Dificuldades dos alunos do 8.º Ano no trabalho em Álgebra

Idália Pesquita

Escola BI/JI D. Carlos I, Sintra

João Pedro da Ponte

Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Resumo. A Álgebra é considerada por muitos alunos como um ramo da Matemática particularmente difícil, principalmente no que se refere às operações com polinómios e à resolução de equações. O presente estudo, baseado em estudos de caso de alunos do 8.º ano de escolaridade, visa conhecer melhor a natureza dessas dificuldades. A metodologia é qualitativa, sendo os dados recolhidos em entrevistas em que são apresentadas tarefas matemáticas para resolver. As conclusões preliminares apontam para a associação da Matemática ao cálculo, em detrimento do trabalho com letras. Verificou-se uma relativa facilidade na percepção dos aspectos processuais da Álgebra e dificuldades significativas na percepção dos aspectos estruturais da Álgebra.

Introdução

Muitos alunos consideram difícil o estudo dos capítulos da Álgebra e encaram-nos sem qualquer entusiasmo. Esta falta de interesse pelo tema coloca um desafio adicional ao professor, a quem cabe assim apresentar os conceitos de um modo que possa captar o interesse dos alunos. Perante este quadro, muitas vezes se questiona qual a melhor forma de trabalhar a Álgebra no 3.º ciclo do ensino básico. O estudo, que se encontra ainda em fase de desenvolvimento, pretende perceber os processos de raciocínio e eventuais dificuldades dos alunos de 8.º ano quando trabalham com situações que envolvem pensamento algébrico, incluindo as dificuldades e os erros cometidos na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações. Nesta comunicação, baseada nos dados obtidos numa primeira entrevista (realizada em Janeiro de 2006), procuramos descrever as dificuldades e os erros mais significativos quando os alunos trabalham expressões algébricas e equações. Estes elementos serão tidos em conta posteriormente na leccionação de duas unidades temáticas “Ainda os Números” e “Equações”, após o que procuraremos fazer o balanço geral da experiência.

A aprendizagem da Álgebra

Kieran (1992) distingue duas perspectivas da Álgebra: a *processual* e a *estrutural*. Na sua perspectiva, na Álgebra *processual* não se lida com a transformação de expressões algébricas, mas sim com a substituição de variáveis por números, realizando depois as correspondentes operações aritméticas. Por exemplo, se considerarmos a expressão $3x + y$ e substituirmos x e y por 4 e 5, respectivamente, obtemos primeiro 12+5 e o resultado final é 17. Outro exemplo consiste na resolução da equação $2x + 5 = 11$, com substituição de x por vários números até encontrar o valor correcto. Nestes exemplos, as operações realizadas são numéricas. Para a autora, a Álgebra *estrutural* diz respeito a um conjunto diferente de operações, que são realizadas, não com números, mas sim com expressões algébricas. Por exemplo, a expressão $3x + y + 8x$ pode ser simplificada, dando origem à expressão $11x + y$. A resolução da equação $5x + 5 = 2x - 4$ pode ser iniciada através da subtracção de $2x$ em ambos os membros, obtendo-se a equação equivalente $3x + 5 = -4$ e assim sucessivamente, até à determinação do valor de *x*. Nestes exemplos, os objectos operados são as próprias expressões algébricas, sendo o resultado obtido em cada etapa (e também no final) uma expressão algébrica.

Em Álgebra, uma letra pode ser usada de diversas formas. Kuchemann (1978, 1981), referido em Kieran (1992), usando uma classificação proposta por Collis em 1975, categorizou em seis níveis a interpretação da letra atendendo ao nível mínimo para uma realização bem sucedida:

(a) *Letra avaliada*: é atribuído um valor à letra desde o princípio. Exemplo: Se $a = 3$, qual é o valor da expressão $a + 5$?

(b) *Letra não considerada*: a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida sem que lhe seja dado um significado. Exemplo: Se $x + y = 10$, $x + y + 5 = \ldots$?

