7

Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8.º ano

Nuno Candeias

Esc. E. B. 2, 3 Ciclos Vasco Santana

João Pedro da Ponte

Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Resumo. O software de geometria dinâmica permite a realização de um ensino-aprendizagem de cunho exploratório e investigativo. Este estudo descreve a forma como alunos do 8.º ano desenvolveram a sua competência geométrica ao utilizarem o programa Geometer's Sketchpad de modo continuado, num trabalho que se desenrolou ao longo de cinco meses (Janeiro a Maio), em aulas onde tiveram lugar de destaque problemas e tarefas de exploração e investigação e onde trabalharam aos pares. Analisamos em que medida este trabalho os ajudou a desenvolver a aptidão de construir figuras e analisar as suas propriedades, a tendência para procurar padrões e realizar investigações, a aptidão para resolver problemas geométricos, aspectos essenciais da competência geométrica. A investigação seguiu uma metodologia qualitativa, sendo os dados recolhidos através de um diário de bordo e entrevistas a diversos pares de alunos. Os resultados mostram que os alunos aderiram muito bem à proposta pedagógica e gostaram de trabalhar com o software de uma forma continuada. Todos participaram com entusiasmo, empenhamento e persistência. Os resultados mostram ainda que os alunos desenvolveram, ainda que de modo desigual, as diversas vertentes da sua competência geométrica.

Objectivo do estudo

As indicações curriculares actuais sobre o ensino da geometria dão ênfase especial à utilização de novas tecnologias. Por exemplo, nos *Principles and standards 2000* (NCTM, 2000) o uso da tecnologia, em particular dos computadores, surge como um dos princípios para o ensino da Matemática. Particular destaque merecem os chamados programas de geometria dinâmica que permitem construir os elementos básicos da geometria euclidiana (pontos, rectas, segmentos de recta e circunferências) e as relações entre eles. Ao rigor das construções acrescenta-se a possibilidade que o utilizador tem em transformar as figuras, arrastando um ou alguns dos componentes que estão na base da sua construção. Para além disto, este *software* permite medir comprimentos, ângulos, perímetros, áreas, etc., e efectuar cálculos com essas medidas.

O estudo da geometria apoiado em ambientes de geometria dinâmica tem sido investigado por diversos autores desde a sua introdução no ensino da Matemática: Noss et al. (1994); Ippolito (1995); Junqueira (1995); Coelho (1997); Hazzan e Goldenberg (1997); Hannafin, Barry e Scott (1998); Jones (2000); Marrades e Gutiérrez (2000); Piteira (2000); Laborde (2001); Hadas, Hershkowitz e Schwarz (2002); Furinghetti e Paola (2003); Gomes e Vergnaud (2004). Estas investigações têm-se debruçado essencialmente sobre três tópicos: (i) As características dos ambientes de geometria dinâmica; (ii) A aprendizagem de conceitos geométricos nestes ambientes; e (iii) As concepções dos alunos e dos professores sobre a aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica.

A presente investigação insere-se no segundo grupo. A nossa preocupação incide sobre a forma como os alunos do 8.º ano desenvolvem a sua competência geométrica quando utilizam o *Sketchpad*, um ambiente de geometria dinâmica, e a sua aprendizagem é baseada em tarefas de exploração, investigação e na resolução de problemas. Assim, a questão à qual tentámos dar resposta foi: "Como é que os ambientes de geometria dinâmica, associados às tarefas de exploração, investigação e de resolução de problemas, promovem o desenvolvimento da competência geométrica dos alunos?"[1]

A competência geométrica

Convém clarificar em que sentido utilizámos o conceito de competência, que recentemente começou a ser empregue no ensino. Este conceito aproxima-se do conceito de literacia do *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001):

> A *cultura geral* que todos devem desenvolver como consequência da sua passagem pela educação básica pressupõe a aquisição de um certo número de conhecimentos e a apropriação de um conjunto de processos fundamentais mas não se identifica com o conhecimento memorizado de termos, factos e procedimentos *básicos*, desprovido de elementos de compreensão, interpretação e resolução de problemas. (ME-DEB, 2001, p. 9)

---

[1] Esta comunicação baseia-se numa investigação realizada para a obtenção do grau de Mestre em Educação do primeiro autor, intitulada *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica (8.º ano)*, tendo sido orientada pelo segundo autor. Nesta investigação pretendeu-se também saber de que forma os ambientes de geometria dinâmica influenciaram a perspectiva que os alunos tinham da geometria.

