

A integração de investigações matemáticas no ensino-aprendizagem das sucessões

Magda Pereira

Escola Secundária com 3º Ciclo do Sabugal

1. Introdução

Como importante veículo para introduzir e aprofundar os conteúdos já leccionados nas aulas, torna-se fundamental que o professor proponha aos seus alunos situações que permitam explorar e descobrir Matemática. Investigar na sala de aula proporciona ao professor e aos alunos liberdade de criação, utilização e comparação de uma ampla variedade de representações mentais, de conjectura e de métodos de resolução. Mas, como integrar e implementar tarefas de investigação matemática no currículo da disciplina, atendendo à leccionação dos conteúdos matemáticos do programa oficial, às competências a desenvolver nos alunos e à articulação das investigações com outro tipo de tarefas da sala de aula (como a resolução de exercícios e problemas e os momentos de exposição de temas matemáticos)?

No âmbito de um estudo realizado pela autora da comunicação, aquando da realização de uma experiência com alunos do 11ºano de escolaridade, no estudo das sucessões, no ano lectivo 2002/2003, serão apresentadas algumas tarefas de investigação matemática, algumas estratégias adoptadas (quer durante a implementação das tarefas, quer nas aulas que mediaram tal implementação), bem como algumas conclusões e implicações que decorreram do estudo em causa.

2. Enquadramento teórico

O conhecimento é hipotético, falível e a ciência progride a partir de problemas, conjecturas e refutações (Lakatos, 1976). Neste contexto, a aprendizagem da Matemática reveste-se de uma forte intervenção investigativa, onde a exploração, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro são processos que lhe estão inerentes e que se tornam indispensáveis à sua aprendizagem (Braumann, 2002). Por outro lado, a Matemática experimental, baseada num processo criativo, assume uma vertente indutiva imprescindível na criação da própria Matemática (Polya, 1977).

A experiência assume um papel preponderante na educação do indivíduo. Aprender é reconstruir com base nessa experiência, reconvertendo a informação num bem intelectual (Dewey, 1897). Deste modo, o professor tem uma função central no processo de aprendizagem dos alunos, pois assume uma função dinamizadora na implementação e no desenvolvimento do currículo (Pires, 1999). De facto, o currículo não é apenas o que vem estabelecido nos documentos oficiais, é necessário que o professor modele tais articulações oficiais às condições intrínsecas à sua prática, às novas ideias e aos significados que possui, condicionados pela sua formação (Kilpatrick, 1999, citado em Pires, 1999). Considera-se, actualmente, imprescindível reflectir na noção de currículo de forma a contemplar algumas competências desejáveis a serem ponderadas por cada professor, inserido num organismo de gestão pedagógica (a sua escola). De facto, “qualquer que seja o seu papel, mais renovador ou mais conservador, os professores são sempre protagonistas fundamentais do desenvolvimento do currículo” (Pires, 1999, p.3). E “se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula.” (Ponte, 2003, p.12). Contudo, apesar da aprendizagem não se fazer apenas através de investigação matemática, este tipo de tarefas introduz alguma variedade na “dieta” da aula. Permite aos alunos conjecturar, explorar conexões matemáticas existentes entre vários conceitos e matérias, descobrir processos de resolução e resultados, bem como diversificar actividades (Goldenberg, 1996).

Em 1999, Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira definiram quatro etapas características de uma investigação matemática da seguinte forma: *1- Formular a questão a investigar; 2- Formular conjecturas relativamente a essa questão; 3- Testar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las; 4- Validar e comunicar os resultados.* Porém, para Ponte (2003), uma tarefa de investigação tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Assim, segundo este autor, podemos considerar exercícios, problemas, explorações e investigações. Atendendo a que, os exercícios são tarefas de dificuldade reduzida e de estrutura fechada. Os problemas também têm uma estrutura fechada, mas têm um grau de dificuldade mais elevado. As investigações matemáticas são tarefas de estrutura aberta, mas com um grau de dificuldade elevada. As explorações são tarefas que têm um grau de dificuldade reduzida, mas têm uma estrutura aberta (à semelhança das investigações). Podemos distinguir investigação de exploração

consoante o grau de dificuldade da tarefa. Podemos ainda designar por exploração uma investigação fácil, tendo em conta que o que as distingue é a sua estrutura quanto ao grau de dificuldade.

No entanto, quando o objectivo da aula é investigar Matemática, o professor pode seguir uma metodologia investigativa, escolhendo apenas a situação e deixando para os seus alunos a definição dos próprios problemas dentro da situação que posteriormente tentam resolver seguindo um determinado caminho, maximizando assim o desenvolvimento do poder matemático dos mesmos. Na realidade, não há uma metodologia universalmente aplicável sob a forma de “receita”, mas existem estratégias de ensino e de organização do trabalho dos alunos mais adequadas e outras mais inadequadas para cada fim pretendido e para cada situação concreta, “cabe ao professor conhecer as alternativas disponíveis e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar com confiança e desembaraço cada uma delas.” (Ponte; Boavida; Graça; Abrantes; 1997, p.95).

3. Actividades desenvolvidas

No estudo referido, as tarefas de investigação acompanharam todo o tema das sucessões e foram elaboradas/adaptadas a fim de abordarem cada tópico e cada conceito que se pretendia introduzir, explorar, ou ainda consolidar. A resolução de todas as tarefas deste estudo teve pontos comuns, tais como: um relatório escrito elaborado pelos alunos (em grupo), onde constaram os raciocínios efectuados pelos mesmos durante cada resolução; uma reflexão crítica escrita, efectuada por cada aluno (de forma individual) destinada à exposição de questões pertinentes e de esquemas que auxiliaram à resolução de cada tarefa; a apresentação das resoluções a toda a turma, num ambiente de saudável discussão, moderado e gerido pela professora/investigadora.

A elaboração de um plano que integre tarefas de investigação

Na elaboração do seu plano para integrar tarefas de investigação matemática no tema das sucessões, a professora/investigadora teve em consideração a aquisição de técnicas e conhecimentos matemáticos específicos sob progressivos níveis de complexidade e de abstracção.

Quando pensei num plano que integrasse investigações matemáticas pensei, simultaneamente, como conceber uma série de investigações que, além de se integrarem harmoniosamente no currículo oficial (permitindo abordar a maioria dos tópicos essenciais do tema das sucessões), constituíssem um todo encaixado, onde cada tarefa suceda, quer à tarefa anterior, quer à aprendizagem dos alunos.

(Registos da professora/investigadora, 19/03/03)

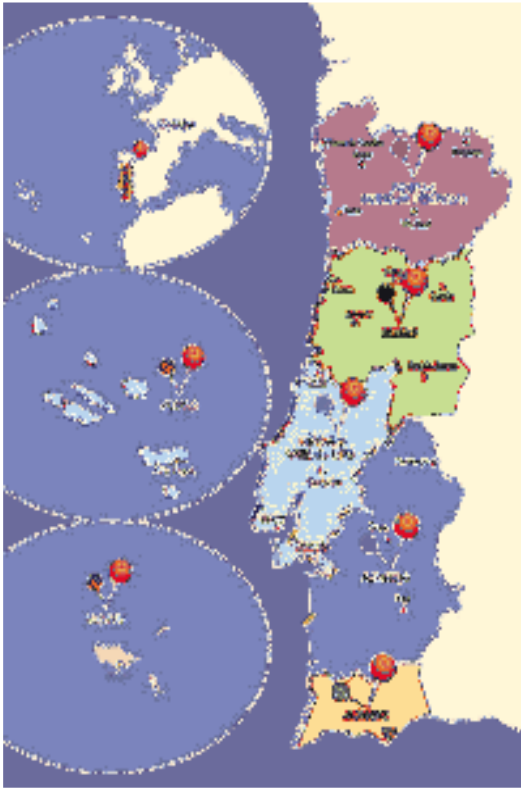
Assim, a professora/investigadora pressupôs o aluno como o principal agente da sua própria aprendizagem e considerou ser importante o desenvolvimento de determinadas capacidades, tais como: o raciocínio; a comunicação; e o uso da Matemática na interpretação e intervenção do real, com base na própria experiência. Por outro lado, ao planificar aulas para a resolução e discussão de cada tarefa, pressupôs o desenvolvimento da confiança, de hábitos de trabalho e persistência, do sentido da responsabilidade, do espírito de tolerância e de cooperação.

A elaboração de um relatório escrito (contendo as resoluções de cada grupo), bem como a sua posterior apresentação, destinou-se: à procura de informação necessária a cada resolução; ao desenvolvimento da persistência na procura de soluções para uma situação nova; à avaliação e à tomada de decisões; e à apresentação dos trabalhos de forma organizada e cuidada (atendendo à importância de saber exprimir e fundamentar opiniões, bem como revelar espírito crítico).

Uma tarefa de investigação do estudo

Uma das tarefas de investigação do estudo referido foi tarefa de investigação *Viagens pelo Mundo*, trata-se uma investigação de carácter real, criada pela professora/investigadora a fim de proporcionar aos alunos a necessidade do uso das sucessões em situações do dia a dia. Esta tarefa de investigação constou de um mapa em que o objectivo é construir uma fórmula que permita unir todas as regiões, cidades e localidades por um caminho. Esta é uma tarefa que pode ser novamente abordada no 12º ano, aquando do estudo do cálculo combinatório e em cursos superiores no âmbito da Teoria de Grafos. Permite ainda fazer referência e estudar as propriedades existentes entre alguns números, concretamente os números triangulares. A riqueza de discussões que podem descender da resolução desta investigação apresentou-se, para a professora/investigadora, como um meio de predispor os alunos para a investigação matemática.

Investigação: Viagens pelo Mundo



Pretende-se fazer um passeio por Portugal, visitando as sete zonas assinaladas no mapa.

Vamos chamar de “um percurso” o caminho mais curto que une duas regiões quaisquer de Portugal.

- Quantos percursos diferentes podem ser formados entre as sete regiões de Portugal?
- E se considerarmos os percursos entre as cidades de cada uma dessas regiões?
- Existe alguma lei geral que nos permita considerar todos os percursos que unem todas as cidades de um país? E do mundo?

INVESTIGUEM ...

As aulas que precederam a implementação da tarefa de investigação

As aulas que precederam a aula de exploração da tarefa de investigação *Viagens pelo Mundo* destinaram-se à resolução de problemas e à exploração de situações que proporcionaram a aprendizagem dos pré-requisitos da tarefa em causa. Assim, foi construída, no grupo turma e seguindo o tipo de metodologia heurística, a definição de sucessão monótona crescente, sucessão monótona decrescente, sucessão não monótona, infinitamente grande positivo e infinitésimo. Na fase de validação de cada descoberta, a professora/investigadora definiu analiticamente cada um desses conceitos.

Posteriormente, foram resolvidos alguns exercícios de aplicação dos conceitos leccionados extraídos do manual dos alunos, a fim reforçar a importância que a prática adquirida com a resolução de exercícios tem numa aprendizagem consistente. Mas, durante a aula, a professora/investigadora reflectiu sobre o seguinte:

Será que, alternar na mesma aula actividade investigativa com momentos de descoberta de conceitos a partir de uma situação problemática (guiados por mim) e momentos de resolução de exercícios, facilita a aprendizagem dos alunos?

(D.R da professora, 07/04/03)

Na tentativa de dar resposta a esta questão, nos últimos 15 minutos da aula, e como esta estava a ser dinâmica (porque todos os alunos estavam a participar), a professora decidiu improvisar propondo aos alunos a realização de uma tarefa de

exploração. Tal tarefa seria baseada em exemplos da vida real, ou de outra disciplina, ou usando só matemática analítica, ou de um outro contexto que traduzam situações de sucessões monótonas crescente, decrescente e não monótona, explicando cada situação num relatório.

As resoluções desta tarefa de exploração foram discutidas e esclarecidas no grupo turma. A professora/investigadora deu especial atenção a algumas situações menos explícitas efectuadas por alguns grupos. Porém, de um modo geral, os alunos demonstraram muita criatividade, ao imaginarem situações de âmbito interdisciplinar e

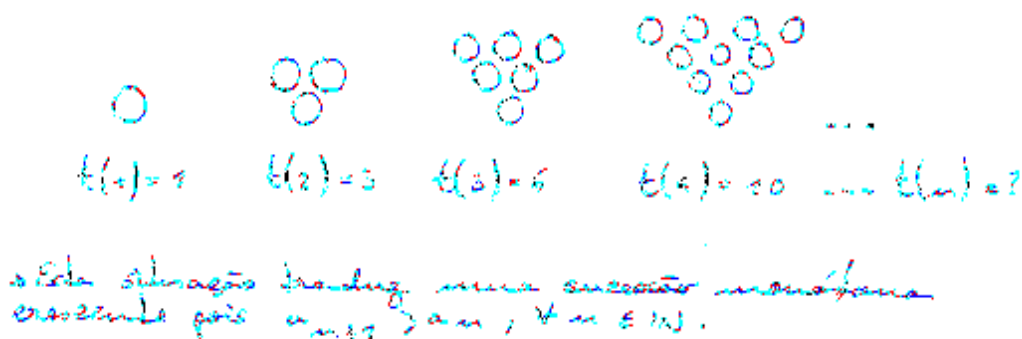


Figura 1: Sucessão monótona crescente, do grupo 2

representarem-nas por meio de esquemas que tornam ainda mais pertinente essa criatividade, como foi o caso das situações expostas na figura 1 (onde é esquematizada uma sucessão monótona crescente, também passível de ser explorada no âmbito da sucessão dos números triangulares) e na figura 2 (onde é apresentada uma situação de uma sucessão não monótona)

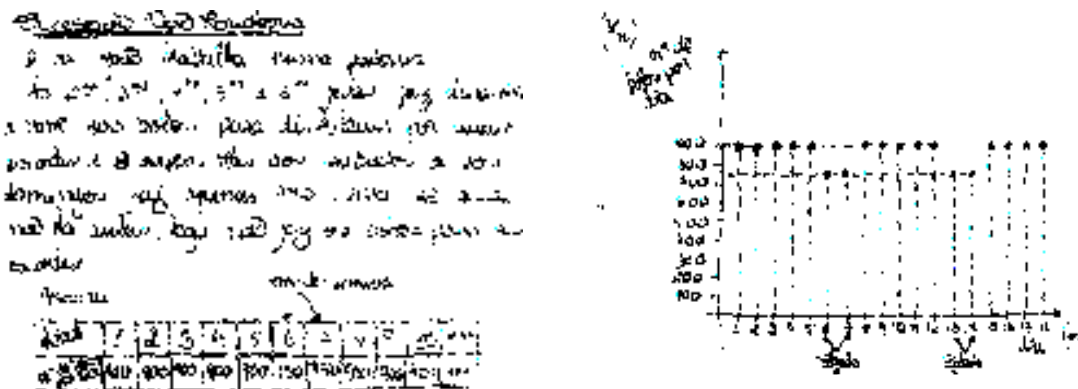


Figura 2: Sucessão não monótona, do grupo 4

As aulas seguintes à exploração desta situação (improvisada pela professora/investigadora, como já foi referido) foram destinadas à preparação, realização e correção de um teste de avaliação escrita.

As aulas relativas à implementação da tarefa de investigação

Nas aulas em que foram diversificados momentos de investigação, com resolução de exercícios, de problemas e momentos de construção de situações novas (em discussão orientada pela professora/investigadora) os alunos foram conduzidos ao desenvolvimento da capacidade de articular conceitos e raciocínios (dentro da mesma aula). De facto, no decorrer das discussões sobre a tarefa de investigação, a professora/investigadora permitiu que os alunos expusessem livremente os processos de resolução usados e respectivos resultados. Desencadeou discussões que facilitaram o desenvolvimento da flexibilidade matemática dos alunos, ao nível da articulação de conceitos, estratégias e raciocínios.

As aulas que envolvem investigações, quer ocupem a aula toda ou só uma parte dela, são muito importantes para nós, pois dessa forma interessamo-nos mais pelas matérias que cada investigação envolve e aprendemos a ter mais flexibilidade quando as usamos. Quando numa tarefa de investigação temos que utilizar muitas matérias, não é só usá-las, é preciso saber como se vão usar, daí ser necessário ter flexibilidade nas várias matérias da Matemática.

(André, Grupo 1, Entrevista, 16/06/03)

De facto, essas discussões geraram-se em torno de extensões sugeridas pelos alunos aquando das apresentações, o que resultou, várias vezes, em momentos de diversificação de tarefas dentro da mesma aula, como foi o caso da extensão da situação inicial (do número de caminhos em função das localidades, cidades ou zonas) para a construção de polígonos e sólidos geométricos (ver figura 3).



A implementação de um plano onde estão integradas, de forma mediada, tarefas investigativas, a resolução de problemas e de exercícios auxiliou os alunos à percepção da Matemática como um todo integrado, tal como referem alguns alunos e concretamente a aluna Inês:

Figura 3: Relação entre a tarefa e

Agora percebi que as matérias de Matemática não são como as matérias de História ou de Geografia (por exemplo) em que se estuda uma matéria e ela pára nela mesma. Aqui na Matemática está tudo interligado. As investigações são um bom exemplo disso.

(Inês, Grupo 2, Entrevista, 12/06/03)

Por outro lado, a diversificação de tarefas, em torno do mesmo conceito, conduziu os alunos à percepção de que o mesmo assunto pode relacionar-se com um exercício, com um problema ou com uma tarefa de investigação. Esta situação verificou-se durante algumas aulas de discussão das tarefas e concretamente na discussão da situação apresentada na figura 3:

Professora: Vocês apresentaram um sólido com 7 vértices e com 21 arestas, considerando todas as arestas possíveis. E porque é que não apresentaram os sólidos (ou polígonos) que poderíamos formar com menos de sete vértices?

José (do grupo 1): Podemos também fazer com menos. Por exemplo: um sólido com 6 vértices tem 15 arestas, um sólido com 5 vértices tem 10 arestas, e assim sucessivamente.

Célia: Sim, mas podemos formar figuras planas, porque com 3 vértices formamos um triângulo. Com 2 vértices formamos um segmento e com 1 vértice formamos um ponto.

Professora: Muito bem. Mas, vamos agora relacionar esta situação com a matéria anterior! O conjunto de termos desta sucessão tem minorantes? E majorantes?

Carolina (grupo 4): Professora, eu acho que, nesta sucessão, um minorante é 1, porque é o número mínimo de vértices que podemos ter!

Professora: Pensa bem! O minorante é o menor termo?

Carolina: Pois é! Eu já estava a confundir termo com ordem. Neste caso um minorante é 0, porque $u_1 = 0$.

Bernardina (do grupo 5): Então e um majorante?

Professora: Comenta tu acerca dos majorantes.

Bernardina: A sucessão está sempre a crescer, por isso eu acho que não conseguimos determinar os majorantes.

Professora: Muito bem! Então esta sucessão não é limitada, porque o conjunto dos seus termos é minorado, mas não é majorado. De facto, u_n é uma sucessão crescente, $u_1 = 0$ e $u_n \rightarrow +\infty$.

O raciocínio investigativo também se reflectiu nos testes de avaliação, pois houve alunos que, embora no teste escrito (posterior à implementação do plano com investigações) não tivessem conseguido chegar a resultados em algumas questões, apresentaram raciocínios e conjecturas, mostrando assim que passaram a dar mais importância aos processos (e não apenas aos resultados), como refere a aluna Bernardina:

O trabalho com investigações ajudou-me a saber estudar um bocadinho de tudo. Quando estudei para o último teste, revi a matéria de trigonometria e foi muito mais fácil estudar agora do que antes. Agora foi diferente. Acho que comecei a perceber mais como relacionar as “coisas”. Comecei a dar outra importância à forma como as matérias estão ligadas, como muitas vezes nos aparecem relacionadas nos testes e não sabemos por onde começar a resolver. Antes não era assim.

(Bernardina, Grupo 5, Entrevista, 16/06/03)

No final da aula de implementação desta tarefa de investigação a professora/investigadora decidiu marcar para trabalho de casa uma tarefa inédita, no âmbito da reflexão crítica da tarefa realizada. Tal reflexão constaria da elaboração de um enunciado cujo termo geral da sucessão que lhe responda seja a acabada de determinar

nesta tarefa: $u_n = \frac{n(n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

A criatividade dos trabalhos dos alunos foi perceptível nos trabalhos que realizaram:

Na primavera, as abelhas recolhem pólen das flores. Existem, num jardim, n flores. Sabendo que as abelhas pousam apenas uma vez em cada flor, quantos percursos tem uma abelha que fazer para recolher pólen de todas as flores do jardim?

(Célia, Grupo 3, R.C, 08/05/03)

No início de um jogo de futebol há n jogadores e todos se cumprimentam. Como podemos determinar o número de cumprimentos realizados no início de um jogo?

(André, Grupo 1, R.C, 08/05/03)

4. Algumas conclusões

Relativamente à elaboração de um plano que integre tarefas de investigação matemática nas aulas, a professora/investigadora considerou os objectivos gerais da disciplina no que refere: à aquisição de técnicas/conhecimentos, ao desenvolvimento de valores/attitudes e ao desenvolvimento de capacidades/aptidões.

Diversificar momentos de descoberta guiada de conceitos, com actividade investigativa, com resolução de problemas e de exercícios conduziu à percepção da matemática como um todo integrado e promoveu a flexibilidade dos alunos ao nível da articulação de conceitos, estratégias e raciocínios. Por outro lado, a implementação de investigações matemáticas reflectiu-se, ainda, numa melhoria do desempenho dos alunos face a outro tipo de tarefas, em aulas não dedicadas à investigação, bem como nos momentos de avaliação.

Verificou-se o desenvolvimento de conhecimentos gerais do ensino secundário na disciplina de Matemática, tais como: ampliação de conhecimentos sobre Geometria; iniciação do estudo da Análise Infinitesimal; e ampliação de noções de Probabilidades.

Observou-se, também, o desenvolvimento de capacidades e aptidões gerais do ensino secundário na disciplina de Matemática, tais como: desenvolvimento das capacidades de intuir, experimentar, testar, deduzir, conjecturar, provar, generalizar, comunicar e desenvolvimento do pensamento científico. Estas conclusões estão em concordância com Ponte (2003), pois a elaboração de relatórios escritos promoveu o desenvolvimento da capacidade de comunicar por escrito, assim como a discussão dos processos usados e registados nesses relatórios promoveu o desenvolvimento da capacidade de comunicar oralmente.

A liberdade matemática que é dada aos alunos aquando da resolução de tarefas de investigação, bem como a forma como eles sentem e exprimem essa liberdade, reflectiu-se no desenvolvimento da criatividade. Por outro lado, a criatividade dos alunos contribuiu para uma atitude mais positiva face à disciplina de Matemática, atitude visível através do empenho dos alunos, manifestado ao longo de todo o estudo.

5. Algumas implicações

Apesar da *Investigação Matemática* ser tema de vários estudos em Portugal, o seu modo de integração e implementação na sala de aula, atendendo à articulação com

situações problemáticas, exercícios e exposição de temas matemáticos, não tem sido muito estudado. O estudo referido mostra algumas vantagens da integração e implementação de investigações no currículo da disciplina de Matemática. Contudo este estudo centrou-se em apenas um tema do 11ºano de escolaridade – Sucessões. Assim, é pertinente colocar a seguinte questão: Como integrar tarefas de investigação perspectivando a sua implementação nas aulas de Matemática, de modo contínuo e progressivo, quer ao nível de um ano de escolaridade, quer ao nível de um ciclo escolar?

Referências Bibliográficas

- Braumann, C. (2002). Divagações sobre Investigação Matemática e o seu papel na Aprendizagem da Matemática. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio, *Actividades de Investigação – na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp.5-24). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Dewey, J. (1897). O meu Credo Pedagógico. Em *Educação e Matemática N°44*, 1997 (pp.35-38). Lisboa: APM.
- Goldenberg, E. P. (1996). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, 1999 (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Lakatos, I. *Proofs and Refutations*, J. Worrall e E. Zahar (eds.) (1976). Cambridge: Cambridge University Press.
- Pires, M. (1999). O Professor e o Currículo. *Educação e Matemática N.º55* (pp. 3-6). Lisboa: APM.
- Polya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.
- Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (pp.25-39). Lisboa: APM.
- Ponte, J., Boavida, A. M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática: Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. e Ferreira, C. (1999). Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. Em *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp.133-151). Lisboa: Projecto MPT e APM.