
A demonstração nos programas de Matemática: Uma análise transversal

Cecília Costa

Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Pedro Tadeu

ESTIG Instituto Politécnico de Bragança

Resumo. Neste estudo analisamos como, em Portugal, a demonstração é considerada nos programas de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Desta análise é possível reconhecerem-se ênfases diferentes no desenvolvimento da capacidade de demonstração matemática, nos diferentes anos e, em particular, na mudança de ciclos.

Introdução

A motivação para a elaboração deste estudo surgiu, essencialmente, da conjugação de três factores: um primeiro prende-se com o facto de nós fazermos parte da equipa do Projecto *Geomind*, coordenada por Ana Breda, e que está a ser desenvolvido no âmbito da Rede Inter-Centros de Didáctica da Matemática criada e coordenada por João Pedro da Ponte. Um segundo aspecto diz respeito à nossa própria experiência profissional. Como formadores de professores de matemática temos constatado que a demonstração é pouco trabalhada no ensino não superior. Note-se que não pretendemos com isto dizer que é "trabalhada" no ensino superior! Que se fazem muitas demonstrações é um facto... E um último factor, talvez o que nos incentivou de forma mais decisiva, a leitura da tese de mestrado de Sílvia Machado intitulada "A Demonstração Matemática no 8º ano no contexto de utilização de *Geometer's Sketchpad*", através da qual pudemos verificar que é efectivamente possível fazer com que alunos do 8º ano façam demonstrações.

Muito se pode dizer sobre o que se entende por demonstração. Não pretendemos porém fazê-lo aqui. Neste estudo, vamos situar-nos no contexto dos documentos oficiais e faremos a nossa interpretação do que é expressamente referido num dos documentos analisados, onde se pode ler:

"A aprendizagem matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da

matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais).” [DES 2001, p.19]

Neste extracto há marcadamente uma distinção entre demonstrações matemáticas e demonstrações formalizadas. Nós estamos interessados nas demonstrações matemáticas e o sentido em que as entendemos prende-se com o desenvolvimento da capacidade de argumentação e do raciocínio dedutivo, inseridas num processo mais amplo que desejavelmente se deveria aproximar do que se entende por fazer matemática.

Para elaborar este estudo baseamo-nos nos documentos listados nas referências, que como é natural, fazem parte da lista bibliográfica do documento de trabalho que nos foi enviado pelas dinamizadoras deste grupo de discussão, pelo que decidimos referenciá-los do mesmo modo para que possam facilmente ser identificados por todos. Os três documentos relativos ao ensino secundário foram obtidos através da *internet*.

Em síntese, trata-se dos documentos oficiais, actualmente em vigor, relativos à Matemática para o ensino não superior. Resume-se no quadro seguinte os documentos por nós analisados e a correspondência com os níveis de escolaridade a que dizem respeito.

Ensino Básico			Ensino Secundário		
1º Ciclo	2º Ciclo	3º Ciclo	10º Ano	11º Ano	12º Ano
ME 1990	ME 1991 a,b	ME 1991 c,d	(Matemática A) DES 2002		
CNEB 2001					

Quadro 1

Faz-se notar que actualmente co-existem em simultâneo documentos orientadores datados de uma década de intervalo.

Referências à demonstração

Nos documentos analisados relativos ao ensino básico, constatámos que nos 1º e 2º ciclos não existem referências explícitas à demonstração. Quanto ao 3º ciclo, as referências explícitas à demonstração são pontuais.

Dois exemplos dessas referências são os seguintes: no 8º ano, o teorema de Pitágoras cuja demonstração é exigida; e no 9º ano a exclusão da demonstração da fórmula resolvente.

Existem, porém, referências à demonstração, mais ou menos, implícitas em todos os documentos em estudo. Selecionamos algumas das expressões que consideramos indicadoras de uma preocupação no desenvolvimento da capacidade de argumentar e demonstrar em matemática e que sintetizaremos adiante.

Quanto ao ensino secundário, as referências explícitas à demonstração são mais frequentes. Escolhemos três exemplos, um por cada ano de escolaridade. No 10º ano, no tema transversal “Lógica e Raciocínio” um dos aspectos a desenvolver é a “*Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração. Métodos de demonstração*” [DES, 2001a, p.21]. Em relação ao qual se acrescenta nas indicações metodológicas:

“No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas.”

No 11º ano, no tópico Limites de Sucessões e Convergência é explicitamente pedida a demonstração de que o limite de uma sucessão real é único.

Quanto ao 12º ano no tema Cálculo Diferencial, refere-se explicitamente: “*Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras)*”.

No que respeita ao ensino básico, registamos no quadro 2 exemplos de alguns indicadores das referências implícitas à demonstração a que atrás já nos referimos e que passamos a listar: “*fazer julgamentos matemáticos*” [CNEB, p.60]; “*formular argumentos válidos*” [CNEB, p.62]; “*justificar os seus raciocínios*” [CNEB p.63]; “*justificação de raciocínios e escolha de argumentação válida*” [ME 1991c, p.34].

No que diz respeito ao ensino secundário as expressões são mais incisivas: “*fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.*” [DES 2002, p.4]; “*Desenvolver a capacidade (...) de raciocinar matematicamente.*” [DES 2002, p.7]; “*(...) levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar (...).*” [DES 2002, p.10].

Ensino Básico			Ensino Secundário		
1º Ciclo	2º Ciclo	3º Ciclo	10º Ano	11º Ano	12º Ano
ME 1990	ME 1991 a,b XXX (p.152)	ME 1991 c,d “justificação de raciocínios e escolha de argumentação válida” (p. 34).	DES 2002 “fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.” (p. 4) “Desenvolver a capacidade (...) de raciocinar matematicamente (p. 7) “(…) levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar (…)” (p. 10)		
CNEB 2001 “fazer julgamentos matemáticos” (p.60)					
	“formular argumentos válidos” (p. 62) XXX “justificar os seus raciocínios” (p. 63)				

Quadro 2

Em síntese, constata-se que as referências à demonstração aumentam conforme avançamos no nível de escolaridade, e se muda do ensino básico para o secundário. Sendo a argumentação mais marcadamente solicitada no ensino básico e a demonstração (ainda que informal) no ensino secundário.

Ensino Básico			Ensino Secundário		
1º Ciclo	2º Ciclo	3º Ciclo	10º Ano	11º Ano	12º Ano
ME	ME 1991 a,b	ME 1991 c,d “Justificação de raciocínios e escolha de argumentação válida” (p. 34)	DES 2002 Raciocínio dedutivo: “(...) o estudante deverá ser solicitado frequentemente a justificar raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas.” (p.11) Comunicação: “O estudante (...) deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica da matemática (...)” (p.11)		
CNEB 2001 Actividades de investigação: “(...) os alunos argumentam e comunicam (...) as suas conclusões.” (p.68) Comunicação matemática: “(...) são importantes as experiências de argumentação e de discussão (...)” (p. 70)					

Quadro 3

Temas

Da análise dos vários documentos constata-se a existência de determinadas áreas temáticas (independentemente da terminologia com que são referidas nos diferentes

documentos) a saber: Números e Cálculo, Geometria, Estatística e Probabilidades e, Álgebra e Funções.

	ME 1990/91	CNEB 2001
1º ciclo	Números e operações Grandezas e medidas Espaço e forma	Números e Cálculo Geometria Estatística e Probabilidades Álgebra e Funções
2º ciclo	Geometria Números e Cálculo Estatística Proporcionalidade	
3º ciclo	Geometria Números e Cálculo Funções Estatística	

Quadro 4

Consoante o ciclo de ensino uns temas são valorizados em relação a outros e/ou uns dão lugar a outros; há, no entanto, alguns com maior incidência e presença ao longo de toda a escolaridade como é o caso da Geometria.

Nos documentos relativos ao ensino básico, o tema onde aparecem mais referências explícitas à demonstração é na Geometria.

Nos documentos relativos ao ensino secundário, já não é apenas na Geometria onde aparecem mais referências explícitas à demonstração. Surgem agora outras áreas como a análise onde começam a ser pedidas pequenas demonstrações.

	DES 2002
10º ano	Geometria no plano e no espaço I Funções e gráficos Estatística
11º ano	Geometria no plano e no espaço II Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada. Sucessões reais
12º ano	Probabilidades e combinatória Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e continuidade. Conceito de derivada e aplicações Trigonometria e números complexos

Quadro 5

“No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do

programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas.” [DES 2002, p.21]

Comentário final

Neste estudo analisámos como, actualmente em Portugal, a demonstração é considerada nos programas de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Desta análise é possível reconhecerem-se ênfases diferentes no desenvolvimento da capacidade de demonstração matemática, nos diferentes anos e, em particular, na mudança de ciclos. Constata-se que as directrizes relativas à demonstração estão presentes, mas que na implementação prática em sala de aula são ou podem ser contornáveis.

Efectivamente, muitas das directrizes podem não ser tidas em consideração pelos professores, uma vez que, em última análise não são obrigatórias. Vejamos, por exemplo, esta citação retirada da introdução (p. 4) do Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem Vol. II para o 2º ciclo do Ensino Básico. Frase que é repetida integralmente na introdução do Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem Vol. II para o 3º ciclo.

“Dado o carácter de relativa abertura do programa, considerou-se útil complementá-lo com um conjunto de propostas de trabalho, que, embora sem função normativa, esclarecessem o professor sobre (...)” [ME 1991b, p. 4]

Nos documentos curriculares analisados a demonstração não é entendida como um fim em si mesmo, mas como fazendo parte de um processo mais lato que, em última análise, se aproxima do que se entende por “fazer matemática”.

Referências

- DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências essenciais*. Lisboa: Departamento de Educação Básica. Ministério da Educação.
- DES (2001a). *Programa de Matemática A, 10º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://www.dgidec.min-edu.pt/programas/prog_hm.asp em 28/04/2006).

- DES (2002a). *Programa de Matemática A, 11º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://www.dgidec.min-edu.pt/programas/prog_hm.asp em 28/04/2006).
- DES (2002b). *Programa de Matemática A, 12º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário (retirado de http://www.dgidec.min-edu.pt/programas/prog_hm.asp em 28/04/2006).
- ME (1991a). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 2º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol. I.
- ME (1991b). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 2º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol. II.
- ME (1991c). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol. I.
- ME (1991d). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol. II.
- ME (1990). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 1º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação
- Machado, Sílvia (2005). *A Demonstração Matemática no 8º Ano no Contexto de Utilização do Geometer's Sketchpad.*, Tese de Mestrado, DEFC, Universidade de Lisboa.