(c) *Letra considerada como objecto*: a letra é entendida como o nome de um objecto concreto. Exemplo: O cálculo do perímetro de um quadrado é $4l$, onde *l* é o comprimento do lado do quadrado.

(d) *Letra considerada como incógnita*: a letra é entendida como um número específico mas desconhecido. Exemplo: Dada a equação $2x + 1 = 7$, qual o valor de *x*?

(e) *Letra considerada como número generalizado*: a letra é entendida como uma representação de vários números e não de apenas um. Exemplo: A expressão do números impares, $2n - 1$.

(f) *Letra considerada como variável*: a letra é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos e é vista a existência de uma relação sistemática entre esses dois conjuntos de valores. Exemplo: Qual é maior, $2n$ ou n^2?

No que respeita às estratégias de resolução de equações, Kieran (1992) classificou-as nos seguintes tipos:

(a) *Uso da realidade*: para resolver a equação $5+b=8$, usa-se o facto de 5 mais 3 ser 8.
(b) *Uso de técnicas de contagem*: considerando a equação anterior, conta-se 5, 6, 7, 8, portanto são necessário 3 para ir do 5 ao 8.
(c) *Cobertura* (*cover-up*): para resolver a equação $2x+9=5x$, considera-se que $2x+3x=5x$, logo $3x$ tem de ser 9. Assim *x* é 3.
(d) *Desfazer* (*undoing)*: para resolver a equação $2x+4=18$, começa-se pelo lado direito e, usando a ordem da direita para a esquerda, desfaz-se cada operação.
(e) *Substituição por tentativa e erro*: para resolver a equação $2x+5=13$, tenta-se com diferentes valores até encontrar o correcto.
(f) *Transposição* de termos de um membros para outro, com mudança de sinal.
(g) *Realização da mesma operação em ambos os membros*.

Os métodos (a) e (b) são geralmente utilizados por estudantes principiantes em Álgebra. Kieran (1992) refere estudos de Withman que observou que os estudantes que aprendem a resolução de equações apenas pelo método (c) têm melhores resultados do que os que aprenderam este método juntamente com o método formal. Além disso, os estudantes que aprenderam apenas pelo método formal têm piores resultados do que os que aprenderam as duas técnicas. Portanto, os estudantes que aprendem apenas com o método formal não estão suficientemente bem preparados conceptualmente para operar com equações como objectos matemáticos. O método (d) permite que os estudantes operem apenas com números e evitem tratar com estruturas equivalentes. O método (e) consome muito tempo e exige uma elevada carga de memorização. Quando os alunos aprendem a trabalhar com o método formal da resolução de equações tendem a deixar este último. Os métodos (f) e (g) são considerados os métodos formais para a resolução de equações. Apesar de muito professores considerarem o método (f) como uma versão abreviada do (g), os estudantes principiantes percebem-nos de um modo bastante diferente. No método (g) realiza-se a mesma operação em ambos os membros, o que enfatiza a simetria de uma equação, que não é aparente no procedimento de transposição. Segundo a autora, existem evidências que sugerem que os estudantes que realizam o método de transposição não estão a operar as equações como objectos matemáticos mas sim a aplicar cegamente a regra: muda de membro – muda de sinal.

Os erros cometidos pelos alunos foram classificados em três tipos:

(a) *Eliminação*: resulta da realização de uma generalização excessiva de algumas operações matematicamente válidas em domínio mais restritos. Um exemplo deste erro é simplificar $39x-4$ como $35x$ ou $2xy-2x$ como y.

(b) *Troca de membros* (*switching addends*): por exemplo se se considerar a equação $x+37=150$, a resolução passa pela transformação em $x=37+150$.

(c) *Redistribuição* (*redistribution*): considerando a equação $x+10=25$, os estudantes subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, $x+10-10=25+10$.

