Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL

Introdução

Para alunos e professores o desenvolvimento da compreensão é um processo crescente e contínuo que deve atravessar tudo o que acontece na aula de matemática. Os resultados da investigação mostram que há uma evidência bastante acentuada que suporta a importância de aprender com compreensão desde o início, por contraposição a uma aprendizagem que assenta na aquisição de determinadas habilidades isoladas para as quais só à posteriori é desenvolvida uma compreensão de como é que estas funcionam formando um todo. Quando os alunos aprendem com compreensão eles são capazes de aplicar esses conhecimento para aprender novos tópicos e para resolver novos problemas. Este tipo de aprendizagem torna-se fundamental uma vez que estamos a atravessar uma era em que as mudanças tecnológicas são tão rápidas que não nos é possível antecipar as habilidades que os alunos precisam para se tornarem cidadãos competentes. Precisamos sim de preparar os alunos para aprender novas habilidades e conhecimentos e para adaptar o seu conhecimento à resolução de novos problemas.

Assim, para além de destacar algumas das abordagens feitas por vários autores sobre o tema da compreensão, pretende-se ainda abordar algumas das características que devem estar presentes na aula de matemática por forma que esta possa proporcionar uma aprendizagem com compreensão. Neste contexto será dada especial ênfase a questões relacionada com o desenvolvimento curricular e com o modo de funcionamento da própria aula.

Diferentes abordagens do termo compreensão

O termo compreensão tem sido abordado por vários autores com o objectivo de explicar a construção do conhecimento. Skemp (1978) considera dois tipos de compreensão: a *compreensão instrumental* e a *compreensão relacional*. A compreensão instrumental diz respeito à aquisição de regras ou métodos e à capacidade de as usar na resolução de problemas. O objectivo é procurar uma regra que permita dar uma resposta satisfatória para o problema. A compreensão relacional baseia-se em princípios que têm uma aplicação mais geral. Ela permite não só perceber o método que funciona e porquê, como ajuda a relacioná-lo com o problema e possibilita a sua adaptação para a resolução de novos problemas.

Herscovics e Bergeron (1984) referem quatro modos de compreensão: *intuitiva*, *de procedimentos*, *abstracção matemática* e *formalização*. A compreensão intuitiva refere-se a um conhecimento matemático informal que pode ser caracterizado por se basear em pré-conceitos (por exemplo superfície é um pré-conceito de área), na percepção visual ou em acções não quantificadas ("adicionar a" e "juntar" são duas acções associadas com a adição aritmética). A compreensão de procedimentos refere-se à aquisição de procedimentos matemáticos que os sujeitos podem relacionar com o seu conhecimento intuitivo e usar de forma apropriada. A abstracção matemática pode ter dois sentidos, a abstracção, no sentido usual, como a separação de uma representação ou procedimento concretos (por exemplo o número 7 existe na mente da criança mesmo sem requerer a presença de objectos ou a necessidade de contar) e a abstracção, no sentido matemático, como a construção de invariantes (por exemplo a conservação do número), a reversibilidade e composição de transformações e operações matemáticas (por exemplo a subtracção vista como a operação inversa da adição) ou a generalização. A formalização refere-se às interpretações usuais da axiomática e demonstração matemática formal. Esta formalização pode ter ainda dois significados adicionais, conter a noção matemática como uma definição formal e usar o simbolismo matemático para noções em que a abstracção anterior ou compreensão de procedimentos ocorreu até certo ponto.

Hiebert e Carpenter (1992) definem compreensão em termos da forma como a informação é representada e estruturada. As ideias matemáticas, procedimentos ou factos são compreendidos como fazendo parte de uma rede interna. Partindo do princípio de que a compreensão em matemática pode ser pensada como a ligação entre representações de conhecimento, o seu grau é determinado pelo número e força dessas ligações. Assim, uma ideia matemática, procedimento ou facto é completamente compreendido se ele está ligado a redes existentes com conexões fortes ou muito numerosas.

Para Carpenter e Lehrer (1999) há cinco formas de actividade mental de onde pode emergir a compreensão matemática: *construção de relações*, *prolongamento e aplicação do conhecimento matemático*, *reflexão sobre experiências, articulação do* *que sabemos* e *fazendo um conhecimento matemático próprio*. Estas formas estão todas fortemente interligadas podendo no entanto destacar-se algumas das suas propriedades em separado para uma melhor clarificação.