No entanto, os ambientes computacionais por si só não são suficientes para melhorar o ensino da geometria. Eles têm de estar associados a tarefas *significativas* para os alunos, ou seja, tarefas que tenham como objectivo desenvolver a sua competência geométrica.

A aquisição de conhecimentos pelos alunos, acompanhada do desenvolvimento de capacidades e atitudes, constitui o núcleo do conceito de competência, como "processo de activar recursos (conhecimentos, capacidades, estratégias) em diversos tipos de situação, nomeadamente situações problemáticas" (ME-DEB, 2001, p. 9). Nas tendências actuais do ensino, a competência geométrica que se pretende que os alunos desenvolvam está intimamente relacionada com a construção de figuras geométricas, a experimentação e a observação (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Brown, Jones & Taylor, 2003; NCTM, 2000; ME-DEB, 2001; QCA, 2004). Deste modo, os ambientes de geometria dinâmica podem desempenhar um papel importante no desenvolvimento desta competência pelos alunos:

> Actualmente, ferramentas computacionais, designadas por ambientes geométricos dinâmicos (*Cabri Geòmetre*, *Geometer's Sketchpad*, ...) são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Permitem a construção e manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objectos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes. (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 68)

A competência geométrica tem várias vertentes, nomeadamente: (i) *Construção de figuras e análise das suas propriedades*, aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente polígonos e lugares geométricos, que permitam o reconhecimento e a análise das suas propriedades; (ii) *Padrões e investigações*, tendência para procurar invariantes, explorar padrões geométricos e investigar propriedades e relações geométricas; (iii) *Resolução de problemas geométricos*, aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, justificando os processos utilizados; e (iv) A*rgumentação*, aptidão para formular argumentos válidos para descrever propriedades e relações geométricas, fazendo conjecturas e justificando os seus raciocínios. Apesar da *Argumentação* ter tido um lugar importante na sala de aula, a presente investigação não recaiu sobre ela, considerando-se apenas as três primeiras vertentes da competência geométrica.

Participantes e metodologia

Numa escola da periferia de Lisboa, onde lecciona o primeiro autor, foi escolhida uma das turmas do 8.º ano com 18 alunos (a dimensão da turma está associada há existência de dois casos de alunos com necessidades educativas especiais) para participar neste estudo. Aqui debruçamo-nos sobre um dos grupos, constituído por André e José ambos com 13 anos. André é um rapaz bastante reservado, que apresenta bom comportamento dentro da sala de aula, o que contrasta com o que se passa for a da sala de aula e for a da escola. Tem algumas dificuldades de aprendizagem a Matemática, refugiando-se nos colegas quando tem que trabalhar em grupo. José é um aluno brilhante a todas as disciplinas e nas suas intervenções na aula, sempre de alto nível, utiliza raciocínios elaborados e um vocabulário avançado para a sua idade.

A investigação seguiu uma metodologia qualitativa, sendo os dados recolhidos através de um diário de bordo, no qual foram registadas situações e diálogos ocorridos na sala de aula, dois questionários, um no início e outro no fim da investigação, a todos os alunos que compunham a turma e entrevistas realizadas a diversos pares de alunos.

Proposta pedagógica

Temas e tarefas. As tarefas usadas neste presente estudo foram adaptadas ou inspiradas em Bennett (1995, 1996), De Villiers (1999), Durão e Baldaque (2003), Key Curriculum Press (1995, 1997) e Lopes et al. (1996). As tarefas 1-8 inseriram-se no capítulo do 7.º ano "Do Espaço ao Plano", as tarefas 9-17 corresponderam ao capítulo do 8.º ano "Decomposição de figuras e teorema de Pitágoras", as 18-21 estavam relacionadas com os "Lugares geométricos", as 22-24 referiam-se a "Translações" e, finalmente, as duas últimas pertenciam ao capítulo "Semelhança de triângulos".

As tarefas utilizadas podem ser classificadas basicamente de duas formas diferentes. A primeira forma temn em conta as suas características: (i) *explorações* (2-6, 11, 12, 15, 16; 18, 20, 22 e 25), (ii) *investigações* (7-10, 17, 19 e 24) e (iii) *problemas* (5, 11-15, 21 e 26). Resolvemos fazer a distinção entre tarefas de exploração e de investigação, porque:

> Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se "investigações" a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, uma vez que atribuímos importância ao grau de dificuldade das

> tarefas, é preferível termos uma designação para as tarefas abertas mais fáceis e outra designação para as mais difíceis. (Ponte, 2003, p. 28)

As tarefas de natureza exploratória predominaram, o que era de esperar pois um dos factores em jogo era a utilização de um programa de computador que os alunos não conheciam. As actividades de investigação também estiveram presentes em número considerável para "dar ao aluno a responsabilidade de descobrir e de justificar as suas descobertas" (Ponte, 2003, p. 32). Os problemas estiveram presentes em algumas tarefas propostas na aula, bem como nas actividades do manual escolar que foram realizadas como trabalho de casa.

