O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios?

Dinamizadora
Fátima Guimarães
Escola Superior de Educação de Setúbal

Membros do painel
Abraham Arcavi
Instituto Weizmann de Ciencias – Israel
Profesor visitante, CRICED, Tsukuba University – Japan

Bernardo Gómez
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia
SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

João Pedro da Ponte
Grupo de Investigação DIF-Didáctica e Formação
Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Vamos dar início ao painel sobre "O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra", colocando a ênfase nos problemas e nos desafios que aí se colocam.

Esta uma problemática muito ampla e com múltiplas abordagens e que vem sendo muito discutida desde há largos anos. Muita coisa tem mudado nas últimas décadas, no entanto é ainda lugar comum referir-se as dificuldades dos alunos em operar, grandes problemas dos alunos na aprendizagem da álgebra, e que o seu ensino precisa de mudar. Se o que tem sido feito e o modo como se tem pensado estes temas não tem dado resultados pretendidos, o que fazer, para onde ir, como mudar?

Pretendemos que a discussão que se irá seguir e para a qual dispomos de 90 minutos de dê alguma contribuição para a clarificação de alguns destes aspectos. Antes de começar, saúdo aos membros do painel e agradeço a disponibilidade para aqui estarem e quero também cumprimentar o público esperando que a discussão corresponda às vossas expectativas. Vamos ouvir sobre estes assuntos Abraham Arcavi, Bernardo Gómez, João Pedro da Ponte e Jorge Nuno Silva. As apresentações dos membros do painel são desnecessárias, pois são todos já nossos conhecidos. Abraham Arcavi, Bernardo Gómez e João Pedro da Ponte estão desde o início do encontro entre nós, tendo sido apresentados quando das conferências plenárias que proferiram. Relativamente a Jorge Nuno Silva, será também conhecido pela maior parte dos presentes.

Porém, para os outros gostaria de dizer algumas palavras de apresentação
Jorge Nuno Monteiro de Oliveira e Silva, é Professor Auxiliar na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, onde se licenciou, tendo feito o seu Doutoramento em Matemática, Universidade de Berkeley, em 1994. Para além de leccionar na Universidade de Lisboa, colabora com outras instituições do ensino superior ao nível de cursos de Pós-Graduações. É director do Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática e os seus interesses científicos são variados, e passam pela Análise, Jogos Combinatórios, Aritmética, Matemática Discreta, História, Problemas**.** JNS é um dos matemáticos portugueses que, há anos, se interessa pela relação entre o Jogo e Ciência. O seu conhecimento e interesse pelos jogos matemáticos é reconhecido tendo mesmo obra publicada sobre o assunto: O prazer da Matemática, *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos* João Pedro Neto**,** Jorge Nuno Silva**.**

Fátima Guimarães – Começando pelo professor Arcavi, gostava que nos falasse sobre a ideia de symbol sense que desenvolveu na sessão de ontem. Esta noção parece-me bastante interessante. Por um lado, porque se coloca a ênfase no pensar matematicamente, ideia forte no espírito dos Standards do NCTM (2000) e numa visão de álgebra escolar, diferente da tradicional, mais alargada que inclui representações alternativas e transformações relacionadas com elas. Mas por outro lado, porque com ela se conserva aquilo em que, do meu ponto de vista, consiste o grande poder da Álgebra, isto é, ser uma ferramenta poderosa para expressar e comunicar generalizações, revelar estruturas, estabelecer conexões e formular argumentos matemáticos, perceber o porquê de certas relações, não descurando o papel dos símbolos literais no contexto da álgebra escolar.

Porém, curiosamente, tanto num artigo seu de 1994 em que desenvolve esta ideia de symbol sense, como na conferência de ontem, não usa a expressão pensamento algébrico. Opta por symbol sense, ideia que, como refere, é paralela à de number sense para a aritmética. Ora pensar prende-se precisamente com atribuir um sentido (Arendt), captar significado (Dewey) e pelo que Arcavi diz sobre symbol sence parece ser uma ideia que engloba muitos aspectos do que na literatura se apresenta como pensamento algébrico.

Assim, pergunto, como vê a articulação entre symbol sense e pensamento algébrico?

A opção de não se referir a pensamento algébrico foi deliberada? Se sim, quais as razões para essa opção? Gostava que comentasse isto.