A construção de relações é importante pois podemos considerar que as coisas têm significado pela forma como estão relacionadas com outras coisas. As pessoas constróem o significado de uma nova ideia ou processo relacionando-as com ideias ou processos que já compreenderam anteriormente. O ensino deve preocupar-se com o conhecimento informal dos alunos e relacionar a matemática que se pretende ensinar com esse conhecimento.

Não devemos no entanto pensar no desenvolvimento da compreensão como um simples acrescentar de novos conceitos e processos ao conhecimento existente. Desenvolver a compreensão envolve a criação de estruturas de conhecimento ricas e integradas, estruturas estas que dão origem a uma aprendizagem com compreensão. Quando o conhecimento está altamente estruturado o novo conhecimento pode ser relacionado e incorporado nas redes de conhecimento já existente. O conhecimento estruturado é menos susceptível de ser esquecido e proporciona vários caminhos para a sua recuperação, enquanto que peças de informação isoladas são mais difíceis de lembrar. É neste sentido que Carpenter e Lehrer consideram que devemos prolongar e aplicar o conhecimento matemático.

A reflexão envolve um exame consciente das nossas acções e pensamentos. Ser reflexivo na sua aprendizagem significa que os alunos examinam conscientemente o conhecimento que adquiriram e, em particular, a forma como relacionam o que já sabiam com qualquer outro conhecimento que tenham adquirido. A aprendizagem processa-se através da reorganização do que já sabemos e esta reorganização pode provir da reflexão sobre o que sabemos e como o sabemos.

A capacidade de comunicar ou articular as nossas ideias é um objectivo importante da educação e serve muitas vezes como medida da nossa compreensão. A articulação envolve a comunicação do nosso conhecimento (verbal, escrita, pensamento, etc.) e requer reflexão uma vez que aborda o levantamento de ideias cruciais de uma actividade em que apenas a sua essência pode ser comunicada. Neste processo a actividade começa a ser um objecto de pensamento. Isto é, para articular as nossas ideias, devemos reflectir sobre elas por forma a identificar e descrever elementos cruciais. A articulação requer reflexão e pode mesmo ser pensada como uma forma de pública de reflexão.

Compreender envolve a construção do conhecimento pelos indivíduos através das suas próprias actividades desde que desenvolvam um investimento pessoal na construção desse conhecimento. De uma forma mais geral os alunos devem ser os autores da sua própria aprendizagem. Eles desenvolvem as suas próprias atitudes sobre as diferentes formas e práticas matemáticas. Um dos grandes objectivos do ensino é que os alunos desenvolvam uma predisposição para compreender e que se esforcem para compreender porque a compreensão é importante para eles. Isto significa que os alunos devem ser reflexivos sobre as actividades que desenvolvem enquanto aprendem ou resolvem problemas.

De uma forma global podemos considerar a compreensão como um pilar fundamental no processo de ensino aprendizagem e pode ser caracterizada como a emergência ou o crescimento de uma actividade mental que contribui para o desenvolvimento da inteligência em vez de ser considerada como um atributo estático que faz parte do conhecimento individual.

Algumas características de aulas para aprender com compreensão

Apresentam-se de seguida algumas das características que devem estar presentes na aula de matemática de modo a proporcionar aos alunos uma aprendizagem com compreensão. Esta abordagem engloba duas componentes: uma relacionada com o desenvolvimento curricular, na perspectiva de Tall, complementada com o papel das definições que fazem parte integrante dos conteúdos da matemática avançada e outra componente mais directamente relacionada com o modo de funcionamento da própria aula.

Segundo Tall (1991) são quatro as principais dimensões a ter em conta quando se pretende implementar um currículo que integre a aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados, a saber: a) estabelecer a sequência da aprendizagem (sequencing the leraning experience), b) resolução de problemas, c) demonstração e d) diferenças entre o pensamento matemático elementar e avançado.