As tarefas também podem ser classificadas considerando a(s) vertente(s) da competência geométrica em estudo que cada uma contribuiu para desenvolver mais vincadamente: *Construção de figuras e análise das suas propriedades* (1-4, 6, 7, 9-11, 14, 16, 18-21, 23, 25 e 26), *Padrões e investigações* (2-4, 6-9, 16, 17, 22 e 24) e *Resolução de problemas geométricos* (5, 11-15, 21 e 26). A *Construção de figuras e a análise das suas propriedades* destaca-se com 18 tarefas, o que é natural uma vez que é valorizada nos temas geométricos tratados. A componente *Padrões e investigações* esteve presente em 11 tarefas e a *Resolução de problemas geométricos* em 8.

Organização do trabalho. As aulas foram leccionadas pelo primeiro autor, tendo os alunos trabalhado em pares, escolhidos por si próprios, o que correspondeu a 9 grupos. As aulas decorrem em blocos de 90 minutos e tiveram início no 2.º período, tendo-se prolongado pelo primeiro mês do 3.º período e ocorreram numa das duas salas de informática da escola.

No final de cada tarefa, que em muitos casos correspondeu ao final da aula, realizou-se uma pequena discussão com toda a turma para partilhar as dificuldades relacionadas com o programa, e para discutir os resultados a que chegaram. Esta fase do processo investigativo foi muito importante: "É nesta fase que se processa a reflexão sobre todo o trabalho realizado. Terminar uma aula de investigação sem ter reflectido sobre ela é de algum modo não a ter finalizado" (Segurado, 2002, p. 58). Cada grupo teve apenas um enunciado da tarefa que foi recolhido e analisado no fim das aulas. Os *sketchs* que os alunos conceberam ficaram guardados no computador em que trabalharam.

Alguns problemas do livro relacionados com os assuntos tratados na aula foram sugeridos aos alunos para que estes os resolvessem em casa ou nas aulas de Estudo Acompanhado. Estes problemas tiveram como função clarificar e esclarecer eventuais dificuldades que os alunos tivessem sobre algum dos temas tratados nas aulas.

Avaliação dos alunos. Todos os trabalhos produzidos pelos alunos, bem como a sua participação na resolução das tarefas e na discussão final de algumas delas serviram para avaliar os alunos. Numa negociação prévia ficou assente que se substituiriam os testes pelos trabalhos que seriam realizados quer nas aulas, quer fora delas.

Para além disso, cinco tarefas tiveram um papel fundamental na avaliação dos alunos – as tarefas 8, 9, 17, 21 e 26. As primeiras três eram investigações e as duas últimas problemas. Estas cinco tarefas de avaliação abrangeram os vários temas matemáticos abordados neste estudo e foram realizadas ao longo da proposta pedagógica, coincidindo, quase sempre, com o final dos capítulos.

Para avaliar os relatórios produzidos pelos alunos nas tarefas de avaliação foi utilizada uma tabela de descritores com os seguintes parâmetros: *Conhecimento matemático*, *Conhecimento das estratégias* e *Comunicação*. Em cada parâmetro são utilizados cinco níveis de desempenho (de 0-4).[2] A avaliação das tarefas 21 e 26 é baseada nos seguintes parâmetros: *Compreensão Conceptual*, *Conhecimento Processual*, *Capacidades/Estratégias de Resolução* e *Comunicação*. Uma vez que cada um dos parâmetros de avaliação dos relatórios está dividido em cinco níveis de desempenho, mantemos a mesma divisão para os parâmetros de avaliação da resolução de problemas.[3]

Exemplos dos três tipos de tarefas

Tarefa 3: Construção de triângulos. Nesta tarefa de *exploração* pretendia-se que os alunos aprendessem a construir triângulos isósceles e equiláteros. Depois, era-lhes pedido que relacionassem diversos tipos de triângulos classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos. A construção de triângulos rectângulos também foi importante, uma vez que estes seriam estudados em tarefas posteriores. Um dos pontos abordados durante a realização da tarefa por todos os grupos, e também na discussão final, prendeu-se com o esquema que comparava todos os triângulos anteriores.

