamento em Matemática, os seus aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. Por exemplo, quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo estamos provavelmente a gerar uma imagem mental visual desse gráfico, isto é, nós estamos a visualizar a função duma forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. É precisamente esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e pensamento em Matemática avançada.

- Muitos dos processos mentais da Matemática avançada estão já presentes no pensamento das crianças sobre conceitos elementares da Matemática, por exemplo no número e valor de posição. Os processos mentais não são exclusivamente usados em Matemática avançada nem são exclusivamente usados na Matemática. Abstracções são feitas em física, representações são usadas em psicologia, análises são usadas em economia e visualização em arte.
- Uma característica que identifica o pensamento avançado do elementar é a complexidade e como ela é tratada; assim processos poderosos são aqueles que permitem gerir essa complexidade como a abstracção e a representação.

Visualização

Vamos agora analisar o processo do pensamento matemático que intervém com mais incidência no estudo da geometria, aquilo que é normalmente designado por visualização. Visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti e Pesci (1994) chamam à visualização o pensar que é espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991) dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes. Na literatura, definições e reflexões sobre visualização, evidenciam diferentes significados ligados quer à Matemática, à investigação científica, à Educação Matemática e à Psicologia. Porém communmente concordam que visualização se foca na percepção e na manipulação de imagens visuais. A par do termo "visualização" aparece normalmente definido o termo "pensamento visual" (Hershkowitz, e Parzysz, e Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Senechal, 1991). Por exemplo, para Senechal "visualização" significa em linguagem popular "percepção espacial" e assim é a reconstrução mental da representação de objectos a 3 dimensões e "pensamento visual" é um termo mais lato e é o que fazemos quando reconhecemos rapidamente e manipulamos automaticamente símbolos de qualquer espécie. Mariotti (1995) induz a distinção entre visualização, a qual ela considera trazer à mente imagens de coisas visíveis, e pensamento visual, o pensar sobre coisas abstractas que originalmente podem não ser espaciais, mas podem ser representadas na mente de alguma forma espacial. Tendo então presente a ambiguidade da palavra visualização, parece-nos fulcral tentar identificar e clarificar, tanto quanto possível, as maneiras de encarar o pensamento visual-espacial, os conceitos, processos, capacidades espaciais envolvidas nos aspectos visuais-espaciais do pensamento matemático.

Modos de pensamento associados à visualização

Processos mentais e modos de pensamento visual-espacial

Uma componente do pensamento matemático é o pensamento geométrico que envolve trabalhar sobre imagens quer estas sejam pensadas de experiências interiorizadas do mundo ou de construções mentais sobre ele (ATM,1982). Os matemáticos também se envolvem em raciocínio espacial não geométrico, em actividades como colorir mapas e trabalhar com nós, grafos, máquinas de estados finitas, etc. Estas componentes do pensamento matemático envolvem então o pensamento visual-espacial que defino como o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objectos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas. Considero também o pensamento visual-espacial como um modo de pensamento que, segundo Clements (1981), é essencialmente não verbal, envolvendo representações internas que podem ser descritas como imagens de uma natureza muitas vezes visual e principalmente espacial.

Vamos tentar esboçar um modelo de pensamento visual-espacial (figura 2), distinguindo três modos diferentes: o pensamento visual-espacial resultante da percepção; o pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e construção de relações entre imagens; o pensamento visual-espacial que está ligado à transmissão e comunicação, representação isto é, à exteriorização do pensamento.

Modos de pensamento visual-espacial	**Definição de cada modo de pensamento visual-espacial**
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global.	Operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial, de memória.
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/PVR), pensamento dinâmico.	Operações intelectuais relacionadas com manipulação, transformações de ideias, conceitos e modelos.
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	Operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de ideias, conceitos e métodos.

Figura 2. Modos de pensamento visual-espacial, respectivas definições.

O pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP) será o modo inicial (primário, mais próximo das sensações) do pensamento visual-espacial. O termo percepção aqui usado não significa só o que é recebido pelos sentidos (fundamentalmente a visão) sempre que estimulados pelo ambiente exterior, nem aquele termo que inclui qualquer tipo de conhecimento sobre um assunto do mundo exterior, mas sim uma referência activa da mente onde o registo do material estímulo não é passivo(Arnheim, 1969). O pensamento visual-espacial resultante da percepção poderá ser construído pelo sujeito partindo de sensações e utilizando a informação adquirida com a experiência. Este modo de pensamento visual-espacial envolve experiências de concentração mental, de controlo e experiências de observação. As experiências de observação envolvem percepção e interpretação são medições que dependem da experiência passada, de aspectos específicos da nossa cultura, portanto o que vemos, depende do que trazemos à situação. O modo de raciocínio visual-espacial resultante da percepção usa frequentemente um tipo de imagética que, segundo Brown e Presmeg (1993), inclui fundamentalmente imagens concretas, de memória e cinestésicas[1]. Os processos de pensamento envolvidos podem ser os que a figura 3 ilustra:

Modo de pensamento visual-espacial	**Processos mentais associados**
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global.	- Intuições primárias - Construções de imagens - Re-apresentação de imagens - Reconhecimentos visuais - Interpretação - Identificação de objectos, modelos, formação de um "gestalt" - Apreensão global de uma representação geométrica - Memorização de uma exposição lógica - Geração de conceitos - Iterações - Primeiras inferências intuitivas

Figura 3. Modo de pensamento visual espacial e processos mentais associados

Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e/ou da construção mental de relações entre imagens (PVM-PVR). Este novo modo de pensamento visual-espacial liga-se fundamentalmente a transformar imagens visuais, executar manipulações mentais espaciais e a construir relações entre imagens visuais. Ainda, seguindo Brown e Presmeg (1993), as imagens visuais não são estáticas; assim os alunos usam imagética dinâmica e imagética padrão. A imagética dinâmica envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem visual concreta. Imagética padrão é um tipo de imagética em que pormenores concretos são desprezados e puras relações são ilustradas num esquema visual-espacial. Johnson usou o termo "imagem-esquema" para descrever uma construção semelhante a imagética padrão, Presmeg (1992). Os processos mentais que podem estar presentes, neste modo de pensamento, são descritos na figura 4:

Modo de pensamento visual-espacial	**Processos mentais associados**
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/PVR), pensamento local, pensamento dinâmico.	- Abstracção reflexiva - Intuições secundárias[2] - Descoberta de relações entre imagens, propriedades, factos. - Transformações mentais - "Unitizing"[3] - Planificações mentais - Verificação - Comparação - Criação de modelos - Reconstrução mental da visão de um objecto - Generalizações - Transferência - Previsão mental[4]

Figura 4. Modo de pensamento visual-espacial, e processos mentais associados

Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE). Este modo de pensamento tem diferentes aspectos: está ligado ao processo pelo qual as representações mentais se exteriorizam, à comunicação e disseminação de ideias, à construção de argumentação, à descrição da dinâmica mental. Para comunicar as suas imagens, os alunos podem construir modelos, desenhos, figuras e gráficos (usando computador ou não) e usar descrições verbais. Este modo de pensamento visual-espacial confia fundamentalmente na linguagem. Os processos mentais que podem estar presentes neste modo de pensamento visual-espacial são os indicados na figura 5.

Os três modos de pensamento visual-espacial, que nos parece importante distinguir, podem por vezes suceder-se de forma linear, (no sentido que ao modo PVP se segue o modo designado por PVM/PVR, e depois a este sucede o modo PVE). O pensamento visual-espacial é um processo de andar de uns modos para outros de acordo com o esquema da figura 6. Nesse esquema os números de 1 a 6 querem representar possíveis interacções ou ligações entre os diferentes modos de pensamento visual-espacial. Por exemplo a ligação 2 quer dizer que o pensamento

Modo de pensamento visual-espacial	Processos mentais associados
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	- Acções, representação, ligações entre representações, modelos (desenhos, esboços, construções) - Codificação e descodificação por ex: tradução em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica. - Descrição da dinâmica mental - Construção de argumentação - Construção de conjecturas - Discussão de argumentação visual

Figura 5. Modo de pensamento visual-espacial e processos mentais associados

visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento pode anteceder o pensamento visual-espacial resultante da percepção: por exemplo, quando construímos uma planta ou maquete, ou usamos material multibásico ou utilizamos um ambiente computacional, essas representações ou acções resultantes da exteriorização do pensamento podem facilitar a aquisição de um dado conceito ou estrutura. Outro exemplo: o par de ligações ou sequências (3,4) o qual quer designar que ao modo PVP pode suceder o modo designado por PVM/PVR e que a este modo de pensamento pode suceder o modo PVE: é o caso da situação em que interpretamos a linguagem duma figura geométrica, manipulamos as imagens mentais aí usadas, associamos com experiências anteriores, e traduzimos o resultado em informação verbal ou numa construção. O modelo de pensamento visual-espacial que estou a delinear usa dois mecanismos fulcrais para a construção de significado matemático: a imagética visual e as capacidades espaciais. A definição de imagética visual que vamos usar neste modelo visual-espacial, apoia-se na definição de Presmeg (1995) "esquema mental que ilustra informação visual ou espacial". A imagética não está restrita à visão tradicional da figura na mente, inclui também formas vagas e mais abstractas de imagética. Vamos usar o termo "capacidades espaciais" no sentido de competências ensináveis com possibilidade de serem desenvolvidas dentro de cada indivíduo relacionadas com as tarefas que se executam no ambiente de sala de aula. Estas capacidades não dependem necessariamente do estádio de desenvolvimento de cada indivíduo.

Tarefas geométricas proposta a crianças da escola elementar e modos de pensamento visual-espacial

Vou, com algumas tarefas geométricas propostas a alunos da escola elementar, tentar exemplificar algumas interacções ou ligações entre os diferentes modos do pensamento visual-espacial, de acordo com o modelo acima descrito e que parecem estar presentes nas actividades dos respectivos alunos.

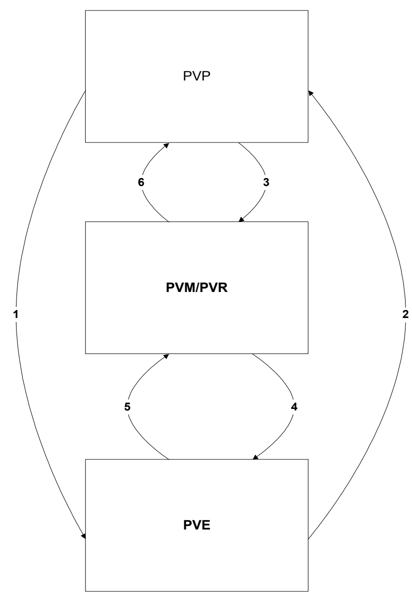


Figura 6. Modelo de pensamento visual-espacial

Tarefas ligadas aos movimentos rígidos: virar, deslizar e rodar

As tarefas que vou ilustrar, faziam parte de testes (pré e pós-teste) administrados a alunos do 4º ano do Ensino Básico num estudo que quer entender os modos do pensamento visual-espacial dos alunos no contexto da exploração e compreensão das transformações geométricas euclidianas, isometrias (translação, reflexão e rotação) através dos movimentos rígidos (virar, deslizar e rodar). O pós-teste foi passado, só quando esses alunos tinham sido sujeitos a um ambiente de ensino-aprendizagem informal que deu ênfase às transformações geométricas, usando materiais tecnológicos ou não. Ainda os testes (pré e pós) foram administrados aos alunos individualmente como de entrevistas se tratassem e registadas em vídeo. A primeira tarefa que vou ilustrar, designada por Tarefa V (figura 7), compreende duas partes em que com a segunda parte da tarefa, se tenta verificar o raciocínio que o aluno usou para responder à primeira parte da tarefa.

O aluno A(g) e a Tarefa V no pós teste:

I: Qual das 3 peças é a mesma que a de cima? Que te parece?
A(g):Esta (indicando a correcta).
I: Porquê?

A(g): Se eu virar ao contrário (e roda o corpo e as mãos). Isto aqui é a bola.
I: Virar? É isso o que queres dizer? O que fazias à peça?
A(g): Rodar uma volta.
I: Uma volta ? Ficas no mesmo sítio.
A(g): Um quarto de volta.
I: Rodavas um quarto de volta, e depois?
A(g): Rodava meia volta. A bolinha fica aqui e o quadradinho fica ali.
I: Se pensares da mesma maneira, qual destas 3 é a mesma que a de cima?
A(g): Esta, rodava meia volta. A bolinha fica aqui e o quadradinho... (vai apontando).
I: Rodavas em torno de que ponto?
A(g): Em torno deste (resposta certa).