Os erros (b) e (c) ocorrem na resolução de equações pelos métodos mais formais. Kieran (1992) considera que os estudantes "podem de algum modo estar inseguros quanto às relações estruturais entre a adição e a subtracção ou, pelo menos, inseguros na forma escrita destas relações quando estas envolvem um termo literal" (p. 402).

Metodologia

Esta investigação é de natureza qualitativa, uma vez que se pretende estudar um fenómeno em toda a sua complexidade e no contexto natural (Bodgan & Biklen, 1994). De facto, as questões têm como finalidade a orientação do estudo e não a formulação de hipóteses.

A investigação, a cargo da primeira autora, tem por base as suas aulas onde intervém e tem um papel activo. Neste sentido esta investigação incide sobre a prática profissional da professora. Por outro lado, nas aulas a professora também desempenha o papel de investigadora onde observa no terreno a forma como os alunos se envolvem nas tarefas propostas, as suas reacções e dificuldades. Neste sentido pretende-se compreender e interpretar os fenómenos que irão ocorrer. Assim, segundo Cohen, Manion e Morisson (2000), este estudo segue o paradigma interpretativo. Atendendo a que os dados recolhidos são ricos em pormenores descritivos relativamente aos alunos e são recolhidos em contexto natural, pode dizer-se que se pretende investigar os fenómenos em toda a sua complexidade, atendendo à dinâmica interna da situação, neste caso a sala de aula. Deste modo, este estudo enquadra-se numa investigação qualitativa com uma abordagem participante. Os participantes no estudo no início do ano lectivo tinham uma média de 13,4 anos e dos 19 alunos que constituem a turma 8 são rapazes e 11 são raparigas. O aproveitamento dos alunos é, no geral, satisfatório.

A investigação estrutura-se em estudos de caso. Como a turma é bastante heterogénea considerou-se vantajosa e enriquecedora esta forma de organização. De facto, segundo Cohen et al. (2000), os estudos de caso possibilitam a investigação e o relato de uma dinâmica complexa, da relação entre diferentes acontecimentos, das relações humanas e outros factores. Neste estudo, pretende-se investigar vários aspectos relacionados com a actividade desenvolvida pelos alunos, tendo em atenção as diferenças marcantes que podem existir entre eles. Ou seja, pretende-se investigar "deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico" (Ponte, 1994, p. 3).

Os instrumentos de recolha de dados foram o diário de bordo, entrevistas e os documentos produzidos pelos alunos. O diário de bordo constitui um instrumento muito importante dado que como a professora desempenha simultaneamente o papel de investigadora, dificilmente esta conseguiria fazer muitas anotações durante as aulas. Neste sentido, foi realizado um registo sistemático das observações que, de acordo com Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990), fazem parte da subjectividade do investigador, uma vez que contém percepções e expectativas, receios e sentimentos, enfim um conjunto de aspectos bons ou maus que decorreram, e que ao fim de algum tempo iriam ficar de um modo bastante ténue na memória, fazendo com que perdesse informações preciosas. As entrevistas surgiram como um modo de recolha de dados bastante rico e importante, dado que, por um lado, permitiram um contacto mais directo com os alunos e, por outro, possibilitaram a produção de informações detalhadas. De facto, como refere Tuckman (2002), a entrevista permite "obter os dados desejados com a máxima eficácia e a mínima distorção" (p. 348). No início do estudo foram realizadas entrevistas com a intenção de compreender o que os alunos pensam sobre a Matemática e o modo se desembaraçam perante diversas situações. No final do estudo, a entrevista foi mais estruturada, atendendo à necessidade de conhecer aspectos mais específicos, tal como o que os alunos sentiram, pensaram, as dificuldades por que passaram, enfim o que para eles representou esta experiência. O tipo de entrevista a utilizar foi a semi-estruturada, dado que se pretende que o desenvolvimento da entrevista se vá adaptando ao aluno em questão. Assim, foi elaborado um guião com a finalidade de orientar o desenvolvimento da entrevista e que garante que todos os participantes respondem às mesmas questões. As entrevistas foram gravadas para depois serem registadas na sua totalidade. Pretende-se assim garantir a fidelidade às respostas obtidas. Os documentos produzidos pelos alunos permitem a obtenção de uma noção exacta do trabalho produzido por estes. De facto, a análise dos relatórios produzidos pelos alunos após a realização das tarefas permitiram completar as informações, uma vez que na aula ocorrem uma grande variedade de acontecimentos e pormenores. Outro documento produzido pelos alunos foram os testes escritos, que permitiram a recolha de informações referentes aos erros por eles cometidos.