André e José não sentiram grandes dificuldades. Foi o único grupo que realizou uma investigação completa, relacionando as classificações de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, tendo apresentado o esquema reproduzido na figura 1.

---

[2] Esta tabela é apresentada na página *Investigar e Aprender*, disponível em http://ia.fc.ul.pt/, e é baseada no trabalho de Cai e Jakabcsin (1996).

[3] Estes descritores são baseados nos que estão apresentados na página da Chicago Public Schools em http://intranet.cps.k12.il.us/Assessments/Ideas_and_Rubrics/Rubric_Bank/MathRubrics.pdf.

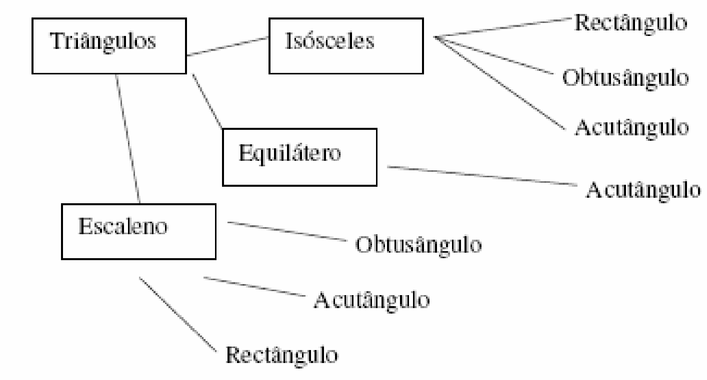


Figura 1. Esquema apresentado por André e José na resposta à questão 4 b) da tarefa 3.

Este esquema foi o resultado das conclusões a que os alunos foram chegando à medida que reponderam às questões da tarefa. Destas salientou-se a que os interrogava sobre a possibilidade de existir um triângulo equiláteros que fosse simultaneamente um triângulo rectângulo.

Tarefa 24: Pavimentações com translações. Os alunos já tinham resolvido duas tarefas relacionadas com translações e vectores quando realizaram esta tarefa de *investigação* na qual se pretendia que estudassem as pavimentações utilizando essa transformação geométrica. A última questão foi a que suscitou mais interesse, pois conduzia os alunos a uma pequena investigação sobre as figuras que permitem pavimentar. Eles elaboraram conjecturas interessantes, tendo alguns deles alargado a sua investigação a outros polígonos como foi ocaso dos pentágonos e dos hexágonos.

Nessa procura André e José exploraram padrões geométricos criados com os polígonos na tentativa de perceber se estes podiam pavimentar. Depois das experiências e descobertas que fizeram, culminaram a sua investigação tentando encontrar uma relação entre o número de eixos de simetria de um polígono e a possibilidade de ele pavimentar ou não. Nessa altura travou-se o seguinte diálogo:

Professor: Então já conseguiram responder à última questão?
José: Já! Percebemos que os quadrados e os rectângulos permitem pavimentar.
Professor: Porquê?
José: Conseguimos fazer translações deles para cobrir tudo.
Professor: E já experimentaram com triângulos?
José: Dava com os equiláteros, mas tínhamos que rodar alguns, logo não eram translações.
Professor: Correcto! E com losangos e papagaios, dá?

> **José:** Com losangos dá, mas com papagaios não dá. Eu acho que tem haver com os eixos de simetria.
> **Professor:** Porquê?
> **José:** O quadrado tem 4, o rectângulo tem 2, o losango também tem 2 e o papagaio tem só 1.
> **Professor:** E com o paralelogramo?
> **José:** Dá e tem 0 eixos de simetria.
> **Professor:** Então que conjectura é que escreverias?
> **José:** Acho que quando o número de eixos de simetria é par dá para pavimentar com translações.
> **Professor:** Essa conjectura é interessante. Teríamos de arranjar uma demonstração para ver se a conjectura é verdadeira, ou um contra exemplo para dizer que é falsa.

Alguns minutos depois José voltou a chamar o professor para lhe dizer que o hexágono tinha 6 eixos de simetria e também pavimentava. Assim, ficou convencido da sua conjectura, uma vez não tinha encontrado nenhum contra exemplos. Na folha de resposta da tarefa escreveram:

> Apesar de ser impossível com triângulos pavimentar, usando apenas o *Translate*. Já com quadriláteros, apenas o rectângulo, quadrado e losango permitem pavimentar, pois têm eixos de simetria pares. Indo mais além, todas as figuras com eixos de simetria pares permitem pavimentar o *sketch*.

