A comunicação matemática no contexto de actividades de Investigação: O uso de representações matemáticas[28]

Ana Henriques
Escola Naval
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

RESUMO

Recentes desenvolvimentos na educação matemática salientam que a comunicação está fortemente relacionada com a resolução de problemas e o raciocínio. Além disso, as representações matemáticas desempenham um papel importante na comunicação, quer se considere a sua dimensão escrita ou oral. Neste artigo analisamos os modos de representação que os estudantes universitários escolhem para comunicar as suas estratégias de raciocínio na exploração de actividades de investigação e na resolução de problemas realizados durante uma experiência de ensino na disciplina de Análise Numérica. A metodologia de investigação é qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso. Os dados são recolhidos utilizando observação participante, relatórios de investigação dos alunos e entrevistas. Os resultados apresentados são baseados na análise do desempenho de três alunos e revelam que a realização de tarefas de investigação permite-lhes utilizar e interpretar diferentes representações para encontrar soluções, explicar e justificar os seus raciocínios e verificar resultados. Os resultados mostram, ainda, que os alunos são capazes de estabelecer relações entre diferentes representações.

A comunicação matemática sobressai das actuais recomendações para o ensino da Matemática em vários níveis de ensino (AMATYC, 2006; MAA, 2003, 2004; NCTM, 2000). De facto, estes documentos oficiais recomendam a incorporação, nos programas curriculares, de actividades que ajudem os estudantes a desenvolver competências de comunicação, fundamentais para estruturar o pensamento matemático e para transmitir os raciocínios de forma coerente e clara. Até certo ponto, estas competências são adquiridas no final do ensino secundário mas, segundo a MAA (2003), a experiência pós-secundária deverá reforçar o que é aprendido tanto em profundidade como em qualidade e ir mais longe. Por isso, nas suas recomendações curriculares, salienta que estes alunos devem ser capazes de: (i) usar uma variedade de ferramentas tecnológicas; e (ii) comunicar matematicamente, tanto oralmente como através da escrita e ler matemática.

---

[28] Este estudo foi realizado no âmbito do Projecto *Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra*, apoiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia - MCTES (contrato PTDC/CED/65448/2006).

Neste processo, as representações matemáticas são consideradas como "ferramentas essenciais para a comunicação e raciocínio sobre conceitos e informação em Matemática" (Greeno e Hall, 1997, p. 362). Além disso, as representações matemáticas dos alunos revelam, pelo menos potencialmente, os modos como os estudantes pensam e os processos que utilizam na resolução de problemas, desempenhando, assim, um papel importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Goldin, 2002). Deste modo, afigura-se pertinente a realização de um estudo com o objectivo de descrever e analisar os modos de representação utilizados pelos estudantes para comunicar as suas estratégias de raciocínio durante a exploração de actividades de investigação e a resolução de problemas.

AS REPRESENTAÇÕES COMO SUPORTE PARA COMUNICAR E RESOLVER PROBLEMAS

A literatura evidencia que a comunicação matemática está fortemente relacionada com a resolução de problemas e o raciocínio (Brenner et al., 1997; Neria e Amit., 2004). Esta relação é uma consequência natural da necessidade dos estudantes se envolverem na explicação, justificação e discussão de estratégias matemáticas e soluções, quando resolvem problemas. Como estas actividades requerem o uso de diferentes formas de representação matemática que apoiem a compreensão e favoreçam a comunicação de ideias matemáticas (Greeno e Hall, 1997), o sucesso dos estudantes no processo de resolução de problemas está dependente das suas competências na construção e no uso dessas representações. Deste modo, as representações matemáticas tornam-se um aspecto central da comunicação, em particular da sua dimensão escrita (Boavida et al., 2008).

Os estudantes podem explicar uma estratégia matemática ou uma solução numa variedade de formas, usando diversos tipos de representação. Alguns autores destacam determinados tipos de representações, como sejam a linguagem natural e a simbólica e as formas visuais de representação (onde incluem os gráficos, as tabelas, as figuras, etc.), pela frequência com que surgem em contextos educacionais e pelas funções que desempenham nesses ambientes. Por exemplo, Duval (2006) agrupa as representações semióticas em quatro tipos de registos: os registos monofuncionais que tomam a forma algorítmica e têm como função cognitiva o processamento matemático (sistemas de escrita matemática – representações discursivas; gráficos cartesianos – representações não discursivas) e os registos multifuncionais que visam uma variedade de funções cognitivas, como sejam a comunicação e a imaginação (linguagem materna e formas de raciocínio – representações discursivas; figuras geométricas – representação não discursiva). Autores como Greeno e Hall (1997), Gagatsis e Shiakalli (2004) e Ainsworth (2006) defendem que estas diferentes representações não devem ser consideradas alternativas nem independentes entre si e sublinham a importância de se estabelecerem conexões entre vários tipos de representações. A literatura indica que a capacidade de traduzir dentro e entre diferentes representações de conceitos matemáticos é essencial no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de um indivíduo (Elia, Panaoura, Eracleous e Gagatsis, 2007; Even, 1998; Greeno e Hall, 1997).