Arcavi – Muito obrigado Fátima. Hoje de manhã eu dizia à Fátima que mais fácil é moderar uma discussão do que ser "painelista", porque o número de boas perguntas é muito maior do que o número de boas respostas. A tua pergunta é muito interessante e não é a primeira vez que a escuto no percurso destes dias, e tenho várias respostas relativamente à razão pela qual não me referi em nenhum momento à alusão ao pensamento algébrico. Bom, a primeira razão será porque tenho esta tendência a escapar-me um pouco das grandes questões, e que esse pensamento algébrico me soa como questão muito grande, muito profunda e que abarca demasiado, como a pergunta de qual é o sentido da vida e isso assusta-me um pouco. Esta seria a primeira resposta bastante superficial. Uma segunda resposta, porque não me refiro ao pensamento algébrico, é porque me pareceu que, se os símbolos são o instrumento principal da Álgebra, podemos concentrarmo-nos no *symbol sense* em relação com a noção geral de "sense making", criação de significados em geral e não somente na álgebra. De alguma maneira o *symbol sense* é um caso específico de algo que me preocupa muitíssimo e que é o "sense making" em Matemática. Eu penso que a chave do divórcio entre os nossos alunos e a Matemática, se deve a esse corte entre os significados e o formalismo. E essa foi a grande preocupação, e como o formalismo está basicamente personificado, ou digamos, representado na Matemática por símbolos, era de grande interesse tratar e ver como as pessoas tomam sentido dos símbolos. Essa é uma parte da resposta, digamos, é que o sentido dos símbolos é uma coisa geral. Outra resposta, porque não me refiro ao pensamento algébrico, é porque penso que o pensamento algébrico e o sentido dos símbolos têm uma intersecção mas não são absolutamente idênticos, penso que o pensamento algébrico, como disse, é uma coisa muito grande, muito importante, e difícil de definir, mas na segunda volta irei tratar de dar uma definição do pensamento algébrico, agora só me estou desculpando porque não a sei. Também me seria difícil definir, por exemplo, o que é o pensamento geométrico, mas em lugar de me referir ao que é o pensamento geométrico, é algo parecido, tratando-se de identificar o processo que em geometria poderia chegar a ser paralelo ao processo em álgebra, que é a visualização, exemplo de visualizar, exemplo de "sense making" como visualização, ou será que a tendência seria identificar um instrumento importante entre a álgebra que são os símbolos e ver como as pessoas se relacionam com isso. Penso que a ideia irá prover algo..., uma espécie de conceito sobre *symbol sense* que nos sirva não só para dirigir, identificar, interpretar os nossos resultados de investigação, mas também para ter implicações curriculares directas: que tipo de actividades curriculares ou que tipo de prática de aula queremos estimular, que tipo de ensino nós queremos ver no currículo, e que tipo de pergunta/resposta, diálogo/discussão na aula queremos promover para que esta presença de significados seja massiva e não caiamos somente na manipulação formal, que sendo muito interessante, transforma-se no que é mais importante, e que tende a produzir esse corte entre a Matemática e os alunos. Intensificar o *symbol sense* parece-me que tinha implicações práticas importantes, tinha uma razão curricular e de prática de aula, para além de uma razão intelectual académica de investigação. Irei referir-me mais adiante ao pensamento algébrico.

Fátima Guimarães – Muito obrigada. Vou centrar as minhas questões para Bernardo Gómez na relação entre a Aritmética e Álgebra, sobretudo do ponto de vista da aprendizagem.

É frequentemente referido que a Aritmética, quer do ponto de vista epistemológico, quer curricularmente, precede a Álgebra. Já Sebastião e Silva referia que as necessidades de cálculo levaram à expansão do estudo dos números e com isso ao estudo do conjunto das propriedades gerais das operações, propriedades estas que, segundo o ilustre matemático português, formam a essência da Álgebra.

Não há consenso sobre se a Álgebra deve ou não ser considerada Aritmética generalizada, mas parece haver consenso de que, na escola, durante o estudo da Aritmética se começam a desenvolver as ideias algébricas dos alunos.

No que se refere à aprendizagem dos alunos, há estudos que sugerem que as dificuldades na aprendizagem da Álgebra se enraízam nas insuficiências dos alunos na Aritmética. Outros consideram que é precisamente a consolidação de noções típicas da Aritmética que constituem um obstáculo à aprendizagem da Álgebra. Referem a existência de uma rotura cognitiva quando, qualquer que seja a idade do aluno, se passa de aritmética para a álgebra, roturas essas que precisam de acontecer.

Portanto, parece que qualquer que seja o currículo, ou seja, quer a álgebra seja vista como desenvolvimento da aritmética (e haja a preocupação de a tratar desde os primeiros anos) quer seja vista como uma área distinta a ser introduzida mais tarde no currículo há problemas que surgem na aprendizagem destes temas.

Haverá roturas? Se sim, quais? Como pode o professor lidar com essas roturas? Quais as implicações para o ensino da Álgebra e Aritmética? E para a construção do currículo?

Gostaria que comentasse estas ideias.