À noite, com o auxílio do *Sketchpad,* o professor construiu um octógono e percebeu de imediato que com este polígono era impossível pavimentar. Na aula seguinte, logo no início desta, sentou-se ao computador com os alunos e reviram o *sketch* que tinham construído anteriormente. De seguida construíram um octógono e os alunos tentaram pavimentar com este polígono utilizando translações. Nessa altura conversaram sobre ângulos internos de polígonos regulares e o facto de terem que ser divisores de 360º para poderem pavimentar. Depois os alunos começaram a resolver outra actividade, mas ficou evidente para o professor as conexões que este assunto teria com a geometria do 9.º ano: rotações e os ângulos internos de polígonos.

Tarefa 21: Avaliação-Problemas. Esta tarefa de avaliação consistia na resolução de nove problemas relacionados com lugares geométricos. Para os resolver, os alunos tiveram que construir e relacionar entre si circunferências, coroas circulares, mediatrizes, triângulos e rectângulos. Destacaríamos aqui a resolução apresentada do André e José ao problema 3 que tinha o seguinte enunciado: Num jogo de basquetebol a bola está a 4 metros do Manuel e a 5 metros da Sara. Onde está a bola?

Os alunos apresentam uma solução (Figura 2) que parte da posição da bola para indicar as posições possíveis de Manuel e Sara, ou seja, inverteram o problema simplificando-o. Se André e José tivessem marcado primeiro a posição dos alunos da questão, a resposta ao problema (a posição da bola) dependeria da distância a que eles estavam um do outro. No comentário elaborado pelo professor sobre a sua resolução, foi-lhes proposto que tentassem resolver o problema novamente, mas começando por colocar as posições das personagens da questão e verificando as várias hipóteses de resposta que existiriam. Os alunos aceitaram o desafio e tentaram encontrar todas as soluções possíveis para o problema.

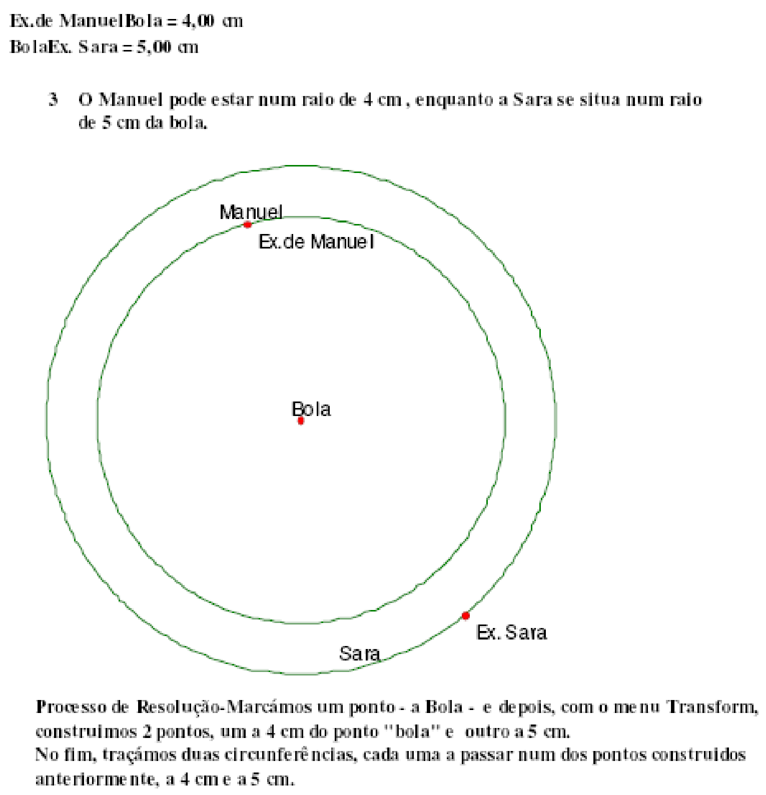


Figura 2. Solução inicial apresentada pelos alunos.