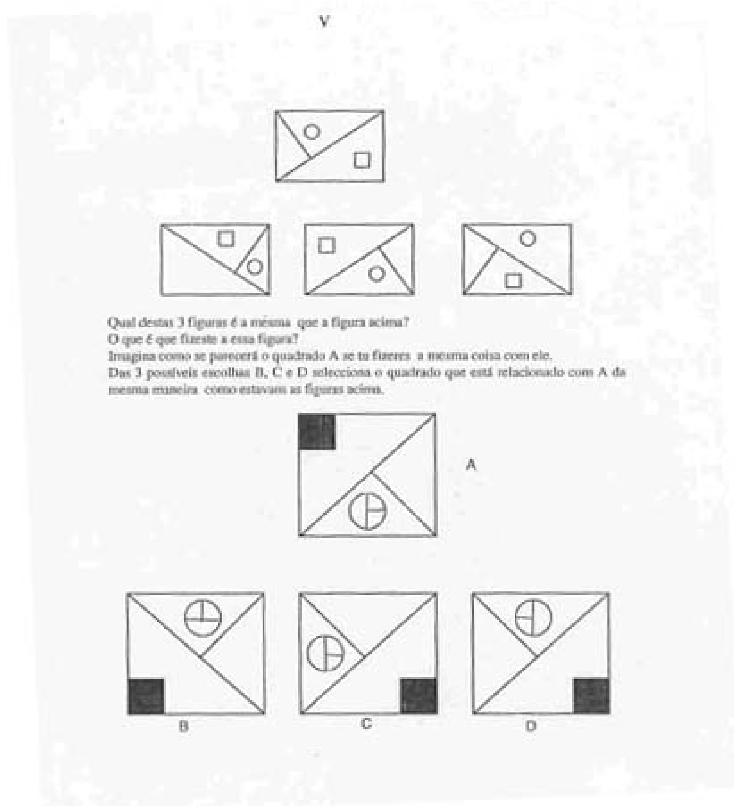


Figura 7. Tarefa V

Pelos gestos e verbalizações observados nas transcrições dos registos do aluno A(g), parece que o seu modo de raciocinar está próximo duma sequência (3,4) já referida: ao pensamento visual-espacial resultante da percepção segue o pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e finalmente segue-se o pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento através da descrição da sua dinâmica mental.

Uma outra tarefa feita pelos alunos, é a que vou designar por Tarefa II (figura 8), com a qual quero ilustrar que: "o aluno pode na sua forma de pensamento visual-espacial usar algumas vezes a relação (3,4) mas isso não significa que a não possa abandonar, quando encontra algum obstáculo".

O aluno A(a), e a Tarefa II no pós-teste:

I: Com estas 4 peças, achas que podes fazer uma casa como esta?
A(a): Vou fazer de cabeça (ele tenta medir com os dedos). Acho que sim.
I: Como é que tu as punhas?
A(a): Punha esta cá em baixo, rodava esta de 180º e punha aqui. Também rodava esta de 180º. Aquela punha-a aqui encostada (ia apontado as peças). (Hesita... Está inseguro...). Se calhar não consigo.
I: Eu dou-te as peças. Se calhar tu tens razão.
A(a): (manipula as peças...). Afinal não tenho razão. Não se pode fazer.

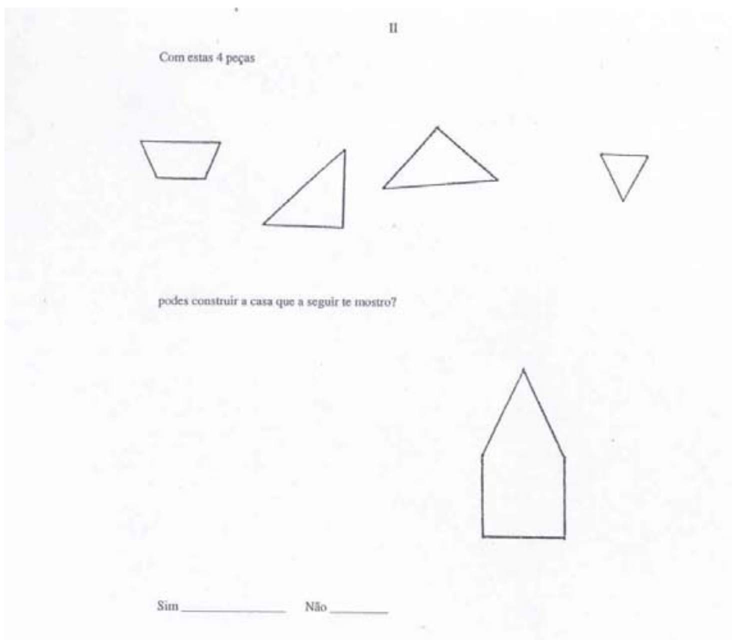


Figura 8: Tarefa II

Nesta tarefa, inicialmente, o aluno no seu modo de pensar usa uma sequência de modos de pensamento que designo por (3,4), mas essa forma de pensar é quebrada quando ele está a descrever a sua dinâmica mental, pois encontra um obstáculo cognitivo. Depois parece surgir uma nova ligação entre modos de pensamento visual-espacial, a já designada ligação 2, quando por sugestão da investigadora e com a ajuda de manipulativos que lhe são fornecidos, o aluno tenta reproduzir a sua dinâmica mental. Acções resultantes da exteriorização do pensamento (PVE) tentam então facilitar a aquisição de uma certa estrutura geométrica (PVP) . Contudo o aluno não reavalia a sua dinâmica mental.

Tarefa ondeestá presente o pensamento "proceitual"

O professor mostrou o seguinte modelo de pirâmide (ver figura 9) à turma e perguntou: "Como a cartolina se parece antes de eu a dobrar para poder construir esta pirâmide?" O Frederico (8 anos) desenhou um quadrado e adicionou 3 triângulos aos seus lados (ver figura 10). Ele depois com as mãos dobra a pirâmide e diz,"há um buraco, não é?"

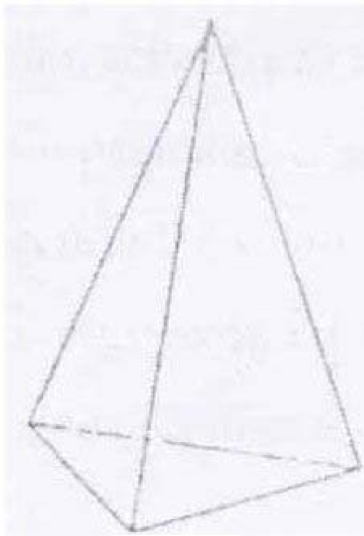


Figura 9.

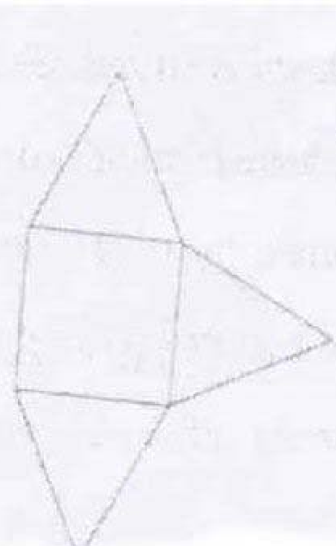


Figura 10.

O aluno para resolver a tarefa proposta, começou por interpretar a linguagem da figura geométrica, depois manipulou as suas imagens mentais, representou através dum desenho a sua dinâmica mental e ainda reavalia essa mesma dinâmica mental. Assim, no seu modo de pensar visual-espacial, o aluno parece seguir o par de ligações (3,4) de modos de pensamento visual-espacial. A tarefa acima exibida, foi escolhida por Meissner e Pinkernell (2000) para mostrar uma situação de sala de aula onde as operações mentais visuais-espaciais não são a parte dominante do raciocínio espacial, mas onde o pensamento proceitual "proceptual" parece estar presente, contrariando então Tall (1991) que defende que os conceitos geométricos avançados não resultam de encapsulamentos de procedimentos básicos, isto é que não há proceitos[5] em geometria. Meissner (2001) refere o proceito espacial "planificação" onde segundo ele o processo de "dobragem" foi encapsulado para o conceito estático de planificação. A "planificação" seria pois um proceito em raciocínio espacial. A própria "planificação" é o símbolo. Uma interpretação do símbolo é procedural "dobragem".

As actividades exibidas pelos alunos aquando da execução das três tarefas acima apontadas, mostram certos tipos de interacções entre os três modos de pensamento visual-espacial, fundamentalmente o par de ligações designado por (3,4). Pode-se distinguir na forma como os alunos actuam, os 3 modos de pensamento visual-espacial por mim diferenciados, PVP, PVM/PVR e PVE em que ao modo PVP se seguiu o modo PVM/PVR e depois a este se sucedeu o modo PVE. Dos processos cognitivos que os alunos nos pareceram manifestar nas suas actividades para resolverem as respectivas tarefas realço: abstracção, transformações mentais e previsão mental. Esses processos são poderosos para gerir a complexidade do pensamento matemático. Se olharmos novamente para as actividades do aluno só na resolução da última tarefa mencionada neste artigo e, se as olharmos agora à luz do modelo do "pensamento proceptual" que processos cognitivos estariam presentes? Seriam os mesmos mencionados antes? Por exemplo, relativamente à abstracção, que aspectos específicos da abstracção poderiam ser reconhecidos ou valorizados? Que tipos de dificuldades os alunos têm quando têm de lidar com diferentes formas de abstracção. Como vamos saber que eles abstraíram? O modelo de pensamento visual-espacial sugerido, quando aplicado em diferentes contextos, poderá contribuir de algum modo, por exemplo, para averiguar diferentes formas de abstracção nos diferentes modos de pensamento? Seria fulcral que estes aspectos fossem tratados.

Notas

[1] Imagética concreta pode ser pensada como "figura na mente", mas não a mesma para todos; imagens de memória consideradas imagens de memória por fórmulas; imagens cinestésicas envolvem actividade muscular de algum tipo (Brown e Presmeg, 1993).

[2] Intuições que são desenvolvidas como resultado de uma formação sistemática (Fischbein citado em Tall, 1991).

[3] Operação mental identificada como base de muita actividade matemática tanto geométrica como numérica e consiste em construir e coordenar unidades abstractas.

[4] É a tradução de *mental enactment*, expressão usada por Simon (1996) que se quer referir a um conjunto de operações mentais que permitem antecipar as transformações dos objectos e o conjunto dos resultados dessas operações.

[5] Proceito elementar é uma amalgama de 3 componentes: um *processo* que produz um *objecto* matemático e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo como um objecto, Tall, (1991). Por exemplo o termo “3+4” representa o número 7 em forma de soma. Representa também o processo de adicionar 4 a 3. Assim “3+4” representa tanto um conceito como um processo, daí o chamarem de proceito.

Referências

Arnheim, R. (1969). *Visual thinking*. London: University of California Press.

ATM (1982). *Geometric images*. Devon: ATM.

Barnard, T. (1995). The impact of “meaning” on students´ability to negate statements. In *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 3-10). Recife, Brasil

Brown, D., & Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in a mathematical reasoning. In *Proceedings of 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-144). Tsukuba, Japão.

Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. In *Proceedings of 5th Annual Conference of MERGA* (pp. 21-24). Adelaide, Austrália.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In *Proceedings of 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-48). Assis, Itália.

Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. In R. Sutherland & J. Mason (Orgs), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 3-17). New York, NY: Springer.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111-133.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs), *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.

Mariotti, A., & Pesci, A. (1994).Visualization in teaching-learning situations. In *Proceedings of 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 22). Lisboa.

Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Orgs) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 97-116). New York, NY: Springer.

Meissner, H. (2001). Encapsulations of a process in geometry. In *Proceedings of 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 359-366). Utrecht, Holanda.

Meissner, H., & Pinkernell, G. (2000). Spatial abilities in primary schools. In *Proceedings of 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3., pp. 287-294). Hiroshima, Japão.

Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative racionality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595-610.

Presmeg, N. (1995). Preference for visual methods: an international study. In *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 58-65), Recife, Brasil.

Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991). Research into teaching and learning. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp 125-139). Dordrecht: Kluwer.

Schalkwijk, L., Bergen, T., & Roolj, A. (2000). Learning to prove by investigations: a promising approach in Dutch secondary education. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 293-311.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. In J. Malkevitch (Org.), *Geometry`s future* (pp. 15-21). USA: COMAP.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Orgs), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). Washington, DC: Mathematics Association of America.

18

A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções

Ana Paula Mourão
Universidade do Minho
apmourao@math.uminho.pt

Neste texto far-se-á uma breve apresentação da teoria da reificação de Anna Sfard aplicada ao conceito de função. Esta autora defende que é possível encontrar, na génese da maioria dos conceitos matemáticos, duas formas de pensamento matemático fundamentalmente diferentes: uma concepção operacional – segundo a qual as noções matemáticas são concebidas como um produto de certos processos ou são identificadas com os próprios processos – e uma concepção estrutural – onde as noções matemáticas são tratadas como se se referissem a entidades como objectos reais, como estruturas estáticas permanentes que podem ser manipuladas e combinadas em estruturas mais complexas.