B. Gómez – Bom, muito obrigado. Bem, como só entendi metade da pergunta, vou tomar a liberdade e responder. Bem, efectivamente creio que existe a ideia, a aparência de que álgebra e aritmética são como peças separadas, é uma aparência. Porque digo isso? Peguemos em exemplos: como ensinamos a propriedade distributiva? Usamos parênteses, a razão de três por quatro mais cinco entre parênteses igual..., essa é a linguagem algébrica, a linguagem de parênteses horizontal ou igual é linguagem algébrica, antigamente, no século XX ou princípio do século XX a aritmética não usava linguagem algébrica. Outro exemplo, como explicamos o algoritmo da multiplicação? Não como ensinamos, como explicamos o algoritmo da multiplicação? Para explicar o que fazemos quando multiplicamos vinte e três por vinte e quatro dizemos que vinte e três é vinte mais três e que vinte e quatro é vinte mais quatro e que o produto se obtém aplicando duas vezes a propriedade distributiva, 23x24=(20+3)(20+4). Isto é linguagem algébrica, os livros actuais estão renunciando à antiga linguagem de unidades, dezenas e centenas para explicar os algoritmos, estão incorporando cada vez mais a linguagem da álgebra. Porquê? Porque a álgebra ajuda a entender, como dizia o Professor Arcavi, ajuda a entender as relações aritméticas, vemo-las explicadas. Quero dizer que há uma aparência de ruptura entre a aritmética e a álgebra, mas é uma aparência. Quando se ensinava os problemas de magnitudes proporcionais até ao século XX, ensinava-se a resolver com métodos aritméticos, antigamente, todavia mais atrás, estavam os problemas de regra de falsa posição, que se resolviam com regras aritméticas, com a incorporação contemporânea da álgebra, a álgebra eclipsa a aritmética, os problemas de proporcionalidade resolvem-se tomando as razões como fracções e a proporção como equação.

Por isso eu digo que há uma aparência de ruptura entre aritmética e álgebra, talvez seja porque o fenómeno não seja dado no sentido contrário, a aritmética é um campo de validação, de exemplificação das relações algébricas, a álgebra vêmo-la mas clara quando pomos exemplos numéricos, e esse fenómeno é no sentido contrário de que a álgebra também se aproveite da aritmética, e isso é o que creio que está falhando, essa é a minha opinião, e porei um exemplo para acabar. A estratégia do número misterioso para multiplicar dois números, seja por exemplo sete por nove, o número misterioso é o oito, oito se eleva ao quadrado e só resta um, oito por oito são sessenta e quatro, menos um são sessenta e três, este é o resultado, podia-se provar com qualquer par de números que esta estratégia funciona sempre. Por exemplo, vinte e quatro por vinte e seis, o número misterioso é vinte e cinco, vinte e cinco ao quadrado menos um, são seiscentos e vinte e quatro, não falha. Que se está passando, mistério? Na diferença de quadrados, A mais B por A menos B é igual a A ao quadrado menos B ao quadrado, vale para qualquer par de números, para vinte e três por vinte e sete, $23x27=(25-2)(25+2)=25^2-2^2=625-4$, também vale. Temos aprendido a usar a fórmula ou a expressão diferença de quadrados no limbo, para que queremos saber que A mais B por A menos B, se A ao quadrado menos B ao quadrado são para simplificar ou desenvolver expressões algébricas são para alimentar o próprio avanço no ensino da Matemática? A álgebra exemplifica e tem resultados na aritmética, é um exemplo da diferença de quadrados, mas podem-se dar muitos mais. A divisão de polinómios, a regra de Ruffini, como se explica a regra de Ruffini se não se entende a divisão de números naturais? A regra de Ruffini é simplesmente uma forma abreviada da divisão de polinómios, os números naturais têm uma expressão polinómica, centro e vinte e três é um por dez ao quadrado mais dois por dez mais três, é uma expressão polinómica, é o mesmo, a divisão de números naturais, praticamente, salvo detalhes, que a divisão de polinómios, e a divisão de polinómios é o mesmo que a regra de Ruffini, essas conexões há que as deixar. E esse creio que, para mim, é um caminho que temos que abordar, a aritmética e a álgebra não são peças isoladas. Não sei se respondi à pergunta?

Fátima Guimarães – Muito obrigada Bernardo Goméz. As minhas questões para João Pedro Ponte incidem sobre a Álgebra, no currículo português, e no seu ensino.

Em Portugal, os tópicos habitualmente incluídos no domínio da Álgebra têm uma presença forte no currículo. Por exemplo, constata-se que no 9º ano o programa recomenda que 33% do número total de aulas sejam utilizadas para leccionar os tópicos relacionados com a Álgebra.

Para além disso, parece também serem aqueles onde a diferença entre o número de aulas dadas e previstas é maior. Com efeito, um relatório da inspecção sobre o desempenho curricular em Matemática, realizado em 97/98, numa população constituída pelo conjunto das turmas do 9º ano das escolas públicas e privadas portuguesas, refere que os professores ocupam mais de 50% do número total de aulas na leccionação desses tópicos. Apesar de tudo isto, as provas de aferição revelam que o nível de desempenho dos alunos, em Álgebra, é dos mais baixos.

A que se deverá essa situação?

Será mais um problema do currículo ou da cultura e práticas profissionais?

Ou terá a ver com problemas intrínsecos ao conteúdo?

João Pedro Ponte – Não sei como é que essas contas foram feitas. Nos programas do 3º ciclo do ensino básico não existe uma área de Álgebra diferenciada das restantes. Existe uma área de Funções e existe uma área de Números e Cálculo, onde se inclui o cálculo numérico e o cálculo algébrico. Não sei como é que os senhores inspectores separaram os aspectos de cálculo numérico dos aspectos de cálculo algébrico...

Fátima Guimarães – Mas eu posso-te dizer, portanto inclui-se na álgebra as equações de 2º grau, números reais e inequações, trigonometria e sistemas de equações.

João Pedro Ponte – Se fizeram assim as contas, então fizeram mal, pois os Números Reais são um tópico de Números, e a Trigonometria é um tópico à parte, que, neste nível, a associar a algum outro, seria à Geometria.

Agora, o facto de os professores dedicarem aos temas indicados mais aulas do que o previsto só pode ser um sinal de que eles sentem que se trata de temas importantes, onde os alunos têm especiais dificuldades. Os efeitos desse trabalho adicional possivelmente não são os que desejaríamos, pois os resultados nestes assuntos no PISA e nas provas de aferição não são de facto nada brilhantes. A minha conclusão é que temos um problema – temos de saber o que é o essencial da Álgebra, qual é o seu papel no currículo e como deve ser ensinada.

Os conceitos e procedimentos algébricos são parte integrante dos programas, nomeadamente do 3º ciclo, com uma ou outra simplificação relativamente a épocas passadas. A grande questão que eu coloco é a do lugar da Álgebra nos programas, pois esta, como grande tema da Matemática, é praticamente invisível. Dá-se visibilidade, por um lado, às Funções e, por outro lado, ao cálculo algébrico, mas perdeu-se a noção do papel específico da Álgebra no currículo.

Ora, todos estaremos de acordo que as Funções são uma parte importante da Álgebra, mas isso não chega. Há outros aspectos que precisam de atenção e é isso que a ideia de pensamento algébrico, como perspectiva transversal, ajuda a sublinhar. Tal como há o pensamento geométrico que representa uma forma particular de pensar, apoiada na intuição espacial, e tal como há o pensamento estatístico, uma outra forma de pensar própria de colecções de objectos, há também o pensamento algébrico, que tem sido muito mal tratado pelos programas...

Fátima Guimarães – Desculpa interromper-te, mas nós vamos falar da noção de pensamento algébrico, na segunda parte. Portanto, se relativamente ao primeiro assunto não tens mais nada a acrescentar deixaríamos o resto para a segunda parte.

João Pedro Ponte – Certo.

Fátima Guimarães – Muito obrigada, então, João Pedro. Agora, para Jorge Nuno Silva, vou incidir na relação dos jogos matemáticos com o Número e a Álgebra. A Matemática e o jogo andaram sempre de mãos dadas e a literatura evidencia bem o impacto dos jogos na história da matemática. Lembro-me que num artigo que li de

Guzman em que falava da relevância dos jogos matemáticos no ensino, salientava este aspecto, apresentando exemplos de muitos matemáticos que foram grandes entusiastas dos jogos e de outros cuja participação activa em jogos deu lugar a novas áreas e modos de pensar que hoje se consideram "verdadeira matemática". Todos sabemos o prazer que acontece quando em aula se utilizam jogos e é indiscutível o papel que podem ter na transformação da imagem da matemática.

Gostaria que o Jorge Nuno se centrasse na importância do jogo no desenvolvimento heurístico e no modo como podem enriquecer o conhecimento do número e da Álgebra. Da sua experiência, como matemático que estuda jogos e como professor de matemática no ensino superior, o que retira em termos da contribuição para outros níveis de ensino?

Jorge Nuno Silva – Vou falar um pouco de um jogo pedagógico medieval, o Rithmomachia. Convém lembrar que, nesse tempo, a aprendizagem da Matemática tinha como função viabilizar a apreensão do divino. Acreditava-se que sabendo Matemática se acabaria por poder compreender o verdadeiro conhecimento, que era a Teologia, que era o que era importante. A Aritmética fazia parte desse caminho quádruplo para a sabedoria, conhecido por quadrivium, que incluía também a Música, a Astronomia e a Geometria. Ora bem, a obra de Aritmética de Boécio foi usada por centenas de anos na Europa e foi para acompanhar este ensino que se inventou este jogo que ficou conhecido por vários nomes mas principalmente Rithmomachia, que é um nome composto por duas palavras e que quer dizer batalha de números.

Esta obra de aritmética do Boécio ensina poucas coisas, ensina, por exemplo, o que são números pares e ímpares, primos, compostos, números figurados, a achar o máximo denominador comum, etc., sem demonstrações, sem nada. Embora Boécio seja do séc. VI, e portanto muito posterior a Euclides, visto daqui dos nossos tempos Euclides está muito mais avançado, tem demonstrações, tem uma arquitectura dedutiva muito sofisticada. Boécio preocupava-se mais com relações numéricas, como N mais um sobre N ($(N+1)/N$), e essencialmente com as médias, que eram as três médias habituais, aritmética, geométrica e harmónica, a que dava grande valor místico. Ele depois introduziu mais sete médias para fazer o número dez, que tinham também propriedades especiais, como já Nicómaco tinha feito. Aliás, Boécio era também um neopitagórico, e a sua Aritmética é disso testemunho eloquente. Tratava-se de Matemática mística, de decorar, de meditar, de contemplar, porque compreender Matemática era compreender os desígnios de Deus, porque acreditavam que Deus tinha formado o Mundo por relações matemáticas. Ora bem, Rithmomachia é o primeiro jogo que eu conheço que foi inventado para ensinar Matemática, é um jogo pedagógico, e é um jogo dificílimo no sentido em que não é um jogo atraente segundo os parâmetros que utilizamos hoje, é demasiado obscuro, não é fácil prever as ameaças do adversário, nem elaborar um plano estratégico. O manual que eu conheço foi escrito por Francesco Barozzi, um matemático italiano do século XVI.

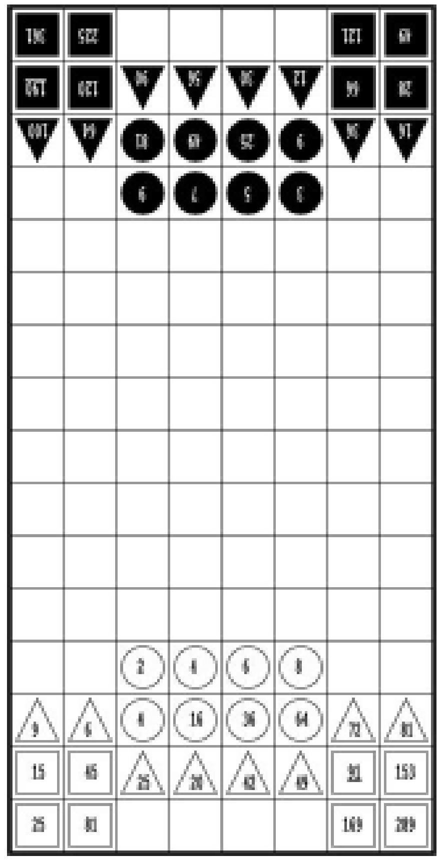
IL NOBILISSIMO
ET ANTIQVISSIMO
GIVOCO PYTHAGOREO
NOMINATO
Rythmomachia
CIOE BATTAGLIA
DE CONSONANTIE
DE NVMERI,
Ritrouato per vtilità, & solazzo delli Studiosi.
Et al presente per Francesco Barozzi Gentil'huomo
Venetiano in lingua volgare in modo di
Paraphrasi composto.

SALVS VITÆ.

IN VENETIA.
Appresso Gratioso Perchacino. 1572.

O terreno de jogo é um rectângulo quadriculado 8 por 16, dois tabuleiros de xadrez juntos, depois hão-de reparar que as peças do lado direito, as brancas, começam com uma fiada de números pares, dois, quatro, seis, oito, e depois a partir daí por umas regras que Barozzi explica, vão sendo determinados os números das peças. Bom, eu tenho aqui isso explicitado, mas não tenho tempo agora para estar a explicar, trata-se de relações numéricas típicas da aritmética neopitagórica de Boécio: proporções e médias. A disposição inicial era já importante, permitia a contemplação das relações, era já era uma aprendizagem.

Este jogo tem regras difíceis, os movimentos das peças são complicados, o triângulo move-se duas casas na diagonal, o quadrado move-se três ortogonalmente, o círculo, que é a forma mais perfeita, move-se para qualquer casa adjacente. Há uma peça mais complicada porque representa uma soma de quadrados, é a pirâmide, que lembra a Rainha do xadrez.



O Rithmomachia não era um jogo popular, bem entendido, era um jogo das classes cultas, que sabiam ler as regras, que estavam normalmente escritas em Latim, portanto este era um jogo que viveu nas igrejas e nos mosteiros medievais. Era o jogo mais respeitado de todos, e só se encontram registos abonatórios. Até ao séc. XVII nunca ninguém escreveu depreciativamente sobre ele, em todos os escritos que aparecem só aparecem louvores a este jogo, é um jogo cheio de virtudes, muito difícil de jogar, e contudo, quando chegamos ao séc. XVII o jogo desapareceu por si. Por que é que o jogo desapareceu? Porque no séc. XVII apareceu a Álgebra, apareceu outra maneira de olhar para a Matemática, apareceu outra tradição da Matemática, que já não conferia ao Rithmomachia nenhuma utilidade.

Eu creio que devemos fazer um pouco o paralelo: nos nossos dias o que é que corresponde ao Rithmomachia? Não sabemos responder cabalmente a esta pergunta, mas cremos que se trata dos jogos abstractos/matemáticos.

A Álgebra, quanto a mim, aprende-se bem, ensina-se bem, quando se aborda a sua história. Eu creio que isso dá até liberdade depois ao professor e ao aluno de ter uma acção adulta e madura sobre as matérias, e eu tenho a experiência de ensino com alunos do Ramo Educacional do 3º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa. Ao dar um curso de História da Matemática, onde reparo nas carências deles, às vezes elementares, reparo na felicidade que têm depois de saber, por exemplo, o Método da Falsa Posição, que é uma trivialidade, mas quando se sabe o Método da Falsa Posição para resolver uma equação de 1º grau, a fórmula habitual ganha outro estatuto interior. Ao resolver equações do 2º grau à moda da Babilónia ou Grécia Antiga, com os métodos de Álgebra geométrica, etc., e depois com a fórmula resolvente, ganha-se muita coisa, ganha-se não só conhecimento, ganha-se maturidade, ganha-se perspectiva e ganha-se uma visão global do assunto.

Deixem-me só referir uma ideia que me é cara, a Matemática Recreativa. A Matemática Recreativa bem feita, bem apresentada, tem muita utilidade pedagógica e didáctica. Vou dar-lhes só um exemplo de um probleminha muito simples: Um espontâneo, uma pessoa qualquer da assistência, pensa num polinómio do grau que quiser com coeficientes inteiros não negativos, e eu só lhe vou pedir o valor desse polinómio para um valor da variável e vou adivinhar o polinómio. Como funciona esta "mágica" fica como trabalho de casa para daqui a um bocadinho.

Fátima Guimarães – Muito obrigada. Vou agora colocar a todos os membros do painel uma mesma questão que se prende com a clarificação da ideia de pensamento algébrico.

Pensamento algébrico assim como pensamento numérico são expressões que passaram a fazer parte do discurso da investigação sobre o ensino do número e da álgebra, expressões chave usadas para caracterizar um bom ensino e aprendizagem e para qualificar o tipo de encontros que os alunos devem ter com estes temas e até com a matemática em geral. Desta forma, torna-se essencial perceber o que é isso de pensamento algébrico.

Se nos detivermos na expressão pensamento algébrico, a palavra algébrico é um adjectivo que evidencia um predicado desse pensamento. Mas o que quererá dizer esse qualificativo. Na literatura encontramos uma quantidade enorme de tentativas de *clarificação de pensamento algébrico. Umas vezes é caracterizado por incidir sobre objectos algébricos, parecendo pressupor que a forma de pensar é determinada pelos objectos que são pensados. Outras vezes aponta-se para características desse pensamento que parecem existir em qualquer ramo da matemática.*

O pensamento é algébrico porque incide sobre objectos algébricos ou é algébrico porque tem características específicas que o distinguem de outros tipos de pensamento dentro e fora da matemática?

Terá esse pensamento alguma especificidade própria? E nesse caso qual será ela?

Kieran (1998) refere que se o termo álgebra não tivesse associado a si uma conotação impeditiva de uma matemática com compreensão para todos e desde os primeiros anos "seria mais simples redefinir álgebra do que criar uma coisa nova chamada pensamento algébrico"

Afinal quais são as mais valias que traz a introdução deste conceito? E que problemas acarreta?

A. Arcavi – Poderia dizer que o pensamento algébrico inclui a conceptualização e aplicação de generalidade, variabilidade, estrutura, mas eu quero falar através de um exemplo e relacionar *symbol sense* com pensamento algébrico. Pensem na seguinte pergunta: Em que casos a média aritmética entre dois números se pode calcular como a sua diferença? Por exemplo, a média de 10 e 30 é 20 e também o é a sua diferença, a média entre 10 e 20 é 15 que não é a sua diferença. Um exercício que vocês podem fazer de forma numérica, por tentativa e erro, mas pode tornar-se aborrecido. É claro que pensar aritmeticamente e pensar de forma geral são duas formas distintas de pensar. O foco do pensar algébrico consiste em usar os instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado, e poder interpretar esse resultado (neste caso de que um dos números deve ser triplo do outro). A ideia de *symbol sense* ajuda-me a mim a pensar da seguinte maneira: os símbolos explicam-me a razão do resultado? Ter *symbol sense* implica para mim questionar os símbolos em busca de significados, e abandoná-los a favor de outra representação quando eles não mo proporcionam. Agora vou mostrar-vos uma solução que a mim me parece que gera má compreensão que é esta fórmula de álgebra, e que aí na pergunta é se esta solução reflecte o pensamento algébrico ou não, e por aí vamos ter gente que diga que sim e porquê, ou que não e porquê, e essa discussão parece-me um pouco estéril, a ideia de buscar outra solução, caracterizemo-la como algébrica ou não, é isso que o *symbol sense* me indica. Agora olhemos para outra solução e vocês me dirão se aplicam ou não elementos de pensamento algébrico qualquer que seja a definição que vocês tenham em mente do pensamento algébrico, ou não? E a solução que me ocorre é usar a recta numérica assinalar o 0 e o número a, o número b (a<b) e (a+b)/2. O segmento entre 0 e (a+b)/2 deve ser igual ao segmento entre a e b. Esses dois segmentos já têm uma parte em comum (o segmento entre a e (a+b)/2) ou seja que as outras duas partes devem ser iguais entre si. Isso implica que entre 0 e b há três segmentos idênticos, o que implica que a é um terço de b. Aparentemente podemos dizer que é um pensamento geométrico, porque a representação é geométrica, que elemento de pensamento algébrico teremos aqui? A mim parece-se que discutir este exemplo, se há ou não há pensamento algébrico parece-me menos útil do que discutir a ideia do sentido de *symbol sense*, que foi o que levou a procurar e produzir una explicação que vá mais à do uso formal tradicional dos símbolos para investigar este problema.

Bernardo Gomes – Há certo tempo perguntaram-me se um determinado problema era aritmético ou algébrico, e eu não soube responder, resolvi-o, e como o resolvi por meios algébricos pensei que era um problema algébrico, e quem me pôs a pergunta apresentou-me outra solução mais fácil, aritmética, era um problema clássico. Eu tenho muitas dúvidas porque não estudei o termo sobre o que é uma coisa e outra, então eu vou fazer uma pergunta ao estilo galego, como dizemos em Espanha. Uma raiz quadrada, que significa para vocês, que sentido, que pensamento vos provoca? Aritmético, porque é um número? Mas suponhamos que não soubemos resolver com um algoritmo, e que nos pedem para calcular a raiz quadrada de um número grande, por exemplo $\sqrt{1064}$. Para um algébrico o problema reduz-se a resolver uma equação, $x= \sqrt{1064}$. Esta equação tem um método próprio, toma-se $x=(a+b)$, eleva se ao quadrado, $(a+b)^2=1064$; desenvolve-se e identificam-se os termos em ambos lados da igualdade. Para um aritmético um número quadrado é igual à soma de números impares começando do um, assim por exemplo 16 é 1+3+5+7; logo para um aritmético para a raiz quadrada de um número é suficiente contar quantos números impares tem a soma. Para um geómetra a raiz quadrada de um número pode ser o lado de um quadrado com esse número de área. O que é o pensamento aritmético, o que é o pensamento algébrico, não é a situação que o desencadeia? Porque um resolve de uma determinada maneira e outro de outra, é um produto do ensino, e como se há-de ensinar a resolver esta situação? Desencadeando um mecanismo aritmético no algébrico ou no aritmético? Enfim, como não sou especialista ponho esta pergunta para provocar a nossa reflexão.

João Pedro Ponte – A situação há pouco colocada por Bernardo Goméz mostra que um problema matemático, em si, não é aritmético, algébrico ou geométrico. Um problema, com muita frequência pode ser resolvido por métodos muito diferentes e dentro dos próprios métodos algébricos há eventualmente variedades, umas mais estruturais, outras mais algorítmicas, etc. Portanto o mesmo problema pode ser muitas vezes atacado com abordagens de diferentes áreas da Matemática, o que demonstra que elas não estão compartimentadas de modo estanque.

Apesar disso, cada uma delas tem a sua especificidade. Assim, para chegarmos ao pensamento algébrico temos de começar pela Álgebra. O que é então a Álgebra? Para mim, é um ramo da Matemática que começa com a resolução de problemas, passa pelo estudo de equações com uma incógnita (desde o 1º grau até ao grau n) e, numa terceira fase, inclui o estudo de estruturas abstractas dos mais diversos tipos (grupo, corpo, espaço vectorial, conjunto, etc.). O pensamento algébrico é o pensamento característico destes campos da Matemática, o que não significa que só se use aí. O pensamento geométrico também é originário de um campo da Matemática, a Geometria, mas usa-se largamente na abordagem de questões originalmente formuladas noutras áreas. Deste modo, é a partir dos objectos e dos processos de raciocínio a eles associados, que caracterizam as diferentes fases deste ramo da Matemática, que podemos chegar ao pensamento algébrico.

É claro que o pensamento algébrico inclui a manipulação de símbolos. No entanto, vai muito para além disso. Para o NCTM ele diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, ao estudo da variação e à modelação. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só a objectos concretos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este pensamento é o estudo de padrões e regularidades.

Nesta perspectiva, a Álgebra é muito mais do que o simbolismo. No entanto, para muitas pessoas, ela reduz-se à aprendizagem da manipulação de expressões simbólicas. Isso é reforçado pelos nossos programas que tomam as Funções como algo exterior à Álgebra e reduzem esta ao "cálculo algébrico". Existem várias tentativas de popularizar a Álgebra que se centram também nesta perspectiva, enfatizando os "períodos" da linguagem algébrica, primeiro o retórico, depois o sincopado e, finalmente, o simbólico. Esta parece-me uma visão muito pobre da Álgebra, reduzida a uma simples linguagem.

Ora bem, o que temos mais, além da simbolização? Temos o estudo da variação, que tem a ver com as funções e que, no meu ponto de vista, enquanto não estudamos limites, continuidade, derivadas, etc., se trata claramente de Álgebra. Depois, quando começamos a usar aqueles conceitos, admitimos explícita ou implicitamente processos infinitos, e entramos na Análise Infinitesimal.

Temos ainda o estudo das estruturas. Trata-se de fazer justiça à evolução da Álgebra a partir do séc. XIX em diante. Por exemplo, a relação de ordem é uma estrutura que se estabelece num conjunto e é um aspecto eminentemente algébrico. Esta vertente é fundamental para se ter uma visão moderna da Álgebra e portanto é necessário incluí-la.

E, finalmente, temos a vertente da modelação. Este é o aspecto mais problemático. Em que medida a modelação é um elemento essencial do pensamento algébrico? Sendo o nosso grande problema evitar que a Álgebra se reduza à manipulação de símbolos – a grande questão que Abraham Arcavi coloca quando fala em *symbol sense* – temos que enriquecer o trabalho com os símbolos de tal maneira que ele não se reduza à simples manipulação levando a perder os significados. Para isso é necessário relacionar a Álgebra com outras áreas da Matemática e com questões extra matemáticas, o que a modelação nos permite. No entanto, eu diria que, estritamente falando, a modelação é um outro conceito matemático, paralelo ao pensamento algébrico, tal como o pensamento geométrico, etc. Sublinho, contudo, que esta ideia da relação da Álgebra com outros domínios é fundamental e não pode ficar de fora.

Finalmente, é preciso dizer que não me parece que nos devemos perturbar pelo facto do termo "pensamento algébrico" ser usado por diferentes pessoas com diferentes significados e que alguns rejeitem totalmente o seu uso. Isso acontece com muitos outros termos. Se nos tivéssemos que restringir aos termos que não são problemáticos só diríamos trivialidades... O termo "pensamento algébrico" foi deliberadamente cunhado por certos educadores matemáticos, que lhe procuram atribuir um certo significado e que o usam porque o acham útil, considerando que ele pode ter um certo papel organizador do currículo. Trata-se, portanto, de uma construção social. Quem não gostar do termo é livre para fazer outras sugestões...

Para mim, penso que a noção de pensamento algébrico é importante do ponto de vista curricular, pois ajuda a perceber que a Álgebra não se reduz à manipulação de símbolos, mas envolve uma forma própria de pensar, que, tal como a perspectiva geométrica, deveria permear muito mais toda a aprendizagem da Matemática. É um conceito importante porque sugere que uma iniciação a este modo de pensar, importante em Matemática, não tem que começar no 3º ciclo, mas pode começar nos 1º e 2º ciclos, explorando, por exemplo, regularidades e padrões.

Jorge Nuno Silva – A Álgebra é mais bem compreendida quando se sente a necessidade dela, quer dizer, quando um aluno faz quinhentos problemas iguais de uma maneira aritmética básica e depois descobre que há uma maneira algébrica mais global que resolve uma classe de problemas, o aluno dá um salto qualitativo, mas eu creio que não se podem saltar muitos passos com demasiada rapidez, porque senão a Álgebra fica opaca, como já foi aqui dito, e fica pouco relacionável com as suas aplicações. A Álgebra deve ser motivada e deve aparecer a quem a aprende como uma necessidade, se aparecer como uma resposta a uma pergunta que não foi feita é um desastre, e nós temos infelizmente a tradição do ensino da Álgebra, pelo menos na escola onde eu trabalho, de uma maneira muito árida, consistindo essencialmente numa apresentação de uma sucessão de estruturas algébricas: semi-grupo, grupóide, grupo, anel, corpo, ...

Fátima Guimarães – Muito obrigada a todos, nós estamos quase em cima da hora, podemos abrir só um pequeno espaço se houver alguma pergunta para colocar aos membros do painel.

Bom, se não há eu dou por encerrado o painel, espero que tenha contribuído para a clarificação de alguns aspectos sobre este assunto. Quero agradecer uma vez mais aos membros do painel, pela vossa participação, pela contribuição que deram à reflexão *sobre esses temas e quero também agradecer ao público por estar presente. Muito obrigada.*