Construíram duas circunferências: uma centrada em Manuel, de raio 5, e outra centrada em Sara, de raio 4. Depois, movimentaram uma delas para verificar se existia solução e chegaram a conclusões interessantes sobre a posição de Manuel e Sara: (i) se eles estiverem a mais de 9 m, não existe solução para o problema (as circunferências não se intersectam); (ii) se eles estiverem a menos de 9 m e a mais de 1 m, a bola pode estar em dois locais diferentes (pontos de intersecção das duas circunferências); (iii) se eles estiverem exactamente a 1m, só existe lugar possível para a bola (as circunferências são tangentes); e (iv) se eles estiverem a menos de 1 m, volta a não existir solução (as circunferências não se intersectam).

Balanço geral do desenvolvimento do trabalho

Tempo previsto vs. tempo gasto. A previsão geral do tempo a usar pelos alunos a resolverem as tarefas correspondeu ao tempo realmente gasto. Porém existiram algumas diferenças nas previsões em relação à resolução de cada tarefa. Os alunos gastaram mais tempo a elaborar os relatórios e a resolver os problemas nas tarefas de avaliação. Nas outras tarefas verificou-se o contrário, tendo algumas delas sido resolvidos muito mais depressa do que o professor tinha inicialmente suposto.

Avaliação das tarefas. A maior dificuldade dos alunos nas tarefas de investigação esteve relacionada com o parâmetro de *comunicação dos resultados*, enquanto que existiu melhor desempenho no parâmetro *conhecimento matemático*. Nos *problemas*, o professor fez uma avaliação analítica de cada parâmetro para cada problema. Detectaram-se algumas dificuldades na compreensão do problema, na inexistência de verificação da solução apresentada, associada ao facto de os alunos não relerem o problema. Alguns alunos, apesar de terem escolhido uma estratégia correcta, abandonavam-na, ficando a resolução a meio. A escrita dos processos de resolução levantou algumas dificuldades, em particular nos primeiros problemas.

Discussões gerais. A apresentação de resultados aos colegas foi feita apenas nas tarefas em que existiram mais dúvidas ou nas que proporcionaram mais discussão, como nas tarefas de investigação. Estas decisões foram tomadas pelo professor numa base diária, uma vez que as resoluções elaboradas pelos alunos eram analisadas todos os dias. José, na entrevista final, comentou as discussões gerais com a seguinte frase:

> Essas discussões servem para vermos que às vezes as coisas não são o que parecem, e que há várias maneiras possíveis de fazer estas tarefas. Às vezes por mais que pensemos, não conseguimos fazer essas tarefas, logo essas discussões servem também para ver porque não as conseguimos fazer.

Desenvolvimento da competência geométrica

A vertente da ***Construção de figuras e análise das suas propriedades*** da competência geométrica foi desenvolvida com sucesso pela esmagadora maioria dos alunos. As respostas dadas foram claras, apesar das dificuldades na escrita. O S*ketchpad* foi o suporte das descobertas produzidas pelos alunos e as funcionalidades libertaram-nos para desenvolverem o reconhecimento e análise das propriedades das figuras construídas.

No que respeita aos *Padrões e investigações*, os alunos desenvolveram a tendência para procurar invariantes, tendo isso ficado patente na tarefa que todos conseguiram resolver durante a entrevista final. Apreciaram o facto de poderem seguir o seu próprio caminho na investigação tentando pautar-se por alguma originalidade.

Finalmente, no que respeita à *Resolução de problemas geométricos*. Os alunos encararam os problemas como desafios, tendo dedicado algum tempo a escrever o processo de resolução. Alguns tentaram verificar se a resposta que apresentavam verificava todas as condições do problema. Quando isso não acontecia preferiam começar de novo a reformular a resposta inicial.

Existiram diferenças quanto ao desenvolvimento destas duas últimas vertentes da competência geométrica. Parece-nos que a natureza destes dois tipos diferentes de actividades desempenhou um papel fundamental na forma como os alunos reagiram perante elas.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.

Bennett, D. (1995). *Pythagoras plugged In*. Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Bennett, D. (1996). *Exploring Geometry*. Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Brown, M., Jones, K., & Taylor, R. (2003). *Developing geometrical reasoning in the secondary school: Outcomes of trialling teaching activities in classrooms: A Report from the Southampton/Hampshire Group to the Qualifications and Curriculum Authority*. London: Qualifications and Curriculum Authority.

Cai, J., Lane, S., & Jakabcsin, M. (1996). The role of open-ended tasks and holistic scoring rubrics: Assessing students' mathematical reasoning and communication. In P. C. Elliot & M. J. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics K-12 and beyond* . Reston: NCTM.