Estabelecer a sequência da aprendizagem

Para Tall a transição de uma matemática não formal para a compreensão mais formal dos processos matemáticos é bastante difícil para os alunos e precisa de criar nestes um conhecimento mais profundo dos conceitos que se seguem. A lógica matemática pode falhar ao desenharmos um plano de ensino, pois por vezes os matemáticos pegam numa ideia matemática complexa e "simplificam-na" dividindo-a em pequenas componentes prontas a ensinar numa sequência lógica. Para os especialistas estas componentes são vistas como parte de um todo, mas os alunos podem ver as peças isoladas, tal como são apresentadas, como se se tratasse de um puzzle no qual não se consegue ter uma ideia da imagem do seu todo. Isto pode levar a que o aluno ao encontrar cada peça do puzzle forme um conceito imagem deste contexto particular que pode estar em desacordo com a ideia formal. Neste contexto, além de não haver uma imagem completa do puzzle, as próprias peças podem não mais encaixar uma vez que apresentam desenhos diferentes.

O problema do desenvolvimento curricular é assim o de colocar os alunos em contextos onde o crescimento cognitivo seja possível, conduzindo em último caso a um pensamento matemático com significado onde o formalismo desempenha um papel apropriado.

Tomando a título de exemplo o conceito de derivada, um método que tem provado algum sucesso envolve os alunos numa apreciação visual e global do declive de um gráfico gerado pelo computador ou calculadora como complemento das abordagens algébrica e numérica.

O papel da visualização pode ser bastante poderoso para dar uma forma global ao conceito matemático, para mostrar a sua força e fraqueza, propriedades e não propriedades, por forma a transformá-lo numa necessidade lógica para formular a teoria de forma clara. Devemos no entanto ter em mente que as ideias visuais sem ligação aos processos sequenciais de cálculo e demonstração são compreensões com falta de desempenho, assim como os processos lógicos sequenciais sem uma visão global são limitativos do alcance da compreensão. Parece assim que deveremos ter uma interacção forte destes diferentes modelos de pensamento.

Resolução de problemas

Para muitos universitários resolução de problemas significa aprender o conteúdo dos textos dos manuais e utilizar estes conhecimentos na resolução de exercícios relacionados com o que foi ensinado. Segundo Tall, para os investigadores matemáticos a resolução de problemas é uma actividade criativa, que deve incluir a formulação de conjecturas interessantes, uma sequência de testar actividades, modificando-as e redefinindo-as até que seja possível produzir uma prova formal de um dado teorema.

Depois do trabalho de Pólya (onde as etapas da resolução de problemas são: *compreender o problema*, *imaginar um plano*, *executar o plano* e *olhar para trás*), vários outros autores abordaram a resolução de problemas. Com o objectivo de tornar estas fases de resolução mais atractivas alguns autores deram-lhe uma formulação mais atraente para os alunos novos como é o caso de Mason e outros (1982), onde as fases da resolução de problemas são: *entrada, ataque e análise*. Na fase da *entrada* espera-se a familiarização com o contexto procurando em último caso o que é conhecido e o que se pretende. Depois ocorre uma mudança qualitativa com o *ataque* ao problema usando as ideias que foram introduzidas. Isto pode ter sucesso mas também pode levar a um impasse, um beco aparente onde o indivíduo deve rever o que foi feito e voltar à fase de entrada para considerar um novo ataque. Uma vez encontrada alguma espécie de solução deve fazer-se uma *análise* – verificar os resultados para ter a certeza de que não há erros, rever o que foi feito para entender as estratégias que podem ser úteis noutras situações e estar preparado para estender a aplicabilidade do problema em níveis mais sofisticados e recomeçar o ciclo nesse novo nível. Para Mason é possível ter alunos do superior que desenvolvam formas de resolver problemas embora o processo necessite de mais tempo no início para que os alunos atinjam o conhecimento que parecem aparentar quando estão em situações de aula normal. Contudo, os alunos têm a ganhar neste tipo de abordagem pois podem estimular o pensamento reflexivo e desenvolver ferramentas conceptuais que lhe permitem conduzir com sucesso o processo de solução do problema.

Demonstração

Quando os alunos começam a estudar a matemática mais avançada têm grandes dificuldades com o processo de demonstração até conseguirem familiarizar-se com este tipo de raciocínio.

Para Tall (1991) um passo essencial na matemática avançada é ter em conta a transição da explicação *genérica* para a demonstração formal. Por vezes a explicação do conceito geral a partir de um exemplo típico é mais fácil de compreender que o processo de reconstrução baseado no formalismo. Para Hanna (1991) o ponto de partida para a compreensão é a ideia matemática simples baseada na experiência do dia a dia. Para se poder progredir estas ideias simples devem ser desenvolvidas e explicitadas. Para isso é necessário algum grau de formalismo. Deve criar-se uma linguagem: definir símbolos, regras específicas de manipulação e delinear o alcance das operações matemáticas. Deve ensinar-se uma grande precisão, separando o essencial do não essencial e alcançar uma grande generalidade.

Este tipo de abordagem tem no entanto alguns problemas. Uma vez distanciados do contexto intuitivo original podem perder de vista a realidade e permanecer como um manipulador de símbolos. Hanna considera assim que há quatro questões que deveremos ter em conta ao ensinar matemática com o objectivo de desenvolver o poder de raciocínio dos alunos.

A 1ª diz respeito ao formalismo que não deve ser visto como um lado da questão, mas antes como uma ferramenta importante para a clarificação, validação e compreensão. Quando se sente a necessidade da justificação e quando esta necessidade pode ser encontrada com um grau de rigor apropriado, aprendizagem pode ser fortemente realçada.

A 2ª tem a ver com a reflexão. Não é suficiente proporcionar experiências matemáticas para haja crescimento. É preciso que os alunos reflictam sobre essas experiências. Quanto mais os alunos virem a matemática como uma caixa negra que produz respostas instantâneas, menos paciência têm para lidar com os muitos caminhos erráticos que as suas mentes devem ter para tentar agarrar a essência da matemática. O objectivo da pedagogia deve ser ajudar os alunos a manter o nível de concentração necessário para seguir uma determinada linha de raciocínio.

A 3ª questão prende-se com a ideia de que a matemática é considerada como precisa, quando de facto os alunos devem desenvolver alguma tolerância para a ambiguidade. O formalismo pode ser um inimigo da compreensão. Por vezes uma explicação percebe-se melhor se for dada pictorialmente, de forma vaga, por exemplos ou por analogia. Algumas distinções devem por vezes ser deixadas confusas (por ex. os vários papéis do sinal menos, o facto de usarmos $f(x)$ para representar a função e o valor da função no ponto x).

A última questão está relacionada com o facto de que a questão anterior pode gerar alguma confusão e o aluno dever estar consciente da imprecisão em causa para requerer a quantidade de rigor necessária para ajuizar sobre o raciocínio a seguir.

Alibert e Thomas (1991) valorizaram um processo de demonstração onde os alunos foram colocados numa sequência de pensamento matemático que incluía conjecturas, verificação através de argumentos convincentes ou refutação através de contra exemplos. Foi assim introduzido o "debate científico" onde todos os alunos eram convidados a pensar em possíveis teoremas sobre um determinado tópico e posteriormente a tentar prová-lo ou não.

Este tipo de abordagem conduziu os a algumas conclusões sobre a importância das demonstrações e a compreensão dos alunos sobre as mesmas, que são:

a) Há uma diferença importante e distinta entre o tipo de provas produzidas pelos matemáticos ao investigar sobre novas áreas com o objectivo de convencer os outros sobre a validade dos seus resultados e as demonstrações destes resultados que serão mais tarde usadas para os transmitir aos alunos. As últimas demonstrações precisam de incluir algum material extra que dê uma visão global da demonstração e da sua estrutura, se ela é significativa para a média dos alunos e não apenas uma sequência linear de raciocínio simbólico com controlo da validade passo a passo;
b) Os contextos em que os alunos encontram as demonstrações pode influenciar grandemente a sua percepção sobre o valor da mesma. Estabelecendo um ambiente onde os alunos possam ver e experimentar o que é necessário para convencerem outros, sobre a verdade ou falsidade das proposições, a demonstração aparece como um instrumento de valor pessoal que eles podem ter que usar no futuro.

Diferenças entre o pensamento matemático elementar e avançado

Os currículos da Matemática do ensino não superior, as Normas do NCTM e muitos outros documentos defendem a resolução de problemas como forma de construir novo conhecimento matemático. Raramente estas directivas aparecem nos currículos do ensino superior. Os procedimentos da resolução de problemas vistos atrás (*entrada*, *ataque* e *análise*) podem e são desenvolvidos por alunos mais novos nalgumas investigações matemáticas. Assim muitos dos processos do pensamento matemático avançado podem encontrar-se a um nível mais elementar. Mason (1982) descreve o processo de verificação em *Pensar Matematicamente* em 3 níveis: *convencer-se a si próprio*, *convencer um amigo*, *convencer um inimigo*. Convencer-mo–nos nós próprios está relacionado com a ideia de que alguma afirmação deve ser verdadeira, enquanto que convencer um amigo requer que os argumentos sejam organizados de uma forma mais coerente. Convencer um inimigo significa que os argumentos devem ser analisados e refinados para que ultrapassem o teste da crítica. Isto é o mais próximo que *Pensar Matematicamente* está da noção de prova. O que falta é a noção de definição formal e a lógica das deduções formais para estas definições.

Para Tall a passagem do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição importante: da descrição à definição, do convencer ao provar de uma forma lógica baseada nestas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva que se vê durante o início do percurso no ensino superior como uma luta com as abstracções formais como se elas dominassem a aprendizagem nesta fase inicial. É a transição da *coerência* da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através de deduções das definições formais.

O papel das definições

As definições podem causar problemas sérios na aprendizagem da matemática. Para Vinner (1991) elas representam o conflito entre a estrutura da matemática, tal como é concebida pelos matemáticos, e os processos cognitivos da aquisição do conceito. Para Vinner muitos dos livros de texto e aulas de matemática tem por base os seguintes pressupostos:

a) Os conceitos são principalmente adquiridos por meio das suas definições
b) Os alunos devem usar as definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessário do ponto de vista matemático
c) Definições devem ser mínimas, isto é, não devem conter partes que podem ser inferidas de outras partes de definições
d) É desejável que as definições sejam elegantes, é o caso da definição de módulo de x que fica mais elegante se se representar por |x|
e) Definições são arbitrárias. Definir corresponde a dar um nome e podem ser feitas várias formulações.

Vários trabalhos de investigação, Vinner (1983), Vinner e Dreyfus (1989), mostram que há um conflito cognitivo entre o *conceito definição* e o *conceito imagem* sendo desejável que seja o conceito imagem o primeiro a ser construído e a partir deste moldar então o conceito definição.

Dada a ênfase que é colocada na definição, nomeadamente em contextos de pensamento avançado, Vinner considera que devemos ter em conta algumas regras didácticas: a) evitar conflitos cognitivos com os alunos e b) iniciar os conflitos

cognitivos quando for necessário motivar os alunos para um estado intelectual mais elevado. (Isto deve ser feito apenas quando a possibilidade de alcançar um estado intelectual mais elevado seja razoavelmente alta).
Segundo Vinner uma das metas do ensino deve ser a mudança dos hábitos de pensamento do modo de vida de todos os dias para o modo técnico. Os conceitos matemáticos devem ser adquiridos pelo 1º modo devendo a formação dos conceitos começar com vários exemplos e contra exemplos pelo meio dos quais o conceito imagem poderá ser formado. No caso de os alunos estarem a entrar no estudo de conceitos mais avançados a definição deve ser introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas. Estas definições devem ser discutidas e os alunos treinados para as usar correctamente e apenas devem ser utilizadas se as tarefas não puderem ser resolvidas correctamente referindo-se somente aos conceitos imagem. Devem no entanto ser tidos em conta os conflitos entre o conceito imagem e a definição formal.

Segundo Carpenter e Lehrer (1999) para organizar uma aula que habilite os alunos a empenhar-se nestas actividades há pelo menos três dimensões do ensino que devem ser consideradas: *tarefas* ou actividades que ocupam os alunos e os problemas que eles resolvem, as *ferramentas* que representam as ideias matemáticas e situações de problemas matemáticos e as *práticas normativas*, que são os padrões reguladores da actividade matemática, acordadas pelo professor e alunos.

As tarefas

As aulas de matemática são muitas vezes planeadas com base na execução de tarefas pelos alunos. Estas tarefas podem ir desde simples exercícios práticos até situações complexas de resolução de problemas em contextos bastante ricos. Segundo Carpenter e Lehrer (1999) não são as próprias tarefas que determinam quando é que o aluno aprende com compreensão. As tarefas mais motivadoras podem ser simplesmente usadas para que os alunos sigam determinadas rotinas ou desenvolvam capacidades básicas de cálculo. No mesmo sentido Christiansen e Howson (1986) consideram que as tarefas sobre as quais os alunos trabalham não contêm em si quer os conceitos quer as estruturas matemáticas, de tal forma que uma determinada actividade sobre uma certa tarefa não garante a aprendizagem pretendida, pois a tarefa é interpretada sob a influência de vários factores (é interpretada e executada sobre a influência das atitudes e das concepções quer dos alunos quer do professor).

As investigações também podem ser consideradas tarefas de cunho muito aberto, Oliveira, Segurado e Ponte (1998), cuja resolução dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. Os alunos são devem ter acesso directo ao processo de resolução nem à solução ou soluções da questão que se deve apresentar como motivante e desafiadora.

Para que a compreensão se desenvolva de uma forma ampla e sólida as tarefas devem envolver os alunos com o propósito de criar compreensão e não apenas com o objectivo de completar a tarefa.

As ferramentas

As ferramentas são usadas para representar as ideias matemáticas e situações de problemas matemáticos. Elas são de vários tipos indo desde o papel e lápis até aos símbolos, passando pelos materiais manipuláveis, as calculadoras ou os computadores. Os problemas são resolvidos pela manipulação destas ferramentas seguindo certas regras e princípios. Por exemplo os algoritmos de cálculo envolvem a manipulação de símbolos para realizar vários cálculos aritméticos. As mesmas operações podem ser realizadas representando os números com fichas ou outros materiais manipuláveis desde que sejam apresentados de forma apropriada. As conexões com as formas representacionais que tenham significado intuitivo para os alunos podem ajudar estes a dar significado aos procedimentos simbólicos. As conexões entre símbolos, procedimentos simbólicos e os conceitos matemáticos subjacentes que eles representam nem sempre são evidentes. Como consequência, praticar procedimentos formais que envolvem símbolos abstractos em nada ajuda os alunos a ligar os símbolos ou procedimentos com qualquer coisa que deve dar-lhes significado. Uma das formas de resolver este dilema é ligar os passos cruciais dos procedimentos com símbolos abstractos com representações que lhe dêem significado. As representações podem ser introduzidas pelo professor ou construídas pelos alunos. Cada forma de representação proporciona oportunidades para desenvolver novo conhecimento matemático. Segundo Romberg e Kaput (1999) a manipulação das representações formais guiada sintacticamente é uma meta importante do ensino e se nós queremos que os alunos compreendam as representações que usam, devemos encorajá-los a reflectir explicitamente sobre as características destas representações que são vantajosas para compreender e comunicar sobre ideias matemáticas e resolução de problemas.

No pensamento matemático avançado as *notações* assumem um papel preponderante justamente por poderem ajudar na formação e aplicação de entidades mentais, podendo agir como substitutas das entidades conceptuais, suplantando a sua necessidade, Harel e Kaput (1991). Isto representa ao mesmo tempo um grande poder e um grande perigo na utilização de sistemas de notações. O grande poder reside no facto de as notações ajudarem o pensamento matemático baseado na sua identidade-manejamento (mais fácil manejamento mantendo a sua identidade) e na sua estrutura-substituição (estrutura mais simples pelo uso da notação). O grande perigo é que as notações não se referem a nenhum conteúdo mental além da experiência física da estrutura das próprias notações. Este parece ser o caso que acontece com muitos alunos. Enquanto os inventores das notações as criaram para exprimir e talvez elaborar as suas concepções prévias, na aula muitas vezes começamos pela ordem inversa, concentrando-nos na manipulação das notações (por ex. técnicas de diferenciação e integração) antes de providenciar experiências suficientes que possam permitir a construção de referentes mentais para estas construções. Aos alunos devem ser dadas oportunidades para construir as notações das suas próprias ideias, que podem assim ser guiadas na direcção das standard. Desta forma construímos ao mesmo tempo notações e concepções, em vez de construir primeiro uma ou a outra para depois tentar ligar as duas.

Os símbolos algébricos também podem apresentar significados diversos conforme o contexto em que eles são considerados. Eles dependem sobretudo do que nós estamos preparados para conhecer e somos capazes de perceber. Uma expressão como $3(2x-3)+2$ pode ter várias interpretações: um processo computacional (sequência de instruções), representação de um certo número, ou mesmo a representação de uma função. Este tipo de situações acontece muitas vezes em matemática: a mesma representação ou os mesmos conceitos matemáticos podem ser interpretados quer como processos quer como objectos, ou usando a linguagem utilizada por Sfard (1991) podem ser concebidos quer *operacionalmente* quer *estruturalmente*.

A distinção entre estes dois modelos de pensamento é delicada e nem sempre é fácil de fazer. Para Sfard (1994) a capacidade de perceber a matemática nesta dualidade transforma o universo das ideias abstractas em imagens do mundo material: tal como na vida real, as acções aqui realizadas têm as suas “matérias-primas” e os seus produtos na forma de entidades que são tratadas permanentemente como objectos genuínos. Ao contrário, na vida real, um olhar atento para estas entidades pode revelar que elas não podem ser separadas dos próprios processos como seres auto sustentados. Tais objectos abstractos como $(-1)^{1/2}$, -2 ou a função 3(x+5)+1 são o resultado de uma forma diferente de olhar para os procedimentos de extrair a raiz quadrada de –1, de subtrair 2, e de transformar os números reais neles próprios através de uma transformação linear, respectivamente. Assim, os objectos matemáticos são uma consequência da *reificação* – a habilidade dos nossos olhos mentais de visionar o resultado de processos como entidades permanentes no seu direito próprio.

Práticas normativas

As normas de uma sala de aula determinam a forma como se espera que os alunos e o professor respondam a uma determinada situação particular. As práticas normativas formam a base de como as tarefas e as ferramentas são usadas para aprender, e governam a natureza dos argumentos que os professores e alunos usam para justificar as suas conjecturas e conclusões matemáticas.

Embora a selecção de tarefas apropriadas e ferramentas possa facilitar o desenvolvimento da compreensão, as práticas normativas da aula determinam quando deverão ser usadas para aquele propósito. Nas salas de aula que promovem compreensão, as normas indicam que as tarefas são vistas como problemas para ser resolvidos, e não como exercícios para serem completados usando procedimentos específicos. Aprender é visto como resolução de problemas em vez de ensino e prática. Os alunos apelam ao conhecimento existente em vez de assimilar factos e procedimentos. As ferramentas dever ser percebidas como meios de resolver problemas com compreensão e como um meio de comunicar estratégias de resolução de problemas. As aulas são comunidades de discurso onde todos os alunos discutem estratégias alternativas ou diferentes formas de ver ideias matemáticas importantes. Os alunos esperam que o professor e os seus pares possam querer explicações sobre porquê é que as suas conjecturas e conclusões fazem sentido ou porquê é que o procedimento que eles usaram é válido para um dado problema. Desta forma a matemática permanece uma linguagem para pensar em vez de uma mera colecção de formas de obter respostas.

Em resumo podemos dizer que para podermos proporcionar uma aprendizagem de conceitos matemáticos avançados com compreensão teremos que colocar os alunos em contextos onde seja possível sustentar o crescimento cognitivo, conduzindo-os à elaboração de um pensamento matemático com significado onde os conceitos mais abstractos são o resultado de uma construção por parte dos alunos. Estes contextos devem ser baseados em sequências de aprendizagem de dificuldade progressiva, integrando a resolução de problemas como uma actividade de rotina e proporcionando aos alunos uma abordagem cada vez mais formal dos conceitos sem que estes percam o seu significado e características básicas.

Referências

Alibert, D. e Thomas, M. (1991). Research on Mathematical proof. Em David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer.

Carpenter, T. P. e Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. Em Elizabeth Fennema e Thomas A. Romberg (Ed.), *Mathematics Classrooms That Promote Understandig* (pp. 19-32). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Christiansen, B., Howson, A. G. e Otte, M. (1986). *Perspectives on Mathematics Education. Papers submitted by members of the Bacomet Group*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. Em David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G. e Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. Em David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 82-94). Dordrecht: Kluwer.

Herscovics, N. e Bergeron, J. C. (1984). A constructivist vs formalist approach in the teaching of mathematics. Em B. Southwell e outros (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference of PME* (pp. 190-196). Sydney: University of Sydney.

Hiebert, J. e Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Em Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). , *Thinking Mathematically* . London: Addison Wesley.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I. e Ponte, J. P. (1998). Tarefas de investigação em matemática: histórias da sala de aula. Em Secção Educação Matemática da SPCE (Ed.), *Desenvolvimento Curricular em Matemática* (pp. 107-125). Portalegre.

Romberg, T. A. e Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. Em Elizabeth Fennema e Thomas A. Romberg (Ed.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 3-17). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. Em David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em David Tall (Ed.), *Advances Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Vinner, S. e Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 356-366.