Com base nesta dualidade processo-objecto e na análise de exemplos históricos, Sfard propõe um modelo de desenvolvimento conceptual onde a concepção operacional é a primeira a emergir, permitindo depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objectos matemáticos. Esta transição, das operações para os objectos abstractos, é um processo longo e difícil, realizável em três fases: (i) interiorização – os processos são realizados em objectos matemáticos já familiares; (ii) condensação – os processos anteriores são transformados em unidades compactas; e (iii) reificação – é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objectos permanentes por direito próprio.

Este modelo também se aplica à aprendizagem individual. Neste sentido, discute-se a eventual complexidade do processo de reificação junto dos alunos do ensino secundário, relativamente ao conceito de função.

Introdução

A teoria da reificação de Anna Sfard fundamenta-se numa perspectiva que considera ser possível conceber a maioria dos conceitos matemáticos de duas formas fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objectos, e operacionalmente, como processos (Sfard, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). Antes de abordar cada uma destas concepções[1] matemáticas em particular, convém fazer uma breve referência à natureza da dualidade por elas constituída.

Subjacentes a esta perspectiva, parecem estar preocupações de natureza educacional que se prendem com a tomada de consciência do longo e, eventualmente, doloroso processo individual de construção dos conceitos matemáticos (Sfard, 1987, 1989, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). Reflectindo sobre a grande dificuldade que os alunos ainda sentem face à Matemática (apesar dos esforços feitos nas últimas décadas para a melhoria do seu ensino) a autora sugere que esta possa estar relacionada com a génese dos objectos matemáticos, comentando: "como na sua inacessibilidade a Matemática parece ultrapassar todas as outras disciplinas científicas, tem que haver alguma coisa realmente especial e única no tipo de pensamento envolvido na construção do universo matemático" (Sfard, 1991, p. 2).

De modo a analisar a influência desta peculiaridade na aprendizagem e no pensamento matemático, Sfard avança no sentido de uma teoria que envolva de uma forma unificada a Filosofia e a Psicologia da Matemática; que considere, em simultâneo e de igual modo, o 'pensamento matemático' enquanto processo (*mathematical thinking*) e enquanto produto (*mathematical thought*). Para isso, (i) procura "um *insight* filosófico sobre a natureza dos conceitos matemáticos" (nos discursos filosóficos dos matemáticos, relativos aos problemas fundamentais sobre a natureza do pensamento matemático, surgidos na viragem dos séculos XIX – XX) de modo a (ii) "compreender com profundidade os processos psicológicos no seio dos quais tais conceitos emergem" (Sfard, 1991, p. 2) (usando, neste caso, a epistemologia genética piagetiana). Elabora, assim, uma perspectiva de natureza ontológica-psicológica combinada (já que tenta considerar em simultâneo a 'natureza das entidades matemáticas' – aspecto ontológico – quando estas são 'compreendidas pelo indivíduo cognoscente' – perspectiva psicológica).

Para além disso, as duas concepções matemáticas referidas inicialmente são complementares pois "os termos 'operacional' e 'estrutural', embora extremamente diferentes, referem-se a facetas inseparáveis da mesma coisa" (Sfard, 1991, p. 9) sendo ambas necessárias e mutuamente dependentes.

Estes dois argumentos – natureza ontológica-psicológica combinada e complementaridade – justificam, segundo a autora, a existência de uma dualidade na abordagem dos conceitos matemáticos, permitindo-lhe demarcar-se de dicotomias sugeridas por outros autores que envolvem decomposições mais ou menos claras entre dois tipos de 'conhecimento/pensamento/compreensão matemáticos' (por exemplo: matemática abstracta/algorítmica ou declarativa/procedimental, pensamento matemático figurativo/operativo, compreensão matemática conceptual/procedimental ou instrumental/relacional, etc.[2]).

A dualidade processo–objecto

Quando olhamos para uma definição matemática, uma expressão algébrica, ou uma qualquer representação dum conceito matemático, o que cada um 'vê' – o esquema imagético[3] (Dörfler, 1991) que confere significado àquilo para que se está a olhar – depende não só do contexto da situação ou problema em que ela surge mas também do que somos capazes, no momento, de perceber.

Consideremos o exemplo analisado por Sfard e Linchevski (1994). A expressão algébrica $3\ (x + 5) + 1$ pode ser vista como: (i) uma descrição concisa de um processo de cálculo – uma sequência de instruções – 'adiciona 5 ao número considerado, multiplica o resultado por 3 e adiciona 1'; (ii) a representação de um determinado número – considerando o resultado dos cálculos efectuados, quando conhecido o valor de x, e não o processo de os efectuar; (iii) uma função – não representando, neste caso, um valor fixo mas reflectindo uma mudança, ou (iv) uma família de funções (se um dos coeficientes numéricos for substituído por uma letra, por exemplo, $a\ (x + 5)\ +1$) e (v) um conjunto de símbolos que, podendo não representar nada, constitui um objecto algébrico que pode ser manipulado de acordo com certas regras bem definidas (Sfard e Linchevski, 1994, pp. 191-192). Outras leituras poderiam, ainda, ser mencionadas.

Nesta análise, a mesma expressão permitiu identificar diferentes 'objectos' matemáticos – número, função, família de funções – e, para além disso, evocou uma interpretação de natureza diferente – "quando foi lida como uma série de operações, foi o processo de cálculo, em vez do objecto matemático, que deu significado aos símbolos" (Sfard e Linchevski, 1994, p. 193). Não obstante a possibilidade idiossincrática das interpretações (existiriam outras), este exemplo parece evidenciar a existência de dois modos essencialmente diferentes de ver uma entidade[4] matemática: (i) uma concepção estrutural segundo a qual as noções matemáticas são tratadas como se se referissem a entidades como objectos reais, como estruturas estáticas permanentes que existem algures no espaço e no tempo, que podem ser manipuladas de acordo com certas regras e combinadas em estruturas mais complexas; (ii) uma concepção operacional onde as noções matemáticas são concebidas como um produto de certos processos que é necessário efectuar, ou são identificadas com os próprios processos (Sfard, 1991, 1992).

Vários exemplos de conceitos que podem ser definidos – e portanto concebidos – estrutural ou operacionalmente (Sfard, 1991, p. 5) encontram-se na figura 1.

	Estrutural	**Operacional**
Função	Conjunto de pares ordenados (Bourbaki, 1934)	Processo computacional ou Um método bem definido de obter um sistema a partir de um outro (Skemp, 1971)
Simetria	Propriedade de uma figura geométrica	Transformação de uma figura geométrica
Número natural	Propriedade de um conjunto ou A classe de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade finita	0 (zero) ou qualquer número que resulte da adição de um com um número natural ([o resultado de] contar)
Número racional	Par de inteiros (um elemento de um conjunto de pares especialmente definido)	[o resultado da] divisão de inteiros
Circunferência	A localização de todos os pontos equidistantes de um dado ponto	[a curva obtida por] rotação de um compasso em torno de um ponto fixo

Figura 1.

Abordar uma noção matemática segundo uma ou outra perspectiva depende, como já foi referido, do que constitui o foco de atenção do indivíduo, no momento, e da sua preparação e/ou capacidade para lidar com a referida noção. Assim, uma entidade matemática será um 'objecto' para o indivíduo que for capaz de a reconhecer num ápice, de a tratar como coisa real e de a manipular como um todo (sem se preocupar com o(s) processo(s) que eventualmente lhe deu(deram) origem). Essa mesma noção matemática será considerada uma "entidade potencial mas não actual" enquanto for interpretada como um processo. Deste modo, "enquanto a concepção estrutural é estática, instantânea e integrativa, a operacional é dinâmica, sequencial e detalhada" (Sfard, 1991, p. 4).

Convém relembrar que, segundo a autora, estas duas concepções não são mutuamente exclusivas. "Embora ostensivamente incompatíveis, elas são de facto complementares" (Sfard, 1991, p. 4) e indispensáveis para uma compreensão profunda da Matemática.

Esta dualidade processo–objecto pode ser percebida em vários tipos de representações simbólicas e também nas descrições verbais ou definições dos conceitos[5] (Sfard, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). Vejamos como três representações diferentes da correspondência $y=3x^4$ podem encorajar diferentes abordagens (Sfard, 1991) (figura 2).

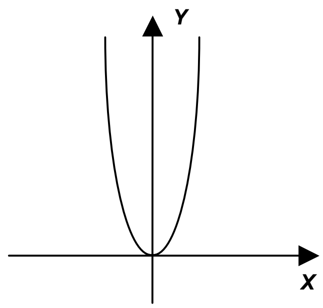
Gráfico	**Expressão algébrica**	**Programa de computador**
	$Y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y * X 50 NEXT I 60 Y = 3 * Y

Figura 2. Diferentes representações de uma função (Sfard, 1991, p. 6)

Neste exemplo, a representação gráfica parece apelar a uma concepção estrutural já que as "infinitas componentes da função são combinadas numa linha contínua" podendo ser "alcançadas simultaneamente como um todo integrado" – a parábola (Sfard, 1991, p. 6). O programa de computador, por outro lado, encoraja uma concepção operacional, pois apresenta a função como uma sequência de acções. Por sua vez, a representação algébrica parece permitir facilmente as duas abordagens: a operacional – enquanto descrição concisa de alguns cálculos – e a estrutural – enquanto relação estática entre duas grandezas (Sfard, 1991). A figura 3 resume as características principais das duas abordagens.

A dualidade processo–objecto é defendida por Anna Sfard como inerente à maioria dos conceitos matemáticos, quer sob o ponto de vista histórico – onde a análise de vários exemplos lhe permitiram concluir que muitas noções matemáticas foram concebidas operacionalmente antes de terem sido definidas estruturalmente (Sfard, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994), quer do ponto de vista psicológico – onde a evidência aponta no mesmo sentido, isto é, a concepção operacional é a primeira a emergir, permitindo depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objectos matemáticos. Esta transição, das operações para os objectos abstractos, é um processo longo e difícil, realizável em três fases: (i) interiorização – os processos são realizados em objectos matemáticos já familiares; (ii) condensação – os processos anteriores são transformados em unidades compactas autónomas; e (iii) reificação – é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objectos permanentes por direito próprio (Sfard, 1987, 1989, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). Comum às duas perspectivas está o princípio básico da precedência da concepção operacional sobre a estrutural[6].

	Concepção operacional	**Concepção estrutural**
Características gerais	A entidade matemática é concebida como um produto de certo processo ou é identificada com o próprio processo	A entidade matemática é concebida como uma estrutura estática – como se fosse um objecto real
Representações internas	É apoiada por representações verbais	É apoiada por imagética visual
O seu lugar no desenvolvimento de conceitos	Desenvolve-se na primeira fase da formação do conceito	Desenvolve-se a partir da concepção operacional
O seu papel nos processos cognitivos	É necessária mas não suficiente para uma eficaz aprendizagem e resolução de problemas	Facilita todos os processos cognitivos (aprendizagem, resolução de problemas, etc.)

Figura 3. Concepções estrutural e operacional: sumário (Sfard, 1991, p. 23)

Os próximos parágrafos ilustram um caso particular, o papel das concepções operacional e estrutural na formação do conceito de função[7], primeiro sob o ponto de vista histórico, depois, numa perspectiva psicológica.

Perspectiva histórica

O desenvolvimento histórico do conceito de função é evocado pela autora com um objectivo duplo: exemplificar a existência da já mencionada dualidade conceptual na génese dos conceitos matemáticos e mostrar a precedência da concepção operacional sobre a estrutural. Reclama-se, assim, que este modo de conceber as entidades matemáticas não é apenas uma característica do processo de aprendizagem do jovem, que face a um produto acabado o interpreta numa vertente de noviço, mas é algo inerente à construção do edifício matemático: a concepção operacional emerge primeiro e os objectos matemáticos desenvolvem-se depois, através da reificação dos processos (Sfard, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994).

O percurso em direcção a este duplo objectivo leva Anna Sfard a considerar a "turbulenta biografia do conceito de função como uma longa luta de três séculos pela reificação" (Sfard, 1992, p. 62). Analisemos os argumentos apresentados.

A ideia central ao conceito de função, embora embrionária por mais de 4000 anos, tomou forma, tendo emergido de maneira explícita, no final do século XVII. Segundo Kleiner (1989), a sua evolução, intimamente associada aos problemas do cálculo e da análise estudados na época, fica-se a dever essencialmente à extensão do conceito de número (real e complexo), à criação da álgebra simbólica, ao estudo do movimento como o problema central das ciências, à junção da álgebra e da geometria, etc. A matematização das ciências e a invenção da geometria analítica permitiram uma perspectiva dinâmica das relações funcionais, a introdução de variáveis e a expressão das relações entre variáveis através de equações (Kleiner, 1989). Youschkevitch (1976) considera três fases principais, no desenvolvimento da ideia de função, até meados do século XIX: (i) Antiguidade: estudam-se casos particulares de dependência entre duas quantidades mas as noções de 'quantidades variáveis' e 'função' ainda não aparecem isoladas; (ii) Idade Média: estas noções são definitivamente expressas pela primeira vez nas formas geométrica e mecânica … mas cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico; (iii) O Período Moderno: com início nos finais do século XVI e, particularmente, no século XVII – começam a prevalecer as expressões analíticas de funções; em meados do século XVIII, esta interpretação (função como expressão analítica) mostra-se inadequada e é substituída por uma nova definição geral; na segunda metade do século XIX, esta definição geral "permitiu o desenvolvimento da teoria de funções mas foi traída por dificuldades lógicas que no século XX fizeram com que a essência do conceito de função fosse reconsiderada" (Youschkevitch, 1976, p. 39).

Segundo Sfard, as primeiras descrições do conceito, fortemente associadas a uma álgebra simbólica então recente, são já uma tentativa no sentido da reificação (Sfard, 1991). As definições de Jean Bernoulli (1667-1748) – "Chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir desta grandeza variável e constantes"[8] (Correia, 1999, p. 9) – e de Leonhard Euler (1707-1783) – "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer a partir da quantidade variável e de números ou de quantidades constantes"[9] (Correia, 1999, p. 10) – usaram entidades algébricas para impor, a quantidades variáveis, a estabilidade de objectos (Sfard, 1992).

Contudo, esta estabilidade viria a revelar-se insuficiente para garantir o estatuto de coisa real à noção de função. A 'expressão analítica', em torno da qual ambas as definições estão organizadas, embora permitisse o desenvolvimento de uma concepção estrutural (a 'expressão analítica' pode ser entendida como 'uma relação estática entre duas grandezas'), envolvia um conceito – o de variável – que parecendo já (na época) um objecto real, sobre o qual podiam ser realizados processos (funções), tinha, afinal, escapado à reificação (Sfard, 1991): falar de letras como se fossem coisas reais não parecia matematicamente puro; o símbolo deveria esconder alguma entidade abstracta cuja natureza não era, de todo, clara (Sfard, 1992).

O problema da não reificabilidade das definições de Bernoulli e Euler residiu, exactamente, no facto de estas se basearem na noção de variável. Euler, tendo eventualmente consciência de que as noções subjacentes à sua definição original eram um tanto ou quanto vagas, substituiu o termo 'expressão analítica' por outros, de modo a evitar a noção de variável (Sfard, 1991, 1992). A sua nova definição (de 1755):

> Se algumas quantidades dependem de outras quantidades, de modo que se estas variam as primeiras variam, então chamamos às primeiras quantidades funções das últimas. Esta designação é de natureza mais ampla e compreende qualquer método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de algum modo de x, ou por ele são determinadas, são chamadas funções de x. (Correia, 1999, p. 65)

Esta última definição, comenta Sfard, é "explicitamente operacional" (Sfard, 1992, p. 63) pois enfatiza a dimensão dinâmica do conceito de função (Sfard, 1989).

O conceito de variável foi atravessando diversas interpretações sem que nenhuma lhe tenha permitido atingir a posição de objecto matemático legítimo. Usando a terminologia desta autora, o conceito acabaria por ser rejeitado por ser inerentemente dependente do tempo[10] e, por isso, ser não reificável (Sfard, 1992).

Uma outra tentativa de converter processos em objectos foi a identificação de funções com curvas bidimensionais (Sfard, 1992). No entanto, refere a autora, nem as expressões algébricas nem as representações gráficas foram muito eficazes nesse sentido.

Falhados estes três modos de reificação do conceito – uma noção puramente operacional de variável e duas representações, algébrica e gráfica, não eficazes – e tendo este adquirido um estatuto de noção indispensável, procurava-se ainda uma solução.

Esta solução foi iniciada pela ideia de 'correspondência arbitrária' de Peter Dirichlet (1805-1859), "uma correspondência não necessariamente baseada numa dependência algorítmica entre x e y"(Sfard, 1992, p. 64): "y é uma função de uma variável x, definida no intervalo $a < x < b$, se a todo o valor da variável x deste intervalo corresponder um valor definido da variável y. É irrelevante a maneira de estabelecer esta correspondência"[11] (Kleiner, 1989, p. 10).

Finalmente, o conceito de função chegaria à sua fase puramente estrutural com a definição de 'conjunto de pares ordenados' de Nicolas Bourbaki:

> Sejam E e F dois conjuntos, não necessariamente distintos. Uma relação entre um elemento variável, x, de E e um elemento variável, y, de F, é chamada uma relação funcional em y se, para todo o $x \in E$, existir um único $y \in F$ que esteja na relação considerada com x.
> Damos o nome de função à operação que a cada elemento $x \in E$ associa o elemento $y \in F$ que está na relação dada com x; y é chamado o *valor* da função no elemento x e a função é dita determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função[12] (Kleiner, 1989, p. 18)[13].

Em resumo, os últimos parágrafos tentam mostrar, através de uma breve análise das diferentes definições que o conceito de função foi assumindo ao longo dos últimos três séculos, que a formulação contemporânea do conceito é estrutural e que foi evoluindo gradualmente de noções concebidas operacionalmente. Esta evolução é, nas palavras de Stfard, uma longa luta pela reificação: o que parece ser um processo num nível, tem que ser transformado num objecto abstracto autónomo num nível mais elevado, para poder funcionar como uma unidade básica em construções matemáticas mais avançadas. A abordagem estrutural será, portanto, a fase mais avançada do desenvolvimento conceptual.

Perspectiva psicológica

Relativamente ao processo de aprendizagem, Sfard defende um modelo de formação conceptual algo semelhante ao que é possível construir com base no desenvolvimento histórico de vários conceitos matemáticos.

A precedência da concepção operacional sobre a estrutural é apresentada como uma característica invariante do processo de aprendizagem individual, que parece imune à variação externa de estímulos[14]. Por outras palavras, não se defende que a aprendizagem se processa de igual modo em todos os indivíduos, mas que parece ser possível identificar, nos diferentes processos de aprendizagem e independentemente das abordagens de ensino utilizadas, algo que lhes é comum: face a uma nova noção matemática a concepção operacional é normalmente a primeira a ser desenvolvida (e, não raramente, a única) e a transição, das operações para os objectos abstractos, é um processo longo e difícil, realizável em três fases: interiorização, condensação e reificação (Sfard, 1991, 1992).

Na primeira fase – interiorização – o aluno estabelece contacto com certos processos, que eventualmente darão origem a um novo conceito e que são operações realizáveis com objectos matemáticos elementares e já familiares (por exemplo, no caso das funções, as manipulações algébricas podem assumir esse papel). Estes processos vão-se tornando cada vez mais acessíveis para o indivíduo, à medida que este vai gradualmente desenvolvendo as necessárias destrezas à sua realização, até ao ponto de ser capaz de pensar sobre o que aconteceria sem ter realmente de os efectuar.

Considera-se que o processo foi interiorizado quando puder ser realizado mentalmente (através de representações mentais) e quando, para poder ser considerado, analisado e comparado, não precisar de ser efectuado no momento (Sfard, 1991).

No caso do conceito de função, nesta fase é aprendida a noção de variável e adquire-se a "capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável 'dependente'" (Sfard, 1991, p. 19).

Na segunda fase – condensação – os processos anteriores, eventualmente complicados ou longos, são comprimidos emergindo em entidades autónomas, facilmente manipuláveis. O aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, em termos de 'informação inicial – resultado final' (*input - output*), sem necessidade de atender ao que medeia os dois estados (inicial e final). É o momento 'oficial' de nascimento do novo conceito (Sfard, 1991).

Considera-se que há evolução nesta fase quando o indivíduo for capaz de facilmente combinar um processo com outros processos já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações dum conceito. A permanência na fase de condensação dura enquanto a nova entidade matemática permanecer fortemente ligada a um certo processo.

No caso das funções, o progresso do aluno nesta fase poderá ser observado pela facilidade com que ele for capaz de trabalhar com uma correspondência como um todo, sem necessidade de olhar para os seus valores específicos. Eventualmente, o aluno estará apto a "investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar o inverso de uma dada função" (Sfard, 1991, p. 19).

A reificação acontece quando o indivíduo conseguir, subitamente, ver a nova entidade matemática como um objecto completo e autónomo com significado próprio, um membro particular de uma certa categoria, uma estrutura estática e permanente com características próprias, um todo integrado já afastado dos processos que lhe deram origem. Neste caso, diz-se que o conceito foi reificado.

Esta última fase é algo que acontece de uma forma instantânea (não gradual), é "uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar numa perspectiva completamente nova" (Sfard, 1991, p. 19).

Uma vez reificado, o conceito pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. A existência, para o indivíduo, de um novo objecto matemático, permite que todo um novo ciclo se inicie – a reificação desta entidade inicia a fase de interiorização para a formação de uma nova entidade mais abrangente (Sfard, 1991). A figura 4 resume estas ideias.

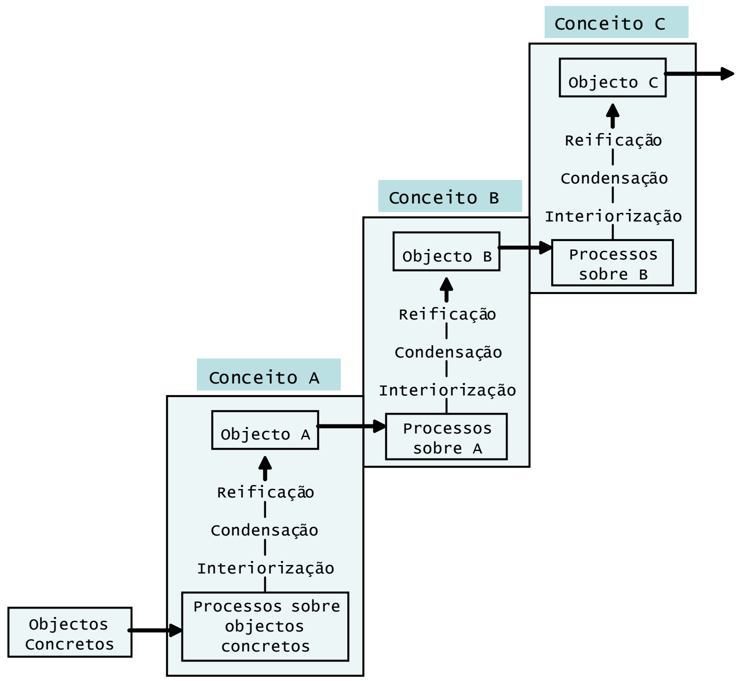


Figura 4. Modelo de formação de conceitos (Sfard, 1991, p. 22)

Este esquema de três fases é um modelo hierárquico cuja natureza está implícita nas definições de interiorização, condensação e reificação, o que implica que um patamar não pode ser alcançado antes que os outros tenham sido ultrapassados.

No caso das funções, podemos dizer que o conceito foi reificado pelo aluno quando este tiver plena compreensão das diversas representações que uma função pode assumir (passando facilmente de uma representação a outra), quando for capaz de resolver equações funcionais (onde as 'incógnitas' são funções), quando revelar "capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos [*computability*] não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções" (Sfard, 1991, p. 20).

Os alunos, por vezes, não são capazes de lidar com o 'objecto invisível' e desenvolvem uma abordagem 'quasi-estrutural'. A reificação é, de facto, um processo bastante complicado que não está ao alcance de todos os alunos do ensino secundário (Sfard, 1987, 1989). Os atalhos que os alunos percorrem e os becos onde desembocam, serão o tema dos próximos parágrafos.

O processo de reificação junto de alunos

Sem reificação as concepções matemáticas permanecerão puramente operacionais. Mas será a concepção estrutural realmente necessária?

Aparentemente, comenta a autora, parece não haver nada de errado com as abordagens operacionais visto ser possível "apresentar e manipular cada noção matemática, teorema e prova, em termos puramente operacionais" (Sfard, 1992, p. 66).

No entanto, se pensarmos, por exemplo, no processo de aprendizagem e nos seus objectivos, as duas abordagens – operacional e estrutural – são imprescindíveis (Sfard, 1989, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994).

De facto, o conhecimento operacionalmente concebido só pode ser armazenado em esquemas cognitivos sequenciais não estruturados e, por isso, inadequados à dimensão da nossa memória de trabalho. Este modo de guardar este tipo de informação faz com que as ideias puramente operacionais tenham que ser "processadas aos pedaços", isto é, "de uma maneira enfadonha que pode levar a um maior esforço cognitivo e ao sentimento perturbador de uma compreensão só local e, por isso, insuficiente" (Sfard, 1987, p. 164). Estas sequências têm que ser compactadas em unidades autónomas (ou reificadas) de forma a dotar os esquemas cognitivos de uma estrutura hierárquica: a informação operacional na base da pirâmide (o primeiro passo na aquisição de novas noções) e as representações estruturais – resultantes do processo de reificação – constituindo os níveis mais elevados (Sfard, 1987, 1991).

Embora o processo de reificação seja difícil de atingir, uma vez conseguido, facilita a realização matemática – diminui a dificuldade e aumenta a manipulabilidade. A transição do operacional ao estrutural pode ser simplisticamente "comparado ao que acontece quando uma pessoa que está a transportar na mão muitos objectos diferentes e soltos, decide pôr toda a carga num saco" (Sfard e Linchevski, 1994, p. 198).

No caso específico do conceito de função, a luta pela reificação foi longa para os matemáticos, e parece interminável para os alunos. As palavras da autora são elucidativas desta ideia.

> Para ver uma função como um objecto é necessário tentar manipulá-la como um todo: não há razão para tornar um processo em objecto a não ser que tenhamos alguns processos de nível mais elevado realizados sobre este processo mais simples. Mas existe aqui um círculo vicioso: por um lado,

> sem uma tentativa de interiorização de nível mais elevado, a reificação não ocorrerá; por outro, a existência de objectos sobre os quais são realizados processos de nível mais elevado, parece indispensável para a interiorização – sem tais objectos os processos parecerão sem significado. Por outras palavras: *a reificação de nível mais baixo e a interiorização de nível mais elevado são pré-requisitos uma da outra*. (itálicos da autora) (Sfard, 1991, p. 31)

Sfard dá-nos conta de algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos, face ao conceito de função, reveladoras da não reificação do conceito. Por exemplo: (i) um grande número de alunos concebe função como um processo e não como uma construção estática (os alunos associam função a processos de cálculo) (Sfard, 1987, 1989); (ii) a função constante é também fonte de dificuldades (parece estar implícito, no pensamento dos alunos, que 'uma mudança na variável independente deve ser seguida por uma mudança na variável dependente' – dimensão dinâmica do conceito); (iv) há uma relutância, por parte dos alunos, em aceitar 'correspondências arbitrárias' como funções (a maioria dos alunos tende a considerar, como verdadeiras, afirmações do tipo: 'Toda a função expressa uma certa regularidade' e 'Toda a função pode ser expressa por uma certa fórmula algébrica') e (v) há uma tendência para identificar o conceito com uma das suas representações (Sfard, 1992).

Embora a concepção estrutural (reificação) seja difícil de atingir a reificação deve ser estimulada junto dos alunos. No que diz respeito ao ensino, e tendo em consideração o modelo de formação conceptual apresentado, dois princípios didácticos devem ser seguidos: (i) os novos conceitos não devem ser introduzidos aos alunos em termos estruturais e (ii) a concepção estrutural não deve ser exigida enquanto não se tornar indispensável para os alunos (Sfard, 1989, 1991, 1992).

Notas

[1] A autora distingue os termos conceito e concepção. O termo 'conceito' refere uma ideia matemática na sua forma oficial – uma construção teórica do 'universo formal do conhecimento ideal', enquanto 'concepção' refere "todo o conjunto de representações internas e associações evocadas pelo conceito – a parte correspondente ao conceito que pertence ao 'universo do conhecimento humano' interno e subjectivo" (Sfard, 1991, p. 3).

[2] Ver Sfard, 1991, pp. 7-10.

[3] Um esquema imagético, para Dörfler, é um conjunto de relações e actividades cognitivas com e sobre um portador concreto (um objecto como modelo, um modelo material ou apenas um modelo imaginado, um desenho, um gráfico ou outra representação de um conceito matemático...) que permite ao indivíduo obter um significado pessoal do conceito em causa. O portador concreto não representa o conceito, serve apenas de referente ao indivíduo – é a actividade cognitiva desenvolvida com e sobre o referente que permite tornar "o conceito presente cognitiva e mentalmente" (1991, p. 21). Deste modo, o mesmo

portador pode servir esquemas imagéticos diferentes correspondentes a diferentes conceitos e o mesmo conceito pode admitir vários esquemas imagéticos baseados em diferentes portadores – tudo depende do que constitui o foco de atenção do indivíduo e das propriedades, relações ou transformações que ele constrói.

[4] A autora distingue os termos entidade e objecto. O termo 'entidade' refere um modo de tratar a informação e não significará muito mais do que 'todo integrado'. O termo 'objecto' transmite uma mensagem ontológica e será menos amplo. "Deve ser entendido que um objecto abstracto é uma entidade conceptual, mas também é muito mais do que isso: é uma metáfora que faz com que uma construção matemática [*a mathematical construct*] tenha uma imagem de coisa material" (Sfard, 1992, p. 60).

[5] Este último caso será ilustrado mais adiante, aquando da análise histórica da natureza dual das concepções matemáticas.

[6] Algumas ideias geométricas podem, talvez, ser concebidas estruturalmente ainda antes de existir a consciência de uma descrição procedimental alternativa: as representações gráficas unificadoras e estáticas parecem ser mais naturais do que as descrições alternativas.

[7] Outros conceitos foram estudados de forma análoga, pela autora. Por exemplo, o conceito de número encontra-se em Sfard (1991), conceitos algébricos em Sfard e Linchevski (1994).

[8] Definição publicada em 1718.

[9] Definição de 1747. A palavra *'quantidade'* usada na definição de Bernoulli foi substituída pelas palavras *'expressão analítica'* na definição de Euler.

[10] Este comentário da autora é baseado numa referência de Frege (1904): "a palavra variável não tem justificação na Análise pura ... [pois] quando tentamos fazer menção a uma variável, descobrimos alguma coisa que varia no tempo e, deste modo, não pertence à Análise pura. E então, tudo o que envolva tempo é exterior à Aritmética e não pode ser olhado como um objecto próprio da Análise" (Frege, 1970, p. 107, citado em Sfard, 1992, p. 63).

[11] Definição de 1837.

[12] Definição de 1939.

[13] Uma outra formulação contemporânea do conceito de função: "No sentido mais geral uma função y de variável x, $y = f(x)$, é uma relação entre pares de elementos de dois conjuntos numéricos, X e Y, de tal modo que a cada elemento x, do primeiro conjunto X, corresponda um e um só elemento y, do segundo conjunto Y, de acordo com uma determinada regra. (…) a regra funcional, ou 'lei', pode ser introduzida de várias formas: verbalmente, por uma tabela de valores de x e y, por uma expressão analítica, por um gráfico, etc., sujeita apenas à condição de ser definida e, uma vez dado o valor de x, ser suficiente para encontrar y" (Youschkevitch, 1976, p. 39).

[14] A existência desta precedência no processo de aprendizagem e, portanto, na construção de conceitos pelo aluno, é justificada pelo facto da abordagem estrutural ser mais abstracta que a operacional. Por conseguinte, será pouco viável chegar à concepção estrutural sem ter compreendido previamente a operacional (Sfard, 1991).

Referências

Correia, J. M. (1999). *A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII* (tese de mestrado não publicada, Universidade do Porto).

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Org.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17-32). Assis, Itália.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Orgs.) *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. *3*, pp. 162-169). Montreal, Canada.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conceptions: The notion of function revisited. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Orgs.) *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 151-158). Paris, França.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Orgs.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences, 16*, 37-85.

19

A construção do conhecimento matemático avançado: o caso do conceito de sucessão

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa
amdd@fct.unl.pt

O desenvolvimento do pensamento matemático tem sido uma das principais preocupações da investigação cujo objectivo principal é o de melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. Dada a complexidade crescente que caracteriza o conhecimento matemático é comummente aceite que o mesmo possa ser caracterizado em termos de elementar e avançado. Nesta comunicação pretende-se dar maior ênfase a este segundo tipo de conhecimento partindo das abordagens feitas por Vinner, Tall e Dubinsky evidenciando as características principais de cada um. Tendo como suporte este quadro teórico será apresentada uma análise preliminar de alguns dados empíricos relacionados com o conceito de sucessão, recolhidos na disciplina de Análise Matemática I, junto de alunos do 1º ano do ensino superior.

Teorias sobre a construção do conhecimento matemático

O papel do conceito definição e conceito imagem na construção dos conceitos matemáticos

Ao abordar a construção dos conceitos matemáticos mais avançados as definições surgem como a primeira ferramenta disponível para a sua construção. No entanto elas podem causar problemas sérios na sua aprendizagem. Para Vinner (1991) elas representam o conflito entre a estrutura da matemática, tal como é concebida pelos matemáticos, e os processos cognitivos da aquisição do conceito. Segundo este autor muitos dos livros de texto e aulas de Matemática tem por base os seguintes pressupostos:

- Os conceitos são principalmente adquiridos por meio das suas definições.
- Os alunos devem usar as definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessário do ponto de vista matemático.
- Definições devem ser mínimas, isto é, não devem conter partes que podem ser inferidas de outras partes de definições.
- É desejável que as definições sejam elegantes, é o caso da definição de módulo de x que fica mais elegante se se representar por |x|.
- Definições são arbitrárias. Definir corresponde a dar um nome e podem ser feitas várias formulações.

Na procura de uma abordagem que melhor possa traduzir a forma como estes conceitos devem ser investigados, Vinner recorre às noções de conceito imagem e de conceito definição. O termo conceito imagem é assim usado para descrever a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais[1], propriedades que lhe estão associadas e processos. Ele é construído ao longo dos anos através de experiências de todas as espécies, mudando quando os indivíduos são confrontados com novos estímulos. Por *conceito definição* entende-se a definição verbal que explica o conceito de modo exacto e de uma forma não circular (Vinner, 1983). Com base nesta definição assume-se que para adquirir um conceito precisamos formar um conceito imagem do mesmo. O conhecimento da definição de um dado conceito não nos garante a compreensão do mesmo, para isso precisamos de ter um conceito imagem (Vinner, 1991).

A partir da especificação do conceito definição e conceito imagem, Vinner (1983, 1991) elabora um modelo explicativo da construção do conhecimento matemático baseado nas relações que se estabelecem entre ambos. Assim, para cada conceito, assume a existência de duas células diferentes (não necessariamente biológicas) na estrutura cognitiva. Uma célula é para a definição ou definições do conceito e a outra para o conceito imagem.

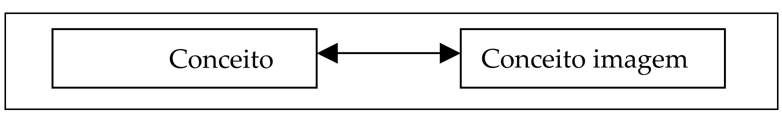


Figura 1. Acção recíproca entre conceito imagem e conceito definição

Qualquer destas células, ou mesmo ambas, podem estar vazias. Podemos considerar que a célula do conceito imagem está vazia enquanto nenhum significado for associado com o nome do conceito. Isto acontece em muitas situações onde o conceito definição é memorizado sem que tenha significado para a pessoa. O modelo prevê que deve haver uma interacção entre estas duas células (figura 1) embora elas se possam constituir de forma independente. Como foi referido anteriormente, muitas vezes os professores dos vários níveis de ensino esperam que o conceito imagem se forme por meio do conceito definição e seja completamente controlado por este (figura 2).

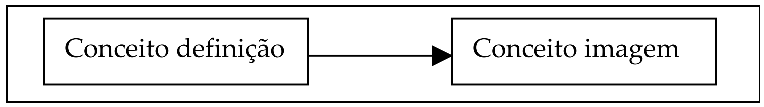


Figura 2. Crescimento cognitivo de um conceito formal

Quando colocamos uma tarefa cognitiva ao aluno é desejável que as células do conceito imagem e do conceito definição sejam activadas para proporcionar uma resposta a esta tarefa. Esta actividade pode desencadear várias acções entre ambas as células, tais como, uma consulta da célula do conceito definição seguida de uma acção recíproca entre ambas (figura 3), apenas uma consulta da célula do conceito definição (dedução formal pura, figura 4), ou uma consulta da célula do conceito imagem seguida da do conceito definição (dedução que segue o pensamento intuitivo, figura 5).

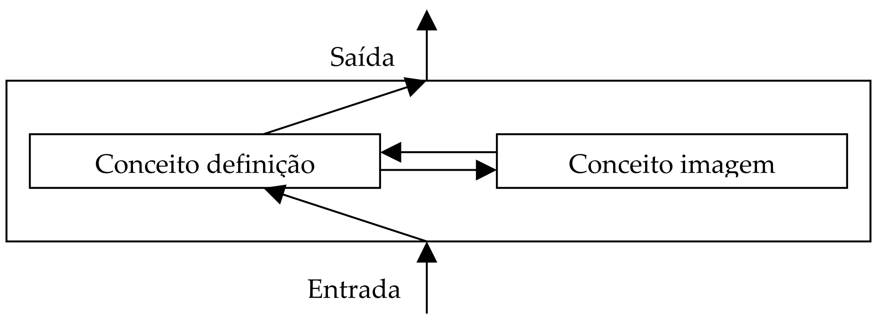


Figura 3: Acção recíproca entre definição e imagem

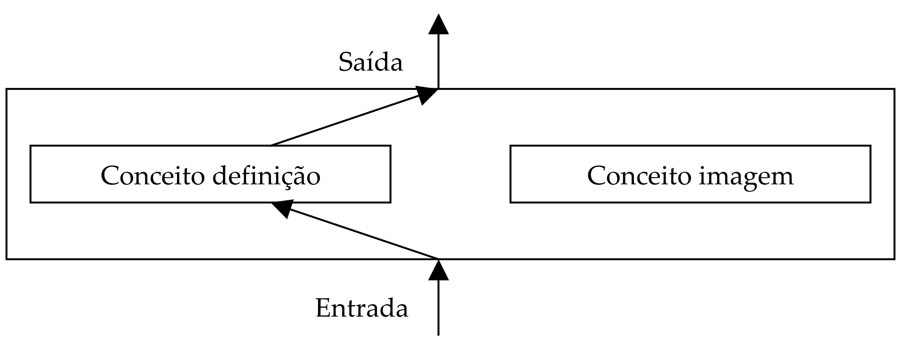


Figura 4. Dedução formal pura

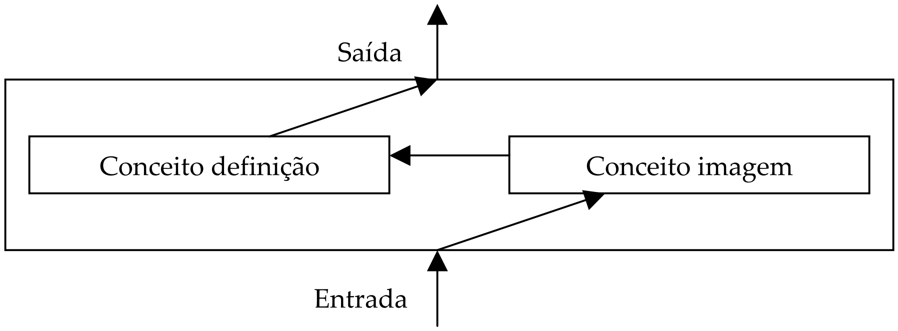


Figura 5. Dedução que segue o pensamento intuitivo

Em nenhum dos casos é tomada uma decisão sem antes ser consultado o conceito definição. Este é o processo desejável mas que Vinner considera não ser aquele que é usado a maior parte das vezes por se tratar de um processo cognitivo que é contrário à nossa natureza. Assim o modelo para o processo que realmente ocorre na prática baseia-se apenas na consulta do conceito imagem seguido de uma resposta com base neste (resposta intuitiva, figura 6).

A célula do conceito definição acaba por não ser consultada, mesmo que não esteja vazia, no processo da resolução de problemas. Esta tradição baseia-se nos hábitos de todos os dias e no facto de muitas vezes ser levada a cabo com sucesso. Para contrariar esta tendência devermos recorrer a problemas não rotineiros onde o conceito imagem seja insuficiente para levar a cabo a resolução dos mesmos.

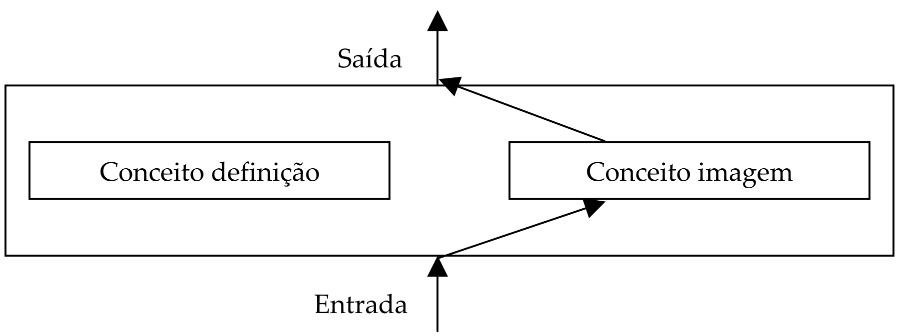


Figura 6. Resposta intuitiva

Dada a ênfase que é colocada na definição, nomeadamente no ensino de conceitos matemáticos avançados, Vinner (1991) considera que devemos ter em conta algumas regras didácticas: a) evitar, aos alunos, conflitos cognitivos desnecessários e b) iniciar os conflitos cognitivos apenas quando for necessário motivar os alunos para um estado intelectual mais elevado. (Isto deve ser feito apenas quando a possibilidade de alcançar um estado intelectual mais elevado seja razoavelmente alta). Segundo ele uma das metas do ensino deve ser a mudança dos hábitos de pensamento do modo de vida de todos os dias para o modo técnico. Os conceitos matemáticos devem ser adquiridos pelo primeiro modo devendo a formação dos conceitos começar com vários exemplos e contra exemplos pelo meio dos quais o conceito imagem poderá ser formado. No caso de os alunos estarem a entrar no estudo de conceitos mais avançados a definição deve ser introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas. Estas definições devem ser discutidas e os alunos treinados para as usar correctamente e apenas devem ser utilizadas se as tarefas não puderem ser resolvidas correctamente referindo-se somente aos conceitos imagem. Devem no entanto ser tidos em conta os conflitos entre o conceito imagem e a definição formal.

A importância do simbolismo na transição do pensamento processual para o pensamento conceptual

Uma outra perspectiva que é defendida por Tall (1995) baseia-se na forma como a espécie humana a partir de actividades na interacção com o meio consegue desenvolver conceitos abstractos bastante subtis. Ele considera que este desenvolvimento começa com a capacidade de *perceber* coisas, *agir* sobre elas e *reflectir* sobre estas acções para construir teorias. É uma visão onde a percepção, a acção e a reflexão ocorrem segundo várias combinações num dado momento e o foco numa delas pode levar a tipos de matemática muito diferentes (figura 7). Tall considera desta forma três tipos de matemática: Espaço e Forma, Matemática Simbólica e Matemática Axiomática (Tall, 1999; Tall, Gray, Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas, & Yusof, 2001).

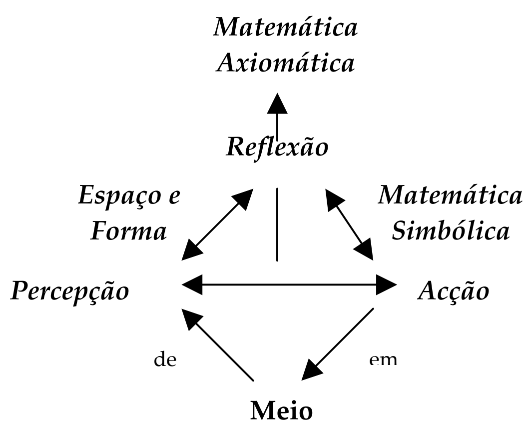


Figura 7. Vários tipos de Matemática

A percepção do mundo inclui o estudo do espaço e forma que conduz à geometria, onde as formulações verbais servem de suporte para uma evolução no sentido da demonstração Euclidiana. As acções sobre o mundo, tais como contar, são representadas por símbolos e tornam-se na matemática simbólica de número, aritmética e por consequência na aritmética e álgebra generalizadas. A reflexão na percepção e acção em matemática conduz eventualmente ao desejo de uma teoria axiomática consistente baseada em definições formais e deduções (figura 8) (Tall, 1999; Tall *et al.*, 2001).

Com base nesta figura podemos observar diferentes tipos de desenvolvimento conceptual associados aos diferentes tipos de matemáticas, sendo de especial importância, para o estudo em causa o da Matemática Simbólica.

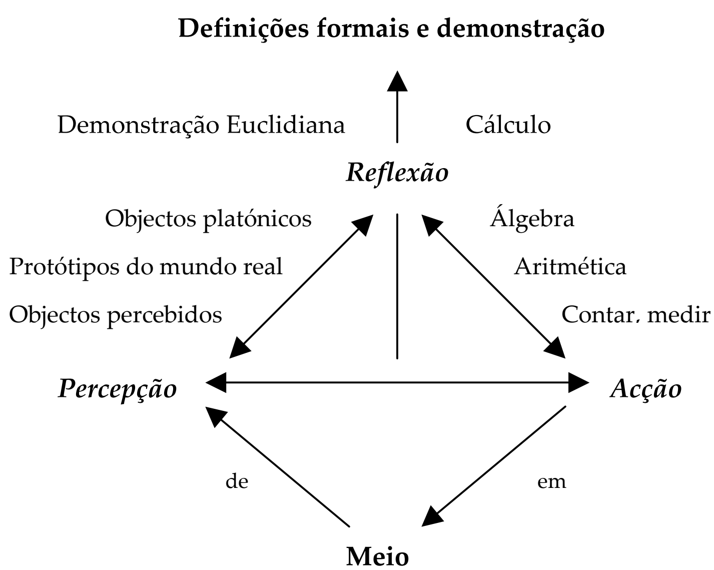


Figura 8. Desenvolvimento conceptual de determinados conceitos matemáticos

O papel dos símbolos

Os símbolos permitem que o ser humano disponha de uma forma incrivelmente simples de lidar com quantidades para calcular, resolver problemas e fazer prognósticos. De uma forma simples eles servem de charneira entre pensar o símbolo como um conceito (como um número) ou como um processo (como contar). Isto permite-nos pensar sobre os símbolos como entidades manipuláveis para fazer Matemática.

São várias as situações em que os símbolos permitem comutar entre processo e conceito. Segundo Tall *et al*. (2001) a tabela seguinte (figura 9) mostra-nos alguns exemplos:

Símbolo	Processo	Conceito
5	contar	número
4+3	adição	Soma
f′(x)	diferenciação	Derivada
$\int f(x)dx$	integração	integral

Figura 9. Símbolos como processos e conceitos

Esta dupla utilização do símbolo como processo e conceito começa muitas vezes com a familiarização com o processo, que resulta normalmente de procedimentos inicialmente realizados passo a passo e posteriormente executados sem necessidade de uma atenção consciente para detalhes que por vezes são bastante sofisticados. Por exemplo, contar, é um processo complexo de dizer uma sequência de números e ao mesmo tempo apontar para objectos numa colecção um a um. Quando uma criança conta um número de maçãs, ela pode dizer "três é uma, duas, três maçãs". À medida que isto se torna uma rotina a contagem pode ser feita em silêncio, "[uma, duas] três maçãs", sendo depois comprimido em "… três maçãs". Desta forma o processo de contar é comprimido no conceito de número.

Gray e Tall (1994) consideram assim que a ambiguidade do simbolismo expressa na dualidade flexível entre processo e conceito não é completamente utilizada se a distinção entre processo e conceito se mantiver sempre presente. É necessário que haja uma combinação cognitiva de processo e conceito com a sua terminologia própria. Para tal, os autores recorrem à palavra proceito (*procept*) para se referirem ao conjunto de conceito e processo representados pelo mesmo símbolo. Um *proceito* elementar será pois uma amálgama de três componentes: um *processo* que produz um *objecto* matemático, e um *símbolo* que representa ao mesmo tempo o processo e o objecto.

Para reflectir esta crescente flexibilidade de uma dada noção e a versatilidade dos processos de pensamento, Gray e Tall apresentam aquilo a que chamam uma extensão da definição: Um *proceito* consiste numa colecção de proceitos elementares que têm o mesmo objecto. Os proceitos são assim considerados como a raiz da capacidade humana para manipular ideias matemáticas em aritmética, álgebra e outras teorias que envolvam a manipulação de símbolos (Tall *et al*., 2001).

Compressão no uso dos símbolos através do procedimento, processo e proceito

Para explicar o desempenho nos processos matemáticos Gray e Tall (1994) partem da natureza das actividades matemáticas onde os termos procedimento, processo e proceito representam uma sequência no desenvolvimento cada vez mais sofisticada. Assim, o termo procedimento é usado para exprimir uma sequência específica de passos que conduzem a outro passo. Podemos dizer que se trata de um algoritmo específico para implementar um processo. O termo processo é usado num sentido mais geral e inclui qualquer número de procedimentos que têm o mesmo efeito. Ele não tem que ser executado no pensamento quando o referimos e pode ser realizado de várias formas. Por exemplo o processo de derivação da função $\frac{1+x^2}{x^2}$ pode ser feito por vários procedimentos como a regra do quociente, a regra do produto $\left((1+x^2)*\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ ou a simplificação para $x^{-2}+1$ antes da derivação. Assim, segundo Tall *et al.* (2001) com o conhecimento de um procedimento específico o indivíduo pode fazer um cálculo ou uma manipulação. Se tiver uma ou mais alternativas possíveis permite-lhe uma maior flexibilidade e eficiência para escolher o caminho mais apropriado para um dado propósito. Mas se for capaz de pensar sobre o simbolismo como uma entidade permite-lhe ser ele próprio manipulado, pensar sobre a matemática de uma forma comprimida e manejável, movendo-se facilmente entre processo e conceito. Esta abordagem dá-nos um espectro de realização (figura 10) no qual é possível, em certos estados, ter alunos com diferentes capacidades a realizar com sucesso um dado problema rotineiro, ainda que o possível desenvolvimento futuro seja bastante diferente. Estes autores consideram que aqueles alunos que estão mais orientados para o desenvolvimento de procedimentos focam a sua atenção nos seus (dos procedimentos) passos enquanto que os que vêm o simbolismo como processos ou conceitos têm um processamento cognitivo mais eficiente. Ao longo do tempo, com o encontro de novas tarefas, vai havendo cada vez mais tendência para o pensamento processual. Isto significa que aqueles que focam a sua atenção essencialmente no processual têm cada vez mais dificuldades em aprender novos conceitos matemáticos, enquanto que os mais capazes se focam principalmente nas qualidades essenciais do simbolismo que consiste em vê-lo como processo e conceito ao mesmo tempo.

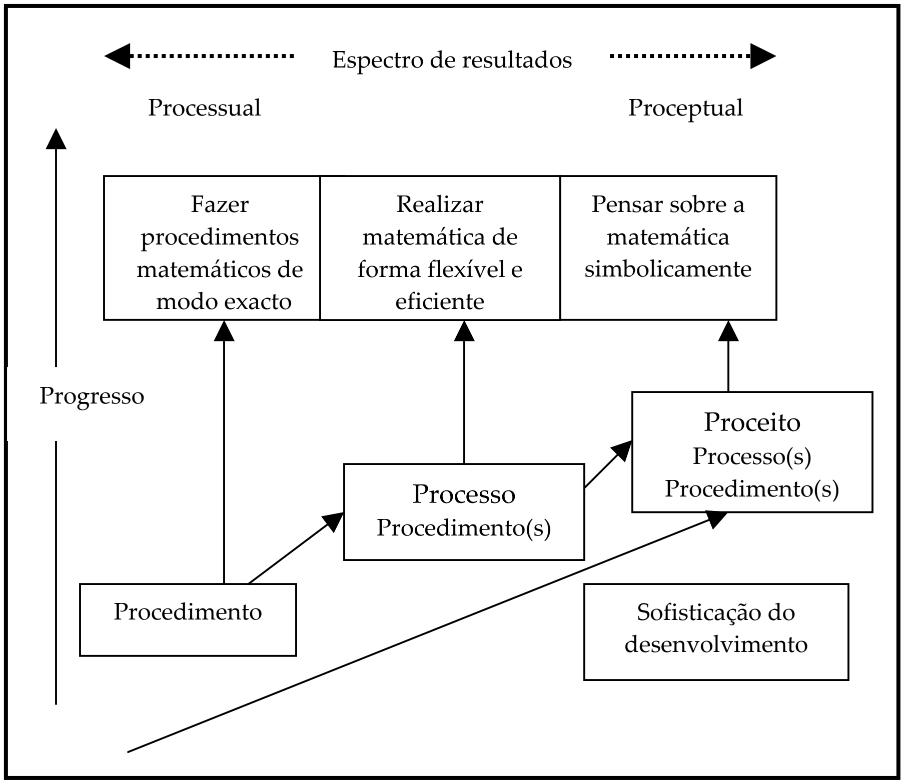


Figura 10. Espectro de realização na execução dos processos matemáticos

Teoria APOS

Segundo Dubinsky e McDonald (2000) a teoria APOS surgiu na tentativa de compreender o mecanismo da abstracção reflexiva, introduzido por Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico nas crianças, e estender esta ideia aos conceitos matemáticos mais avançados.

Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas e Vidakovic (1996), consideram que o conhecimento matemático é uma tendência individual para responder, num contexto social, a um determinado problema pela construção, reconstrução e organização na sua mente, de processos matemáticos e objectos com os quais se lida com a situação. Com base nesta perspectiva eles consideram três tipos gerais de conhecimento matemático, as acções, processos e objectos, que estão organizados em estruturas que designam por esquemas. A figura 11 representa de forma condensada a construção dos esquemas (Dubinsky, 1991).

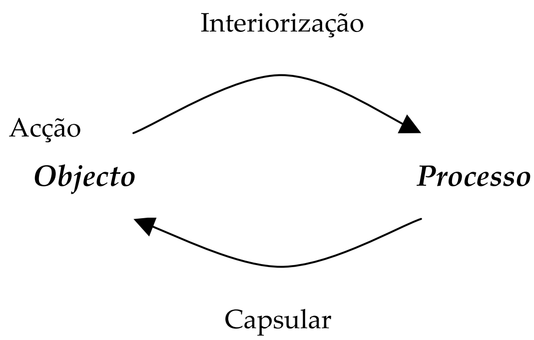


Figura 11. Esquemas e sua construção

É ao desenvolvimento destes tipos de conhecimento que estes autores chamam Teoria APOS, que sucintamente pode ser descrita da seguinte forma (para uma descrição mais pormenorizada ver, por exemplo, Domingos, 2001):

- As acções são transformações mentais ou físicas de objectos para obter outros objectos. Quando o indivíduo reflecte sobre uma acção deve começar a estabelecer um controle consciente sobre ela, podendo dizer-se que a acção foi interiorizada e passou a ser um processo.
- Um processo é a transformação de um objecto (ou objectos) cuja característica importante é o controle da transformação pelo indivíduo, no sentido em que ele é capaz de descrever, ou reflectir sobre todos os passos da transformação sem ter que os realizar. Com a reflexão do indivíduo sobre o acto de transformar processos, estes começam a tornar-se objectos.
- Um objecto é construído através do *capsular* (*encapsulation*) de um processo. Esta capsulação é alcançada quando o indivíduo está atento à totalidade do processo, percebe que transformações podem agir sobre ele e é capaz de construir tais transformações. Os objectos podem ser *descapsulados* para obter os processos dos quais eles provêm.
- Um esquema é uma colecção coerente de acções, processos, objectos e outros esquemas que estão de alguma forma ligados e permitem suportar a resolução de um dado problema. A expansão dos esquemas pode ser representada por uma espiral de acções, processos e objectos.

Segundo Dubinsky (1991) esta teoria serve não só para descrever a construção dos vários conceitos matemáticos como pode sugerir explicações de algumas das dificuldades que os alunos têm com muitos destes conceitos ou mesmo influenciar na elaboração dos currículos. Uma das abordagens que é bastante usada na implementação da teoria é a decomposição genética, onde os esquemas são decompostos em termos de acções, processos e objectos, com o objectivo de confrontar o aluno com o ciclo da teoria descrito acima e assim melhorar a compreensão do conceito. Por exemplo, para o conceito de limite, antes do início do estudo Cottrill *et al.* (1996) propõem uma decomposição organizada em seis passos:

1) A acção de calcular o valor de uma função f nalguns pontos, pontos estes cada vez mais próximos de a.
2) Interiorização da acção do passo 1 num processo único em que f(x) se aproxima de L à medida que x se aproxima de a.
3) Capsular o processo de 2 desde que, por exemplo ao falar sobre a combinação das propriedades dos limites, o processo limite permaneça um objecto ao qual possam ser aplicadas acções.
4) Reconstruir o processo de 2 em termos de intervalos e desigualdades. Isto é feito introduzindo estimadores numéricos da proximidade da aproximação, simbolicamente teremos $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$.
5) Aplicar um esquema de quantificação para ligar os processos construídos no passo anterior para obter a definição formal de limite.
6) Aplicar a definição $\varepsilon - \delta$ a situações específicas.

Esta decomposição surge como uma primeira abordagem que vai sendo adaptada ao desempenho mostrado pelos alunos. Ela pode resultar de investigações anteriores ou pode ser uma construção dos próprios professores para implementar o ensino e aprendizagem de um dado conceito.

Em conclusão, as três teorias aqui referidas abordam a problemática da construção do conhecimento matemático avançado segundo perspectivas diferenciadas mas que no seu conjunto podem ser consideradas complementares. Tendo por pano de fundo a tentativa de explicar a forma como os alunos lidam com a abstracção e a generalização dos conceitos matemáticos, cada uma delas coloca o acento tónico em componentes que desempenham um papel fundamental no desenvolvimento destas competências de ordem superior. Quer o papel das definições e imagens, quer do simbolismo, quer da interligação entre diferentes tipos gerais de conhecimento, são todos eles de importância primordial para o crescimento do conhecimento matemático dos alunos, sendo desejável que estas dimensões aparecem integradas por forma a poderem proporcionar uma aprendizagem efectiva dos mesmos conceitos.

O caso do conceito de sucessão

Breve caracterização do estudo e da metodologia usada

Nesta secção será feita uma primeira abordagem dos dados empíricos recolhidos junto de alunos do 1º ano na disciplina de Análise Matemática I, no ano de 2002. A metodologia utilizada privilegiou uma abordagem qualitativa, sendo as técnicas de recolha de dados baseadas essencialmente na observação de aulas, análise de documentos escritos e entrevistas semi-estruturadas. Os dados aqui abordados correspondem à análise de excertos de uma das entrevistas referidas acima, nomeadamente no que respeita ao conceito de sucessão. A aluna questionada frequenta a disciplina pela primeira vez na licenciatura em Matemática.

A introdução do tema é feita com base em dois tipos de aulas: aulas teóricas onde os conceitos são introduzidos com base nas suas definições formais, as propriedades e teoremas mais importantes são formalmente demonstrados, e aulas práticas onde os alunos são solicitados a responder a questões que vão desde a aplicação de propriedades baseadas no cálculo rotineiro até à resolução de problemas que pressupõem uma compreensão efectiva das definições e teoremas associados aos conceitos.

Neste caso concreto o conceito de sucessão foi introduzido com base na seguinte definição: chama-se *sucessão de números reais* a toda a aplicação de N em R. Os elementos do contradomínio chamam-se termos da sucessão. Ao contradomínio chama-se *conjunto dos termos da sucessão*. Da mesma forma, a noção de sucessão convergente é introduzida com base na seguinte definição: Sejam u uma sucessão e $a \in R$. Diz-se que u *converge* para a (ou *tende para* a ou, ainda, que o *limite da sucessão é* a), e representa-se $U_n \to a$, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow |U_n - a| < \varepsilon$.

O conceito de sucessão: O caso da Susana

A noção de sucessão

Para a Susana, a noção de sucessão aparece associada à existência de uma representação gráfica ou de uma expressão que serve para estabelecer uma determinada correspondência. Quando lhe é pedido para explicar o que é uma sucessão ela diz que "numa recta são … pontos que seguem uma determinada expressão, faz corresponder …". A noção de correspondência acaba no entanto por ser negligenciada, dando mais destaque à representação dos pontos na recta. Com esta representação ela destaca essencialmente a noção de convergência para zero, com base no termo geral da sucessão que ela designa por $\frac{1}{x}$, e cuja representação é feita colocando as imagens sobre o eixo horizontal de um sistema de eixos (figura 12).

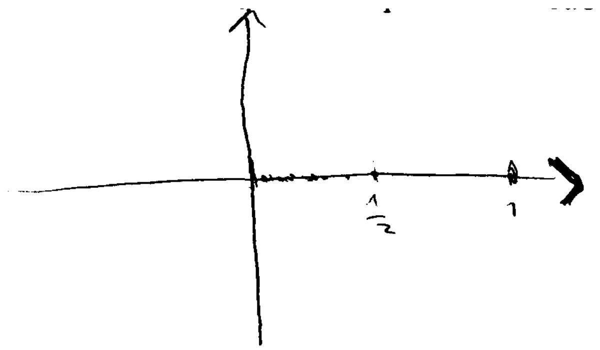


Figura 12. Primeira representação gráfica da sucessão $\frac{1}{x}$

Esta abordagem foi por vezes usada nas aulas, subentendendo-se que os alunos conseguiam lidar com este tipo de representação esquemática onde os elementos do domínio acabam por ser desprezados uma vez que têm um comportamento idêntico em todas as situações. A única diferença reside no facto de nas aulas não ter sido representado um sistema de eixos mas sim uma recta. Quando questionada sobre a representação gráfica da sucessão anterior, a Susana continua a considerar que a figura acima pode traduzir esse gráfico admitindo em determinada altura que também pode fazer outro tipo de representação que traduz esquematicamente pela representação dos termos da sucessão no mesmo sistema de eixos e sem ter a preocupação de representar as escalas de forma apropriada, figura 13.

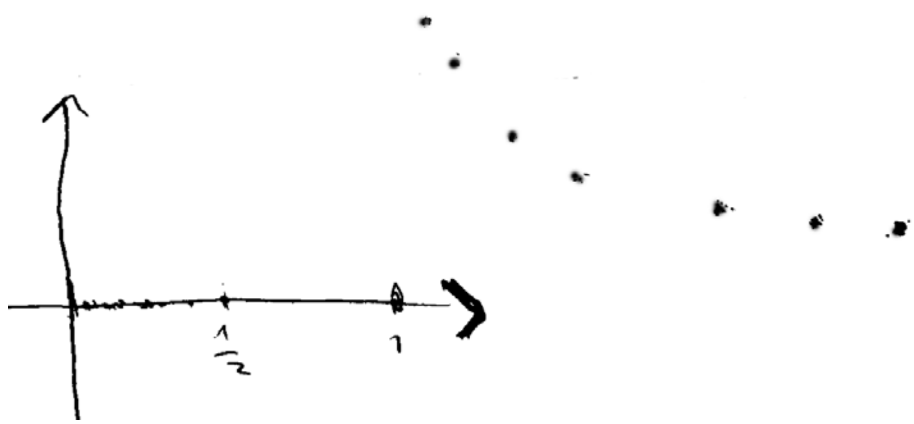


Figura 13: Segunda representação gráfica da sucessão $\frac{1}{x}$ como complemento da primeira

Apesar de ter feito esta representação ela continua bastante indecisa sobre qual delas representa melhor o gráfico da sucessão, acabando por compreender o gráfico da figura 2 apenas quando lhe foi pedido para calcular e representar os primeiros termos da sucessão. Com este processo ela consegue fazer a distinção entre objectos e imagens com base na noção de correspondência que se estabelece entre ambos.

A Susana revela uma abordagem da noção de sucessão baseada essencialmente em conceitos imagem que apresentam características diferenciadas: enquanto um deles é baseado na noção de gráfico cartesiano, com a representação dos objectos e imagens relacionados por uma expressão, o outro parece resultar de uma construção baseada na definição de convergência de uma sucessão, onde os termos são representados esquematicamente sobre uma recta e o destaque principal é dado à forma como os termos vão evoluindo. Esta segunda abordagem dá uma ênfase bastante grande aos termos da sucessão e à sua evolução, deixando em segundo plano a noção de aplicação e consequentemente o papel desempenhado pelos objectos. Além disso surge ainda outra dificuldade relacionada com esta abordagem. Por vezes os termos da sucessão são confundidos com os objectos. Por exemplo quando se pretende saber se a sucessão anterior é limitada a Susana considera que não, pois acha que ela não pode ser majorada:

Susana – Não … quer dizer … majorada ela não está.

Entrevistador – Porquê?

Susana - Tende para mais infinito, por isso … não, não está.

Entrevistador - Mas repara, estás a dizer que quem tende para mais infinito.

Susana – Aah, está … está … está para 1/2 … para um, para um … está para um.

Entrevistador - Quando eu estou a perguntar se ela está limitada tu estás a ver em que eixo, no horizontal ou no vertical?

Susana - Supostamente deveria ser no XX …

Entrevistador - Supostamente deveria ser…

Susana - No XX.

Entrevistador - No horizontal.

Susana – Pois.

Entrevistador - Mas repara, quem é que está no eixo dos XX, são os … naturais. São os naturais que tu pões aí no eixo dos XX. Ora, como *n* tende para infinito …

Susana - Por isso não pode estar.

Entrevistador - Então assim, nunca nenhuma era limitada … estás a perceber? … estás a preceder o que é que eu estou a dizer?

Susana – Ah sim.

Entrevistador – Porquê? Porque em todas elas o *n* vai para infinito …
Susana - Então tem que ser no YY …

Nesta situação a Susana não faz a distinção entre os objectos e imagens, admitindo que os termos da sucessão estão representados sobre o eixo horizontal e portanto assumindo o lugar dos naturais. Esta abordagem gera no entanto um conflito: ao considerar que neste eixo estão os naturais ela defende que a sucessão não pode ser limitada, mas como também é possível representar no mesmo eixo as imagens (os termos da sucessão) então a sucessão pode ser limitada. Embora tenha recorrido à representação esquemática/gráfica para explicitar o seu conceito de sucessão ela acaba por admitir que não está familiarizada com esta representação por não ser usual trabalhar as sucessões desta forma.

Quando se pretende que a Susana explicite o seu conceito de sucessão divergente, pedindo-lhe que dê um exemplo de uma sucessão divergente, ela continua a privilegiar o seu conceito imagem argumentando que "podia ser qualquer coisa … módulo …". Ela parece estar a relacionar a imagem visual que tem da representação gráfica da função módulo com o facto de os termos da sucessão estarem "a tender para pontos diferentes …". Embora as noções de convergência, divergência e sucessão limitada pareçam causar dificuldades na compreensão do conceito de sucessão, quando se trata de propriedades que envolvem estes conceitos, ela consegue ter um desempenho favorável. Assim, quando lhe foi pedido para comentar a afirmação "toda a sucessão limitada é convergente"a Susana respondeu que "não, é ao contrário … convergente é que é limitada". Esta propriedade traduz um dos teoremas abordados na aula, (toda a sucessão convergente é limitada) pelo que parece haver memorização que não encontra eco quando se pretende obter um contra exemplo para a afirmação inicial. A Susana não consegue arranjar uma sucessão nestas condições e quando lhe é sugerido uma, a sucessão de termo geral $(-1)^n$, tem dificuldades em explicar que ela satisfaz as condições anteriores.

O conceito de sucessão da Susana parece assentar essencialmente em conceitos imagem que são formados de diferentes maneiras: uns baseados em procedimentos e diagramas, outros construídos de forma estrutural a partir das definições formais com recurso à memorização. Estas diferentes abordagens geram alguns conflitos cognitivos na compreensão do conceito de sucessão não lhe permitindo identificar com clareza os objectos iniciais e os processos que levam à construção do conceito e à sua utilização como um novo objecto matemático.

A noção de infinitamente grande positivo

A noção de infinitamente grande foi introduzida com base na seguinte definição: diz-se que a sucessão *u* é um infinitamente grande (ou que tende para $+\infty$), e representa-se por $U_n \to +\infty$, se $\forall L \in \mathrm{R}^+ \ \exists p \in \mathrm{N} : n > p \Rightarrow U_n > L$. Quando a Susana é questionada para explicar o que é que significa esta definição ela parece usar a noção de sucessão construída anteriormente e diz que "todos os valores estão a ir para ali … mais infinito" como se estivesse a considerar mentalmente uma recta, com os valores das imagens representados sobre ela. Esta abordagem leva-a a pensar na definição que ela diz não saber escrever. No entanto vai começando a escrever recorrendo à memória visual e acaba mesmo por admitir que só sabe escrever a definição porque a decorou:

> Susana – A definição … não sei […] tem que haver qualquer coisa com ε [risos]
> Entrevistador – Porquê com ε? Porque …
> Susana - Estou a adivinhar.
> […]
> Susana – Mas eu só sei isto porque é decorado.

A Susana acaba no entanto por escrever a definição, figura 14, sem conseguir explicar o papel dos símbolos que escreveu.

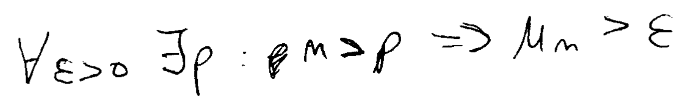


Figura 14. Definição de sucessão a tender para mais infinito

Ao ser confrontada com a definição formal, tal como foi abordada nas aulas, ela destacou o facto de a letra usada ser o L, "há, mas era com o L, com o M não era? a gente fazia era com o M" e associou esta situação à letra M que foi usada no estudo das noções topológicas em R, para definir a noção de conjunto limitado.

Foi necessário recorrer a um caso concreto para interpretar o papel dos vários símbolos. Recorreu-se à sucessão de termo geral $U_n = 3n + 2$ acompanhada do respectivo gráfico (figura 15).

Embora a representação gráfica tenha inicialmente causado alguns problemas na compreensão do conceito de sucessão, ao ser confrontada com o gráfico, a Susana não pareceu surpreendida e conseguiu fazer uma leitura correcta do mesmo. Já no que se refere à interpretação de definição formal teve dificuldades com o papel desempenhado pelo L. Ao tentar responder à questão: a partir de que ordem é que os termos da sucessão são maiores que cinco, ela teve muita dificuldade em fazer a distinção entre a ordem e o L.

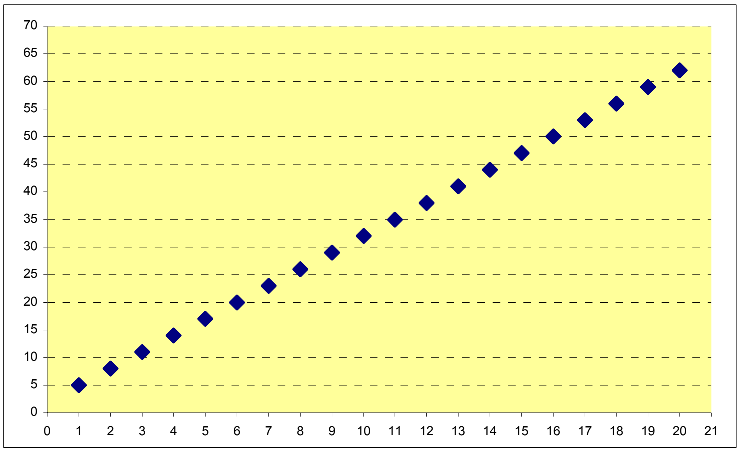


Figura 15. Gráfico fornecido pelo investigador

Susana – A partir de que ordem? […] pensar no valor que corresponde a cinco.
Entrevistador – O que é que tu entendes que se está a pedir aqui … quando tu lês a definição o que é que isto significa para ti …
Susana – É que existe uma ordem maior a partir da qual isto vai ser sempre maior que essa ordem, por maior que seja a ordem existem valores maiores.
Entrevistador – Quem é que é a tal ordem aí, qual das letras é que representa a ordem.
Susana – O L.

A Susana está aqui de novo a recorrer à representação visual construída anteriormente, onde os termos da sucessão são representados sobre uma recta, e neste caso o L aparece como uma fronteira a partir da qual todos os termos obedecem a uma determinada condição. Assim o L parece desempenhar o papel do p, p este que é negligenciado por não ser possível incluir a sua representação no diagrama que ela já utilizou anteriormente para representar os termos da sucessão. Quando questionada sobre o papel do p, a Susana consegue explicar que se trata de um natural que pertence ao domínio e portanto não parece ter qualquer influencia na definição, pois para ela o que é necessário procurar é o L,

Entrevistador – […] Portanto, eu ando à procura do quê? …
Susana – Do L.
Entrevistador – Será? do L?
Susana – Ando à procura de ver que isto tende para mais infinito e a gente utiliza o L.

Só depois de uma leitura mais pormenorizada da definição, com a ajuda do entrevistador e com recurso ao gráfico dado, é que a Susana começou a dar mais atenção ao papel diferenciado que têm os símbolos, nomeadamente o L e o p. Só nesta altura conseguiu responder satisfatoriamente à questão colocada anteriormente, sendo capaz de evidenciar o papel de cada um dos símbolos ao associá-los aos eixos respectivos. Com base na interpretação do gráfico conseguiu mesmo escolher valores para p mínimos que satisfizessem várias condições colocadas, como por exemplo "a partir de que ordem é que os termos são maiores que 16".

Para a Susana a noção de infinitamente grande parece ser condicionada pela noção de sucessão que utilizou anteriormente. Recorre à definição formal memorizada mas não consegue dar significado aos símbolos utilizados na escrita da mesma. Consegue por vezes realizar alguns procedimentos mas apresenta grandes dificuldades em utilizar os símbolos como proceitos. Estas dificuldades parecem resultar essencialmente da forma como foi construído o conceito de sucessão, mostrando entretanto um bom desempenho quando ajudada na compreensão dos procedimentos e processos que estão na base do conceito.

Em conclusão, embora esta seja uma análise bastante superficial do desempenho da Susana ao utilizar o conceito de sucessão, parece ser possível identificar algumas áreas onde a sua compreensão do conceito é balizada por outros conceitos mais elementares que ainda não estarão suficientemente estruturados no seu pensamento. A capacidade de interpretar a noção de sucessão como sendo uma aplicação, de analisar o papel de cada um dos símbolos intervenientes nas várias definições utilizadas e de conseguir compreender as definições formais em situações concretas parecem ser alguns dos principais requisitos que os alunos devem dominar para poder construir um conceito de sucessão com base na sua definição formal.

Nota

[1] Entende-se por imagens mentais o conjunto de todas as imagens que alguma vez foram associadas com o conceito, na mente da pessoa (Vinner, 1983).

Referências

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Domingos, A. (2001). Diferentes abordagens na construção dos conceitos matemáticos. In *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 161-173). Vila Real: APM.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2000). *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. Retirado em Janeiro, 20, 2001 de www: http://trident.mcs.kent.edu/~edd/publications.html.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116-140.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Orgs.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brazil.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In O. Zaslavsky (Org.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 111-118). Haifa, Israel.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Tyhomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.