Outros estudos relatam as preferências e as dificuldades dos estudantes em relação ao uso de determinadas representações matemáticas. Por exemplo, Boero, Douek e Ferrari (2008) focam-se na linguagem natural e na sua relação com a linguagem simbólica e defendem que os estudantes são capazes de adquirir algum conhecimento ou competências sobre a linguagem enquanto objecto mas não a usam como ferramenta semiótica para pensar sobre os problemas e para comunicar com os outros. Salientam, ainda, que os estudantes aplicam esquemas conversacionais de forma imprópria. Quando lidam especificamente com argumentação, os estudantes preferem argumentos apresentados em palavras, uma vez que os argumentos algébricos para justificar e explicar procedimentos de resolução de problemas são mais difíceis (Healy e Hoyles, 2000).

Arcavi (2003) identifica três funções que a visualização pode desempenhar no processo de aprendizagem: (a) suporte e ilustração de resultados essencialmente simbólicos (e possivelmente fornecer uma prova desses resultados), (b) uma forma possível de resolver conflitos entre soluções (correctas) simbólicas e intuições (incorrectas) e, (c) uma forma de ajudar a recuperar fundamentos conceptuais que podem ser facilmente contornados por soluções formais, para os problemas. Deste modo, a representação visual "já não está relacionada como propósitos ilustrativos apenas, mas também é reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e até do processo de prova" (p. 235). O autor constata, ainda, que os alunos mostram-se reticentes quanto ao uso de estratégias gráficas, mesmo estando em posse de calculadoras gráficas e sabendo manipulá-las com desenvoltura. Estes resultados confirmam outros similares que salientam que os alunos ignoram o esboço do gráfico, procurando, quase sempre, a solução algébrica das questões (Eisenberg e Dreyfus, 1991; Knuth, 2000).

Há uma forma de representação que, por parecer simples e directa, é comum e frequente no ensino da Matemática – a tabela. Para Flores e Moretti (2005), usar tabelas no ensino não significa utilizá-las apenas para situações de comunicação. Deve-se possibilitar e privilegiar outras tarefas possíveis que não seja só a de leitura de tabelas, por exemplo, a própria construção de tabelas, a sua interpretação e preenchimento ou a compilação de dados ou informações para serem organizados noutra tabela. As tabelas não são representações autónomas, articulam-se de maneira explícita ou implícita, com outras representações. Esta articulação, que diz respeito à interacção entre a tabela e o enunciado verbal do problema ou a escrita algébrica, é essencial uma vez que é a mudança entre os registos que possibilita uma leitura global das representações gráficas e, em particular, das tabelas. A importância do uso de figuras, que representam situações matemáticas concretas, na resolução de problemas (o papel que desempenham para encontrar uma solução) é também fruto de reflexão em Flores e Moretti (2006).

Neste contexto, os estudantes universitários devem familiarizar-se com uma diversidade de representações e devem ser capazes de usar essas diferentes formas de representação, de forma flexível, na resolução de problemas de Matemática (AMATYC, 2006). De facto, o uso de diferentes representações depende da familiaridade dos estudantes com cada uma dessas representações (Boero et al., 2008). É fundamental que os professores promovam, nas salas de aula, o uso de diferentes formas de representação, através de actividades que ajudem os estudantes a desenvolver competências de representação e comunicação, fundamentais para estruturar o pensamento matemático e para transmitir os raciocínios de forma coerente e clara (MAA, 2004). Desta forma, os estudantes estarão expostos a diferentes representações dos conceitos matemáticos e como resultado, ganham flexibilidade em moverem-se entre essas diferentes representações e podem desenvolver profunda compreensão dos conceitos e reforçar a capacidade de resolver problemas (Even, 1998).

METODOLOGIA

Tendo em conta os objectivos definidos, este estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994), baseada em estudos de caso (Yin, 2003) e integrando uma vertente de experiência de ensino (Shulman, 1986).

A experiência de ensino é apoiada na realização de tarefas de investigação, durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2008/09, na disciplina de Análise Numérica. Os participantes são os alunos do 2.º ano dos cursos ministrados na Escola Naval. Durante o 1.º ano, estes alunos obtiveram aproveitamento escolar em diversas disciplinas de Matemática (Análise Matemática I e II e Álgebra Linear) que utilizam o método tradicional de ensino, com aulas de exposição de teoremas e demonstrações com um grau de formalismo médio ou reduzido, seguidas de outras de resolução de exercícios, onde a tecnologia (por exemplo, a máquina de calcular) não é utilizada (nem permitida nas aulas ou em momentos de avaliação) como instrumento de trabalho.