Coelho, M. (1995). *O Cabri-Geometre na resolução de problemas: Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º Ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof*. Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Durão, E., & Baldaque M. (2003). *Mat 8*. Lisboa: Texto.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. In, N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 397-404). Havai.

Gomes, A. S., & Vergnaud, G. (2004). On the learning of geometric concepts using dynamic geometry Software. *RENOTE: Novas Tecnologias na Educação*, *2*(1). [http://www.cinted.ufrgs.br/renote/]

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2002). Analyses of activity design in geometry in the light of students actions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *2*(4), 529-552.

Hannafin, R., Barry, D. & Scott, N. (1998). Identifying critical learner traits in a dynamic computer-based geometry program. *The Journal of Education Research*, *92*(1), 3-11.

Hazzan, O. & Goldenberg, P. (1997). An expression of the idea of sucessive refinement in dynamic geometry environments. In Penkonen, E. (Ed) *21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (vol. 3, pp. 49-56). Finlândia.

Ippolito, D. (1995). Circle geometry and Cabri in a classroom. *Micromath*, *11*(1), 31-34.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 55-85.

Junqueira, M. (1995). Aprendizagens da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9.º ano de escolaridade. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Key Curriculum Press (1995). *The Geometer's Sketchpad: User guide and reference manual*. Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Key Curriculum Press (1997). *Discovering geometry*. Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317.

Lopes, A., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J., Viana, J., Bastos, R., & Graça, T. (1996). *Matemática 8*. Porto: Contraponto.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., & Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An exploratory study with Cabri Géomètre. In Ponte, J. P., & Matos, J. F. (Eds) *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 360-367). Portugal.

Piteira, G. (2000). *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 23-39). Lisboa: APM.

QCA (2004). *Interpreting the mathematics curriculum: Developing reasoning through algebra and geometry*. London: Qualifications and Curriculum Authority.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Org.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. (pp. 57-73). Lisboa: APM.

Anexos

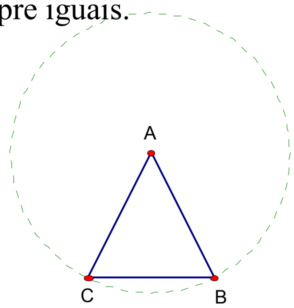
Tarefa 3. Construção de triângulos

Vamos construir vários triângulos e estudar propriedades relacionadas com os seus ângulos e lados.

1. a) Constrói um triângulo e mede os seus lados. Arrasta um dos seus vértices até que tenha dois lados iguais. Desenha aqui o triângulo que obtiveram e as medias dos seus lados.

b) O Sketchpad permite fazer construções reais de figuras, isto é, quando arrastadas mantêm a sua forma, o que não acontece com o triângulo que desenhaste.

Para construir um triângulo com <u>dois lados iguais</u>, temos que garantir que a sua construção é feita de tal modo que os seus dois lados fiquem sempre iguais.

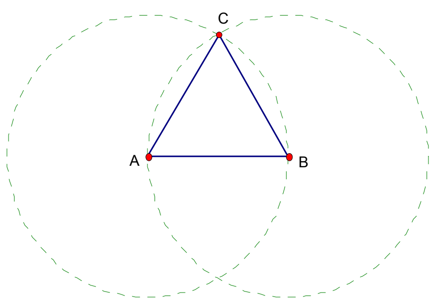


Constrói uma circunferência e marca um ponto sobre ela. Depois, constrói os lados do triângulo ABC e esconde a circunferência (selecciona a circunferência e no menu *Display* selecciona *Hide Circle*).

Este triângulo tem lados iguais? Quantos? Se arrastares um dos seu vértices o que acontece? Consegues arranjar uma justificação?

c) Triângulos com dois lados iguais dizem-se **triângulos isósceles**. Investiga o que acontece com a amplitude dos seus ângulos.

2. Para construir um triângulo que tenha <u>três lados iguais</u> deves começar por construir o segmento AB e as duas circunferências como mostra a figura. O ponto C é um dos pontos onde se intersectam as circunferências.



a) Mede todos os lados do triângulo que construíste. Arrasta o vértice A. O que acontece? Consegues arranjar uma justificação?

b) Triângulos com todos lados iguais dizem-se **triângulos equiláteros**. Investiga o que acontece com a amplitude dos seus ângulos.

3. Triângulos com todos lados diferentes dizem-se **triângulos escalenos**.

Constrói um triângulo que tenha todos os lados diferentes e investiga o que acontece com a amplitude dos seus ângulos.