Resultados preliminares

Os resultados a seguir apresentados reportam-se a dados recolhidos na primeira entrevista. Apresentamos a perspectiva que duas alunas, Beatriz e Madalena, têm da Matemática e a forma como resolvem diversas tarefas algébricas, com especial atenção para os erros que cometem.

Beatriz

Beatriz é uma aluna participativa, tem um aproveitamento satisfatório e nunca teve retenções. Tem 13 anos e afirma que Matemática é uma das suas disciplinas preferidas. Para ela o raciocínio é muito importante e justifica: "Porque para chegarmos à resolução de um problema, temos de passar… De fazer um raciocínio e temos também de perceber o problema e o porquê aquilo" (E1, p. 1).

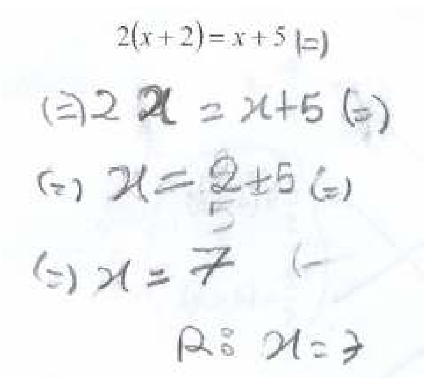
No entanto, na sua perspectiva sobre a Matemática, valoriza essencialmente o cálculo: "Há sempre cálculo, em todos os problemas, em tudo (…) Há algumas coisas que não se faz com cálculo, mas vai quase sempre dar ao cálculo" (E1, p. 1). Também admite que a Matemática se baseia em parte no trabalho com letras: "Porque não é muitas vezes, mas também não é poucas. Não é? Praticamente é quase tudo números" (E1, p. 2). Quando questionada sobre a sua percepção sobre a existência de mais letras ultimamente, ela refere: "Claro que tem havido mais letras. Lembro-me que no 5.º ano era quase… Só havia números". Para Beatriz, a Matemática baseia-se na aplicação de regras para resolver exercícios: "Para chegarmos a uma resposta, porque 2+2 não pode ser 5, 2+2 tem de ser 4. É uma regra." (E1, p.4). Quando questionada sobre o uso de regras em Geometria, refere imediatamente que sim: "Por exemplo, o Teorema de Pitágoras é baseado em regras" (E1, p. 4). A resolução de equações é para ela uma tarefa algo complicada. Contudo, refere que "Há umas mais fáceis e outras mais complicadas" (E1, p.4), ou seja, depende das equações.

Uma das questões da tarefa realizada na primeira entrevista solicita a expressão simplificada que representa o perímetro de um polígono dado. Apesar de ser uma questão de escolha múltipla com quatro hipóteses de resposta, Beatriz considera que a resposta correcta seria outra: $6a$.

> Beatriz – Não está aqui!
>
> Professora – Como é que encontraste essa expressão?
>
> Beatriz – $a+1$ é $1a$. $2a+1$ é $3a$. $a-3$ é a. $a+2$ é $2a$ e a é a. E a soma dá $6a$.