A resolução de problemas e as tarefas de investigação partilham diversas características (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003). Ambas se referem a processos matemáticos complexos que requerem capacidades que se situam para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos e envolvem actividade fortemente problemática. Uma parte significativa das aulas do semestre é utilizada para a realização de quatro tarefas de investigação relacionadas com diversos tópicos programáticos da disciplina. Os alunos são confrontados com problemas para os quais não têm teoria nem modelo para fazerem um tratamento completo, pelo que são desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. Durante a exploração das tarefas os alunos trabalham em pares ou em pequenos grupos. No final da exploração de cada tarefa, apresentam oralmente, à turma, o trabalho desenvolvido e são solicitados a escreverem um relatório (extra aula) onde explicam as estratégias que utilizaram e apresentam e justificam as suas conclusões. Deste modo, as tarefas de investigação promovem a comunicação, fornecem a base para a aprendizagem de conceitos e procedimentos da disciplina por parte dos alunos e permitem conhecer as suas estratégias de raciocínio. As restantes aulas contemplam exposições teóricas dos conteúdos programáticos, alguns dos quais trabalhados durante as tarefas de investigação e que são abordados, por exemplo, em Santos (2002) que é o manual adoptado para a disciplina e que serve também de instrumento de trabalho. Contemplam, ainda, oportunidades para a resolução de exercícios de aplicação e consolidação de conhecimentos.

A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização de tarefas de investigação, os seus relatórios escritos (designados por RT) e o registo áudio das entrevistas individuais realizadas aos alunos objecto de estudos de caso, após a exploração de cada tarefa (assinalados com E). As entrevistas são baseadas em questões que emergem da análise do material escrito produzido pelos alunos e o seu objectivo é compreender os seus processos de raciocínio e obter dados para clarificar ou confirmar aspectos que não podem ser claramente inferidos da exploração das tarefas.

Os resultados que se apresentam são relativos a três estudos de caso e a duas tarefas (ver enunciado em anexo). Para cada tarefa, são analisadas as diferentes representações usadas pelos alunos na sua exploração, a função que essas representações desempenham e o modo como são usadas. São também examinadas a mudança entre representações e o uso de múltiplas representações, uma vez que são estratégias usadas pelos estudantes de forma a resolver impasses no raciocínio e na resposta às questões das tarefas. As representações que os alunos apresentam são categorizadas, tendo por base os modos de representação de Duval (2006), como: (a) representações essencialmente discursivas (a linguagem natural e as notações simbólica e algébrica); e (b) representações essencialmente visuais (as representações gráficas e as tabelas).

O USO DE REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS PELOS ALUNOS

A análise do trabalho desenvolvido pelos três alunos na realização das tarefas investigativas propostas, mostra como seleccionam e utilizam as diversas representações matemáticas e as funções que desempenham na exploração dessas tarefas.

Tarefa 1

Os alunos começam por utilizar a linguagem natural para descrever e justificar o modo de formação das regras das operações com intervalos, como mostra os exemplos seguintes:

No caso da soma era fazer a soma coordenada a coordenada porque os dois extremos continham as somas. (Gonçalo, E1)

A subtracção… Pensei na operação inversa que foi introduzir o sinal negativo dentro do último intervalo e depois foi só somar utilizando a regra que tinha deduzido. (Luís, E1)

[Para a multiplicação] tinha que se multiplicar as várias combinações e depois escolher os maiores e os menores para fazer de extremos do intervalo final. (…). A divisão foi da mesma forma que a multiplicação. (Carlos, E1)

No entanto, os alunos parecem considerar a linguagem natural inadequada para justificar os seus raciocínios e, quando lhes é acessível, complementam a descrição anterior usando também o raciocínio dedutivo para obter estas regras, com base em propriedades matemáticas já conhecidas e recorrendo à manipulação algébrica:

$X = [x_1, x_2] \qquad Y = [y_1, y_2]$

$X - Y = X + (-Y) = [x_1, x_2] + (-[y_1, y_2]) = [x_1, x_2] + ([-y_2, -y_1]) =$

$= [x_1 - y_2, x_2 - y_1]$ (Luís, RT1)

Quando solicitados a generalizar as regras deduzidas, os alunos utilizam a notação simbólica e constroem expressões que formalizam as descrições informais:

Conseguimos concluir a seguinte regra:

$[x_1, x_2] * [y_1, y_2] = [\min C, \max C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1*y_1), (x_1*y_2), (x_2*y_1), (x_2*y_2)\}$.

Podemos deduzir para a divisão:

$X/Y = [x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [\min C, \mathrm{Max}\ C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1/y_1), (x_1/y_2), (x_2/y_1), (x_2/y_2)\}$. (Carlos, E1)

Estas expressões apresentam-se, normalmente, incompletas pois os alunos não sentem necessidade de explicitar o domínio das variáveis utilizadas, apesar de conhecerem as limitações das regras (que referem várias vezes, por exemplo, no caso da divisão em relação ao zero). Luís é o único que inclui, de forma correcta, quantificadores na sua escrita simbólica:

$\forall_{X,\,Y} \in IR,\ X + Y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$

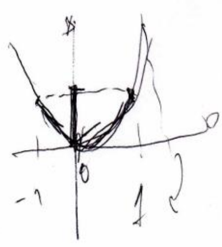
$\forall_{Y} \in IR \backslash \{0\},\quad X/Y = \dfrac{x_1, x_2}{y_1, y_2} = \left[\dfrac{x_1}{y_2}, \dfrac{x_2}{y_1}\right]$ (RT1)

Na questão seguinte, relacionada com funções, os alunos já utilizam diferentes abordagens. Carlos e Luís voltam a utilizar a manipulação algébrica e aplicam as regras deduzidas anteriormente para realizar cálculos, justificar raciocínios e deduzir expressões:

> f: $D \subset IR \rightarrow IR$, $f(x) = X + X$ com $X = [x_1, x_2] \subset D$
>
> $f([x_1, x_2]) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1 + x_1, x_2 + x_2] = [2x_1, 2x_2] = 2[x_1, x_2]$
>
> Logo concluímos que $f(X) = X + X$ também pode ser escrito na forma $f(X) = 2X$. (Luís, RT1)
>
> $f(x) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1+ x_1, x_2 + x_2]$, ou seja, $[2, 7]+[2, 7] = [4, 14]$
>
> $f(x) = 2[x_1, x_2] = [2x_1, 2x_2] = 2[2, 7] = [4, 14] = [x_1, x_2] + [x_1, x_2]$.
>
> Estas funções, a nível matemático são iguais. (Carlos, RT1)
>
> Para $f(X) = X^2$ teremos então $f(X) = X \times X$. Utilizamos a regra que deduzimos na questão anterior para fazer X vezes X. Como os intervalos são os mesmos, podemos escrever $f(X) = [X_1^2, X_2^2]$. (Luís, E1)

No caso da função $f(X) = X^2$, como não é monótona, a utilização dos métodos algébricos de representação não é adequada porque não permite detectar conflitos e erros na solução obtida. Como os alunos não usam outro tipo de representação que permita corrigir os resultados, as respostas obtidas com base na representação algébrica nem sempre estão correctas. Questionado posteriormente sobre a utilização da representação gráfica para obter a expressão da regra, Carlos é confrontado com resultados diferentes:

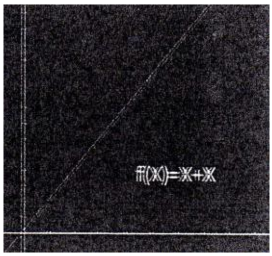
> Prof.: Qual seria a imagem do intervalo [-1,1] através desta função?
>
> Carlos: Iria ser de zero a 1. Ou seja, não são iguais. A parábola só está definida de zero para cima, logo não faz sentido termos -1. [Através de manipulação algébrica obteve [-1,1] * [-1,1] = [-1, 1]]



(Carlos, E1)

Apesar disso, não questiona a regra que aplica nem os cálculos que efectua e opta pela solução algébrica, na qual confia mais. A sua relutância em utilizar a representação gráfica nesta situação parece estar relacionada com a dificuldade na interpretação do gráfico: "Para mim é difícil imaginar um intervalo ao quadrado numa parábola, não consigo visualizar essa imagem…" (E1). O aluno também vê a construção da representação gráfica como uma tarefa mais complexa ou como desperdício de tempo: "[Aplico a regra] porque é mais fácil. Olhamos para aqui e o que é que vemos? X vezes X. Isto [alternativa gráfica] obriga a pensar…" (E1). Para deduzir a expressão $f(X) = e^X = [e^{x1}, e^{x2}]$, Carlos já usa uma estratégia baseada na representação gráfica da função exponencial e nas suas propriedades, provavelmente porque ao procurar outras estratégias para aplicar, entre os seus recursos, esta é a única disponível, como explica: "só analisámos o gráfico" (E1).

Gonçalo, nesta questão, recorre de imediato à representação gráfica das funções e utiliza-a, de forma correcta, quer para encontrar soluções, quer para confirmar os resultados dos cálculos que faz quando aplica as regras deduzidas anteriormente:



Concluímos que a imagem [do intervalo [2,7]] através da função é o intervalo [4,14] (…). Esta conclusão é corrobo-rada pois a imagem da função (ver gráfico) vai ser o resultado da soma algé-brica do intervalo [2,7]. (RT1)

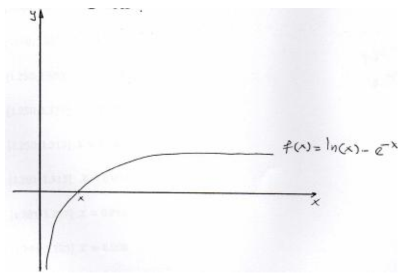
Para a função $f(X) = X^2$, o aluno refere: "Primariamente analisamos o gráfico da função e concluímos que não podíamos generalizar apenas uma expressão o resultado pretendido. Por isso dividimos a função nos vários tipos de intervalos possíveis e obtivemos as várias opções (…)" (E1). A utilização da representação gráfica, neste caso, facilita a identificação de propriedades das funções (por exemplo, a monotonia) que são fundamentais para o aluno obter a resposta correcta. Também é interessante verificar que o aluno é capaz de relacionar as representações algébricas das funções com as suas representações gráficas e tirar partido dessa relação para obter e confirmar resultados.

Tarefa 2

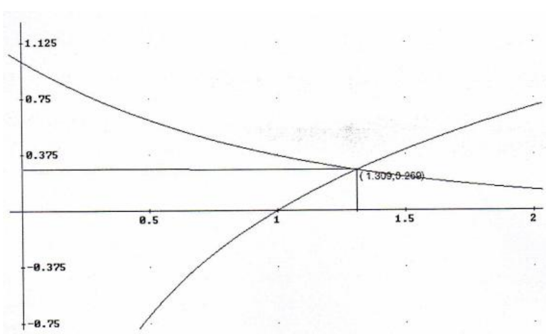
A primeira opção dos alunos para tentar resolver a equação não linear $f(x)=\ln(x)-e^{-x}$, é a utilização de manipulação algébrica. No entanto, não são bem sucedidos, como clarifica Luís: "Não consegui isolar totalmente a variável x de modo a obter um valor para esta variável" (E2). A resolução de equações não lineares só faz parte dos programas de Matemática a nível superior, excepto alguns casos em que a sua resolução pode ser realizada através da aplicação de manipulação algébrica (por exemplo, decomposição de polinómios, usando casos notáveis ou a lei do anulamento do produto). Assim, a opção dos alunos parece estar relacionada com a sua experiência escolar em que a resolução de equações se faz, maioritariamente, através de manipulação algébrica, como evidencia Gonçalo: "Na primeira tentativa, tentámos resolver como antigamente [refere-se à resolução analítica de equações através de manipulação algébrica] mas não conseguimos chegar a nenhum valor" (E1).

Os alunos optam então pela resolução aproximada da equação com base na representação gráfica, recorrendo à máquina de calcular, como refere Luís: "Visto que a equação (…) apresenta vários problemas na determinação das suas raízes, pensamos em dar solução à mesma recorrendo à representação gráfica" (E2). Nesta altura, as estratégias usadas são essencialmente de dois tipos, apresentadas nas figuras seguintes. Numa estratégia, Luís introduz a expressão algébrica da função na máquina de calcular e procura a intersecção do seu gráfico com o eixo das abcissas. Carlos e Gonçalo optam por outra estratégia em que transformam a equação dada no enunciado numa outra equivalente, através de manipulação algébrica, e representam as duas funções que compõem a equação. Em qualquer das estratégias, os alunos descrevem e justificam, de forma correcta e em linguagem natural, o processo de obtenção da solução através destas representações gráficas:

Dada uma função f(x), os seus zeros são as raízes da equação f(x) = 0. Sendo assim, os zeros da função são as abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas (eixo dos xx). (Luís, RT2)



Ao igualarmos a nossa função a zero, temos que ln(x) = e-x. O valor que procuramos trata-se do x para o qual as duas funções são iguais. Então fizemos o traçado do gráfico das duas funções para ver qual o valor de x no qual se dava a intersecção. (Gonçalo, E2)



Os alunos interpretam correctamente os resultados obtidos graficamente e mostram, assim, facilidade em relacionar a representação algébrica da função e a sua representação gráfica.

Carlos parece considerar a representação gráfica pouco fiável ou adequada e utiliza, igualmente uma tabela para o auxiliar a encontrar o valor aproximado da solução da equação. Na tabela que constrói usa, novamente, a decomposição da função em duas e procura encontrar o ponto de intersecção entre elas, através da análise dos seus valores, como justifica na descrição, em linguagem natural, que acompanha a tabela:

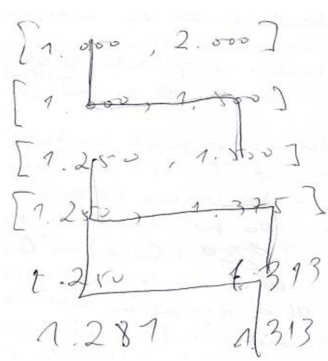
Podemos criar uma tabela com o objectivo de atribuir valores a x em ln(x) e em e^{-x} para nos aproximar do valor da raiz, concluindo que se encontrava entre x = 1 e x = 3/2 (…) porque é quando o valor da função logarítmica é maior que a exponencial.

x	**ln(x)**	$\mathbf{e^{-x}}$
0	n.d.	1
1/2	-0,6931	0,6065
1	0	0,3679
3/2	0,4055	0,2231

(E2)

Assim, a tabela construída pelo aluno é utilizada, não só para apresentar e organizar dados, mas como base para a realização de inferências sobre a existência de relações não conhecidas. Neste caso, esta forma de representação articula-se, explicitamente, com as representações gráfica e algébrica a partir das quais é construída, verificando-se uma tradução entre registos.

Na sequência de intervalos apresentada na questão seguinte, os alunos tentam identificar padrões mas utilizam diversas representações, como os apresentados nas figuras seguintes. A representação que Carlos utiliza é mais visual, a que chama 'método da cadeira'pela semelhança deste objecto com os traços apresentados. Gonçalo utiliza um esquema mais numérico, com símbolos de mais e menos para indicar as alterações ocorridas na referida sequência.



1 – [1.000 2.000] -

2 – [1.000 1.500] +

3 – [1.250 1.500] -

4 – [1.250 1.375] - (…)

(Carlos, E2)

> Observamos que quando ocorriam alterações no extremo superior, se tratava deste ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alteração, estes seriam aumenta-dos. (Gonçalo, RT2)

Estas representações são utilizadas pelos alunos para explorar padrões e obter compreensão sobre propriedades importantes dos elementos da sequência. No entanto, depois de identificarem o padrão utilizam, mais uma vez, a linguagem natural para descrever o modo de formação dos elementos da sequência, como se pode observar no exemplo seguinte de um excerto da entrevista com Luís:

> A amplitude dos intervalos vai diminuindo para metade relativamente ao intervalo anterior. Também vimos que o limite superior e o limite inferior alteravam, de três em três intervalos, o inferior e de dois em dois o superior (…). Nestes três em que se mantinha o limite superior, era sempre o limite inferior que ia diminuir. Três vezes. Depois alterava e passava a ser o limite superior, duas vezes. (…) A amplitude do próximo intervalo é encontrada através da soma da amplitude ao valor mínimo (a) ou da subtracção ao valor máximo (b) (…). (E2)

Quando solicitados a generalizar a lei de formação deduzida, os alunos, numa tentativa de formalização, utilizam um misto de linguagem natural e simbólica que nem sempre traduz, de forma adequada, o que é correctamente descrito anteriormente:

> A partir do que foi dito anteriormente podemos definir a seguinte regra: Se x - max > (f(x) = 0), então o intervalo seguinte será [min, x - max] ou [x + min, max] se e só se x - max < (f(x) = 0). (Luís, RT2)
>
> Como regra geral (…) temos o intervalo [a, b] com $v_{méd}$ = (a+b)/2. Fazemos os seguintes passos:
>
> 1.º Encontrar o valor médio $v_{méd}$ = (a+b)/2
>
> 2.º Encontrar f($v_{méd}$)
>
> Se f($v_{méd}$)>0 então (…) o intervalo seguinte é [a, $v_{méd}$]
>
> Se f($v_{méd}$)<0 então (…) o intervalo seguinte é [$v_{méd}$,b] (Gonçalo, RT2)

Para resolver a equação proposta no final desta tarefa, que identificam correctamente como não linear, por analogia com a primeira questão, os alunos optam novamente pela manipulação algébrica, apesar de conhecerem e terem à sua disposição outras estratégias mais eficientes: “É exactamente o mesmo problema, tentámos isolar a variável e não conseguimos” (Luís, E2). Este comportamento é normal, se atendermos à já referida experiência escolar dos alunos na resolução de equações.

Carlos e Luís optam, então, por resolver a equação com base na representação gráfica e descrevem o processo em linguagem natural, à semelhança do que acontece na primeira questão: “Como não nos foi possível resolver analiticamente, tentamos abordar de forma visual. (…) Calculamos a intersecção das duas funções e o ponto de intersecção obtido foi t = 25,942393” (Carlos, RT2).

Gonçalo prefere utilizar, de forma correcta mas menos eficiente, o algoritmo que deduz na questão anterior. Para isso constrói uma tabela, como a do exemplo seguinte, onde apresenta os cálculos que efectua durante a exploração da tarefa, de forma organizada e que serve também para os auxiliar:

Efectuamos os seguintes cálculos para nos aproximarmos do valor de t:

[25.000, 59.702]	$\Delta x/2 = 17.351$	$t_{med} = 42.351$
[25.000, 42.351]	$\Delta x/2 = 8.338$	$t_{med} = 29.336$
(…)	(…)	(…)

(RT2)

A opção por este modo de representação para apresentar e facilitar os cálculos, pode estar relacionada com a familiarização de procedimentos. De facto, nos manuais de Análise Numérica é usual a utilização deste tipo de tabela para exemplificar a aplicação de métodos recursivos e os alunos têm por hábito adoptá-la quando resolvem exercícios na sala de aula.

CONCLUSÕES

Da análise dos resultados destaca-se, como aspecto significativo, a variedade de representações que os alunos utilizam, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas.

Os alunos têm tendência para privilegiar a representação algébrica na exploração das tarefas de investigação, mesmo quando conhecem e têm à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes. Este comportamento parece ser induzido pela prática escolar dos alunos uma vez que seleccionam este modo de representação quando pretendem deduzir regras e encontrar soluções. No entanto, a representação algébrica nem sempre é adequada porque não permite detectar conflitos e erros na solução obtida nem identificar padrões no comportamento de valores numéricos que facilitem a selecção de métodos de resolução mais eficientes. Como os alunos não usam, habitualmente, outro tipo de representação que permita corrigir os resultados, as respostas obtidas com base na representação algébrica nem sempre estão correctas. Só quando este modo de representação não permite encontrar soluções ou quando são solicitados a apresentar estratégias alternativas é que recorrem a outras representações.

Os resultados do estudo mostram que apenas um dos casos (Gonçalo) escolhe, naturalmente, comunicar as suas estratégias de resolução no modo gráfico. Nos outros casos, a representação gráfica só surge quando explicitamente solicitada ou quando os alunos não têm disponíveis, entre os seus recursos, outras representações para usar. A falta de prática em níveis educativos anteriores e a crença que o uso de representações gráficas constitui um raciocínio pouco formal, matematicamente inaceitável no ensino superior, são alguns factores que podem estar na origem desta tendência. De forma geral, os alunos usam a representação gráfica para obter soluções, explicar raciocínios e verificar resultados e, raramente, para planearem e seleccionarem as suas estratégias. Contudo, a sua utilização é, maioritariamente, adequada às questões e os resultados apresentam-se quase sempre correctos. Verifica-se, também, que os alunos são capazes de relacionar este modo de representação gráfico com outras representações, como as algébricas e as tabelares.

A tabela é outra representação que os alunos utilizam, com alguma frequência, para organizar e apresentar dados e resultados de cálculos. O objectivo deste modo de representação parece ser facilitar, por um lado, a identificação da informação necessária à realização de cálculos e a própria execução desses cálculos e, por outro, realizar inferências sobre a existência de relações desconhecidas. Embora mostrem facilidade na sua utilização, nalgumas situações os alunos constroem as suas tabelas à semelhança das que surgem nos livros de texto da disciplina e que utilizam na resolução de exercícios na sala de aula, pelo que a escolha deste tipo de representação pode estar a ser induzida pela experiência escolar do aluno.

Das outras duas tarefas deste estudo, cuja exploração não é possível apresentar por limitações de espaço, há apenas a referir que os alunos usam figuras geométricas quando outro tipo de representação não permite obter soluções. Na tarefa 4 os alunos recorrem a este modo de representação e utilizam-no para visualizar a informação disponível e auxiliar nas decisões estratégicas e para mostrar e justificar os seus raciocínios e processos de cálculo. Os alunos ainda são capazes de identificar as limitações associadas à utilização de determinadas figuras e de seleccionar as mais adequadas para permitir a obtenção de soluções mais exactas.

As respostas dos alunos, durante a realização das tarefas de investigação, são essencialmente descritivas, usando a linguagem natural. Os alunos utilizam este modo de representação em todas as tarefas, para descrever e justificar os seus raciocínios e os processos de obtenção de soluções, mesmo quando estas são obtidas com base nas outras representações já referidas. Quando solicitados a generalizar os resultados ou a formalizar as suas respostas, os alunos recorrem a um misto de linguagem natural e simbólica, isto é, continuam a usar a linguagem natural mas complementam-na com alguma notação simbólica. É ainda de realçar o facto de, só um caso (Luís), incluir os quantificadores matemáticos na notação simbólica que usa. A utilização de notação simbólica parece ser, assim, uma das dificuldades que emergem da actividade matemática deste alunos, uma vez que as expressões simbólicas que apresentam, nem sempre traduzem aquilo que descrevem informalmente.

Finalmente, os resultados relativos aos casos apresentados apoiam a ideia que as representações matemáticas são um recurso poderoso para a comunicação do raciocínio matemático. Por isso, e tal como sugerem os documentos oficiais (AMATYC, 2006; NCTM, 2000) devem ser dadas oportunidades aos estudantes para ganhar experiência no uso de diversas representações matemáticas e estabelecerem ligações entre elas. Os resultados parecem indicar, também, que a realização das tarefas de investigação propostas, integradas no processo de ensino e aprendizagem da Análise Numérica cumprem esse propósito.

REFERÊNCIAS

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183-198.

American Mathematical Association of Two-Year Colleges (2006). *Professional standards*. Retirado de www.missioncollege.org/depts/maths/hobbs/standars.html em 09/12/2009.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G. Vale, I., e Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Boero, P., Douek, N., e Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, e D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 262-295). New York, Ny: Routledge.

Bogdan, R., e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Smith-Reed, B., e Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal, 34*(4), 663-689.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Eisenberg, T., e Dreyfus, T.(1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington, DC: MAA.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous A., e Gagatsis, A. (2007), Relations between secondary Pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17(1)*, 105-121.

Flores, C., e Moretti, M. (2005). *O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: Ponto de análise para aprendizagem Matemática*. Reunião Anual da ANPEd, GT19: Educação Matemática. Retirado de http://www.anped.org.br/28/textos/gt19/gt19736int.pdf. em 4/12/2009.

Flores, C., e Moretti, M. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *REVEMAT - Revista Electrónica de Educação Matemática*, *5*, 5 -13. Retirado de www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2006_pdf/revista_2005_01_completo.pdf em 4/12/2009.
Gagatsis, A., e Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.
Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (pp.197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum .
Greeno, J. G., e Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78*(5), 361-367.
Healy, L. e Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in Algebra. *Journal forResearch in Mathematics Education*, *31*, 396-428.
Knuth, E. J. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher*, 93(1).
Mathematical Association of America (2003). *Guidelines for programs and departments in undergraduate mathematical sciences*. Retirado em 03-Nov-2008, de http://www.maa.org/guidelines/guidelines.html.
Mathematical Association of America (2004). *Undergraduate programs and courses in the mathematical sciences: CUPM curriculum guide 2004*. Retirado em 03-Nov-2008, de http://www.maa.org/cupm/cupm2004.pdf.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
Neria, D., e Amit, M. (2004). Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 409-416). Bergen, Norway: PME.
Ponte J. P., Brocardo J., e Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
Santos, F. C. (2002). *Fundamentos de Análise Numérica*. Lisboa: Sílabo.
Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York, NY: Macmillan.
Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3ª ed.). London: Sage.

ANEXO – TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO

Tarefa 1: Intervalando

1. Observe as seguintes situações

[1, 2] + [5, 7] = [6, 9]   [0, 1] + [-5, 2] = [-5, 3]   [-3, -1] + [1, 3] = [-2, 2]

a) O que pode dizer sobre o resultado de [-2,-1]+[-5,-1]? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Será possível deduzir uma regra que permita determinar a soma de dois intervalos de valores reais? Todos os intervalos de valores reais seguem esta regra? Investigue.

c) Investigue se a regra deduzida poderá ser utilizada para outras operações com intervalos, por exemplo, a subtracção (X–Y), a multiplicação (x×y) e a divisão (x/y). Em caso negativo, deduza novas regras para essas operações.

2. Considere a função f: D$\subset$ IR$\rightarrow$ IR, real de variável real, definida por f(X) = x + x e X = $[x_1, x_2] \subset$ D, um intervalo de valores reais pertencente ao seu domínio.

a) Se X = [2, 7], qual a sua imagem através da função f? Explique como chegou a essa conclusão.

b) O que poderia afirmar na alínea anterior se a função f passar a ser definida por f(X) = 2x?

c) O que pode concluir sobre a imagem de um intervalo real qualquer, se a função f passar a ser definida por f (X) = x^2 ou por f (X) = e^x?

Tarefa 2: Equacionando

1. Considere a função $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$. Como resolve a equação $f(x) = 0$?

2. Observe a seguinte sequência de intervalos de valores reais contendo a raiz de f,

[1.000, 2.000]
[1.000, 1.500]
[1.250, 1.500]
[1.250, 1.375]
[1.250, 1.313]
[1.281, 1.313]

a) Qual será o próximo elemento da sequência? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Encontre uma regra geral para construir qualquer elemento da sequência apresentada?

3. A velocidade de lançamento de um míssil a partir de um submarino é calculada através da fórmula $v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$, onde v é a velocidade de lançamento na vertical, u é a velocidade de saída do combustível relativamente ao míssil, mo é a massa inicial do míssil (t = 0), q é a taxa de consumo do combustível, g = 9.8 m/s2 a aceleração da gravidade. Sabendo que u = 2200 m/s, mo= 160000 Kg e q = 2680 Kg/s, ao fim de quanto tempo é atingida a velocidade de 1000 m/s?