4. Os ângulos dos triângulos também os permitem classificar.

Um triângulo que tenha todos os ângulos agudos (< 90º) chama-se **triângulo acutângulo**.

Um triângulo que tenha um ângulo recto (= 90º) chama-se **triângulo rectângulo**.

Um triângulo que tenha um ângulo obtuso (> 90º e < 180º) chama-se **triângulo obtusângulo**.

a) Constrói um triângulo rectângulo que fique rectângulo quando os seus vértices são arrastados. Descreve como procedes-te.

b) Será que o triângulo rectângulo pode ser também um triângulo isósceles? Porquê?

E será que pode um triângulo equilátero? E escaleno? Porquê?

5. Investiga as relações que existem entre os triângulos acutângulos, obtusângulos, equiláteros, isósceles e escalenos. Faz um esquema das relações que encontraste.

Tarefa 21. Problemas

Podes utilizar o *Sketchpad* em todos os problemas seguintes. Grava os *sketches* que utilizares.

1. Marca um ponto P. Marca 6 pontos que estejam a 6 cm do ponto P. Que figura geométrica obtiveste?

2. O Nuno e o Pedro estão a 7 metros um do outro. A Ana Rita está a 5 metros do Nuno e a 4 metros do Pedro. Onde está a Ana Rita?

Ajuda: No desenho podem consideram 1 metro com sendo 1 cm.

3. Num jogo de basquetebol a bola está a 4 metros do Manuel e a 5 metros da Sara. Onde está a bola?

4. Constrói uma circunferência e dois pontos sobre ela. Quais são os pontos que estão à mesma distância desse dois pontos?

Um desse pontos é o _________ da _______________.

5. Desenha o rectângulo ABCD, em que A e C são vértices opostos, $\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm.

a) Qual é o lugar geométrico dos pontos que estão a menos de 3 cm do vértice B?

b) Qual é o lugar geométrico dos pontos que estão mais perto de C do que de A?

6. O Tiago, o Pedro e a Joana vivem à mesma distância da paragem da camioneta que os leva para a escola. Onde se situa a paragem?

7. O Sr. António tem uma vaca presa a um dos vértices do estábulo que tem a forma rectangular. Sabendo que a corda tem 4 metros, qual é a área em que vaca pode pastar?

8. Desenha um triângulo em que os lados medem 9 cm, 6 cm e 5 cm. Constrói a circunferência que passa nos três vértices.

9. Desenha duas rectas paralelas. Qual será o caminho de uma aranha sabendo que se desloca respeitando as seguintes regras:

-entre as duas rectas;

-paralelamente às rectas;

-sempre à mesma distância de ambas as rectas?

Tarefa 24. Pavimentações com translações

1. (i) Constrói um rectângulo ABCD; **(ii)** esconde os lados e constrói dois pontos quaisquer no lado AC e une-os como mostra a figura 1; **(iii)** faz uma translação desses segmentos através do vector AB; **(iv)** repete o mesmo para o lado AB e faz uma translação desses segmentos através do vector AC (figura 2); **(v)** constrói o interior da figura que construíste; **(vi)** faz translações dessa figura segundo os vectores AB e AC.

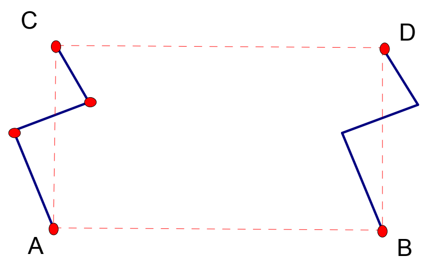


Figura 1

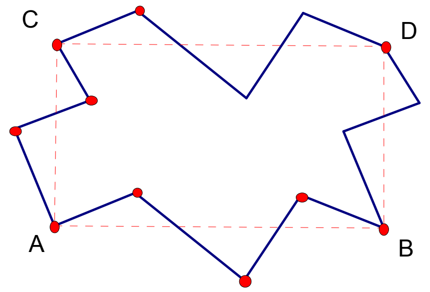


Figura 2

a) Descreve o que observas.

b) Achas que conseguirias cobrir o *sketch* todo com essas figuras?

2. a) Se aplicares à figura original o vector AC e seguido do vector CD onde ficará a figura? Apresenta um esquema desta situação.

b) Se aplicares à figura original o vector AD onde ficará a figura? Apresenta um esquema desta situação.

3. E se partíssemos inicialmente de outros quadriláteros também conseguiríamos pavimentar? E com triângulos? Regista as tuas descobertas.