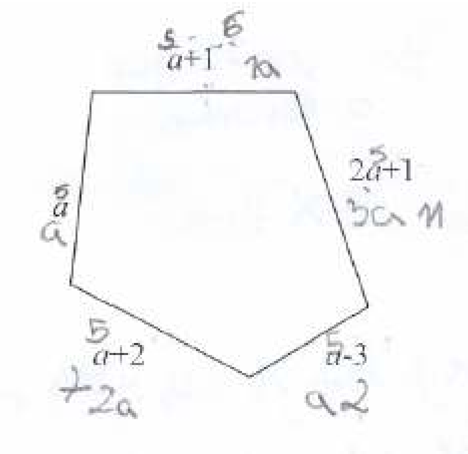
Analisando a resolução de Beatriz, e o modo como ela argumenta neste excerto da entrevista, verifica-se que fez vários erros de *eliminação*. Considera o sinal + de cada expressão como uma operação a realizar, como se estivesse perante uma situação aritmética. De seguida, adiciona apenas $1a$, $3a$ e $2a$ não atribuindo significado aos a's isolados.

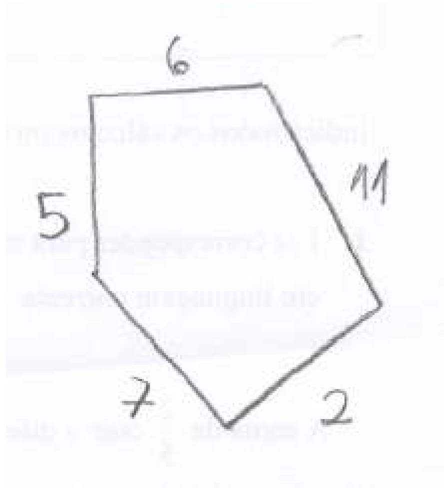
A resolução da equação $2(x+2)=x+5$ foi uma tarefa que trouxe algumas dificuldades. Beatriz tem presente uma vaga ideia das regras práticas para a resolução de equações, tratadas no 7.º ano. Lembra-se que deve isolar os termos em x no primeiro membro e os "números" no segundo membro. Por isso faz a seguinte resolução:



Em primeiro lugar, verifica-se que não atribui significado aos parênteses nem ao 2 que o antecede. Continua a repetir o erro de *eliminação*, simplificando $x+2$ por $2x$. No segundo passo, Beatriz tem como objectivo isolar a variável. Para isso necessita de retirar o coeficiente 2 do termo $2x$ e decide colocar o 2 no segundo membro recorrendo à adição. Neste caso, não inverte correctamente a operação.

Uma outra tarefa proposta neste entrevista consiste na indicação da medida de cada um dos lados dum polígono, tarefa que se enquadra numa perspectiva processual da Álgebra, segundo Kieran (1992). Beatriz não revela dificuldades na sua resolução:





Para cada um dos lados do polígono, Beatriz efectua a substituição do valor de *a* por 5. Converte assim cada expressão algébrica numa situação aritmética. Efectua correctamente os cálculos, não demonstrando dificuldade. Portanto, o uso da letra como letra avaliada foi bem sucedido.

Madalena

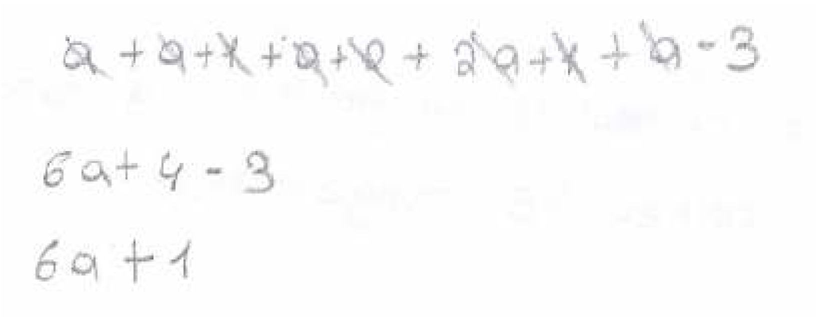
Madalena tem 13 anos e nunca teve retenções. É uma aluna com muito bom aproveitamento, muito participativa e menciona que Matemática é uma das suas disciplinas preferidas. Do seu ponto de vista, a Matemática é principalmente para compreender:

> Se a gente não compreender depois não consegue fazer o resto. Por exemplo, se a gente não compreender uma matéria atrás depois aquilo é como uma cadeia, vai sempre evoluindo e depois se a gente não percebe uma coisa atrás depois já não percebe o resto. Por isso é que eu digo que a Matemática é fácil quando se percebe. (E4, p.1)

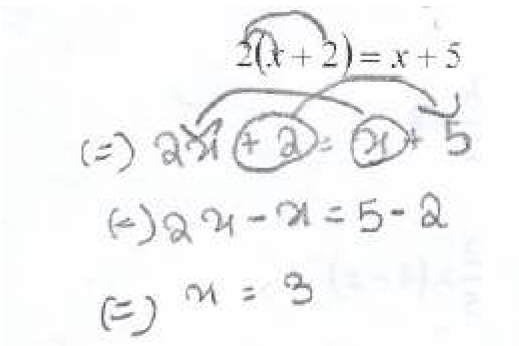
Para Madalena, a Matemática baseia-se em certa medida em cálculo: "É preciso cálculo, mas depois há umas coisas onde não é assim tão preciso cálculo. Por exemplo na geometria não é preciso assim tanto cálculo" (E4, p. 1).

No que concerne ao trabalho com letras em Matemática, refere que, comparando com anos anteriores, agora se trabalha mais vezes com letras. Quando questionada sobre a existência de um único modo de resolução de um exercício ou problema, considera que "há mais do que uma maneira de chegar ao mesmo sítio ou por cálculos ou por tentativas" (E4, p. 3). Entende que a Matemática se baseia na aplicação de regras para resolver exercícios. Para ela as equações não são complicadas. Afirma mesmo que "Eu acho que são fáceis. Quando a gente percebe. Para mim é tudo fácil. Eu ao princípio [no ano passado] não achava, mas depois comecei a achar e até acho que é muito giro!" (E4, p. 4).

Madalena manifesta satisfação na manipulação de expressões algébricas. Após a leitura da questão onde é pedida a expressão simplificada que representa o perímetro de um polígono dado, o seu primeiro comentário foi: "Ah, Isto é fácil!" (E4, p. 8). E resolve sem dificuldade a questão.



Resolve também a equação $2(x+2) = x+5$ de um modo rápido e sem grandes dificuldades. Refere, enquanto faz a resolução: "Gosto tanto de fazer isto!" (E4, p. 10). No entanto, comete um erro na eliminação de parênteses, não fazendo o 2 a multiplicar pelo outro 2.



Na questão que pede para realizar a substituição do valor de *a* por 5 e encontrar a medida de cada um dos lados do polígono, Madalena resolve correctamente e sem dificuldade:

$$a = 5$$

$$a + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$2a + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$a - 3 = 5 - 3 = 2$$

$$a + 2 = 5 + 2 = 7$$

Resumidamente, pode afirmar-se que Madalena tem facilidade e consciência quer da perspectiva processual quer da perspectiva estrutural da Álgebra.

Algumas conclusões

A percepção de que a Matemática é essencialmente cálculo é bastante forte para estas duas alunas. Beatriz pensa que a grande base da Matemática é o cálculo e que tudo se resume ao cálculo. Madalena, apesar de compreender que existem situações em que o cálculo não é muito necessário, ainda pensa que este é fundamental. O desempenho destas alunas na Álgebra processual e estrutural é diferente. Beatriz tem facilidade na resolução de situações baseadas na perspectiva processual e bastantes dificuldades em situações que remetem para uma perspectiva estrutural. Pelo seu lado, Madalena revela facilidade em ambas as perspectivas e revela-se uma entusiasta por situações que apelam à manipulação algébrica e resolução de equações.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Cohen, L., Manion, L., & Morisson, K. (2000). *Research methods in education* (5ª edição). Londres: Routledge.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Kieran, C. (1992). The leaning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de investigação em educação* (2ª edição). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian